Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen.

von

W. ORLICZ (Lwów).

In dieser Arbeit werden wir Orthogonalreihen behandeln, u. zw. werden wir meistens mit der Methode der sog. linearen Funktionaloperationen arbeiten und die Untersuchungen in normierten Vektorbereichen, im von Herrn S. Banach eingeführten Sinne, führen.

Wir geben an dieser Stelle Definitionen der wichtigsten hier vorkommenden Begriffe an. Wegen Einzelheiten verweisen wir auf die Dissertation des Herrn S. Banach[1]).

Unter einem Vektorbereich wollen wir eine Menge V von Elementen X verstehen, in welcher die Operationen der Addition von Elementen und der Multiplikation der Elemente mit reellen Zahlen definiert sind und den Grundgesetzen der Algebra gehorchen. Einen Vektorbereich V nennen wir normiert, wenn jedem Element $X \varepsilon V$ eine reelle Zahl $\|X\|$ entspricht und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1° $\|X\| \geqslant 0$

2° $\|X\| = 0$ dann und nur dann, wenn $X = \Theta$[2])

3° $\|aX\| = |a| \, \|X\|$

4° $\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$

Ein Vektorbereich heisst vollständig, wenn aus der Beziehung

$$\lim_{p,\, q \to \infty} \|X_p - X_q\| = 0 \qquad X_p,\ X_q \varepsilon V$$

die Existenz eines solchen Elementes $X \varepsilon V$ folgt, dass

$$\lim_{p \to \infty} \|X_p - X\| = 0.$$

Die Elementenfolge $\{X_p\}$ wollen wir dann (der Norm nach) gegen X konvergent nennen.

---

[1]) S. Banach: Sur les opérations dans les ensembles abstraits, Fund. Math. III., (1922) vgl. insbes. S. 134–136. Diese Arbeit wird weiter als: Banach, Opérations zitiert.

[2]) In jedem Vektorbereich gibt es ein Element Θ (Nullelement) für welches $X \pm \Theta = X$, $m\Theta = \Theta$ wobei m eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

Ein normierter (bzw. normierter vollständiger) Vektorbereich ist ein metrischer (bzw. metrischer vollständiger) Raum im Hausdorff'schen Sinne[3]), wenn die Entfernung zweier Elemente als Norm ihrer Differenz definiert wird. Alle für metrische (bzw. metrische vollständige) Raume definierten Begriffe und die darüber geltenden Sätze können ohne weiteres auf normierte (bzw. normierte vollständige) Vektorbereiche übertragen werden.

Unter einer Operation im normierten Vektorbereiche V verstehen wir eine Funktion $U(X)$, welche jedem Element X aus V ein Element aus einem normierten Vektorbereiche V' zuordnet.

Eine Operation heisst additiv, wenn für beliebige $X, Y \varepsilon V$

$$U(X+Y)=U(X)+U(Y).$$

Eine Operation heisst quasilinear, wenn für beliebige reelle a

$$\|U(aX)\|=|a|\,\|U(X)\|$$

und wenn für beliebige $X, Y \varepsilon V$ die Ungleichung gilt

$$\|U(X+Y)\| \leqslant \|U(X)\|+\|U(Y)\|.$$

Eine Operation heisst stetig wenn immer aus

$$\lim_{n\to\infty}\|X_n-X\|=0$$

die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\|U(X_n)-U(X)\|=0$$

folgt.

Die meisten Begriffe und Sätze der Konvergenztheorie gewöhnlicher Zahlenfolgen lassen sich auf Vektorbereiche übertragen.

Wir betrachten die Menge Z aller Zahlen $\geqslant 1$ welchen wir noch in üblicher Weise die Zahl ∞ *hinzufügen.*

Im folgenden bedeuten α, δ *beliebige* Zahlen der *Menge* Z. Schreibt man z. B. $\alpha>1$, so ist $\alpha=\infty$ mitgemeint. Mit β bezeichnen wir immer die durch $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ bestimmte Zahl aus Z. (Zu α konjugierter Exponent).

Mit S^δ bezeichnen wir die Menge aller mit der δ-ten Potenz integrierbaren Funktionen, wenn δ endlich ist; S^∞ bedeutet die Menge aller wesentlich beschränkten[4]) Funktionen. Die Bereiche S^α, S^β heissen konjugiert.

Mit Γ^δ bezeichnen wir die Menge der Zahlenfolgen $\{c_i\}$ für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^\delta<+\infty$, wenn δ endlich ist, mit Γ^∞ die Menge aller gegen Null konvergenten Folgen[5]). Die Bereiche Γ^α, Γ^β heissen konjugiert.

[3]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre 1914. pp. 318—328.

[4]) Eine Funktion heisst wesentlich beschränkt, wenn sie nach Ausschluss einer Nullmenge im gewöhnlichen Sinne beschränkt ist.

S^δ, Γ^δ sind Vektorbereiche, welche vollständig sind, wenn man in ihnen die Norm auf übliche Weise definiert[6]).

Wir werden im folgenden oft mehrere normierte Bereiche S^δ (bezw. Γ^δ) gleichzeitig zu betrachten haben. Um in den Bezeichnungen der Normen in verschiedenen Bereichen Unklarheiten vorzubeugen, werden wir unter $\|f(x)\|_\delta$ die gewöhnliche Norm der Funktion $f(x)\,\varepsilon\, S^\delta$, unter $\|\gamma\|_\delta$ die gewöhnliche Norm einer Folge $\gamma\,\varepsilon\,\Gamma^\delta$ verstehen.

Mit C bezeichnen wir den Vektorbereich der in $<0, 1>$ definierten stetigen Funktionen mit der gewöhnlichen Normierung $\|g(x)\|=\max\limits_{<0,1>}|g(x)|$. — C ist ein vollständiger Vektorbereich.

Unter einem $OS\{\varphi_i(x)\}$ verstehen wir in dieser Arbeit immer ein System von in $<0, 1>$ definierten, orthogonalen und normierten Funktionen, d. h. wir setzen von den $\varphi_i(x)$ voraus:

$$\int_0^1 \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x\,dx) = \begin{matrix} 0 \text{ für } \mu \neq \nu \\ 1 \text{ für } \mu=\nu. \end{matrix}$$

Eine Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

heisse eine Orthogonalreihe.

Wenn die Koeffizienten c_n einer Orthogonalreihe die Form

$$c_n=\int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

haben, so heisse diese Reihe eine Orthogonalentwicklung der Funktion $f(x)$ nach dem $OS\{\varphi_i(x)\}$; die c_n heissen Koeffizienten dieser Entwicklung.

[5]) Man könnte auch die Menge aller beschränkter Folgen mit Γ^∞ bezeichnen, was vielleicht konsequenter wäre, es scheint uns jedoch nützlicher in unseren Untersuchungen die im Tekst angegebene Definition zu gebrauchen.

[6]) Wegen der gewöhnlichen Normierung von S^δ siehe z. B. Banach: Opérations III, wegen der Normierung von Γ^δ s. H. Hahn: Über Folgen linearer Operationen, Monatshefte f. Math. u. Physik XXXII. (1922) § 7.

Die Summen

$$s_n[f] = \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx \,.\, \varphi_\nu(x)$$

nennen wir Partialsummen der Entwicklung von $f(x)$ nach dem System $\{\varphi_i(x)\}$.

Ist V ein aus integrierbaren Funktionen bestehender Vektorbereich und $\{\varphi_i(x)\}$ ein OS nach welchem jede Funktion von V entwickelt werden kann, so nennen wir das $OS\{\varphi_i(x)\}$ vollständig im Bereiche V, wenn für eine Funktion $f(x)\,\varepsilon\,V$ aus dem Verschwinden aller Koeffizienten

$$f_n = \int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

die Identität

$$f(x) \doteq 0\ ^{7})$$

folgt.

Ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ heisse abgeschlossen im Bereiche V, wenn es zu jeder Funktion $f(x)\,\varepsilon\,V$ und zu jedem $\eta > 0$ ein solches Orthogonalpolynom

$$k_\eta(x) = \sum_{\nu=1}^{N(\eta)} c_\nu^{(\eta)}\,\varphi_\nu(x)$$

gibt, dass die Ungleichung

$$\| k_\eta(x) - f(x) \| < \eta$$

gilt [8]).

Ein im Bereiche S^δ vollständiges $OS\{\varphi_i(x)\}$ ist auch in jedem $S^{\delta'}$ $(\delta' > \delta)$ vollständig. Die Umkehrung dieser Behauptung ist nicht immer richtig.

Die zuletzt erwähnte Behauptung ist als besonderer Fall im folgenden Satze enthalten, welchen wir mit Hilfe einer entsprechend verallgemeinerten S. Banach'schen [9]) Methode beweisen werden.

---

[7]) Wir gebrauchen die Symbole $f(x) \doteq f(x)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \doteq f(x)$ um anzudeuten, dass die Beziehungen $f(x) = \varphi(x)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ fast überall in dem gegebenen Intervall d. h. überall mit Ausnahme einer Nullmenge gelten.

[8]) Wir bemerken dass es keine in S^∞ abgeschlossenen OS geben kann, dagegen gibt es in C abgeschlossene OS.

[9]) S. Banach: An Example of an orthogonal Developpment whose sum is everywhere different from the Developped Function, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 21, (1922) pp. 95—97.

Satz. Es seien V und V' im Bereiche S^1 enthaltene Vektorbereiche (wenn ein Vektorbereich in S^1 *enthalten* ist, so verstehe man darunter, dass die Operationen der Addition und Multiplikation in diesem Teilbereich unverändert aus S^1 herübergenommen wurden, insbesondere bleibt auch $f(x) \doteq 0$ das Nullelement des neuen Bereiches). Wir setzen weiter voraus, dass V' nicht in V enthalten ist. Es gibt dann ein in V vollständiges $OS\{\varphi_i(x)\}$, welches in V' nicht vollständig ist.

Beweis. Wir gehen von einem in S^1 vollständigen $OS\{\varphi_i(x)\}$ aus, also z. B. vom trigonometrischen OS für das Intervall $<0, 1>$. $f(x)$ sei eine in V', aber nicht in V vorkommende Funktion. Selbstverständlich ist $f(x)$ nicht $\doteq 0$. Die Koeffizienten der Entwicklung von $f(x)$ nach dem $OS\{\varphi_i(x)\}$ sind nicht alle $= 0$, da doch $\{\varphi_i(x)\}$ in S^1 vollständig ist. Der Einfachheit wegen nehmen wir an:

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi_1(x)\,dx \neq 0.$$

Wir setzen

$$\text{(a)} \qquad - \frac{\int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,\varphi_1(x)\,dx} = a_n$$

$$\text{(b)} \qquad \chi_n(x) = \varphi_n(x) + a_n\,\varphi_1(x).$$

Wir behaupten, dass aus

$$\text{(c)} \qquad \int_0^1 \psi(x)\,\chi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3\ldots)$$

für ein $\psi(x)\,\varepsilon\,V$, die Identität $\psi(x) \doteq 0$ folgt.

Aus (b) und (c) folgt nämlich

$$\text{(d)} \qquad - a_n \int_0^1 \psi(x)\,\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 \psi(x)\,\varphi_n(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, 3\ldots).$$

Ist $\int_0^1 \psi(x)\,\varphi_1(x)\,dx = 0$, so folgt aus (d) $\psi(x) \doteq 0$.

Wäre jedoch $\int_0^1 \psi(x)\,\varphi_1(x)\,dx \neq 0$, so würde aus (a), (b) und (d) folgen

$$\int_0^1 \varphi_n(x) \left[\psi(x) - \frac{\int_0^1 \psi(x)\,\varphi_1(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,\varphi_1(x)\,dx}\, f(x) \right] dx = 0,$$

also

$$f(x) = A\psi(x), \quad A \neq 0$$

und $f(x) \varepsilon V$, was der Voraussetzung widerspricht.

Von der Funktionenfolge $\chi_n(x)$ lassen wir $\chi_1(x)$ fort, da $\chi_1(x) = 0$ und normieren und orthogonalisieren die übriggebliebenen Funktionen (welche linear unabhängig sind) nach der bekannten Schmidt'schen Methode. Das so gefundene $OS\{\varphi_i(x)\}$ hat alle in der Behauptung verlangten Eigenschaften.

Dieses $OS\{\varphi_i(x)\}$ besteht aus trigonometrischen Polynomen. Da im Beweise nur von der linearen Unabhängigkeit und der Vollständigkeit der Funktionenfolge $\{\varphi_i(x)\}$ Gebrauch gemacht wurde, hätten wir ebenso von der Folge $1, x, x^2 \ldots$ ausgehen können und hätten ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ gefunden, das aus gewöhnlichen Polynomen besteht [10]).

Ist α eine endliche Zahl aus Z so hat die Abgeschlossenheit eines OS in S^α (wenn $\varphi_n(x) \varepsilon S^\alpha$) die Vollständigkeit im konjugierten Bereiche S^β zur Folge.

Aus der Abgeschlossenheit in C folgt (wenn $\varphi_n(x) \varepsilon S^\infty$) die Vollständigkeit in S^1 und aus der Abgeschlossenheit in S^1 die Vollständigkeit in S^∞.

Die vorliegende Arbeit ist in vier Paragraphen eingeteilt, u. zw. stellen wir in § 1 einige später verwendeten Hilfssätze zusammen. Im § 2 wird in Anlehnung an die Untersuchungen des Herrn H. Steinhaus [11]) hauptsächlich die sog. Konvergenz im Mittel mit der Potenz δ von Orthogonalentwicklungen behandelt; dieser § ist zum Teil in Zusammenarbeit mit Herrn Z. Łomnicki enstanden. Der § 3 enthält einige Sätze, über Faktorenfolgen, welche Orthogonalkoeffizienten wieder in Orthogonalkoeffizienten überführen. Im § 4 werden noch einige Eigenschaften der Koeffizientenfolgen von Funktionen aus S^δ untersucht.

§ 1.

Hilfssatz 1. Voraussetzung. Für die Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$, $f_n(x) \varepsilon S^\alpha$, $\alpha > 1$, sei

$$\|f_n(x)\|_\alpha < C \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

[10]) Der somit bewiesene Satz ist in den Sätzen des Herrn Gr. Fichtenholz enthalten (Gr. Fichtenholz: Sur la notion de la fermeture des systèmes des fonctions, Rend. Circ. Palermo T. L. 1926; Th. I, Lemme p. 4 und p. 13.; ich wurde von Herrn Saks auf diese Arbeit aufmerksam gemacht). Ich glaube jedoch, dass die im Tekst angewandte Methode durch ihre Klarheit und Kürze bemerkenswert ist; mit dieser Methode können übrigens die erwähnten Sätze in derselben Allgemeinheit, wie bei Herrn Fichtenholz bewiesen werden.

[11]) H. Steinhaus: Sur les développements orthogonaux, Bull. Ac. Pol. 1926. Diese Arbeit wird weiter als: Steinhaus, Développements orth. zitiert.

Behauptung. Es gibt eine Teilfolge $\{f_{n_i}(x)\}$ und eine Funktion $f(x) \varepsilon S^\alpha$ so dass

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 f_{n_i}(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \tag{2}$$

für jede Funktion $g(x) \varepsilon S^\beta$ und

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} \| f_{n_i}(x)\|_\alpha \geqq \|f(x)\|_\alpha \tag{3}$$

Beweis. Für endliches α wurde der Beweis dieses Satzes von Herrn F. Riesz [12]) geliefert.

Für $\alpha = \infty$ wird der Beweis ganz ähnlich erbracht:

Man findet eine Teilfolge $\{f_{n_i}(x)\}$, so dass für jedes integrierbare $g(x)$

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 f_{n_i}(x)\, g(x)\, dx$$

existiert.

Insbesondere existiert also für jedes x aus $<0, 1>$

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^x f_{n_i}(x)\, dx = F(x).$$

Aus (1) folgt dass $F(x)$ der Lipschitz-Bedingung genügt, also gibt es eine beschränkte Funktion $f(x)$, für welche

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx.$$

Von diesem $f(x)$ beweist man leicht, dass die Beziehung (2) für jedes $g(x) \varepsilon S^1$ gilt.

Angenommen, die Beziehung (3) gelte nicht für die Folge $\{f_{n_i}(x)\}$ d. h. es sei

$$\|f_{p_i}(x)\|_\alpha < L < \|f(x)\|_\alpha$$

für unendlich viele Indizes p_i aus der Folge $\{n_i\}$.

[12]) F. Riesz: Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen Math. Ann. 69. (1910) vgl. pp. 464—468.

Wir setzen

$$\bar{g}(x) = \frac{\operatorname{sign} f(x)}{|E|} \qquad x \varepsilon E$$

$$\bar{g}(x) = 0 \qquad x \varepsilon CE$$

wo E die Menge derjenigen Punkte bedeutet, in welchen

$$|f(x)| > \|f(x)\|_\alpha - \varepsilon.$$

Es ist

$$\left|\int_0^1 f_{p_i}(x)\, \bar{g}(x)\, dx\right| \leqslant L, \quad \left|\int_0^1 f(x)\, \bar{g}(x)\, dx\right| \geqslant \|f(x)\|_\alpha - \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ woraus mit Rücksicht auf (2)

$$\|f(x)\|_\alpha \leqslant L$$

folgt, was der Voraussetzung widerspricht.

Hilfssatz 2. Voraussetzung. Gegeben ist ein Bereich S^α $(\alpha > 1)$ und ein in S^α vollständiges[13]) $OS\{\varphi_i(x)\}$, $\varphi_n(x) \varepsilon S^\alpha$.

Γ sei ein normierter, vollständiger Vektorbereich, dessen Elemente Zahlenfolgen $\gamma \equiv \{c_i\}$ sind. Wir setzen voraus, dass jedes $\{c_i\}$ Koeffizientenfolge einer Funktion aus S^α ist.

Mit γ gehöre auch $\gamma^{(n)} \equiv (c_1, c_2, \ldots c_n, 0, 0, \ldots)$ dem Bereiche Γ an. Die in diesem Bereiche definierte Norm habe die folgenden zwei Eigenschaften: erstens

(4) wenn $$\lim_{n\to\infty} \|\gamma_n - \gamma\| = 0,$$

wobei $\gamma_n \equiv \{c_i^{(n)}\}$, $\quad \gamma \equiv \{c_i\}$,

so sei $\lim\limits_{n\to\infty} c_i^{(n)} = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots,$ zweitens

(5) $$\lim_{n\to\infty} \|\gamma^{(n)} - \gamma\| = 0$$

für jedes $\gamma \varepsilon \Gamma$.

Mit $U(\gamma)$ bezeichnen wir die Operation, welche einer jeden Zahlenfolge $\gamma \varepsilon \Gamma$ diejenige Funktion aus S^α zuordnet, deren Koeffizientenfolge γ ist.

[13]) Aus der Voraussetzung der Vollständigkeit in S^α folgt nach unserer Definition die Existenz der Koeffizienten einer jeden Funktion aus S^α, was bekanntlich mit der Tatsache, dass alle $\varphi_n(x)$ in S^β enthalten sind, äquivalent ist.

Behauptung. Die Operation $U(\gamma)$ ist in Γ stetig und es gilt

(6) $$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x) - f(x) \right\|_\alpha = 0.$$

Beweis. Es genügt die Stetigkeit von $U(\gamma)$ zu beweisen, da (6) schon daraus und aus (5) folgt.

$U(\gamma)$ ist eine additive Operation, es genügt also nach einem Satze des Herrn S. Banach[14]) zu beweisen, dass für jedes $\gamma \varepsilon \Gamma$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma_n - \gamma\|_\alpha = 0$$

die Ungleichung

(7) $$\varliminf_{n\to\infty} \|U(\gamma_n)\|_\alpha \geqslant \|U(\gamma)\|_\alpha$$

zur Folge hat.

Angenommen (7) sei nicht erfüllt für ein $\gamma \varepsilon \Gamma$. Dann gibt es eine Folge $\{\gamma_i\}$ für welche

$$\lim_{i\to\infty} \|\gamma_i - \gamma\|_\alpha = 0$$

[14]) Dieser Satz (Banach, Opérations p. 153) kann allgemein in der folgenden Fassung ausgesprochen werden:

Wenn in einem normierten und vollständigen Vektorbereiche V eine additive Operation $U(X)$ definiert ist und aus $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n - X\| = 0$ $(X_n, X \varepsilon V)$

(a) $$\varliminf_{n\to\infty} \|U(X_n)\| \geqslant \|U(X)\|$$

folgt, so ist $U(X)$ eine stetige Operation.

Wir geben hier einen Beweis dieses Satzes, welcher übersichtlicher zu sein scheint, als der von Herrn S. Banach angegebene.

F_k sei die Menge aller $X \varepsilon V$ für welche $\|U(X)\| \leqslant k$. Die Mengen F_k sind wegen (a) abgeschlossen. Es können nicht alle F_k nirgendsdicht sein, da $V = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ und V nicht eine Menge der ersten Baire'schen Kategorie sein kann. Eines von den F_k ist also in einer Kugel überalldicht; diese Kugel ist also ganz in F_k enthalten, da F_k abgeschlossen ist. Es gibt also eine Kugel, in welcher $\|U(X)\| \leqslant k$, also gibt es auch eine Konstante M, so dass

(b) $$\|U(X)\| \leqslant M \|X\|$$

für jedes $X \varepsilon V$, woraus schon die Stetigkeit von $U(X)$ folgt.

Wie leicht zu sehen, kann in der Voraussetzung (a) $\varliminf$ durch $\varlimsup$ ersetzt werden. Wäre $U(X)$ eine quasilineare Operation, welche der Bedingung (a) genügt, so könnte man ganz analog (b) beweisen, woraus jedoch nicht die Stetigkeit von $U(X)$ gefolgert werden darf; (nur die Stetigkeit von $\|U(X)\|$ ist dadurch sichergestellt).

$$(8) \qquad \lim_{i\to\infty} \| U(\gamma_i)\|_\alpha < \| U(\gamma)\|_\alpha .$$

Nach Hilfssatz 1 folgt aus (8) die Existenz einer Teilfolge $U(\gamma_{n_i}) = f_{n_i}(x)$ und einer Funktion $F(x) \varepsilon S^\alpha$, so dass für jedes $g(x)$ aus dem zu S^α konjugierten Bereiche

$$(9) \qquad \lim_{i\to\infty} \int_0^1 f_{n_i}(x) g(x)\, dx = \int_0^1 F(x) g(x)\, dx$$

$$(10) \qquad \lim_{i\to\infty} \| f_{n_i}(x)\|_\alpha \geqslant \| F(x)\|_\alpha$$

gilt. Wir setzen in (9) $g(x) = \varphi_k(x)$ und beachten, dass aus (4) und der Vollständigkeit des $OS\{\varphi_i(x)\}$

$$F(x) \doteq f(x) = U(\gamma)$$

folgt. Die Beziehungen (8) und (10) enthalten also einen Widerspruch.

Bemerkung. Wenn man in den Voraussetzungen dieses Hilfssatzes $\alpha = 1$ setzt, alle $\varphi_n(x)$ beschränkt und anstatt der Vollständigkeit des Systems $\{\varphi_i(x)\}$ in S^α die Abgeschlossenheit in C voraussetzt und alle anderen Annahmen unverändert lässt, so bleibt die Behauptung richtig [15].

Hilfssatz 3. Voraussetzung. Gegeben sei eine Doppelfolge von Operationen $\{U_{pq}(X)\}$, welche in einem normierten und vollständigen Vektorbereiche V definiert sind und Werte aus normierten Vektorbereichen V_{pq} annehmen.

Jedes $U_{pq}(X)$ ist eine quasilineare stetige Operation.

Für jede Zeile p existiert eine Elementenfolge $\{X_i^{(p)}\}$ so dass

$$\| X_q^{(p)} \| < 1$$

$$(11) \qquad \lim_{q\to\infty} \| U_{pq}(X_q^{(p)}) \| = +\infty .$$

Behauptung. Es gibt ein Element $X \varepsilon V$, für welches in jeder Zeile

$$(12) \qquad \lim_{q\to\infty} \| U_{pq}(X) \| = +\infty \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

[15]) Auf diesen Grenzfall des Hilfssatzes 2 hat mich Herr S. Banach aufmerksam gemacht. Er wird durch leichte Abänderung des obigen Gedankenganges bewiesen.

Beweis. Man beweist diesen Hilfssatz am leichtesten mit der Methode des Herrn S. Saks so wie sie in der Arbeit der Herren Banach und Steinhaus [16]) dargelegt ist.

Bemerkung. Dieser Hilfssatz gilt natürlich auch wenn die Doppelfolge $\{U_{pq}(X)\}$ nur endlich viele Zeilen, evtl. nur eine Zeile enthält.

§ 2.

Mit (T) bezeichnen wir eine zeilenfinite Toeplitz'sche Summationsmethode (kurz T-Methode) mit der Matrix

$$\begin{array}{llllll}
b_{11}, & b_{12}, & b_{13}, \ldots & b_{1q} \ldots & b_{1q_1} & \\
b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, \ldots & b_{2q} \ldots & \ldots b_{2q_2} & \\
\vdots & & & & & \\
b_{p1}, & b_{p2}, & b_{p3}, \ldots & b_{pq} \ldots & & \ldots b_{pq_p} \\
\ldots & & & & &
\end{array}$$

Die mit dieser T-Methode erhaltene Summe einer Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ bezeichnen wir mit $(T) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$.

Gegeben sei ein $OS\{\varphi_i(x)\}$. Wir setzen

$$K_n(x, t) = \sum_{q=1}^{q_n} b_{nq} \left(\sum_{b=1}^{q} \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(t) \right)$$

$$\sigma_n[f] = \sum_{q=1}^{q_n} b_{nq} s_q[f].$$

In diesem § werden hauptsächlich OS behandelt, welche den folgenden Voraussetzungen genügen:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (13') & |\varphi_n(x)| \leq M_n \\ (13'') & \int_0^1 |K_n(x, t)|\, dx \leq A. \end{array} \right.$$

Satz 1 [17]). Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ genügt den Bedingungen (13).

[16]) S. Banach-H. Steinhaus: Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math. 9. (1927) pp. 50—61.

[17]) Die Sätze 1—5 wurden gemeinsam mit Herrn Zb. Łomnicki bewiesen.

Behauptung. Damit die Orthogonalreihe

(14) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

Orthogonalentwicklung einer Funktion aus $S^\alpha (\alpha > 1)$ sei, ist hinreichend und notwendig, dass für alle n die Beziehung

(15) $$\|\sigma_n(x)\|_\alpha < C$$

gelte, wobei $\sigma_n(x)$ das n-te Element der T- Transformierten der Folge $\left\{\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x)\right\}$ bedeutet.

Beweis. 1⁰. Die Bedingung (15) ist hinreichend.

Nach Hilfssatz 1 gibt es eine Funktion $f(x)$ aus S^α und eine Teilfolge $\{\sigma_{n_i}(x)\}$, so dass

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \sigma_{n_i}(x)\, \varphi_k(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, \varphi_k(x)\, dx$$

für jedes $k = 1, 2, \ldots$. Es ist also $c_k = \int_0^1 f(x)\, \varphi_k(x)\, dx$.

2⁰. Die Bedingung ist notwendig. Wir nehmen an, dass $\alpha < \infty$, da der Grenzfall $\alpha = \infty$ durch Herrn Steinhaus[18]) erledigt worden ist.

Es ist

$$\sigma_n[f] = \int_0^1 K_n(x,t) f(x)\, dx.$$

Unter Anwendung der Hölder'schen Integralungleichung ergibt sich daraus

$$|\sigma_n[f]| \leqslant \left\{\int_0^1 |K_n(x,t)|\, |f(x)|^\alpha\, dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left\{\int_0^1 |K_n(x,t)|\, dx\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

wobei β die zu α konjugierte Zahl bedeutet.

Indem man diese Ungleichung zur α-ten Potenz erhebt und nach t integriert, erhält man

[18]) Steinhaus, Développements orth. p. 26, 35; Th. IV, IV'.

$$\int_0^1 |\sigma_n[f]|^\alpha\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 dt \left[\left\{\int_0^1 |K_n(x,t)|\, |f(x)|^\alpha\, dx\right\}\left\{\int_0^1 |K_n(x,t)|\, dx\right\}^{\frac{\alpha}{\beta}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 dt \left[\int_0^1 |K_n(x,t)|\, |f(x)|^\alpha\, dx\right] . A^{\frac{\alpha}{\beta}} =$$

$$= A^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^1 \left\{|f(x)|^\alpha \int_0^1 |K_n(x,t)|\, dt\right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant A^{1+\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^1 |f(x)|^\alpha\, dx$$

woraus sofort

(16) $$\|\sigma_n[f]\|_\alpha \leqslant A \|f(x)\|_\alpha$$

folgt.

Bemerkung. Im Beweise, dass (15) eine hinreichende Bedingung darstellt, wird nur von der Eigenschaft (13') des OS Gebrauch gemacht.

Satz 2. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ genügt den Bedingungen (13).

Behauptung. Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass (14) die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus S^α sei $(1 \leqslant \alpha < \infty)$ lautet

(17) $$\lim_{n,m\to\infty} \|\sigma_m(x) - \sigma_n(x)\|_\alpha = 0$$

wobei $\sigma_n(x)$ dieselbe Bedeutung hat wie in Satz 1.

Beweis. 1⁰. Die Bedingung ist hinreichend. Aus (17) folgt die Existenz einer Funktion $f(x) \varepsilon S^\alpha$, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(x) - f(x)\|_\alpha = 0,$$

für welche also auch

$$c_k = \int_0^1 f(x)\, \varphi_k(x)\, dx.$$

2°. Die Bedingung ist notwendig. Die Beziehung (17) gilt für jede beschränkte Funktion. Ist nämlich $|h(x)| < M$, so folgt aus dem Riesz-Fischer'schen Satze

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \int_0^1 (\sigma_m[h] - \sigma_n[h])^2\, dx = 0.$$

Für $n,\, m > N(\delta)$ ist also

$$\int_0^1 (\sigma_m[h] - \sigma_n[h])^2\, dx < \delta^{\alpha+2}.$$

Nur auf einer Menge E mit $|E| \leqslant \delta^\alpha$ gilt also

$$|\sigma_m[h] - \sigma_n[h]| > \delta.$$

Für $n,\, m > N(\delta)$ ist ferner

$$\|\sigma_m[h] - \sigma_n[h]\|_\alpha = \left\{\int_0^1 |\sigma_m[h] - \sigma_n[h]|^\alpha\, dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \left\{\int_E |\sigma_m[h] - \sigma_n[h]|^\alpha\, dx + \int_{cE} |\sigma_m[h] - \sigma_n[h]|^\alpha\, dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant (|E|\, 2^\alpha \Delta^\alpha M^\alpha + \delta^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \delta (2^\alpha \Delta^\alpha M^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Es ist also für jede beschränkte Funktion

(18) $$\lim_{n,\, m \to \infty} \|\sigma_n(x) - \sigma_m(x)\|_\alpha = 0.$$

Nach dem Beweise von Satz 1 ist für jede Funktion aus S^α die Bedingung (16) erfüllt; daraus und aus (18) folgt die Notwendigkeit unserer Bedingung.

Satz 3. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ genügt den Bedingungen (13).

Behauptung. Mit f_i seien die Koeffizienten einer Funktion $f(x) \varepsilon S^\alpha$ bezeichnet; wenn g_i Koeffizienten einer Funktion $g(x)$ aus dem konjugierten Bereich S^β sind, so ist die Reihe

(19) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, g_\nu$$

T-summierbar und ihre T-Summe ist gleich $\int_0^1 \bar{f}(x)\, g(x)\, dx$, wobei $\bar{f}(x) \varepsilon S^\alpha$ und $\{f_i\}$ die Koeffizientenfolge von $\bar{f}(x)$ ist.

Beweis. Die Behauptung folgt für $\alpha < \infty$ unmittelbar aus Satz 2 und für $\alpha = \infty$ aus den Sätzen 1, 2 und dem Hilfssatze 1.

Satz 3'. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ genügt den Bedingung (13').

Behauptung. Wenn eine Zahlenfolge $\{g_i\}$ die Eigenschaft hat, dass für jede Koeffizientenfolge $\{f_i\}$ einer Funktion $f(x)$ aus S^α die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, g_\nu$$

T-summierbar ist, dann ist $\{g_i\}$ die Koeffizientenfolge einer Funktion $g(x)$ aus dem konjugierten Bereiche S^β.

Beweis. Mit $\{\sigma_i(x)\}$ seien die T-Transformierten der Folge $\left\{\sum_{\nu=1}^{l} g_\nu\, \varphi_\nu(x)\right\}$ bezeichnet. Aus der T-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, g_\nu$ folgt die Existenz von

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \sigma_n(x) f(x)\, dx$$

für jedes $f(x) \varepsilon S^\alpha$. Nach einem bekannten Satze ist daher

$$\|\sigma_n(x)\|_\beta < C.$$

Nach der Bemerkung zu Satz 1 folgt daraus unsere Behauptung für $1 \leqslant \alpha < \infty$. Der Fall $\alpha = \infty$ ist in der Arbeit des Herrn H. Steinhaus[10]) erledigt werden.

Satz 4. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ genügt den Bedingungen (13).

Behauptung. Damit eine Faktorenfolge $\{\lambda_i\}$ jede Koeffizientenfolge $\{f_i\}$ einer Funktion $f(x) \varepsilon S^\alpha$ wieder in eine Koeffizientenfolge $\{\lambda_i f_i\}$ einer Funktion aus demselben Bereiche S^α transformiere, ist hinreichend uad notwendig, dass die Faktorenfolge $\{\lambda_i\}$ jede Koeffizientenfolge $\{g_i\}$ einer Funktion $g(x)$ aus dem konjugierten Bereiche S^β in die Koeffizientenfolge $\{\lambda_i g_i\}$ einer Funktion aus S^β transformiert.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen 3 und 3'.

---

[10]) Steinhaus, Développements ort. p. 28, 36 Th. VIII, VIII'.

Satz 5. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ genügt den Bedingungen (13).

Behauptung. Die folgenden drei Eigenschaften des $OS\ \{\varphi_i(x)\}$ sind äquivalent:

(a) Vollständigkeit im Bereiche S^α,

(b) Abgeschlossenheit im Bereiche S^α $(1 \leqslant \alpha < \infty)$,

(c) die verallgemeinerte Parseval'sche Gleichung

$$(T)\ \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, g_\nu = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$

Dabei bedeuten f_ν resp. g_ν Koeffizienten von beliebigen Funktionen $f(x) \varepsilon S^\alpha$, resp. $g(x) \varepsilon S^\beta$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus den die Abgeschlossenheit und Vollständigkeit betreffenden Bemerkungen der Einleitung und den Sätzen 2, 3.

Die bisher bewiesenen Sätze sind z. B. auf das trigonometrische und Haar'sche System, auf die Sturm-Liouville'schen Entwicklungen u. s. w. anwendbar. So erhält man z. B. für das trigonometrische System einen Satz von W.-H. Young[20]); dass die Entwicklung einer Funktion aus S^α nach dem Haar'schen System mit der α-ten Potenz im Mittel konvergiert, bemerkte zuerst Herr J. Schauder[21]).

Wir zeigen noch, dass Satz 2, insbesondere die Eigenschaft (17), nicht für jedes System gilt:

Satz 6. Es gibt ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder zeilenfiniten T-Methode und jedem α, $1 < \alpha < \infty$ existiert eine Funktion $f(x) \varepsilon S^\alpha$, für welche

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n[f]\|_\alpha = +\infty,$$

wobei $\sigma_n[f]$ die n-te T-Transformierte der Folge $\{s_i[f]\}$ bedeutet.

Beweis. Wir betrachten ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ welches in S^2 aber in keinem $S^\alpha (\alpha < 2)$ vollständig ist und aus beschränkten Funktionen $\varphi_n(x)$ besteht. Die Existenz eines solchen OS ist z. B.

[20]) Vgl. Encyklopädie II C 10 (Hilb-Riesz) p. 1213.

[21]) Eine Eigenschaft des Haar'schen Orthogonalsystems, Math. Zeitschrift, 27 (1928). Was das Haar'sche OS betrifft vgl. A. Haar: Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. 69 (1910) Kap. III, pp. 361—269.

durch unsere Überlegungen in der Einleitung sichergestellt. Jedes derartige System besitzt bereits die behauptete Eigenschaft.

Angenommen, bei einer gewissen zeilenfiniten T-Methode und einem gewissen α sei für jedes $f(x) \varepsilon S^\alpha$

$$(21) \qquad \|\sigma_n[f]\|_\alpha < L[f] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wir können $\alpha > 2$ annehmen. Die Gleichung

$$\int_0^1 \sigma_n[f]\, g(x)\, dx = \int_0^1 \sigma_n[g] f(x)\, dx$$

gilt für ein beliebiges Paar von Funktionen $f(x)$, $g(x)$ aus konjugierten Bereichen. Wenn (21) für jedes $f(x) \varepsilon S^\alpha$ stattfindet, so folgt

$$\int_0^1 \sigma_n[g] f(x)\, dx \leqslant L[f] \|g(x)\|_\beta \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

für beliebige $f(x) \varepsilon S^\alpha$. Nach einem bekannten Satze ist also

$$\|\sigma_n[g]\|_\beta \leqslant L'[g] \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Für ein $f(x) \varepsilon S^\alpha$, dessen Entwicklung asymptotisch konvergiert, (eine Folge $\{\psi_i(x)\}$ heisst asymptotisch konvergent gegen eine Funktion $\psi(x)$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} |E(|\psi_n(x) - \psi(x)| > \varepsilon)| = 0$ für alle $\varepsilon > 0$ ist), folgt aus (21) die Beziehung

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \|\sigma_n[f] - \sigma_m[f]\|_\delta = 0$$

bei jedem $\delta < \alpha$[22]). Daraus ersieht man, dass für ein gewisses $\delta > 2$, für jede beschränkte Funktion $h(x)$

$$(22) \qquad \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n[h(x)] - h(x)\|_\delta = 0$$

ist. Aus (22) folgt die Abgeschlossenheit von $\{\varphi_i(x)\}$ im Bereiche S^δ also die Vollständigkeit dieses OS in dem zu S^δ konjugierten Bereiche d. h. im Bereiche der mit der $\dfrac{\delta}{\delta - 1}$-ten Potenz $\left(\dfrac{\delta}{\delta - 1} < 2\right)$ integrierbaren Funktionen, was mit der vorausgesetzten Unvollständigkeit des $OS\{\varphi_i(x)\}$ unvereinbar ist.

[22]) Dieser Satz ist mir aus den Vorlesungen des Herrn S. Banach bekannt, einen allgemeineren Satz findet man in der Arbeit der Herren S. Kaczmarz-L. Nikliborc: Sur les suites des fonctions convergentes en moyenne, Fund. Math. 11 (1927) vgl. Satz auf S. 161—162.

Wenn man sich auf *positive* T-Methoden (d. h. solche mit nichtnegativen Koeffizienten) beschränkt, so behält die Behauptung des Satzes 6 auch für $\alpha = 1$, $\alpha = \infty$ ihre Geltung.

§ 3.

Wir kommen noch einmal auf das Problem zurück, auf welches schon in Satz 4 des vorigen § hingedeutet wurde. Wir wollen jedoch von anderen Voraussetzungen ausgehen.

Definition. Eine Zahlenfolge $\lambda \equiv \{\lambda_i\}$ heisse eine Folge vom Typus (α, δ) inbezug auf ein $OS\{\varphi_i(x)\}$, wenn für jede Koeffizientenfolge $\{f_i\}$ einer Funktion $f(x) \varepsilon S^\alpha$ die Folge $\{\lambda_i f_i\}$ die Koeffizientenfolge einer Funktion aus S^δ ist.

Die Menge aller Folgen vom Typus (α, δ) inbezug auf ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ bezeichnen wir mit $T(\alpha, \delta)$.

Allgemeiner kann man die Menge $T(V, V')$ aller Faktorenfolgen betrachten, welche die Koeffizienten einer beliebigen Funktion $f(x)$ aus dem Vektorbereiche V in Koeffizienten einer Funktion aus dem Vektorbereiche V' transformieren[23]).

Satz 7. Voraussetzung. Gegeben sei ein in S^∞ vollständiges $OS\{\varphi_i(x)\}$.

Behauptung. (23) $T(\infty, \infty) \supset T(C, C)$,

(24) $T(\infty, \infty) \supset T(R, R)$

wobei mit R die Menge der im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktionen und mit C, wie schon früher, die der stetigen Funktionen bezeichnet wird.

Beweis. Wir beweisen nur die Beziehung (24); der Beweis von (23) verläuft ganz analog.

1°. Es liegt in der Natur der behandelten Probleme, dass zwei im Riemannschen Sinne integrierbare Funktionen als identisch betrachtet werden, wenn sie nur in einer Nullmenge voneinander verschieden sind. Wenn wir diese Vereinbarung treffen und die Addition von Funktionen aus R, sowie auch ihre Multiplikation mit einer reellen Zahl im gewöhnlichen Sinne definieren, so kann R ersichtlich als ein Vektorbereich betrachtet werden.

[23]) Solche Faktorenfolgen, besonders für den Fall des trigonometrischen OS waren schon Gegenstand vieler Untersuchungen. Berührungspunkte mit den Erörterungen dieses § weist insbesondere eine Arbeit des Herrn M. Riesz auf. (M. Riesz: Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, Acta Math. 49 (1926) pp. 465—407, vgl. insb. pp. 474—491). In dieser Arbeit sind auch Literaturangaben zu finden.

Als Norm wollen wir in R die Norm der beschränkten Funktionen verwenden, d. h. $\|g(x)\|_R = \|g(x)\|_\infty$ für $g(x) \varepsilon R$ setzen.

Das einzige, was eines Beweises bedarf, ist, dass der Bereich R bei dieser Normierung vollständig ist.

Herr C. Carathéodory[24]) hat eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür angegeben, dass für eine beschränkt-messbare Funktion $h(x)$ eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $g(x)$ existieren soll, welche mit $h(x)$ äquivalent ist, d. h. für welche

$$h(x) \doteq g(x).$$

$\chi(x)$ sei die grösste[25]) nach unten halbstetige Funktion welche der Bedingung

$$\chi(x) \dot{\leqslant} h(x)$$

genügt,

$X(x)$ die kleinste[26]) nach oben halbstetige Funktion, für welche

$$X(x) \dot{\geqslant} h(x)$$

gilt.

Die Bedingung des Herrn Carathéodory lautet nun

$$\chi(x) \doteq X(x).$$

Wenn man für die beschränkten Funktionen $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ die entsprechenden Funktionen $\chi_1(x)$, $X_1(x)$, $\chi_2(x)$, $X_2(x)$, $\chi(x)$, $X(x)$ bildet, so gelten, wie leicht einzusehen, die Ungleichungen

$$X(x) \leqslant X_1(x) + X_2(x) \tag{25}$$

$$\chi(x) \geqslant \chi_1(x) + \chi_2(x). \tag{26}$$

Nun sei $\{g_i(x)\}$ eine Folge von Funktionen aus R welche die Bedingung von Cauchy erfüllt:

$$\lim_{p,\, q \to \infty} \|g_p(x) - g_q(x)\|_\infty = 0. \tag{27}$$

[24]) C. Carathéodory: Über die Fourierschen Koeffizienten der nach Riemann integrierbaren Funktionen. Math. Zeit. 1 (1918) pp. 309—320.

[25]) „Die grösste" bedeutet hier Folgendes: Jede nach unten halbstetige Funktion $\psi(x)$ für welche $\psi(x) \dot{\leqslant} h(x)$ gilt, erfüllt die Ungleichung $\psi(x) \leqslant \chi(x)$ überall.

[26]) „Die kleinste" in demselben Sinne wie vorhin die grösste d. h. für jede nach oben halbstetige Funktion $\psi(x)$ welche der Bedingung $h(x) \dot{\leqslant} \psi(x)$ genügt, gilt $X(x) \leqslant \psi(x)$ überall

Die Funktionen $\chi(x)$ und $X(x)$ für $g_n(x)$ bezeichnen wir entsprechend mit $\chi_n(x)$, $X_n(x)$.

Für $p,q > N(\varepsilon)$ ist

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leqq \varepsilon.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Definition und der Eigenschaften (25), (26) der Funktionen $\chi(x)$, $X(x)$

$$|X_p(x) - X_q(x)| \leqq \varepsilon$$
$$|\chi_p(x) - \chi_q(x)| \leqq \varepsilon$$

für $p, q > N(\varepsilon)$ und jedes x (nicht nur fast überall). Die Folge $\{\chi_i(x)\}$ konvergiert also gleichmässig gegen eine nach unten halbstetige Funktion $\overline{\chi}(x)$ und ebenso die Folge $\{X_i(x)\}$ gegen eine nach oben halbstetige Funktion $\overline{X}(x)$. Nach dem angeführten Satze des Herrn Carathéodory ist

$$\chi_n(x) \doteq g_n(x) \doteq X_n(x).$$

Andererseits folgt aus (27) bekanntlich die Existenz einer solchen beschränkten Funktion $h(x)$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(x) - h(x)\|_\infty = 0.$$

Es ist also

$$\overline{\chi}(x) \doteq h(x) \doteq \overline{X}(x)$$

also existiert nach der Caratheodory'schen Bedingung eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $g(x)$, für welche

$$h(x) \doteq g(x),$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(x) - g(x)\|_\infty = 0.$$

2⁰. Es sei $\{\lambda_i\} \varepsilon T(R, R)$. Der Funktion $g(x) \varepsilon R$ mit den Koeffizienten g_n entspricht dann eine einzige Funktion $\varDelta[g(x)]$ aus R mit den Koeffizienten $\lambda_n g_n$. Es ist also in R eine additive Operation $\varDelta[g(x)]$ erklärt, deren Werte dem Bereiche R angehören.

Wir behaupten, dass diese Operation stetig ist. Es genügt zu zeigen, dass die Voraussetzung des angeführten Satzes von Herrn S. Banach[27]) erfüllt sind.

[27]) Vgl. [14]).

Anderenfalls gibt es nämlich in R eine Folge $\{g_i(x)\}$ und eine Funktion $g(x)$, so dass

(28) $$\lim_{n\to\infty} \|g_n(x) - g(x)\|_\infty = 0$$

(29) $$\lim_{n\to\infty} \|\varDelta[g_n(x)]\|_\infty < \|\varDelta[g(x)]\|_\infty.$$

Aus (28) folgt

(30) $$\int_0^1 \varDelta[g(x)]\,\varphi_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \lambda_k \int_0^1 g_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varDelta[g_n(x)]\,\varphi_k(x)\,dx.$$

Anderseits existiert wegen (29) nach Hilfssatz 1 eine beschränkte Funktion $h(x)$, so dass für jedes $f(x) \varepsilon S^1$

(31) $$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \varDelta[g_{n_i}(x)] f(x)\,dx = \int_0^1 h(x) f(x)\,dx$$

(32) $$\underline{\lim}_{i\to\infty} \|\varDelta[g_{n_i}(x)]\|_\infty \geqq \|h(x)\|_\infty.$$

Aus (31) und (30) folgt ähnlich wie bei dem Beweise des Hilfssatzes 2 die Unmöglichkeit von (29). — Es gibt also eine solche Konstante M, dass für alle $g(x) \varepsilon R$ die Ungleichung

(32′) $$\|\varDelta[g(x)]\|_\infty \leqq M \|g(x)\|_\infty$$

gilt.

Es sei $h(x)$ eine beliebige beschränkte Funktion. Dann gibt es bekanntlich eine Folge $\{g_i(x)\}$ von Funktionen aus R (die sogar stetig sind), für welche die folgenden Beziehungen gelten

(33) $$\begin{cases} \|g_n(x)\|_\infty \leqq \|h(x)\|_\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \doteq h(x). \end{cases}$$

Nach (32′) und (33) sind die Normen $\|\varDelta[g_n(x)]\|_\infty$ beschränkt, man kann also eine beschränkte Funktion $b(x)$ angeben, so dass

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \varDelta[g_{n_i}(x)] f(x)\,dx = \int_0^1 b(x) f(x)\,dx$$

für jedes $f(x) \varepsilon S^1$. Setzt man hier $f(x) = \varphi_k(x)$, so beweist man nun leicht mit Hilfe von (33), dass

$$\int_0^1 b(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \lambda_k \int_0^1 h(x)\,\varphi_k(x)\,dx$$

d. h.

$$\varDelta[h(x)] = b(x).$$

Satz 8. Voraussetzung. Gegeben sei ein in C abgeschlossenes $OS\{\varphi_i(x)\}$ von stetigen Funktionen.

Behauptung. (34) $T(C, C) = T(\infty, \infty)$.

Beweis. Analog wie bei Satz 7 beweist man, dass für $\{\lambda_i\} \,\varepsilon\, T(\infty, \infty)$ die Operation $U[h(x)] = \varDelta[h(x)]$ mit dem Definitionsbereich S^∞ und dem Wertebereich S^∞ stetig ist. Jedes Orthogonalpolynom $w(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \varphi_\nu(x)$ wird durch die Faktorenfolge $\{\lambda_i\}$ in ein stetiges Orthogonalpolynom $\varDelta[w(x)]$ transformiert. Wegen der Abgeschlossenheit des $OS\{\varphi_i(x)\}$ in C gibt es eine Folge von Orthogonalpolynomen $\{w_i(x)\}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n(x) - g(x)\|_\infty = 0,$$

also wegen der Stetigkeit von $U[h(x)] = \varDelta[h(x)]$

$$\lim_{n\to\infty} \|\varDelta[w_n(x)] - \varDelta[g(x)]\|_\infty = 0.$$

Für $\varDelta[g(x)]$ kann daher eine stetige Funktion gewählt werden. Folglich ist $\{\lambda_i\} \,\varepsilon\, T(C, C)$, also $T(\infty, \infty) \subset T(C, C)$. Nach dem vorhergehenden Satze ist $T(C, C) \subset T(\infty, \infty)$ also gilt (34).

Satz 9. Voraussetzung. Gegeben sei eine Zahl α, $1 < \alpha < \infty$, ferner ein in S^α vollständiges $OS\{\varphi_i(x)\}$, dessen Funktionen $\varphi_n(x)$ mit der Potenz α (und wegen der Vollständigkeit in S^α auch mit der konjugierten Potenz β) integrierbar sind.

Behauptung. (35) $T(\alpha, \alpha) \subset T(\beta, \beta)$.

Satz 10. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ erfülle die Voraussetzung von Satz 9 mit einer solchen Zahl α, dass $1 < \alpha \leqslant 2$.

Behauptung. (36) $T(\alpha, \alpha) = T(\beta, \beta)$

(37) $T(\delta, \delta) \supset T(\alpha, \alpha)$

für jedes δ zwischen α und β.

Satz 11. Voraussetzung. Gegeben sei ein in C abgeschlossenes $OS\{\varphi_i(x)\}$ von beschränkten Funktionen.

Behauptung. (38) $T(1, 1) = T(\infty, \infty)$

(39) $T(\delta, \delta) \supset T(1, 1)$

für jedes δ zwischen 1 und ∞.

Beweis 1°. Durch eine der vorhergehenden analoge Schlussweise beweist man unter Berücksichtigung der Beweismethode des Hilfssatzes 2, resp. der Bemerkung zum Hilfssatz 2 Folgendes: Für ein gegebenes $\{\lambda_i\} \,\varepsilon\, T(\alpha, \alpha)$ gibt es eine solche Konstante M, dass

(40) $$\|\varDelta[f(x)]\|_\alpha \leqslant M \|f(x)\|_\alpha.$$

Auf Grund dieser Ungleichung hat man also für jedes $g(x) \,\varepsilon\, S^\beta$

$$\int_0^1 \varDelta[f(x)]\,g(x)\,dx \leqslant M\,\|g(x)\|_\beta \|f(x)\|_\alpha.$$

Es ist also (im Falle $1 \leqslant \alpha < \infty$) $\int_0^1 \varDelta[f(x)]\,g(x)\,dx$ eine in S^α definierte additive stetige Operation, deren Wertebereich die reellen Zahlen bilden. Es existiert also eine Funktion $\varDelta^*[g(x)] \,\varepsilon\, S^\beta$, für welche

$$\int_0^1 \varDelta^*[g(x)]\,f(x)\,dx = \int_0^1 \varDelta[f(x)]\,g(x)\,dx.$$

Indem man $f(x) = \varphi_k(x)$ setzt, findet man

$$\int_0^1 \varDelta^*[g(x)]\,\varphi_k(x)\,dx = \lambda_k \int_0^1 g(x)\,\varphi_k(x)\,dx.$$

2°. Über den Beweis, dass $T(\infty, \infty) \subset T(1, 1)$ wollen wir folgendes bemerken: Wenn $\{\lambda_i\} \,\varepsilon\, T(\infty, \infty)$, so gilt (40) für jedes $h(x) \,\varepsilon\, S^\infty$ (wobei in (40) $\alpha = \infty$ zu setzen ist). Für jedes $h(x) \,\varepsilon\, S^\infty$ und ein bestimmtes $f(x) \,\varepsilon\, S^1$ ist also

(41) $$\int_0^1 \varDelta[h(x)]\,f(x)\,dx \leqslant M\,\|h(x)\|_\infty \|f(x)\|_1.$$

Die Menge der Orthogonalpolynome ist überalldicht in S^1. Angenommen, es sei

(42) $$\lim_{n\to\infty} \| w_n(x) - f(x) \|_1 = 0$$

$$w_n(x) = \sum_{\nu=1}^{N(n)} \mu_\nu^{(n)} \varphi_\nu(x).$$

Da

$$\int_0^1 \Delta[h(x)]\, w_n(x)\, dx = \int_0^1 \Delta^*[w_n(x)]\, h(x)\, dx$$

$$\Delta^*[w_n(x)] = \sum_{\nu=1}^{N(n)} \lambda_\nu \mu_\nu^{(n)} \varphi_\nu(x)$$

so folgt aus (41) und (42) für jedes $h(x) \,\varepsilon\, S^\infty$ die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Delta^*[w_n(x)]\, h(x)\, dx.$$

Nach einem Hilfssatze des Herrn H. Steinhaus [28]) existiert also eine Funktion $\Delta^*[f(x)] = \bar{f}(x) \,\varepsilon\, S^1$, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Delta^*[w_n(x)]\, h(x)\, dx = \int_0^1 \Delta^*[f(x)]\, h(x)\, dx.$$

Indem wir in dieser Gleichung $h(x) = \varphi_k(x)$ setzen, erhalten wir mit Rücksicht auf (42)

$$\int_0^1 \Delta^*[f(x)]\, \varphi_k(x)\, dx = \lambda_k \int_0^1 f(x)\, \varphi_k(x)\, dx.$$

3^0. (37), (39) folgt unmittelbar aus einem Satz von Herrn M. Riesz [29]).

Von den Mengen $T(\alpha, \alpha)$ mit beliebigem α ist zur Zeit nicht viel positives bekannt. Als ein abschliessendes Ergebnis wäre erst die Kenntnis der die Menge $T(\alpha, \alpha)$ für ein gegebenes $OS\{\varphi_i(x)\}$ charakterisierenden Bedingungen zu betrachten. Nur im Sonderfalle $\alpha = 2$ kann dieses Problem als vollständig erledigt gelten. Aus dem Riesz-Fischer'schen Satze folgt nämlich unmittelbar, dass eine Folge dann und nur dann in $T(2, 2)$ (für

[28]) Steinhaus, Dévéloppements orth. p. 14.
[29]) (Vgl. die unter [23]) genante Arbeit, Théor. VI. p. 481.

ein beliebiges OS) enthalten ist, wenn sie beschränkt ist. Wenn also ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ die Voraussetzungen von Satz 10 resp. 11 erfüllt, so wissen wir jedenfalls, dass $T(\alpha, \alpha)$ nur aus beschränkten Folgen besteht. Man kann jedoch fragen, wann es eine beschränkte Folge gibt, welche der Menge $T(\alpha, \alpha)$ nicht angehört. Diese Frage werden wir nur in einem einfachen Falle beantworten.

Satz 12. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besteht aus beschränkten Funktionen und ist in S^∞ vollständig.

Behauptung. Es gibt eine gegen Null konvergente Zahlenfolge, welche in $T(\infty, \infty)$ nicht enthalten ist.

Beweis. Angenommen, es sei $T(\infty, \infty) \supset \Gamma^\infty$. Wir betrachten eine bestimmte beschränkte Funktion $h(x)$; ihre Koeffizienten seien h_n. Wir definieren eine Operation $U[\{\lambda_i h_i\}] = h_\lambda(x)$, wobei $h_\lambda(x)$ diejenige beschränkte Funktion bedeutet, in welche $h(x)$ durch die Faktorenfolge $\{\lambda_i\} \,\varepsilon\, \Gamma^\infty$ transformiert wird; $h_\lambda(x)$ hat also die Koeffizienten $\{\lambda_i h_i\}$. — $U[\{\lambda_i h_i\}]$ ist also eine additive Operation, deren Definitionsbereich die Menge aller Folgen $\{\lambda_i h_i\}$ ist (wobei $\{\lambda_i\}$ beliebig in Γ^∞ variert), und deren Wertebereich in S^∞ enthalten ist. Aus dem Hilfssatz 2 folgt die Stetigkeit dieser Operation falls man die Norm von $\{\lambda_i h_i\}$ als $\max |\lambda_{n_i}|$ definiert wobei n_i alle, der Bedingung $h_{n_i} \neq 0$ genügende Indices bedeuten. Daraus folgert man, dass für jede Folge $\{\lambda_i\} \,\varepsilon\, \Gamma^\infty$ die Beziehung

(43) $$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu h_\nu \varphi_\nu(x) - h_\lambda(x) \right\|_\infty = 0$$

gilt.

Aus der Stetigkeit unserer Operation und dieser Beziehung folgt

a) $OS\{\varphi_i(x)\}$ ist vollständig in S^2;

b) es existiert eine solche Menge M vom Mass 1, dass die Entwicklung einer beliebigen beschränkten Funktion für jedes $x \,\varepsilon\, M$ (sogar absolut) konvergiert [30]).

[30]) Die Existenz einer solchen Menge kann folgendermassen nachgewiesen werden: $\{M_i\}$ sei eine Folge von Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

a) $$|\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n| = 1;$$

Da sich jedoch leicht zeigen lässt [31]), dass ein $OS\,\{\varphi_i(x)\}$ nicht gleichzeitig beide Eigenschaften a) und b) aufweisen kann, so sind wir zu einem Widerspruch gelangt.

Mit Hilfe der Theorie der linearen Operationen können noch manche andere Probleme behandelt werden, welche Faktorenfolgen aus verschiedenen $T(V, V')$ betreffen.

Es ist z. B. bekannt, dass für das Haar'sche OS jede monotone Folge, oder allgemeiner jede Folge mit beschränkter Variation (d. h. mit $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}| < +\infty$) zur Menge $T(\infty, \infty)$ gehört, während dies für das trigonometrische OS nicht mehr gilt. Nun kann man leicht folgendes zeigen: Für ein in S^∞ vollständiges $OS\,\{\varphi_i(x)\}$, das aus beschränkten Funktionen besteht, gehört jede Folge mit beschränkter Varation dann und nur dann zur Menge $T(\infty, \infty)$, wenn

$$\int_0^1 \Big| \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(t) \Big| \, dx < A \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Gerade diese Bedingung ist zwar für das Haarsche, nicht aber für das trigonometrische OS erfüllt.

Ein anderes Beispiel: Wir betrachten ein aus beschränkten Funktionen bestehendes (nicht notwendig vollständiges) $OS\,\{\varphi_i(x)\}$. Angenommen wir hätten für abzählbar viele Zahlen α_n $(1 < \alpha_n \leqslant \infty)$ je eine beschränkte Faktorenfolge $\{\lambda_i^{(\alpha_n)}\}$ gefunden, welche zur entsprechenden Menge $T(\alpha_n, \alpha_n)$ nicht gehört. Dann kann der folgende „Verdichtungssatz" ausgesprochen werden: Es gibt eine beschränkte Faktorenfolge $\{\lambda_i\}$ welche keinem $T(\alpha_n, \alpha_n)$ angehört. Unter der zusätzlichen

b) der Durchschnitt von M_n mit einem beliebigen Intervall ist leer oder von positivem Masse;

c) jede Funktion $\varphi_i(x)$ ist in jeder Menge M_n stetig.

Die Existens einer solchen Folge $\{M_i\}$ kann leicht mit Hilfe des bekannten Łuzinschen Satzes (Vgl. z. B. Fund. Math. III (1922) W. Sierpiński: Démonstrations de quelques théoremes...) sichergestellt werden. Aus (43), b), c), folgt nun, dass die Entwicklung einer beliebigen beschränkten Funktion in jeder Menge M_n also auch in $M = \underline{\lim}_{n\to\infty} M_n$ absolut konvergiert.

[31]) Vgl. W. Orlicz: Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull Ac. Pol. 1927. p. 98. Bemerkung z. Satze 2.

Voraussetzung der Abgeschlossenheit in C von $OS\,\{\varphi_i(x)\}$ kann auch der Fall $\alpha = 1$ zugelassen werden.

§ 4.

Gegeben sei ein $OS\,\{\varphi_i(x)\}$. Wir setzen voraus, dass für jedes $f(x)$ aus S^δ die Koeffizienten der Entwicklung nach $\{\varphi_i(x)\}$ einem Sinn haben. Die Gesammtheit der entsprechenden Koeffizientenfolgen nennen wir $\Omega\,(\delta)$.

Man kann u. a. fragen, für welche OS zwischen Γ und Ω eine der folgenden Beziehungen besteht. Wir bezeichnen wie gewöhnlich mit α, β konjugierte Exponenten und es soll dabei, wie überall im folgenden $\alpha \leqslant \beta$ sein, so dass $1 \leqslant \alpha \leqslant 2, \beta \geqslant 2$.

I$_1$ $\quad \Omega\,(\alpha) \subset \Gamma^\beta.$

I$_2$ $\quad \Omega\,(\beta) \supset \Gamma^\alpha.$

II$_1$ $\quad \Omega\,(\alpha) \subset \Gamma^\beta$

aber für jedes $1 \leqslant \delta < \beta$

$\Omega\,(\alpha) \not\subset \Gamma^\delta.$

II$_2$ $\quad \Omega\,(\beta) \supset \Gamma^\alpha$

aber für jedes $\delta > \alpha$

$\Omega\,(\beta) \not\supset \Gamma^\delta.$

III$_1$ a) $\Omega\,(\beta) \not\subset \Gamma^\alpha.$

b) $\Omega\,(\beta) \not\subset \Gamma^\delta$

für jedes $1 \leqslant \delta < 2.$

III$_2$ a) $\Omega\,(\alpha) \not\supset \Gamma^\beta.$

b) $\Omega\,(\alpha) \not\supset \Gamma^\delta$

für jedes $\delta > 2.$

Kein einziges dieser Probleme wurde bisher vollständig erledigt. Die Probleme I sind für den Spezialfall $\alpha = \beta = 2$ durch den Riesz-Fischer'schen Satz gelöst. In dem Spezialfall $\alpha = 1, \beta = \infty$ ist die gleichmässige Beschränktheit der $\varphi_n(x)$ als notwendige und hinreichende [32]) Bedingung für I$_1$ und als (triviale) hinreichende Bedingung für I$_2$ bekannt. Diese Bedingung ist nach F. Riesz [33]) auch hinreichend für beliebige konjugierte α, β. Ob

[32]) Vgl. dazu die unter [6]) genannte Arbeit des Herrn H. Hahn, Satz XVIIIa p. 40. bzw. J. Mercer, London Phil. Trans. A 211 (1912) pp. 111–118.

[33]) F. Riesz: Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel, Math. Zeit 18. (1923) pp. 117–124.

das Problem II. Gegenstand von Untersuchungen war, ist uns nicht bekannt. Die Eigenschaften III_1 und III_2 wurden für einige OS wie z. B. für das trigonometrische OS[34]) und das Haarsche OS[35]) bewiesen. Einige Bemerkungen über III_1 a) findet man in der unter [31]) zitierten Note.

In diesem § befassen wir uns hauptsächlich mit den Beziehungen zwischen diesen verschiedenen Problemen. Obgleich die Existenzfragen nur zum kleinen Teil erledigt sind, bietet die Untersuchung dieser Beziehungen ein gewisses Interesse.

Satz 13. Voraussetzung. Gegeben sei ein $OS\{\varphi_i(x)\}$, dessen Funktionen mit der β-ten Potenz integrierbar sind, und für welche

$$\Omega(\alpha) \subset \Gamma^\beta \qquad \text{(Eigenschaft } \mathrm{I}_1).$$

Behauptung. 1⁰. Es gibt eine Konstante $K > 0$, so dass für jedes $f(x)$ aus S^α

$$\| \{f_i\} \|_\beta \leqslant K \| f(x) \|_\alpha \tag{44}$$

gilt.

2⁰. Es ist

$$\Omega(\beta) \supset \Gamma^\alpha \qquad \text{(Eigenschaft } \mathrm{I}_2)$$

dh. aus I_1 folgt I_2.

Beweis. 1⁰. Die Operationen

$$U_n[f(x)] = \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_0^1 f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx \right|^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}} \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

sind quasilinear und stetig in S^α. Aus $\Omega(\alpha) \subset \Gamma^\beta$ und Hilfssatz 3 (angewandt auf die Folge $\{U_i[f]\}$) folgt (44).

2⁰. Für ein beliebiges $\{g_i\}$ aus Γ^α und ein beliebiges $\{f_i\}$ aus $\Omega(\alpha)$ folgt wegen I_1 die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu f_\nu$, was nach dem Satze 3′ [36]) $\Omega(\beta) \supset \Gamma^\alpha$ ergibt.

---

[34]) T. Carleman: Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, Acta Mathematica 41 (1918) pp. 377–384. G. H. Hardy — J. E. Littlewood: Some problems of Diophantine approximation, Acta Math. 37 (1914) pp. 155–238.

[35]) l. c. [31]) p. 105.

[36]) Man bemerke, dass die Behauptung des Satzes 3′ für ein gegebenes α schon dann gilt, wenn man nur voraussetzt, dass die $\varphi_n(x)$ mit der β-ten Potenz integrierbar sind.

Satz 14. Voraussetzung. Gegeben sei ein in S^β vollständiges OS $\{\varphi_i(x)\}$ dessen Funktionen in S^β enthalten sind. Es sei ausserdem

$$\Omega(\beta) \supset \Gamma^\alpha \qquad \text{(Eigenschaft } \mathrm{I}_2).$$

Behauptung. 1⁰. Es gibt eine solche Konstante $K' > 0$, dass

$$\| g(x) \|_\beta \leqslant K' \| \{g_i\} \|_\alpha. \tag{45}$$

2⁰. Es gilt

$$\Omega(\alpha) \subset \Gamma^\beta \qquad \text{(Eigenschaft } \mathrm{I}_1)$$

d. h. aus I_2 folgt I_1.

Beweis. 1⁰. Um den Hilfssatz 2 anzuwenden, wählen wir für Γ den Bereich Γ^α und ersetzen den dort vorkommenden Bereich S^α durch S^β was zulässig ist, da doch in Hilfssatz 2 α eine beliebige Zahl > 1 sein darf. Nach Hilfssatz 2 ist also die entsprechend definierte Operation $U(\gamma)$ stetig, woraus (45) folgt [37]).

2⁰. $f(x)$ sei eine Funktion aus S^α und $\{g_i\} \varepsilon \Gamma^\alpha$ die Koeffizientenfolge einer Funktion $g(x) \varepsilon S^\beta$.

Aus (6) ergibt sich sodann

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x)\, s_n[g(x)]\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$$

für jede Folge $\{g_i\} \varepsilon \Gamma^\alpha$. Nach einem bekannten Satze von Herrn Landau ist also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu|^\beta < +\infty$$

oder $\{f_i\} \varepsilon \Gamma^\beta$ [38]).

---

[37]) Wenn wir in Satz (14) die Voraussetzung der Vollständigkeit des OS $\{\varphi_i(x)\}$ weglassen, dann folgt aus $\Omega(\beta) \supset \Gamma^\alpha$ nur die Existenz einer solchen Konstante K', dass es für jede Folge $\{g_i\} \varepsilon \Omega(\alpha)$ eine Funktion $g(x)$ mit $g_n = \int_0^1 g(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ gibt, für welche (45) gilt. Bei uns ist dagegen $g(x)$ einzig.

[38]) Wenn für ein in S^β vollständiges $OS\{\varphi_i(x)\}$ mit $\varphi_i(x) \varepsilon S^\beta$ z. B. I_2 also auch I_1 gilt, dann sind, wie man leicht nachweist, die kleinsten in den Ungleichungen (44) und (45) anwendbaren Konstanten K und K' identisch.

Satz 15. V o r a u s s e t z u n g. Das OS $\{\varphi_i(x)\}$ bestehe aus mit der Potenz β integrierbaren Funktionen und es sei

$$\Omega(\alpha) \subset \Gamma^{\beta}$$

jedoch für $1 \leqslant \delta < \beta$ (Eigenschaft II_1)

$$\Omega(\alpha) \not\subset \Gamma^{\delta}.$$

B e h a u p t u n g. Es gibt eine Funktion $f(x) \,\varepsilon\, S^{\alpha}$, so dass für jedes δ mit $1 \leqslant \delta < \beta$ die Beziehung

---

Der Inhalt der Sätze 13 und 14 ist im Falle gleichmässig beschränkter OS in dem oben erwähnten Satze von F. Riesz enthalten. Ob es nicht gleichmässig beschränkte OS gibt, welche eine der Eigenschaften I_1, I_2 besitzen ist mir nicht bekannt.

Für $\alpha = 1$, $\beta = \infty$ folgt aus Satz 14:

Ein in S^{∞} vollständiges, aus beschränkten Funktionen bestehendes OS besitzt dann und nur dann die Eigenschaft I_2, wenn seine Funktionen gleichmässig beschränkt sind.

Es ist leicht ein Beispiel eines (sogar in C abgeschlossenen) OS zu geben, welches für kein α die Eigenschaften I_1, I_2 besitzt. Ein derartiges OS ist z. B. das H a a r s c h e System. Wir beweisen dies nach Herrn Z. Ł o m n i c k i folgendermassen:

Sind die Funktionen des H a a r s c h e n OS, wie bei ihrer Konstruktion, zu Gruppen von je 2^n aufeinanderfolgender Funktionen zusammengefasst, so setzen wir $a_\nu = \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta}}$ wenn ν der Index der vorletzten Funktionen der n-ten Gruppe ist und sonst $a_\nu = 0$. Man hat

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} < +\infty.$$

Ist m der Index einer Funktion der N-ten Gruppe so ist

$$\int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu\, \varphi_\nu(x)\right|^{\beta} dx = \sum_{n=1}^{N} \int_{i_n} \left|\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta}} 2^{\frac{n}{2}}\right|^{\beta} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{-1} \frac{2}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{N} 1 = N.$$

Daher ist $\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, \varphi_\nu(x)\right|^{\beta} dx = +\infty$, also folgt nach Satz 1, dass die Orthogonalentwicklung keiner Funktion aus S^{β} mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, \varphi_\nu(x)$ identisch ist. Das Haarsche OS besitzt folglich nicht die Eigenschaft I_2 also wegen Satz 13 auch nicht die Eigenschaft I_1.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu|^{\delta} = +\infty \tag{46}$$

gilt.

Von einem OS, für welches eine solche Funktion $f(x)$ existiert, wollen wir der Kürze wegen sagen, das System weise die Singularität C_{β}^{α} auf.

Beweis. Wir wählen eine Zahlenfolge $\{\delta_i\}$, $1 \leqslant \delta_n < \beta$, $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \beta$. Wir erklären die quasilinearen in S^{α} stetigen Operationen

$$U_{pq}[f(x)] = \left(\sum_{\nu=1}^{q} \left|\int_0^1 f(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx\right|^{\delta_p}\right)^{\frac{1}{\delta_p}}.$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt mit Hilfe des Hilfssatzes 3 die Existenz einer solchen Funktion $f(x) \,\varepsilon\, S^{\alpha}$, dass für jedes p

$$\lim_{q\to\infty} U_{pq}[f(x)] = +\infty.$$

Dieses $f(x)$ hat also schon die Eigenschaft (46).

Satz 16. V o r a u s s e t z u n g. Das OS $\{\varphi_i(x)\}$ genügt der Bedingung:

$$\Omega(\beta) \supset \Gamma^{\alpha}$$

aber es ist für jedes $\delta > \alpha$ (Eigenschaft II_2).

$$\Omega(\beta) \not\supset \Gamma^{\delta}.$$

B e h a u p t u n g. Es gibt eine Folge $\{c_i\}$, welche nicht zu $\Omega(\beta)$ gehört und für welche

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^{\delta} < +\infty \tag{47}$$

bei jedem $\delta > \alpha$.

Von einem OS, für welches eine solche Folge $\{c_i\}$ existiert, wollen wir sagen, es weise die Singularität H_{α}^{β} auf.

Beweis. Da wir die Vollständigkeit des OS $\{\varphi_i(x)\}$ nicht voraussetzen, kann einer gegebenen Zahlenfolge $\{c_i\}$ aus $\Omega(\beta)$ mehr als eine Funktion entsprechen, deren Koeffizienten die c_n sind. Wir bezeichnen mit $f^*(x)$ diejenige dieser Funktionen, für welche $\|f(x)\|_\beta$ möglichst klein ist. Die Existenz einer einzigen solchen Funktion folgt leicht mit Benutzung des Hilfssatzes 1.

Es bedeute $F_\delta^{(n)}$ die Gesamtheit derjenigen Zahlenfolgen aus Γ^δ welche $\Omega(\beta)$ angehören und der Beziehung

$$\|f^*(x)\|_\beta \leqslant n$$

genügen. Man beweist leicht auf Grund des Hilfssatzes 1, dass die Mengen $F_\delta^{(n)}$ abgeschlossen sind.

Für ein gegebens $\delta\ (\delta > \alpha)$ ist jedes $F_\delta^{(n)}$ nirgends dicht in Γ^δ (wobei natürlich der Begriff einer nirgends dichten Menge im Sinne der für Γ^δ festgesetzten Normierung zu verstehen ist). Wäre nämlich eine dieser Mengen nicht nirgends dicht, so wäre sie überalldicht in einer Kugel, würde also (da sie abgeschlossen ist) diese Kugel enthalten und da $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\delta^{(\nu)}$ ein Vektorbereich ist wäre ganz Γ^δ in $\Omega(\beta)$ enthalten, gegen die Voraussetzung.

Wir wählen eine monotone Folge $\{\delta_i\}$ mit $\delta_n > \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \alpha$.

Die Menge $F_{\delta_1}^{(1)}$ ist nirgendsdicht in Γ^{δ_1} es gibt also eine Zahlenfolge $\gamma_1 \varepsilon \Gamma^{\delta_1}$ und ein r_1 $(0 < r_1 < 1)$ so dass

$$\gamma_1 \varepsilon \prod_{\delta > \alpha} \Gamma^\delta$$

und keine der Bedingung

$$\|\gamma - \gamma_1\|_{\delta_1} \leqslant r_1$$

genügende Zahlenfolge γ aus Γ^{δ_1} der Menge $F_{\delta_1}^{(1)}$ angehört. Wir bezeichnen die Gesamtheit der letzteren Zahlenfolgen mit K_1. Die Menge $K_1 . \Gamma^{\delta_2}$ enthält offenbar eine Kugel mit dem Mittelpunkt γ_1. Da $F_{\delta_2}^{(2)}$ nirgends dicht in Γ^{δ_2} ist, gibt es eine in dieser Kugel enthaltene Zahlenfolge $\gamma_2\ (\gamma_2 \varepsilon \Gamma^{\delta_2})$ und eine Zahl r_2, $0 < (r_2)^{\frac{\alpha}{\delta_1}} < \frac{r_1}{2^2}$ so, dass

$$\gamma_2 \varepsilon \prod_{\delta > \alpha} \Gamma^\delta$$

$$\|\gamma_2 - \gamma_1\|_{\delta_1} \leqslant \frac{r_1}{2}$$

und dass keine Folge γ aus Γ^{δ_2}, für welche

$$\|\gamma - \gamma_2\|_{\delta_2} \leqslant r_2,$$

der Menge $F_{\delta_2}^{(2)}$ angehört. Die Gesamtheit der letzteren Zahlenfolgen bezeichnen wir mit K_2. So fortfahrend erhalten wir drei Folgen $\{\gamma_i\}$, $\{r_i\}$, $\{K_i\}$ welche nach Definition folgende Eigenschaften besitzen:

(a) $\gamma_n \varepsilon \prod\limits_{\delta > \alpha} \Gamma^\delta$ $\qquad (n = 1, 2, 3\dots)$

(b) $\|\gamma_{n+1} - \gamma_n\|_{\delta_n} \leqslant \frac{r_n}{2}$ $\qquad (n = 1, 2, 3\dots)$

(c) K_n bedeutet die Gesamtheit der Zahlenfolgen γ, die der Ungleichung

$$\|\gamma - \gamma_n\|_{\delta_n} \leqslant r_n$$

genügen. Es ist dabei

$$K_n \subset \Gamma^{\delta_n}, \quad K_{n+1} \subset K_n, \quad K_n . F_{\delta_n}^{(n)} = 0$$
$$(n = 1, 2, 3\dots)$$

(d) $(r_{n+1})^{\frac{\alpha}{\delta_1}} < \frac{r_n}{2^2}$ $\qquad (n = 1, 2, \dots).$

Die Reihe

$$\|\gamma_1\|_{\delta_n} + \|\gamma_2 - \gamma_1\|_{\delta_n} + \|\gamma_3 - \gamma_2\|_{\delta_n} + \dots$$

ist wegen (b), (c) und (d) für alle n konvergent. Es gibt also ein $\gamma \varepsilon \prod\limits_{\delta > \alpha} \Gamma^\delta$, so dass

$$\|\gamma - \gamma_n\|_{\delta_n} \leqslant \frac{1}{2} r_n + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{\delta_1}}} (r_n + r_{n+1} + \dots) \leqslant r_n.$$

D. h. die Folge γ ist in sämtlichen K_n enthalten. Dagegen gehört γ der Menge $\Omega(\beta)$ nicht an. Denn andernfalls müsste diese Folge für ein festes N sämtlichen $F_{\delta_i}^{(N)}$ angehören, was mit der Eigenschaft $K_n . F_{\delta_n}^{(n)} = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ unvereinbar ist. Diese Folge γ besitzt die behaupteten Eigenschaften.

Satz 17. Voraussetzung. Für das $OS\,\{\varphi_i(x)\}$ ist

$$\Omega(\beta) \not\subset \Gamma^\delta \qquad \text{(Eigenschaft III}_1\text{ b))}$$

bei jedem δ, mit $1 \leqslant \delta < 2$.

Behauptung. Es existiert eine Funktion $f(x) \varepsilon S^\beta$, so dass für jedes δ, $1 \leqslant \delta < 2$ die Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu|^\delta = +\infty$$

gilt.

Der Beweis ganz analog wie bei Satz 15.

Von einem OS, für welches eine solche Funktion $f(x)$ existiert, sagen wir, es weise die Singularität C^β auf. Wenn es für das $OS\{\varphi_i(x)\}$ nur eine solche Funktion $f(x)\,\varepsilon\, S^\beta$ gibt, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty}|f_\nu|^\alpha=+\infty$ (Eigenschaft III_1 a)), so wollen wir sagen, das System weise die Singularität c^β auf.

Satz 18. Voraussetzung. Gegeben sei eine Zahl $\alpha>1$ und ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ von mit der Potenz β integrierbaren Funktionen, welches für alle $\delta>2$ der Bedingung.

$$\Omega(\alpha) \supset \Gamma^\delta \qquad \text{(Eigenschaft } \mathrm{III}_2 \text{ b) für } \alpha>1)$$

genügt.

Behauptung. Es gibt eine solche Folge $\{c_i\}$ welche nicht zu $\Omega(\alpha)$ gehört, dass für jedes $\delta>2$ die Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^\delta<+\infty$$

gilt.

Satz 18'. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besteht aus beschränkten Funktionen, ist im Bereiche C abgeschlossen und besitzt für $\alpha=1$ die Eigenschaft III_2 b).

Behauptung. Die Behauptung des Satzes 18 gilt auch für den Grenzfall $\alpha=1$.

Wenn für ein OS eine solche Folge $\{c_i\}$ existiert, sagen wir, das OS weise die Singularität H^α auf. Wenn eine Folge $\{c_i\}$ existiert, welche nur die Eigenschaft $\{c_i\}\,\varepsilon\,\Gamma^\beta$ besitzt und zum $\Omega(\alpha)$ nicht gehört, so sagen wir, das $OS\{\varphi_i(x)\}$ weise die Singularität h^α auf (Eigenschaft III_2 a)).

Satz 19. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besteht aus mit der Potenz β integrierbaren Funktionen und besitzt die Eigenschaften I_1 und II_2.

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitzt auch die Eigenschaft II_1.

Beweis. Angenommen II_1 gelte nicht, das heisst, es sei $\Omega(\alpha)\subset\Gamma^\delta$ für ein gewisses δ, $1\leqslant\delta<\beta$. Für jedes $f(x)\,\varepsilon\,S^\alpha$ konvergiert also die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\,g_\nu,$$

wobei $\{g_i\}$ eine beliebige Folge aus dem zu Γ^δ konjugierten Bereich $\Gamma^{\frac{\delta}{\delta-1}}$ bedeutet; (es ist $\frac{\delta}{\delta-1}>\alpha$). Nach Satz 3' ist $\sum_{\nu=1}^{\infty}g_\nu\varphi_\nu(x)$ die Orthogonalentwicklung einer Funktion $g(x)\,\varepsilon\,S^\beta$, also

$$\Gamma^{\frac{\delta}{\delta-1}}\subset\Omega(\beta)$$

was wegen II_2 unmöglich ist.

Satz 20. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besteht aus mit der Potenz β integrierbaren Funktionen, ist in S^β vollständig und besitzt die Eigenschaft II_1.

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitzt auch die Eigenschaft II_2.

Beweis. Da $\Omega(\alpha)\subset\Gamma^\beta$, so ist auch nach Satz 13 $\Omega(\beta)\supset\Gamma^\alpha$. Angenommen das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitze die Eigenschaft II_2 nicht, d. h. es sei $\Omega(\beta)\supset\Gamma^\delta$ für ein gewisses $\delta>\alpha$. Auf Grund des Hilfssatzes 2 zeigt man, ähnlich wie im Beweise von Satz 14, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\,g_\nu \tag{48}$$

für jede Folge $\{g_i\}\,\varepsilon\,\Gamma^\delta$ und eine beliebige Koeffizientenfolge $\{f_i\}\,\varepsilon\,\Omega(\alpha)$ konvergiert (sogar absolut konvergiert). Daraus folgt $\{f_i\}\,\varepsilon\,\Gamma^{\frac{\delta}{\delta-1}}$ $\left(\frac{\delta}{\delta-1}<\beta\right)$ also $\Omega(\alpha)\subset\Gamma^{\frac{\delta}{\delta-1}}$, was der Eigenschaft II_1 widerspricht.

Satz 20'. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ genügt der Bedingung (13), wobei die in (13) zugrundegelegte T-Methode als positiv vorausgesetzt wird [39]), und besitzt die Eigenschaft II_1.

Behauptung. Das $OS\{(\varphi_i x)\}$ besitzt auch die Eigenschaft II_2.

Beweis. Es ist wieder $\Omega(\beta)\supset\Gamma^\alpha$. Wäre $\Omega(\beta)\supset\Gamma^\delta$ für ein $\delta>\alpha$, so wäre nach Satz 3 die Reihe (48) bei beliebigem $\{g_i\}\,\varepsilon\,\Gamma^\delta$ und ebenfalls beliebigen $\{f_i\}\,\varepsilon\,\Omega(\alpha)$ summierbar mit der gegebenen positiven T-Methode, also auch konvergent im gewöhnlichen Sinne. Der Beweis wird nun genau wie bei Satz 20 zu Ende geführt.

[39]) Eine T-Methode heisst positiv, wenn ihre Koeffizienten $b_{pq}\geqslant 0$ sind.

Korollar. Aus den Sätzen 15, 16 einerseits und den Sätzen 19, 20, 20' andererseits folgert man leicht:

Unter den Voraussetzungen des Satzes 19 hat die Singularität H_α^β die Singularität C_β^α zur Folge. Ebenso folgt unter den Voraussetzungen des Satzes 20 resp. 20' aus der Singularität C_β^α die Singularität H_α^β.

Satz 21. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besteht aus mit der Potenz β integrierbaren Funktionen und besitzt die Eigenschaft III_2 a).

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitzt die Eigenschaft III_1 a).

Satz 22. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besteht aus mit der Potenz β integrierbaren Funktionen und besitzt die Eigenschaft III_2 b).

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitzt auch die Eigenschaft III_1 b).

Die Beweise dieser Sätze verlaufen ganz analog wie bei Satz 19.

Satz 23. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ ist im Bereiche S^α vollständig und besitzt die Eigenschaft III_1 a) mit einem $\alpha > 1$.

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitzt auch die Eigenschaft III_2 a).

Satz 24. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ ist in S^α vollständig und besitzt die Eigenschaft III_1 b) mit einem $\alpha > 1$.

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitzt auch die Eigenschaft III_2 b).

Satz 24'. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besteht aus beschränkten Funktionen, ist im Bereiche C abgeschlossen und besitzt die Eigenschaft III_1 a) [resp. III_1 b)] im Grenzfalle $\alpha = 1$.

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitzt auch die Eigenschaft III_2 a) [resp. III_2 b)].

Satz 24''. Voraussetzung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ genügt der Bedingung (13), wobei die in (13) zugrundegelegte T-Methode als positiv vorausgesetzt sei, ferner besitzt es die Eigenschaft III_1 a) [III_1 b)] [40]).

[40]) Wir wollen noch den Unterschied zwischen der Voraussetzung der Vollständigkeit resp. Abgeschlossenheit eines $OS\{\varphi_i(x)\}$ und der Vorausse-

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ besitzt auch die Eigenschaft III_2 a) [III_2 b)].

Die Beweise dieser Sätze verlaufen ganz ähnlich wie die vorhergehenden und stützen sich auf Satz 3, resp. Hilfssatz 2 (Bemerkung dazu).

Korollar. Ohne in jedem einzelnen Falle die Voraussetzungen genau aufzuzählen, kann man im Allgemeinen auf Grund der Sätze 17, 18, 18' einerseits und der Sätze 21, 22 resp. 23—24'' anderseits den folgenden Zusammenhang feststellen: Wenn ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ die Singularität h^α (resp. H^α) aufweist, so weist es auch die Singularität c^β (resp. C^β) auf und umgekehrt [41]).

Satz 25. Voraussetzung. Die Funktionen des $OS\{\varphi_i(x)\}$ sind gleichmässig beschränkt (mit Ausschlus einer Nullmenge).

Behauptung. Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ weist die Singularität c^∞ auf.

Beweis. Nehmen wir an, dass die Koeffizientenreihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$

tzung (13) erläutern. Ein OS kann der Voraussetzung (13) genügen und nicht einmal in S^∞ vollständig sein, wie z. B. das aus dem Haarschen durch die Entfernung der ersten Funktionen entstehendes OS. Wenn anderseits ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ die Voraussetzung (13) mit einer positiven T-Methode erfüllt und in S^∞ (also auch in S^2) vollständig ist, so können die $\varphi_n(x)$ immer so umgeordnet werden, dass das neugebildete OS der Voraussetzung (13) nicht mehr genügt (vgl. l. c. [31]) p. 99, (21).

Ferner bemerken wir, dass für ein aus beschränkten Funktionen bestehendes OS aus der Abgeschlossenheit in C die Vollständigkeit in S^1 folgt, jedoch nicht umgekehrt. Als Beispiel diene das trigonometrische OS, welches vollständig ist in S^1, aber nicht abgeschlossen in C. Allerdings ist das trigonometrische OS im Bereiche der periodischen stetigen Funktionen abgeschlossen. Man kann leicht das Beispiel eines in S^1 vollständigen $OS\{\varphi_i(x)\}$ angeben, welches die Eigentümlichkeit hat, dass keine von Null verschiedene stetige Funktion gleichmässig (also nach der in C geltenden Norm) durch Orthogonalpolynome angenähert werden kann: Wir zerlegen das Intervall $< 0, 1 >$ in abzählbar viele punktfremde Mengen $< 0, 1 > = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ u. zw. so, dass jede Menge A_i mit jedem Teilintervall δ von $< 0, 1 >$ eine Durchschnittsmenge von positivem Masse hat. In jeder der Mengen A_n definieren wir ein inbezug auf diese Menge A_n orthogonales und normiertes, im Bereiche der in A_n definierten und integrierbaren Funktionen vollständiges Funktionensystem. Indem wir die Funktionen dieses Systems überall in $< 0, 1 >$ ausser A_n gleich Null setzen, erhalten wir ein in $< 0, 1 >$ definiertes OS. Die auf diese Weise erhaltenen abzählbar vielen Systeme ordnen wir in eine Folge und erhalten so ein OS mit den behaupteten Eigenschaften.

[41]) Über den Satz, dass aus dem Bestehen vou C^∞ die Existenz von H^1 unter den Voraussetzungen (13) folgt, vgl. H. Steinhaus: Développements p. 30. Théor. XI.

einer jeden beschränkten Funktion $g(x)$ absolut konvergiert. Dann ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu\, d_\nu$$

konvergent für jede beschränkte Folge $\{d_i\}$. Nach dem mehrfach erwähnten Hilfssatze des Herrn Steinhaus folgt hieraus die Existenz einer integrierbaren Funktion $f(x)$ deren Entwicklungskoeffizienten die d_n sind, also im allgemeinen nicht gegen Null streben, was nach einem Satze des Herrn Mercer [42]) unmöglich ist.

Setzt man noch die Abgeschlossenheit in C von $\{\varphi_i(x)\}$ voraus, so folgt nach Satz 24′ die Existenz der Singularität h^1 [43]).

Satz 26. Voraussetzung. Wie in Satz 25.

Behauptung. Das OS $\{\varphi_i(x)\}$ weist die Singularität C^1_∞ auf.

Beweis. Nehmen wir an, dass die Koeffizientenfolge einer jeden Funktion $f(x)$ aus S^1 in Γ^α enthalten ist, wobei $1 \leqslant \alpha < \infty$. Dann ist für eine beliebige Folge $\{d_i\}$ aus dem konjugiertem Bereiche Γ^β und eine beliebige Folge $\{f_i\}$ ε $\Omega(\alpha)$ die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, d_\nu \tag{49}$$

absolut konvergent. Wir setzen für beliebige voneinander verschiedene $p_1, p_2, \ldots p_n$

$$s_n^{p_1 p_2 \ldots p_n}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} d p_\nu\, \varphi p_\nu(x).$$

Aus der Konvergenz der Reihe (49) folgt leicht

$$\left| s_n^{p_1 p_2 \ldots p_n}(x) \right| \dot{<} K, \tag{50}$$

wo K eine nur vom System abhängige Konstante ist. Dabei ist natürlich die Nullmenge, in welcher diese Ungleichung nicht erfüllt ist, von den Zahlen $p_1, p_2 \ldots p_n$ abhängig.

[42]) Vgl. die unter [32]) genannte Arbeit.

[43]) Die Existenz der Singularität h^1 unter den obigen Voraussetzungen wurde zum ersten Male von Herrn S. Banach bewiesen.

Die Existenz der Singularität folgt übrigens schon, wenn man, ausser der Abgeschlossenheit in C, noch voraussetzt, dass für ein messbares $\Phi(x)$ die Ungleichung $|\varphi_n(x)| \dot{<} \Phi(x)$ für alle n gilt.

Aus (50) folgt die absolute Konvergenz von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu\, \varphi_\nu$$

fast überall [44]). Aber hieraus folgt die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu$ [45]). Es müsste also $\beta = 1$ sein gegen die Voraussetzung. Nach dem obigen besitzt das OS $\{\varphi_i(x)\}$ die Eigenschaft II_1. Nach Satz 15 weist also das OS $\{\varphi_i(x)\}$ die Singularität C^1_∞.

Als Korollar folgt aus Satz 26 und 20, dass jedes gleichmässig beschränkte und in S^∞ vollständige OS die Singularität H^∞_1 aufweist.

[44]) Vgl. [30]).

[45]) l. c. [31]) p. 109—111 Sätze 10, 11.

(Reçu par la Rédaction le 25. III. 1928).