Théorème 5. Si G est un ensemble linéaire fermé tel que toute fonctionelle linéaire $f(x)$ égale à 0 pour tout x de G est égale à 0 pour tout x, alors

$$G \equiv E.$$

Théorème 6. Soit W un ensemble arbitraire $\subset E$ et y_0 un élément qui n'y appartient pas. La condition nécéssaire et suffisante pour l'existence d'une suite $\{w_n\} \subset W$, remplissant les relations

$$1^\circ \quad w_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^{(n)} x_i \qquad (x_i \subset W)$$

$$2^\circ \quad \lim_{n\to\infty} w_n = y_0,$$

est que l'on ait $f(y_0)=0$, pour toute fonctionelle linéaire $f(x)$ définie dans E et identiquement nulle dans W.

Démonstration. On l'obtient aisément à l'aide du théorème 4 appliqué à l'ensemble linéaire G formé par tous les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$ ($x_i \subset W$, α_i nombres réels).

(Reçu par la Rédaction le 28. IV. 1929).

Remarque sur les fonctionnelles linéaires dans les champs L^p.

par

S. SAKS (Varsovie).

§ 1. L^p $(p>1)$ désignera dans cette note l'espace linéaire dont les éléments sont des suites $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ telles que $\sum_n |x_n|^p$ converge. On entend par *norme* d'un élément (vecteur) $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ de cet espace le nombre

$$\|X\| = \left[\sum_n |x_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $U(X)$ une fonctionnelle linéaire définie dans L^p et faisant correspondre à chaque élément X de L^p un élément Y appartenant au même espace. On sait qu'en posant $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$,

$$(1) \qquad Y = U(X)$$

s'exprime par une substitution linéaire de la forme

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

Le *tableau* de coëfficients a_{ik} donnant lieu à une relation fonctionnelle linéaire (1) dans l'espace L^p, s'appelle *borné de rang p*. On sait que, si le tableau (a_{ik}) est borné de rang p, le tableau *transposé* (a_{ki}) est borné de rang q, p et q étant liés par la relation connue $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $U(X)$ étant une fonctionnelle correspondant au tableau (a_{ik}), on désignera par $U^*(X)$ la fonctionnelle attachée au tableau transposé et définie dans l'espace L^q; elle est appelée *transposée* de $U(X)$ [1]). $U(X)$ étant une fonction-

[1]) Pour tout cela consulter: F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, 1913. (Chap. III, IV.).

nelle linéaire dans L^p, il s'ensuit d'un théorème connu de M. F. Riesz[2]) que, si un nombre positif M existe, tel que

$$\| U^*(X) \| \geqslant \frac{\|X\|}{M}$$

ait lieu pour tout élément $X \leqslant L^q$ $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$, l'équation

$$U(X) = Y$$

admet une solution $X \in L^p$ pour chaque vecteur $Y \in L^p$. Le but de la note présente est de prouver la réciproque de ce théorème; plus précisément, nous démontrerons la proposition suivante.

Théorème. *$U(X)$ étant une fonctionnelle linéaire dans l'espace L^p, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(A) $U(L^p) = L^p$, [3])

(B) $U(L^p)$ est un ensemble de deuxième catégorie (au sens de Baire),

(C) il existe un nombre positif M tel que l'inégalité

$$\| U^*(X) \| \geqslant \frac{\|X\|}{M}$$

ait lieu pour chaque vecteur X de $L^{\frac{p}{p-1}}$.

On énonce *mutatis mutandis*, une proposition analogue pour les champs de fonctions sommables de puissance $p\,(>1)$. [4])

La démonstration de notre théorème sera basée sur le lemme suivant qui est valable d'ailleurs pour des espaces linéaires généraux et pour des fonctionnelles distributives (non-nécessairement continues).

§ 2. Lemme. Si $F(X)$ désigne une fonctionnelle distributive, définie dans un espace linéaire E et faisant correspondre aux éléments de E des éléments du même espace, et si $F(E)$ est un ensemble de 2e catégorie, il existe un ensemble E' partout dense dans E et un nombre positif M tels que, pour chaque élément $Y \in E'$, il y a un élément $X \in E$ de manière que

$$U(X) = Y \text{ et } \|Y\| \geqslant \frac{\|X\|}{M}. \tag{2}$$

[2]) l. c. [1]) p. 59.

[3]) U désignant une fonctionnelle dans l'espace E et A un ensemble contenu dans E, $U(A)$ désigne l'ensemble de tous les éléments $U(X)$ tels que $X \in A$.

[4]) Cf. F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann., t. 69, (1910).

Démonstration. Soit K_n l'ensemble des éléments $X \in E$ tels que

$$\|X\| \leqslant n.$$

On a:

$$F(E) = \sum_n F(K_n).$$

$F(E)$ étant, par hypothèse, de 2e catégorie, l'un au moins des ensembles $F(K_n)$, soit $F(K_N)$, l'est aussi; il existe, par suite, dans E une sphère S_0, de centre Y_0 et de rayon $r > 0$, où l'ensemble $F(K_N)$ est partout dense. On peut supposer évidemment que Y_0 appartient à $F(K_N)$, c.-à.-d. qu'il y a un élément X_0 pour lequel

$$F(X_0) = Y_0 \text{ et } \|X_0\| \leqslant N. \tag{3}$$

Comme, en général, à tout élément $Y \in F(K_N)$ correspond un X tel que

$$F(X) = Y \text{ et } \|X\| \leqslant N,$$

il s'en suit, en vertu de (3), que, pour chaque élément Y d'un ensemble partout dense dans S_0, il y a un élément X tel que

$$F(X - X_0) = Y - Y_0 \text{ et } \|X - X_0\| \leqslant 2N.$$

En remplaçant dans cette relation $Y - Y_0$ par Y et $X - X_0$ par X, on voit de suite, que, pour chaque élément Y d'un certain ensemble P partout dense dans la sphère de centre 0 et de rayon r (égal à celui de S_0), il existe un X tel que

$$F(X) = Y \text{ et } \|X\| \leqslant 2N. \tag{4}$$

En désignant maintenant par E' l'ensemble de tous les éléments Y tels que $\frac{r \cdot Y}{\|Y\|}$ appartienne à P, on voit que E' est partout dense dans E et que, en vertu de (4), à chaque élément $Y \in E'$ correspond un élément X pour lequel

$$F(X) = Y \text{ et } \|Y\| = \|F(X)\| \geqslant \frac{r}{2N} \cdot \|X\|.$$

§ 3. La proposition du § 1 est une conséquence facile du lemme précédent. En vertu du théorème de M. F. Riesz que nous venons de rappeler, il suffit de prouver seulement que la condition (B) implique la condition (C).

Soit, à cet effet, $U(X)$ une fonctionnelle linéaire dans l'espace L^p $(p > 1)$ et soit (a_{ik}) le tableau de coëfficients qui y correspond.

La condition (B) remplie, il existe, d'après notre lemme, un nombre positif M et un ensemble R partout dense dans L^p tel qu'à chaque $Y \in R$ correspond un élément X de manière que les relations (2) soient vérifiées.

Attachons maintenant à chaque élément $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ de L^p l'élément $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$ de $L^{\frac{p}{p-1}}$ tel que

$$|z_i| = |y_i|^{p-1} \text{ et } \operatorname{sgn} z_i = \operatorname{sgn} y_i \qquad (i = 1, 2, \dots). \tag{5}$$

La correspondance ainsi établie est évidemment biunivoque et bicontinue; elle transforme, par suite, R en un ensemble R^* partout dense dans $L^{\frac{p}{p-1}}$.

Soient $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in R^*$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in R$ deux éléments homologues de cette correspondance et soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ un élément de L^p attaché à Y de manière à vérifier les conditions (2).

On a donc

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \dots),$$

d'où, en vertu de (5),

$$|y_i|^p = \sum_k a_{ik} x_k z_i \qquad (i = 1, 2, \dots),$$

et, par l'inégalité de M. Hölder,

$$\|Y\|^p \leqslant \left[\sum_k \left|\sum_i a_{ik} z_i\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left[\sum_k |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \|U^*(Z)\| . \|X\|;$$

en tenant compte de la deuxième des relations (2), on en déduit l'inégalité

$$\|U^*(Z)\| \geqslant \frac{\|Y\|^{p-1}}{M} = \frac{\|Z\|}{M}$$

valable pour tout point $Z \in R^*$. Or, l'ensemble R^* étant partout dense dans $L^{\frac{p}{p-1}}$, cette inégalité s'étend, en raison de la continuité de la fonctionnelle U^*, à tout l'espace. Notre théorème est ainsi établi.

§ 4. $U(X)$ désignant une fonctionnelle linéaire dans l'espace hilbertien H, il faut et il suffit pour qu'elle admette une réciproque à droite, qu'il existe un nombre positif M tel que l'inégalité

$$\|U^*(X)\| \geqslant \frac{\|X\|}{M}$$

ait lieu pour tout $X \in H$. Il s'ensuit de ce théorème dû à M. Toeplitz[5]), en vertu de la proposition que nous venons de prouver que, *pour qu'il existe une réciproque à droite*[6]) *de la fonctionnelle linéaire $U(X)$ dans l'espace hilbertien, il faut et il suffit que l'équation $U(X) = Y$ admette une solution en X pour chaque vecteur Y de cet espace.* Il paraît que la proposition analogue pour des espaces généraux L^p $(p > 1)$ n'est pas encore connue.[7])

§ 5. Nous terminerons cette note en indiquant encore une autre application du lemme du § 2.

Théorème. *$U(X)$ désignant une fonctionnelle linéaire et complètement continue*[8]) *dans un espace linéaire E, l'ensemble $U(E)$ est un ensemble compact*[9]) *dans E, ou bien il est de première catégorie dans E.*[10])

Démonstration. En effet, $U(E)$ étant de 2^e catégorie dans E, il existe, en vertu de notre lemme, un nombre positif M et un ensemble E' partout dense dans E tels qu'à chaque élément $Y \in E'$ correspond un élément X de manière que

$$Y = U(X) \text{ et } \|X\| \leqslant M\|Y\|. \tag{6}$$

Soit $\{Y_n\}$ une suite quelconque bornée d'éléments de E'. En vertu de (6) il y correspond une suite bornée $\{X_n\}$ telle que

$$Y_n = U(X_n).$$

---

[5]) Toeplitz. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1907, pp. 101—109. Hilb, Sitzgsb. d Phys.-Med. Soz. Erlangen, 40, (1908), pp. 84—89. Hellinger-Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekanten, 1928, pp. 1430—1431. F. Riesz, l. c.[1]), pp. 89—94.

[6]) U étant une fonctionnelle linéaire, une autre fonctionnelle linéaire V s'appelle *sa réciproque à droite*, resp. *à gauche (hintere, vordere Reziproke)* lorsque $UV = 1$, resp. $VU = 1$ (cf. Hellinger-Toeplitz, l. c.[5]), pp. 1428—1429).

[7]) cependant, M. Banach a prouvé le théorème suivant qui est valable pour *tout* espace linéaire complet: si l'équation $U(X) = Y$ admet pour chaque vecteur Y une seule solution en X, la fonctionnelle U possède la réciproque complète U^{-1}.

[8]) une fonctionnelle linéaire $U(X)$ est dite *complètement continue* lorsqu'elle transforme chaque ensemble borné en un ensemble compact; voir: F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math., t. 41, (1917), p. 74.

[9]) nous employons ici le terme „compact" dans un sens un peu différent de celui qui lui est attribué habituellement; on appelle ordinairement un ensemble *compact* si chaque son sous-ensemble infini admet de points limites; cependant, nous dirons dans le texte qu'un ensemble est compact si chacun de ses sous-ensembles infinis et bornés possède de tels points.

[10]) on peut, d'ailleurs, montrer que $U(E)$ est compact dans E, ou bien de première catégorie sur lui-même.

En raison de la continuité complète de la fonctionelle U, on peut donc extraire de $\{Y_n\}$ une suite partielle convergeante. L'ensemble E' est donc compact, et comme il est partout dense dans l'espace E, E est aussi compact.[11])

(Reçu par la Rédaction le 4. V. 1929).

[11]) l'énoncé que nous venons d'établir, étend le fait bien connu que l'équation de Fredholm de 1^e éspèce n'est pas, en général, résoluble. D'ailleurs, dans le cas où l'espace E est l'espace hilbertien, notre énoncé découle du théorème connu de MM. Picard-Schmidt sur l'équation intégrale de 1^{re} éspèce, ce théorème s'étendant sans modifications à toute équation de la forme $U(X)=Y$, où U désigne une fonctionnelle linéaire complètement continue dans l'espace de Hilbert. (Voir, p. ex., Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales, 1912. (Chap. IV)).

Sur les fonctionnelles linéaires II*)

par

S. BANACH (Lwów).

§ 1.

Soient $\{\sigma_n\}$ $(\sigma_1=1)$ une suite numérique à termes positifs croissants indéfiniment et $\{a_n\}$ une suite des éléments telle que $\|a_n\|\leqslant 1$ $(n=1,2,3,\ldots)$. $f(x)$ étant une fonctionnelle linéaire nous désignerons, dans ce qui va suivre, par $\|f\|^*$, le plus petit nombre positif K, pour lequel

$$|f(a_n)|\leqslant K\sigma_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Nous dirons que $\|f\|^*$ est la norme de f relative aux suites $\{\sigma_n\}$, $\{a_n\}$.

On a évidemment

1° $\|f\|^*\geqslant 0$

2° $\|\alpha f\|^*=|\alpha|\,.\,\|f\|^*$ $\qquad (\alpha$ réel)

3° $\|f+\varphi\|^*\leqslant\|f\|^*+\|\varphi\|^*$

4° $\|f\|^*\leqslant\|f\|$.

De même, $z=\{\zeta_n\}$ étant une suite bornée des nombres réels, nous désignerons par $\|z\|^*$ le plus petit nombre K pour lequel $|\zeta_n|\leqslant K\sigma_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Dans ce qui va suivre nous supposons toujours, que l'ensemble des elements E est véctoriel, normé et complet [10]).

Lemme 1. Soit L un ensemble linéaire[1]) des fonctionnelles linéaires. Supposons qu'à chaque fonctionnelle de L corresponde un nombre $A(f)$ remplissant les relations:

*) Voir S. Banach. Sur les fonctionelles linéaires. Stud. math. I (1929), p. 211—216. Cette communication sera citée dans la suite comme „I".

[1]) Un ensemble L de fonctionnelles linéaires est dit *linéaire* lorsqu'il contient toute combinaison linéaire à coefficients réels de deux quelconques de ses fonctionnelles.