Sur les fonctionelles linéaires

par

S. BANACH (Lwów).

Introduction.

Soit E un ensemble vectoriel[1]) normé. Dans ce qui va suivre nous désignerons par $x, y, z, \dots$ des éléments de E et par $a, b, c, \dots$ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ des nombres réels.

Un ensemble $G (\subset E)$ sera dit linéaire lorsqu'il contient toute combinaison linéaire $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ de deux quelconques de ses éléments x_1, x_2. On définit une fonctionelle $f(x)$ dans G, en faisant correspondre à chaque élément x de G un nombre réel $\xi = f(x)$. Nous dirons que la fonctionelle $f(x)$ est linéaire si

1° elle est additive, c'est à dire $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ pour tout $x_1 \subset G$, $x_2 \subset G$,

2° elle est continue, c'est à dire que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ $(x_n \subset G, x \subset G)$ entraîne toujours $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$.

On prouve aisément qu'il existe alors un nombre $M > 0$, de sorte que

$$|f(x)| \leqslant M \|x\|$$

pour tout $x \subset G$. Le plus petit possible des nombres M est dit la *norme* de $f(x)$ dans G. Nous la désignons par $\|f\|_G$ ou bien simplement par $\|f\|$ si $G = E$. On a donc

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_G \cdot \|x\|. \qquad (x \subset G)$$

---

[1]) L'ensemble E est dit *vectoriel* lorsque pour ses éléments sont définies les opérations d'addition et de multiplication par un nombre réel, conformément aux règles d'algèbre. Un ensemble vectoriel est dit *normé* lorsqu' à tout son élément x est attribué un nombre réel, désigné par $\|x\|$ — la *norme* de cet élément —, de manière que: 1° $\|x\| > 0$ pour tout $x \neq \Theta$; $\|\Theta\| = 0$, le symbole Θ désignant l'élément *nul* (module d'addition), 2° $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ pour tout α réel, 3° $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$. La suite $\{x_n\}$ des éléments d'un ensemble vectoriel normé est, par définition, *convergente* vers l'élément x lorsque $\lim \|x_n - x\| = 0$. — Pour une exposition détaillée voir S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. III (1922), p. 133.

§ 1.

Théorème 1. Soit G un ensemble linéaire et y_0 un élément d' E non contenu dans G. Nous désignons par G' l'ensemble formé par tous les $x+\alpha y_0$ ($x \subset G, \alpha$ réel), évidemment linéaire et contenant G. Soit $f(x)$ une fonctionelle linéaire définie dans G. Il existe alors une fonctionelle linéaire $\varphi(x)$ définie dans G', telle que

$$1^\circ \quad \varphi(x)=f(x) \qquad (x \subset G)$$
$$2^\circ \quad \|\varphi\|_{G'}=\|f\|_G.$$

D é m o n s t r a t i o n. On peut évidemment supposer que $\|f\|_G=1$. On a, pour $x_1 \subset G$, $x_2 \subset G$,

$$f(x_2-x_1) \leqslant \|x_2-x_1\| = \|x_2+y_0-y_0-x_1\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_2+y_0\|+\|x_1+y_0\|,$$

donc

$$(1) \qquad -\|x_1+y_0\|-f(x_1) \leqslant \|x_2+y_0\|-f(x_2).$$

Soit m la borne supérieure des nombres $-\|x_1+y_0\|-f(x_1)$ et M la borne inférieure des nombres $\|x_2+y_0\|-f(x_2)$. Les nombres m, M sont finis en vertu de (1) et on a $m \leqslant M$. Soit λ un nombre, satisfaisant à l'inégalité

$$(2) \qquad m \leqslant \lambda \leqslant M,$$

d'ailleurs quelconque.

Nous posons par définition

$$\varphi(x+\alpha y_0)=f(x)+\alpha\lambda. \qquad (x \subset G,\ \alpha \text{ réel})$$

On voit aisément que la fonctionelle $\varphi(z)$, ainsi définie [2]) dans G', est additive et que $\varphi(z)=f(z)$ ($z \subset G$). On a pour $\alpha \neq 0$ (en vertu de (1), (2)):

$$-\left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|-f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqslant \lambda \leqslant \left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|-f\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

d'où

$$\left|f\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\lambda\right| \leqslant \left\|\frac{x}{\alpha}+y_0\right\|,$$

ou bien

$$|f(x+\alpha\lambda)| \leqslant \|x+\alpha\lambda\|,$$

c'est à dire

$$|\varphi(z)| \leqslant \|z\|. \qquad (z \subset G')$$

[2]) L'élément y_0 n'appartenant pas à G, un élément z de G' n'admet qu'une seule représentation $z=x+\alpha y_0$. La définition de $\varphi(z)$ est donc univoque.

On a donc:

$$\|\varphi\|_{G'}=1=\|f\|_G.$$

Théorème 2. G étant un ensemble linéaire et $f(x)$ une fonctionelle linéaire définie dans G, il existe une fonctionelle linéaire $\varphi(x)$, définie dans E, telle que

$$\varphi(x)=f(x) \qquad (x \subset G)$$
$$\|\varphi\|=\|f\|_G.$$

D é m o n s t r a t i o n. On prouve ce théorème par induction transfinie en appliquant succesivement le théorème 1 aux éléments de l'ensemble $E-G$ (supposé bien ordonné).

R e m a r q u e. A l'aide du théorème ci-dessus on peut définir dans chaque ensemble vectoriel normé une fonctionelle linéaire non identiquement nulle.

Soit en effet $x_0 \neq \Theta$ un élément d'E. Les éléments αx_0 forment un ensemble linéaire G. Posons $f(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|$. C'est une fonctionelle linéaire, définie dans G, dont la norme $\|f\|_G=1$. En vertu du Th. 2. il existe donc une fonctionelle $\varphi(x)$, définie dans E, telle que $\varphi(x_0)=\|x_0\|$ et $\|\varphi\|=1$.

§ 2.

Théorème 3. Soient $\{x_n\}$ une suite des éléments de E, $\{c_n\}$ une suite numérique et M un nombre positif. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonctionelle linéaire $f(x)$, remplissant les relations

$$1^\circ \quad f(x_n)=c_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$
$$2^\circ \quad \|f\| \leqslant M,$$

est que l'on ait l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{r}\lambda_i c_i\right| \leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i\right\|$$

pour tout système fini des nombres réels λ_i. [3])

[3]) Ce théorème a été démontré pour certains ensembles particuliers par M. F. Riesz (Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Mathem. Annalen 69 (1910), p. 449; Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Gauthier-Villars, 1913) et dans quelques cas plus généraux par M. Helly (Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, IIa, 121 (1912), p. 265.) Notre démonstration est très simple et ne suppose sur l'ensemble E que ce qui est dit dans l'Introduction. Notamment nous ne supposons pas que l'ensemble E soit complèt ou séparable.

Démonstration. *La condition est nécessaire.* En effet, si $f(x)$ existe, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i .$$

D'autre part,

$$\left| f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right) \right| \leqslant \| f \| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \right\| ,$$

ce qui donne (1) en vertu de 1° et 2°.

La condition est suffisante. Désignons par G l'ensemble linéaire formé par tous les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$. Définissons une fonctionelle $\varphi(x)$ de la manière suivante[4]:

Si $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$, posons

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i .$$

On a, en vertu de (1),

$$| \varphi(x) | \leqslant M \| x \| ,$$

$\varphi(x)$ est donc une fonctionelle linéaire définie dans G et $\|\varphi\|_G \leqslant M$. Par conséquent, il existe, d'après le Th. 2., une fonctionelle linéaire $f(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées.

Remarque. On peut formuler ce théorème d'une manière plus générale que voici:

$\varphi(x)$ étant une fonctionelle définie dans l'ensemble W (linéaire ou non), la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonctionelle linéaire, définie dans E, et remplissant les relations

1° $f(x) = \varphi(x)$ $\qquad (x \subset W)$
2° $\| f \| \leqslant M$,

M étant un nombre positif donné, est que l'on ait

$$\left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi(x_i) \right| \leqslant M \left\| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \right\| ,$$

quel que soit le système des r éléments x_i de W, le système des r nombres réels λ_i et l'entier positif r.

[4]) Cette définition est univoque, comme il resulte aisément du § 1.

Théorème 4. *G étant un ensemble linéaire et y_0 un élément, dont la distance à G est $d > 0$, il existe une fonctionelle linéaire $f(x)$, définie dans E, remplissant les équations*

1° $f(x) = 0$ $\qquad (x \subset G)$
2° $f(y_0) = 1$
3° $\| f \| = \frac{1}{d}$.

Démonstration. Désignons par G' l'ensemble linéaire formé par les éléments $z = x + \alpha y_0$ ($x \subset G$, α réel). Posons dans G':

$$\varphi(z) = \alpha . \tag{2}$$

On a pour $\alpha \neq 0$:

$$\| z \| = \| x + \alpha y_0 \| = | \alpha | \left\| \frac{1}{\alpha} x + y_0 \right\| .$$

Comme l'élément $\frac{1}{\alpha} x$ appartient à G, on a par l'hypothèse

$$\| z \| \geqslant | \alpha | . d ,$$

donc, en vertu de (2),

$$| \varphi(z) | \leqslant \frac{1}{d} \| z \|$$

et

$$\| \varphi \|_{G'} \leqslant \frac{1}{d} . \tag{3}$$

On a, par définition,

$$\varphi(x + y_0) = 1 , \qquad (x \subset G)$$

donc, en vertu de (3),

$$1 \leqslant \| \varphi \|_{G'} . \| x + y \| \leqslant \frac{1}{d} \| x + y \| . \tag{4}$$

La distance de y_0 et G étant d, il existe dans G une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n + y_0 \| = d .$$

L'inégalité (4), appliquée à cette suite, donne

$$1 \leqslant \| \varphi \|_{G'} . d \leqslant 1$$

ou

$$\| \varphi \|_{G'} = \frac{1}{d} .$$

D'après le Th. 2 il existe donc une fonctionelle satisfaisant aux conditions demandées.

Théorème 5. Si G est un ensemble linéaire fermé tel que toute fonctionelle linéaire $f(x)$ égale à 0 pour tout x de G est égale à 0 pour tout x, alors

$$G \equiv E.$$

Théorème 6. Soit W un ensemble arbitraire $\subset E$ et y_0 un élément qui n'y appartient pas. La condition nécéssaire et suffisante pour l'existence d'une suite $\{w_n\} \subset W$, remplissant les relations

$$1^\circ \quad w_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^{(n)} x_i \qquad (x_i \subset W)$$

$$2^\circ \quad \lim_{n \to \infty} w_n = y_0,$$

est que l'on ait $f(y_0) = 0$, pour toute fonctionelle linéaire $f(x)$ définie dans E et identiquement nulle dans W.

Démonstration. On l'obtient aisément à l'aide du théorème 4 appliqué à l'ensemble linéaire G formé par tous les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$ ($x_i \subset W$, α_i nombres réels).

(Reçu par la Rédaction le 28. IV. 1929).

Remarque sur les fonctionnelles linéaires dans les champs L^p.

par

S. SAKS (Varsovie).

§ 1. L^p $(p > 1)$ désignera dans cette note l'espace linéaire dont les éléments sont des suites $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ telles que $\sum_n' |x_n|^p$ converge. On entend par *norme* d'un élément (vecteur) $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ de cet espace le nombre

$$\|X\| = \left[\sum_n' |x_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $U(X)$ une fonctionnelle linéaire définie dans L^p et faisant correspondre à chaque élément X de L^p un élément Y appartenant au même espace. On sait qu'en posant $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$,

$$(1) \qquad Y = U(X)$$

s'exprime par une substitution linéaire de la forme

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Le *tableau* de coëfficients a_{ik} donnant lieu à une relation fonctionnelle linéaire (1) dans l'espace L^p, s'appelle *borné de rang p*. On sait que, si le tableau (a_{ik}) est borné de rang p, le tableau *transposé* (a_{ki}) est borné de rang q, p et q étant liés par la relation connue $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $U(X)$ étant une fonctionnelle correspondant au tableau (a_{ik}), on désignera par $U^*(X)$ la fonctionnelle attachée au tableau transposé et définie dans l'espace L^q; elle est appelée *transposée* de $U(X)$[1]. $U(X)$ étant une fonction-

[1]) Pour tout cela consulter: F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, 1913. (Chap. III, IV.).