Le théorème I′ fait partie de la Note de M. **Banach** pour le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$ et où la biorthogonalité se réduit à l'orthogonalité.

Quand on considère les développements orthogonaux et on suppose en outre que les suites $\{\varphi_n\}$ et $\{\overline{\varphi}_n\}$ sont identiques, on tombe sur des problèmes considérés par M. **Orlicz** dans un travail récent[6]); on y trouve des relations entre les classes de suites $\{\lambda_k\}$ correspondants aux champs différents.

On peut poser la question, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite $\{\lambda_n\}$ transforme un développement d'une fonction appartenant à un champ (p. e. à celui des fonctions sommables) en un développement d'une fonction appartenant à un autre champ (p. e. à celui des fonctions continues): on obtient des théorèmes tout à fait analogues à ceux qui ont été démontrés tout à l'heure. Les champs mentionnés ici à titre d'exemple ne prêtent à aucune difficulté, car c'est seulement le premier (qui sert de domaine à la fonctionelle) qui est constitué par des fonctions sommables; il serait différent — selon une remarque faite plus haut — si c'était le second.

[6]) Ces Studia, I (1929), pp. 1—39, spécialement le § 3 (pp. 18—26).

(Reçu par la Rédaction le 13. II. 1929).

Sur l'application de la méthode des approximations successives dans la théorie des équations différentielles

par

W. NIKLIBORC (Lwów).

Nous allons faire dans cette note[1]) quelques remarques sur l'application de la méthode des approximations successives à la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires. Nous nous bornerons au cas d'une seule équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en remarquant toutefois, que tous les résultats sout aussi valables pour un système.

Supposons, que $f(x, y)$ est **continue** dans un domaine fermé (D) et soit (x_0, y_0) un point de (D). Pour simplifier l'écriture posons, sans restreindre la généralité $x_0 = y_0 = 0$. Dans le problème de Cauchy, il s'agit de trouver une fonction $y = y(x)$, satisfaisant à l'équation (1) dans un intervalle $[-\delta_1, \delta_2]$, $0 \leqslant \delta_1$, $0 \leqslant \delta_2$, $\delta_1 + \delta_2 > 0$ et en outre à la condition initiale $y(0) = 0$.

On sait, que si le point $(0, 0)$ est à l'intérieur de (D), alors

1° au moins une solution du problème existe[2]), et

[1]) Cette note était l'objet de ma conférence au I-er Congrès mathém. polon. (septembre 1927). Des circonstances indépendantes de l'auteur en ont empêché la publication jusqu'à présent.

[2]) C'est M. **Peano**, qui a démontré pour la première fois le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles en supposant seulement la continuité de $f(x, y)$: Math. Annalen T. 37 (1890), p. 182—228. Citons encore parmis les autres travaux consacrés à ce sujet: P. **Montel**: Sur les suites infinies de fonctions, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (3), T. 24 (1907), p. 233—334 (264 et suiv.); W. **Osgood**: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung, Monathshefte f. Math. u. Phys. T. 9 (1898), p. 331—345;

2° la solution n'est pas nécéssairement unique[3]).

On ne peut démontrer le théorème de Cauchy dans toute sa généralité par la méthode des approximations successives[4]), que si l'on suppose, que la fonction $f(x,y)$ satisfait à quelques autres hypothèses additionelles. M. Picard[5]), qui a le premier appliqué cette méthode dans beaucoup des questions d'analyse, suppose que la fonction $f(x,y)$, étant continue, satisfait encore dans un voisinage du point $(0,0)$ à l'inégalité

$$|f(x,y'')-f(x,y')|\leqq K.|y''-y'|,$$

(dite „condition de Lipschitz"). M. Rosenblatt[6]) a démontré par la méthode des approximations successives le théorème de Cauchy en supposant, que la fonction $f(x,y)$ satisfait à une condition plus faible

$$|f(x,y'')-f(x,y')|\leqq \frac{K}{x^m}\cdot|y''-y'|,$$

avec $K>0$, $1>m>0$, $x>0$. Il a aussi démontré, que les approximations convergent, si l'on suppose la condition

$$|f(x,y'')-f(x,y')|\leqq \frac{K}{x}\,|y''-y'|,$$

avec $K<1$. Enfin M. M. Müller[7]) suppose plus généralement que l'on a

$$|f(x,y'')-f(x,y')|\leqq K(x).|y''-y'|,$$

en désignant par $K(x)$ une fonction nonnégative, et démontre

O. Perron: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, Math. Ann. T. 78 (1915), p. 378—384. C. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, (Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1918), p. 672 et suiv., Wład. Nikliborc: Nowy dowód twierdzenia o istnieniu całek równań różniczkowych zwyczajnych, Wiadomości Matemat. T. 29 (1926), p. 39—45. M. Müller: Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math. Zeitschr. T. 26 (1927), p. 617—645. Je dois remarquer, que la démonstration de M. Müller, du théorème de Cauchy (l. c. p. 634—636) n'est que légèrement différente de la mienne.

[3]) Peano, l. c. [2]).

[4]) Cf. M. Müller l. c. sous [2]) p. 628—629. M. Müller donne un exemple simple, où les approximations successives divergent, et de plus, aucune des suites partielles ne converge vers l'intégrale de l'équation.

[5]) Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, Journal de mathématiques pures et appliquées (4) T. 6 (1890), p. 145—210 et partic. 197—200. Cf. aussi des Cours d'Analyse.

[6]) Über die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen, Arkiv for Math. Astr. och Physik T. 5 (1909) Nr. 2, p. 1—4.

[7]) L. c.[2]) p. 627 Les théorèmes de M. Rosenblatt sont des cas particuliers du théorème de M. Müller.

que, si l'intégrale $\int_0^x K(s)\,ds$ existe, alors les approximations convergent.

Je démontre dans cette note la convergence des approximations successives sous des conditions plus larges que celles de Lipschitz, mais d'un autre genre que celles de M. Müller[8]).

---

§ 1. $f(x,y)$ soit continue dans le domaine

$$|x|\leqq a,\quad |y|\leqq b. \tag{2}$$

Pour établir l'existence de l'intégrale de (1), satisfaisant à la condition initiale, on pose

$$y_1(x)=\int_0^x f[s,0]\,ds$$

$$y_n(x)=\int_0^x f[s,y_{n-1}(s)]\,ds. \qquad (n>1).$$

On démontre dans les Cours d'Analyse, que les fonctions $y_n(x)$ sont parfaitement définies dans l'intervalle $[-\delta,+\delta]$,

$$\delta=\mathrm{Min}\left(a,\ \frac{b}{M}\right),$$

M étant le maximum de $|f(x,y)|$ dans (2). Pour établir ce point, il suffit de supposer que $f(x\ y)$ est continue.

Il est de même facile à voir (en supposant seulement la continuité de $f(x,y)$.) que, si les approximations $y_n(x)$ convergent, leur limite $y(x)$ est une solution du problème proposé[9]). En effet: si la suite $\{y_n(x)\}$ converge, alors la suite $\{f[x,y_n(x)]\}$ converge aussi et, comme toutes les fonctions $f[x,y_n(x)]$ sont bornées dans leur ensemble, on a, d'après le théorème de M. Lebesgue,

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^x f[s,y_n(s)]\,ds=\int_0^x \lim_{n\to\infty} f[s,y_n(s)]\,ds=$$

$$=\int_0^x f[s,y(s)]\,ds.$$

[8]) Je dois d'ailleurs remarquer ici, que le mémoire de M. Müller a paru après ma conférence.

[9]) Cf. Müller, l. c. p. 621, où l'on trouve un théorème un peu plus général.

Il suit de la relation $y(x) = \int_0^x f[s, y(s)]\, ds$, que $y(x)$, comme intégrale d'une fonction mesurable, est continue; la fonction $f[x, y(x)]$ est donc aussi continue, d'où l'on conclut, en s'appuyant toujours sur la relation $y(x) = \int_0^x f[s, y(s)]\, ds$, que $y(x)$ possède une dérivée égale à $f[x, y(x)]$, c'est-à dire que $y(x)$ est une solution de notre problème.

L'analyse précédente nous montre, que le théorème de Cauchy sera demontré par la méthode des approximations successives dans tous les cas, dans lesquels la convergence des $y(x)$ sera établie. Les autres points de la démonstration n'exigent aucunes hypothèses additionelles sur $f(x, y)$. On voit ainsi que, dans ce qui va suivre, nous pourrons nous borner à la discussion de la convergence de la suite $\{y_n(x)\}$.

§ 2. Supposons maintenant que l'on peut faire correspondre à tout nombre λ

(3) $$0 < \lambda \leqq \lambda^* \leqq 1$$

une constante $A(\lambda) \geqq 0$, telle que l'on ait dans le domaine (D)

$$|f(x, y'') - f(x, y')| \leqq A(\lambda) \,.\, |y'' - y'|^{\lambda}.$$ [10])

Soit $\{\lambda_i\}$ une suite infinie des nombres, vérifiant (3). Nous avons d'une manière générale

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqq A(\lambda_{n-1}) \,.\, \int_0^x |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|^{\lambda} ds.$$ [11])

En particulier on a

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqq C_1 \,.\, x,$$

où l'on a posé $C_1 = A(\lambda_1) \,.\, B^{\lambda_1}$, $B = \mathrm{Max}\, |y_1(x)|$ dans l'intervalle $[-\delta, +\delta]$.

Appliquons maintenant l'inégalité de Hölder

$$\int_a^b |f(x) \,.\, g(x)|\, dx \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^{\alpha} dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \,.\, \left\{\int_a^b |g(x)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \qquad (\alpha > 1)$$

[10]) On dit, dans ce cas, que la fonction $f(x, y)$ satisfait à *la condition de Hölder*, avec l'exposant λ.

[11]) Nous nous bornons aux $x \geqq 0$.

à l'inégalité

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqq A(\lambda_2) \,.\, \int_0^x |y_2(s) - y_1(s)|^{\lambda_2} \,.\, 1 \,.\, ds,$$

en posant $f(x) = |y_2(x) - y_1(x)|^{\lambda_2}$, $g(x) = 1$, $\alpha = \frac{1}{\lambda_2} > 1$. [12])

On trouve

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqq A(\lambda_2) \,.\, \left\{\int_0^x |y_2(s) - y_1(s)|\, ds\right\}^{\lambda_2} \,.\, \left\{\int_0^x ds\right\}^{1-\lambda_2} \leqq$$

$$\leqq A(\lambda_2)\, x^{1-\lambda_2} \,.\, \left\{\int_0^x C_1 s\, ds\right\}^{\lambda_2} = C_2\, x^{1+\lambda_2},$$

où

$$C_2 = \frac{\{A(\lambda_1)\}^{\lambda_2} \,.\, A(\lambda_2) \,.\, B^{\lambda_1 \lambda_2}}{2^{\lambda_2}}.$$

On démontre par l'induction, que l'on a pour $n \geqslant 1$

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqq C_n \,.\, x^{1+\lambda_n+\lambda_{n-1}\lambda_n+\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n+\ldots\ldots+\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n}$$

(4) $$C_n = \frac{\{A(\lambda_1)\}^{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n} \,.\, \{A(\lambda_2)\}^{\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_n} \ldots \{A(\lambda_{n-1})\}^{\lambda_n} \,.\, \{A(\lambda_n)\} \,.\, B^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}}{2^{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n} \,.\, (2+\lambda_2)^{\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_n} \ldots (2+\lambda_{n-1}+\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}+\ldots+\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{n-1})^{\lambda_n}}.$$

Les inégalités (4) sont pour nous fondamentales. On voit immédiatement, qu'elles sont une généralisation naturelle des inégalités classiques; en effet, si la fonction $f(x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz, il suffit de poser dans les formules (4)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots\ldots = 1,$$

$$A(\lambda_1) = A(\lambda_2) = \ldots\ldots = K,$$

pour obtenir les relations bien connues

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqq B \,.\, \frac{K^n \,.\, x^n}{n!}.$$

§ 3. Posons pour abréger

(5) $$u_n = 1 + \lambda_n + \lambda_{n-1}\lambda_n + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n + \ldots\ldots + \lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n.$$

Nous pouvons évidemment énoncer le théorème général suivant:

„*S'il est possible de choisir les exposants $\lambda_i (\leqslant \lambda^*)$ de telle manière, que la série*

[12]) Dans le cas $\lambda^* = 1$, on peut prendre $\lambda_i = 1$ et appliquer le raisonnement classique.

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \,.\, x^{u_n} \tag{6}$$

ait un rayon de convergence d différent de zéro, (C_n étant toujours défini par (4)), alors la suite $\{y_n(x)\}$ converge dans l'intervalle $[-r, +r]$, où $r = \operatorname{Min}(d, \delta)$."

Il suit de là, que la discussion de la convergence de la suite $\{y_n(x)\}$ se ramène entièrement à l'examen, comment se comportent les constantes $A(\lambda)$, quand $\lambda \to \lambda^*$.

§ 4. On peut maintenant démontrer facilement le théorème d'unicité:

„*Si la série (6) a un rayon de convergence différent de zéro, alors la solution $y(x)$, obtenue par la méthode des approximations successives, est unique.*"

Démonstration: Soit $z(x)$ une solution quelconque. En posant

$$D = \operatorname{Max} |z(x) - y_1(x)|,$$

on trouve facilement que

$$|z(x) - y_n(x)| \leqq C_n \,.\left(\frac{D}{B}\right)^{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_n} |x|^{u_n}.$$

La série (6) étant convergente d'après l'hypothèse, on voit qu'il est de même pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{D}{B}\right)^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} |x|^{u_n}$$

(parce qu'on a toujours $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \leqslant 1$), donc pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z(x) - y_n(x)|.$$

Il en résulte

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = z(x),$$

ce qui donne

$$y(x) \equiv z(x). \qquad\qquad \text{C. q. f. d.}$$

§ 5. Le mode de la démonstration du théorème sur l'unicité nous suggère la remarque, qu'en général, si l'on peut démontrer l'existence d'une solution du problème de Cauchy par la méthode des approximations successives, on peut aussi, en général, démontrer, que cette solution est unique. En effet, si l'on peut majorer la différence $|y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ par la différence $|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$, on peut aussi majorer la différence $|z(x) - y_n(x)|$ par $|z(x) - y_{n-1}(x)|$,

$z(x)$ étant une solution quelconque. Cette remarque n'a aucune prétention à être considérée comme un théorème précis; elle nous sert plutôt pour guider nos recherches, en indiquant les cas où l'on peut espérer que la méthode des approximations conduira au but.

Toutefois elle nous explique en certaine mesure, pourquoi dans le cas $\lambda^* < 1$, on ne peut pas démontrer que la suite $\{y_n(x)\}$ converge. Il est facile de voir que l'on peut poser dans ce cas

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots\ldots = \lambda^* = \lambda.$$

On obtient

$$u_n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{n-1} = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

$$C_n = \frac{A^{\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}} \,.\, B^{\lambda^n}}{2^{\lambda^{n-1}} \,.\, (2+\lambda)^{\lambda^{n-2}} \ldots\ldots \left(1 + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\right)^{\lambda}},$$

d'où il suit que

$$C_n \geqq \frac{A^{\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}} \,.\, B^{\lambda^n}}{\left(1 + \frac{1}{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}}}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} B^{\lambda^n} \,.\, (Ax)^{\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}}$$

diverge pour tout $x \neq 0$ (le cas $B = 0$ exclu). Nous ne pouvons donc affirmer, que la suite $\{y_n(x)\}$ converge[13]).

Ceci est en accord avec notre remarque, faite au début du § présent, parce que la solution du problème ne sera plus (en général) unique. Citons comme un exemple l'équation

$$\frac{dy}{dx} = |y|^{\lambda} \qquad\qquad 0 < \lambda < 1,$$

avec la condition initiale $x_0 = y_0 = 0$.

§ 6. M. Osgood a démontré, en appliquant la méthode des polygones de Cauchy, que, si la fonction $f(x, y)$ satisfait à une des conditions

---

[13]) Bien entendu, on peut prendre $\lambda_i \leqslant \lambda^*$, mais, comme il est facile à vérifier, on obtient toujours des séries divergentes. On trouve dans le mémoire cité de M. Müller (p. 630—632) un exemple, où $f(x, y)$ remplit la condition de Hölder, tandis que les $y_n(x)$ divergent.

$$|f(x,y'')-f(x,y')|\leq K.|y''-y'|.\log\frac{1}{|y''-y'|}$$

(7) $$|f(x,y'')-f(x,y')|\leq K.|y''-y'|.\log\frac{1}{|y''-y'|}.\log\log\frac{1}{|y''-y'|},$$

. . . .

alors la solution du problème de Cauchy est unique [14]).

Or, nous pouvons déduire facilement du théorème général du § 3[me] que, dans ce cas, les approximations successives convergent. On peut de même démontrer que la solution obtenue est unique. Bornons nous dans la démonstration au cas le plus simple, c'est-à dire supposons que

$$|f(x,y'')-f(x,y')|\leq K.|y''-y'|.\log\frac{1}{|y''-y'|}.$$

Nous allons employer le lemme suivant:

„Si, pour $0\leqslant u\leqslant 1$,

$$0\leqslant\varphi(u)\leq K.u\log\frac{1}{u},$$

alors, pour tout λ $(0<\lambda<1)$ et pour les u

$$0<u\leq 1,$$

on a

$$\varphi(u)\leq\frac{K}{e(1-\lambda)}u^{\lambda}.$$

En effet, posons

$$\Phi(u)=\frac{K.u\log\frac{1}{u}}{\frac{K}{e(1-\lambda)}.u^{\lambda}}=e.(\lambda-1)\,u^{1-\lambda}\log\,u.$$

On a $\lim\limits_{u\to 0}\Phi(u)=0$, $\Phi(1)=0$, et $\Phi(u)>0$ à l'intérieur de l'intervalle $[0,1]$. On vérifie facilement, que la fonction $\Phi(u)$ a son maximum (unique dans $[0,1]$) pour $u_0=e^{\frac{1}{\lambda-1}}$, et que $\Phi(u_0)=1$. On a donc dans tout $[0,1]$

$$\Phi(u)\leq 1,$$

et par là

$$K u\log\frac{1}{u}\leq\frac{K}{e(1-\lambda)}u^{\lambda}.$$ C. q. f. d.

---

[14]) Mémoire cité sous [3]). M. Osgood donne des conditions plus générales, dont les (7) sont des cas particuliers.

Il s'en suit que, si la fonction $f(x,y)$ remplit la condition (8) et si l'on se borne au cas $b\leq 1$, on a aussi pour tout λ (<1)

$$|f(x,y'')-f(x,y')|\leq\frac{K}{e.(1-\lambda)}.|y''-y'|^{\lambda}.$$

Pour appliquer maintenant notre théorème général, posons

$$\lambda_1=\frac{1}{2}$$

$$\lambda_k=\frac{k-1}{k}\qquad (k>1).$$

Il nous faut calculer les u_n et C_n. Or, on a tout d'abord

$$u_n=1+\lambda_n+\lambda_{n-1}\lambda_n+\ldots\ldots+\lambda_2\lambda_3\ldots\ldots\lambda_n=1+\frac{n-1}{2}\qquad (n>1)$$

$$A(\lambda_n)=\frac{K}{e(1-\lambda_n)}=\frac{K}{e}.n\leqslant A.n,\qquad (n\geqslant 1)$$

A étant une constante.

On a de plus

$$(2+\lambda_i+\lambda_{i-1}\lambda_i+\ldots\ldots+\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_i)(1-\lambda_i)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2i},$$

d'où il suit, que le dénominateur de C_n est égal à

$$\left(2.\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2\,.\,2}\right)^{\frac{2}{n}}.\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2\,.\,3}\right)^{\frac{3}{n}}+\ldots+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2(n-1)}\right)^{\frac{n-1}{n}}.\frac{1}{n}$$

et

$$C_n=\frac{A^{1+\frac{n-1}{2}}.B^{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_n}}{\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right)^3\ldots\ldots\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2(n-1)}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}}},$$

donc

$$C_n\leq A^{\frac{n+1}{2}}.B^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}.n.2^{\frac{n}{2}}.$$

Ainsi la série $\Sigma C_n x^{u_n}$ est majorée par la série

$$L\,\Sigma n(2Ax)^{\frac{n+1}{2}}.$$

(L désigne une constante), dont le rayon de convergence est différent de zéro. C. q. f. d.

(Reçu par la Rédaction le 2. IV. 1929).