ROZPRAWY MATEMATYCZNE

POLSKA AKADEMIA NAUK · INSTYTUT MATEMATYCZNY

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

X

ZYGMUNT CHARZYŃSKI

Sur les fonctions univalentes algébriques bornées

WARSZAWA 1955
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA 1955

Nakład 1515 egz. Podpisano do druku 28. V. 1955 r.
Ark. wyd. 2,75 — druk 2,75 Druk ukończono w czerwcu 1955 r.
Papier druk. sat. bezdrz. 70×100, 80 g Zamówienie nr 18/55.
Cena zł 5,50 F-5-19552

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Introduction

Je présente ici une méthode d'approximation des fonctions univalentes bornées par des fonctions analogues algébriques vérifiant certaines équations simples.

Je considère ensuite des classes compactes de telles fonctions algébriques et je déduis les conditions nécessaires que doivent satisfaire dans ces classes des fonctions extrémales pour lesquelles certaines fonctionnelles atteignent des valeurs maxima*).

Notations et définitions

Désignons par $K(\xi,r)$ et $K^*(\xi,r)$ respectivement le cercle ouvert de centre ξ et de rayon r, et la circonférence de ce cercle.

Désignons par $\mathrm{Re}\{\zeta\}$ et $\mathrm{Im}\{\zeta\}$ respectivement la partie réelle et imaginaire du nombre complexe ζ. Pour la fonction $\varphi(\zeta)$ définie dans l'ensemble W, désignons par $\varphi(W)$ l'image de W obtenue à l'aide de $\varphi(\zeta)$.

Appelons *fonction univalente bornée* toute fonction univalente de la forme

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots,\qquad |z|<1,\ a_1>0,$$

telle que $|f(z)|<1$ pour $|z|<1$.

Appelons *fonction rationnelle spéciale* toute fonction de la forme

$$\varrho(\zeta)=\sum_{s=0}^{K}(C_s\zeta^{-s}+\overline{C}_s\zeta^{s})\qquad (C_K\neq 0),$$

et le nombre $2K$ — le *degré* de cette fonction. Remarquons la propriété suivante des fonctions de ce genre: $\varrho(1/\overline{\zeta})=\overline{\varrho(\zeta)}$; en particulier $\mathrm{Im}\{\varrho(\zeta)\}=0$ pour $|\zeta|=1$.

Appelons *distance de deux ensembles plans*, par exemple de deux arcs simples S et T, la borne inférieure des nombres positifs ε tels que

$$S\subset\bigcup_{\zeta\in T}K(\zeta,\varepsilon)\qquad\text{et}\qquad T\subset\bigcup_{\zeta\in S}K(\zeta,\varepsilon).$$

*) Ces résultats ont été communiqués à la séance de la Société Polonaise des Mathématiques à Łódź le 30 mars 1953.

1. Résultats auxiliaires

Nous présentons ci-dessous six lemmes qui se rendront utiles dans la suite.

LEMME 1. *Soit une suite quelconque de fonctions $\{b_j(z)\}$ satisfaisant aux cinq conditions suivantes:*

1. *Chaque fonction $b_j(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<\varrho_j$, où ϱ_j est un nombre positif.*

2. *Chaque fonction $b_j(z)$ vérifie l'identité $U_j(b_j(z))=V_j(z)$, où*

$$U_j(w)=\sum_{t=-M_j}^{M_j} L_{tj}w^t, \qquad V_j(z)=\sum_{t=-M_j}^{M_j} K_{tj}z^t,$$

et les suites complexes finies L_{tj} et K_{tj} satisfont aux conditions

$$|L_{-M_j j}|>g, \quad |L_{M_j j}|>g, \quad |K_{-M_j j}|>g, \quad |K_{M_j j}|>g,$$

$$|L_{tj}|<G, \quad |K_{tj}|<G, \quad |M_j|<M \qquad (t=-M_j,\dots,M_j;\ j=1,2,\dots),$$

g, G et M étant des constantes positives.

3. *La suite des nombres ϱ_j est convergente vers une limite finie ϱ_0 non nulle.*

4. *La suite $\{b_j(z)\}$ est convergente presque uniformément dans le cercle $|z|<\varrho_0$ vers une fonction holomorphe $b_0(z)$[1].*

5. *Les suites $\{U_j(w)\}$ et $\{V_j(z)\}$ sont convergentes presque uniformément sur le plan complexe, excepté aux points zéro et l'infini, vers des fonctions non constantes $U_0(w)$ et $V_0(z)$ analogues à celles de la condition 2.*

Alors pour toute suite de points $\{z_j\}$ convergente vers un point z_0, telle que $|z_j|<\varrho_j$ pour tout j et $|z_0|=\varrho_0$, la suite $\{b_j(z_j)\}$ converge vers un point w_0 qui ne dépend que de z_0.

Démonstration. Soient w_h $(h=1,\dots,R)$ toutes les différentes racines de l'équation $U_0(w)=V_0(z_0)$.

Choisissons un nombre positif ε de manière que tous les cercles $K(w_h,\varepsilon)$ $(h=1,\dots,R)$ avec leurs circonférences soient disjoints. Il résulte

[1]) Voir [3], p. 3-4.

facilement des conditions 2, 5 du lemme qu'il existe, pour ε ainsi choisi, un voisinage H du point z_0 et un indice J' tels que, pour tout paramètre $z\in H$, toutes les racines des équations

$$U_j(w)=V_j(z), \quad \text{où} \quad j>J', \tag{1.1}$$

$$U_0(w)=V_0(z) \tag{1.2}$$

sont situées dans la somme

$$S=\bigcup_h K(w_h,\varepsilon).$$

Puisque pour tout $z\in H\cap K(0,\varrho_j)$ ou $z\in H\cap K(0,\varrho_0)$ les nombres $b_j(z)$ ou $b_0(z)$ sont des racines des équations du type (1.1) ou (1.2) d'après les conditions 2, 4, 5 du lemme, on a

$$b_j(H\cap K(0,\varrho_j))\subset S \quad \text{pour} \quad j>J', \tag{1.3}$$

$$b_0(H\cap K(0,\varrho_0))\subset S. \tag{1.4}$$

Soit maintenant J un indice plus grand que J' et tel que les ensembles $H\cap K(0,\varrho_j)$ $(j>J)$ et $H\cap K(0,\varrho_0)$ aient un point commun ζ. Choisissons, en tenant compte de (1.4) et $j>J$ et de la définition de l'ensemble S, un indice h_0 tel que

$$b_0(\zeta)\in K(w_{h_0},\varepsilon). \tag{1.5}$$

Comme les suites $\{b_j(z)\}$ et $\{z_j\}$ sont convergentes vers $b_0(z)$ et z_0, il existe donc un indice I plus grand que J tel que

$$b_j(\zeta)\in K(w_{h_0},\varepsilon) \quad \text{pour} \quad j>I, \tag{1.6}$$

$$z_j\in H\cap K(0,\varrho_j) \quad \text{pour} \quad j>I. \tag{1.7}$$

Comme les ensembles des côtés gauches de (1.3), (1.4) sont connexes et ont suivant (1.6), (1.5) des points communs avec le cercle $K(w_{h_0},\varepsilon)$ pour $j>I$, il résulte, des définitions des cercles $K(w_h,\varepsilon)$ $(h=1,\dots,R)$ et de l'ensemble S, qu'ils doivent être contenus dans le cercle $K(w_{h_0},\varepsilon)$. En particulier, on a suivant (1.7)

$$b_j(z_j)\in K(w_{h_0},\varepsilon) \quad \text{pour} \quad j>I. \tag{1.8}$$

Puisque enfin ε était choisi arbitrairement, la relation (1.8) prouve que la suite $\{b_j(z_j)\}$ est convergente, ce qui entraîne d'après cette relation et la définition des indices J et h_0, que le point w_{h_0} ne dépend pas de ε, donc qu'il dépend uniquement de z_0. En posant alors $w_0=w_{h_0}$, il suit de (1.8) que la suite $\{b_j(z_j)\}$ converge vers w_0, c. q. f. d.

LEMME 2. *Soit une fonction $b(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|<\varrho<\infty$ et y vérifiant l'identité $U(b(z))=V(z)$, où*

$$U(w)=\sum_{t=-M}^{M} L_t w^t, \qquad V(z)=\sum_{t=-M}^{M} K_t z^t,$$

et les suites L_t $(L_{-M}\neq 0,\ L_M\neq 0)$, K_t $(K_{-M}\neq 0,\ K_M\neq 0)$ $(t=-M,\dots,M)$ sont complexes finies.

La fonction $b(z)$ s'étend alors de manière continue sur tout le cercle fermé $|z|\leqslant\varrho$.

Pour la démonstration de ce lemme, il suffit de poser $b_j(z)=b(z)$, $U_j(w)=U(w)$, $V_j(z)=V(z)$ $(j=1,2,\dots)$, et d'appliquer le résultat précédent.

LEMME 3. *Soit une suite quelconque de fonctions $\{b_j(z)\}$ satisfaisant aux cinq conditions du lemme 1. La relation*

$$\lim_{j\to\infty} z_j=z_0$$

implique alors

$$\lim_{j\to\infty} b_j(z_j)=b_0(z_0)$$

pour toute suite de points $\{z_j\}$ convergente vers un point z_0 et telle que $|z_j|\leqslant\varrho_j$ $(j=1,2,\dots)$; l'on admet évidemment, suivant le lemme 2, que chacune des fonctions $b_j(z)$ et $b_0(z)$ est étendu sur le cercle $|z|\leqslant\varrho_j$.

Démonstration. Ce lemme résulte du lemme 2 et d'un raisonnement analogue à celui du lemme 1.

Soient $K+L$ fonctions complexes

$$(1.9)\qquad g_p(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)\qquad (p=1,\dots,K)$$

$$(1.10)\qquad h_q(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)\qquad (q=1,\dots,L)$$

et une fonction

$$(1.11)\qquad f(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)$$

toutes de $2s$ variables complexes et R variables réelles

$$z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R,$$

définies dans un domaine V, où elles admettent les dérivés partielles du premier ordre continues. Supposons pour le moment que les variables complexes marquées d'un trait ne sont pas conjuguées aux autres, mais tout-à-fait indépendantes.

Considérons l'ensemble B composé de tous les points de V de la forme

$$(1.12)\qquad z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R,$$

tels que

$$(1.13)\qquad g_p(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)=0\qquad (p=1,\dots,K)$$

$$(1.14)\qquad h_q(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)=0\qquad (q=1,\dots,L),$$

où les variables marquées d'un trait ont maintenant le sens habituel, contrairement à la supposition faite ci-dessus.

Supposons que pour les points de la forme (1.12) les fonctions (1.10) et (1.11) n'admettent que des valeurs réelles.

Supposons enfin que la fonction (1.11) atteint en un certain point $z_1^*,\dots,z_s^*,\bar{z}_1^*,\dots,\bar{z}_s^*,t_1^*,\dots,t_R^*$ de l'ensemble B son extrême local dans cet ensemble.

LEMME 4. *Il existe un système non trivial de multiplicateurs complexes et réels λ_p,μ_q,τ correspondant aux conditions (1.13), (1.14) et à la fonction (1.11), dans lequel μ_q et τ sont réels, $p=1,\dots,K$, $q=1,\dots,L$, et tel qu'ont lieu les relations suivantes:*

$$(1.15)\qquad \left[\sum_{p=1}^{K}\left(\lambda_p\left(\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right)+\bar{\lambda}_p\left(\overline{\frac{\partial g_p}{\partial \bar{z}_j}}\right)\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\left(\mu_q\left(\frac{\partial h_q}{\partial z_j}\right)+\mu_q\left(\overline{\frac{\partial h_q}{\partial \bar{z}_j}}\right)\right)\right]$$
$$=\tau\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)+\tau\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}}\right)\qquad (j=1,\dots,S),$$

$$(1.16)\qquad \left[\sum_{p=1}^{K}\left(\lambda_p\left(\frac{\partial g_p}{\partial t_m}\right)+\bar{\lambda}_p\left(\overline{\frac{\partial g_p}{\partial \bar{t}_m}}\right)\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\left(\mu_q\left(\frac{\partial h_q}{\partial t_m}\right)+\mu_q\left(\overline{\frac{\partial h_q}{\partial \bar{t}_m}}\right)\right)\right]$$
$$=\tau\left(\frac{\partial f}{\partial t_m}\right)+\tau\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_m}}\right)\qquad (m=1,\dots,R).$$

Pour symétrie, nous adoptons ici les notations doubles t_m et $\bar{t}_m$ pour les variables réelles; les dérivées partielles se rattachent aux valeurs extrémales $z_1^*,\dots,z_s^*,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s^*,t_1^*,\dots,t_R^*$.

Démonstration. Posons

$$(1.17)\qquad z_j=u_j+iv_j\qquad (j=1,\dots,S),$$

$$(1.18)\qquad z_j^*=u_j^*+iv_j^*\qquad (j=1,\dots,S),$$

et remplaçons les conditions (1.13) par les suivantes qui leur sont équivalentes:

$$(1.19)\qquad \begin{aligned}&\mathrm{Re}\{g_p(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)\}=0\qquad (p=1,\dots,K),\\ &\mathrm{Im}\{g_p(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)\}=0\qquad (p=1,\dots,K).\end{aligned}$$

En considérant, d'après (1.17), l'expression (1.11) et les côtés gauches de (1.19) et (1.14) comme des fonctions réelles des variables réelles

$u_1,\ldots,u_s,v_1,\ldots,v_s,t_1,\ldots,t_R$, on voit facilement que (1.11) atteint pour $u_1^*,\ldots,u_s^*,v_1^*,\ldots,v_s^*,t_1^*,\ldots,t_R^*$ son extrême local dans l'ensemble des points $u_1,\ldots,u_s,v_1,\ldots,v_s,t_1,\ldots,t_R$ qui satisfont aux conditions (1.19) et (1.14).

En vertu de la méthode connue des multiplicateurs, il existe un système non trivial de $2K+L+1$ nombres réels a_p,β_p $(p=1,\ldots,K),\mu_q$ $(q=1,\ldots,L),\tau$ tel que

$$(1.20)\qquad \left[\sum_{p=1}^{K}\left(a_p\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial u_j}+\beta_p\frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial u_j}\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\mu_q\frac{\partial h_q}{\partial u_j}\right]=\tau\frac{\partial f}{\partial u_j}\qquad (j=1,\ldots,S),$$

$$(1.21)\qquad \left[\sum_{p=1}^{K}\left(a_p\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial v_j}+\beta_p\frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial v_j}\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\mu_q\frac{\partial h_q}{\partial v_j}\right]=\tau\frac{\partial f}{\partial v_j}\qquad (j=1,\ldots,S),$$

$$(1.22)\qquad \left[\sum_{p=1}^{K}\left(a_p\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial t_m}+\beta_p\frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial t_m}\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\mu_q\frac{\partial h_q}{\partial t_m}\right]=\tau\frac{\partial f}{\partial t_m}\qquad (m=1,\ldots,R),$$

où les dérivées partielles doivent être calculées ici, ainsi que dans la suite, pour les valeurs extrémales $u_1^*,\ldots,u_s^*,v_1^*,\ldots,v_s^*,t_1^*,\ldots,t_R^*$. On a en même temps, pour tous les indices p,q,j,m,

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial u_j}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial \bar z_j}\right\},\qquad \frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial u_j}=\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial \bar z_j}\right\},$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial v_j}=-\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial \bar z_j}\right\},\qquad \frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial v_j}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right\}-\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial \bar z_j}\right\},$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial t_m}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial t_m}\right\},\qquad \frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial t_m}=\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial t_m}\right\},$$

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial h}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial h}{\partial \bar z_j}\right\},\qquad \frac{\partial h}{\partial v_j}=-\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial h}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial h}{\partial \bar z_j}\right\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial f}{\partial \bar z_j}\right\},\qquad \frac{\partial f}{\partial v_j}=-\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial f}{\partial \bar z_j}\right\},$$

où les dérivées partielles des fonctions (1.9), (1.10), (1.11) doivent être calculées pour les valeurs extrémales $z_1^*,\ldots,z_s^*,\bar z_1^*,\ldots,\bar z_s^*,t_1^*,\ldots,t_R^*$.

En substituant dans les égalités (1.20), (1.21), (1.22) les côtés droits des dernières équations obtenues, en multipliant chaque côtés des égalités (1.21) par i et en soustrayant ensuite celles-ci des égalités respectives (1.20), on a, en posant encore $\lambda_p=a_p-i\beta_p$ $(p=1,\ldots,K)$, les égalités (1.15) et (1.16), c. q. f. d.

Soit une fonction holomorphe quelconque $q(\zeta)$ dans un ensemble ouvert U. Supposons que U soit symétrique par rapport à l'axe réel et que $q(\bar\zeta)=\overline{q(\zeta)}$ pour $\zeta\in U$.

Soit un ensemble E symétrique par rapport à l'axe réel, contenu dans le complémentaire de U, et tel que sa fermeture ait des points communs avec toutes les composantes du complémentaire de U. Soit un ensemble fermé quelconque V contenu dans U.

Lemme 5. *On peut, dans l'ensemble V, approximer arbitrairement la fonction $q(\zeta)$ par une fonction rationnelle $\varkappa(\zeta)$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1. *Tous les pôles de $\varkappa(\zeta)$ appartiennent à E;*
2. *Pour tout ζ on a $\varkappa(\bar\zeta)=\overline{\varkappa(\zeta)}$.*

Démonstration. Il est évident que l'on peut approximer arbitrairement $q(\zeta)$ par une fonction rationnelle $\varkappa(\zeta)$ qui a uniquement des pôles du premier ordre situés à l'extérieur de V, et qui satisfait à la condition 2.

On peut ensuite déplacer chaque couple de pôles conjugués de $\varkappa(\zeta)$ le long de deux chaînes de points conjugués jusqu'à des points conjugués de l'ensemble E de manière que la condition 2 reste toujours satisfaite.

Soit maintenant une fonction univalente $r(\zeta)$ dans un ensemble fermé W. Soient une fonction holomorphe quelconque $s(\zeta)$ dans cet ensemble et un ensemble fermé Z contenu à l'intérieur de W.

Lemme 6. *Si la fonction $s(\zeta)$ est suffisamment proche de $r(\zeta)$ dans W, elle est univalente dans Z.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe dans W une suite de fonctions holomorphes $\{s_n(\zeta)\}$ convergente uniformément vers $r(\zeta)$ dans cet ensemble et telle que

$$(1.23)\qquad s_n(\zeta_n')=s_n(\zeta_n'')\qquad (n=1,2,\ldots),$$

où $\{\zeta_n'\}$ et $\{\zeta_n''\}$ sont des suites de points de Z différentes terme par terme. En choisissant éventuellement des suites partielles on peut supposer que $\{\zeta_n'\}$ et $\{\zeta_n''\}$ tendent respectivement vers les limites ω_0' et ω_0''. Ces limites doivent être toutes les deux égales à un certain nombre x_0, car dans le cas contraire, on aurait $r(x_0')=r(x_0'')$, ce qui est impossible vu l'hypothèse faite au début.

Considérons la fonction $r(\zeta)$ sur une circonférence quelconque K^* de centre x_0 et d'un rayon suffisamment petit, et désignons par m la borne inférieure de $|r(\zeta)-r(x_0)|$ sur cette circonférence. Comme la fonction $r(\zeta)$ est univalente dans W, donc m est un nombre positif et on a

$$|r(\zeta)-s_n(\zeta)|<\frac{1}{3}m \quad \text{pour } \zeta\in K^*, \tag{1.24}$$

par conséquent,

$$|s_n(\zeta)-r(x_0)|>\frac{2}{3}m \quad \text{pour } \zeta\in K^* \tag{1.25}$$

pour n suffisamment grands. En désignant par s_n les valeurs consécutives de (1.23), on voit que la suite $\{s_n\}$ tend vers $r(x_0)$ et, par conséquent,

$$|s_n-r(x_0)|<\frac{1}{3}m \tag{1.26}$$

pour n suffisamment grands. D'après (1.25) et (1.26), on a

$$|s_n(\zeta)-s_n|>\frac{1}{3}m \quad \text{pour } \zeta\in K^* \tag{1.27}$$

pour n suffisamment grands.

Mais alors, en vertu de (1.24) et (1.27), la somme $\big(s_n(\zeta)-s_n\big)+\big(r(\zeta)-s_n(\zeta)\big)=r(\zeta)-s_n$ doit avoir à l'intérieur de K^* le même nombre de racines que la différence $s_n(\zeta)-s_n$, donc au moins deux vu la définition de ζ_n',ζ_n'' et s_n. Ceci est cependant impossible, et la démonstration du lemme se trouve ainsi terminée.

2. Approximation des fonctions univalentes bornées par des fonctions univalentes algébriques bornées

Pour T quelconque entre 0 et 1, désignons par F_T la famille de toutes les fonctions univalentes bornées dont le premier coefficient est plus grand ou égal à T. Désignons par F la somme des familles F_T, c'est-à-dire la famille de toutes les fonctions univalentes bornées. Pour tout T entre 0 et 1 et M naturel, désignons par $\mathfrak{A}_{TM}$ la famille de toutes les fonctions de la forme

$$a(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots \qquad (|z|<1), \tag{2.1}$$

qui satisfont aux conditions suivantes:

1. $a_1\geqslant T$;
2. Il existe deux fonctions rationnelles spéciales

$$\Omega(w)=\sum_{s=0}^{L}(D_s w^{-s}+\bar{D}_s w^s) \qquad \text{et} \qquad \chi(z)=\sum_{s=0}^{L}(E_s z^{-s}+\bar{E}_s z^s),$$

où $D_L\neq 0$, $E_L\neq 0$, $1\leqslant L\leqslant M$, telles que $\Omega\big(a(z)\big)=\chi(z)$.

Remarquons que chacune des fonctions (2.1) appartient à la famille F. Cela résulte de la condition 2 en vertu de laquelle a lieu l'équation

$$\left(\frac{a'(z)z}{a(z)}\right)^2\big(\Omega'(a(z))\,a(z)\big)^2=\big(\chi'(z)z\big)^2$$

qui est un cas particulier d'équations plus générales étudiées en détail[2]).

Remarquons aussi que, d'après le lemme 2, chaque fonction $a(z)$ de la famille $\mathfrak{A}_{TM}$ s'étend de manière continue sur tout le cercle $|z|\leqslant 1$.

Désignons encore, pour T quelconque entre 0 et 1, par $\mathfrak{A}_T$ la somme de toutes les familles $\mathfrak{A}_{TM}$ qui correspondent à tous les M naturels, et par $\mathfrak{A}$ la somme de toutes les familles $\mathfrak{A}_T$.

Il sera naturel d'appeler les éléments de la famille $\mathfrak{A}$ *fonctions univalentes algébriques bornées*.

On voit aisément que les familles $\mathfrak{A}_T$ et $\mathfrak{A}$ sont contenues respectivement dans les familles F_T et F. On peut prouver de plus qu'elles y sont denses. C'est ce que nous dit le résultat suivant:

[2]) Voir [2], p. 657-662.

Lemme fondamental 7. *Toute fonction univalente bornée $f(z)$ peut être approximer arbitrairement par une fonction univalente algébrique bornée $a(z)$.*

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas particulier où la fonction $f(z)$ transforme le cercle unitaire $K(0,1)$ en l'ensemble G de la forme $G=K(0,1)-S$, où S est un arc simple partant d'un point de la circonférence $K^*(0,1)$ vers l'intérieur de $K(0,1)$ et ne contenant pas de point zéro[3]).

Prenons à cet effet une fonction homographique quelconque $l(w)$ qui transforme le cercle unitaire en le demi-plan supérieur de manière que les points 0 et ∞ passent respectivement en des points a et $\bar a$. L'arc S se transforme à l'aide de $l(w)$ en un arc analogue $C=l(S)$. Formons l'arc $\bar C$ symétrique à C par rapport à l'axe réel. Les arcs C et $\bar C$ forment ensemble un arc simple F situé symétriquement par rapport à l'axe réel. Cet arc a exactement un point commun avec l'axe et ne contient pas les points a et $\bar a$. On peut l'approximer par un arc analytique analogue H représenté paramétriquement sous la forme

$$\zeta=p(t) \qquad (t\in I),$$

où I est l'intervalle imaginaire $\langle -i,i\rangle$ et $p(t)$ une fonction univalente définie dans un domaine simplement connexe B symétrique par rapport à l'axe réel et contenant I; en outre $p(\bar t)=\overline{p(t)}$ pour $t\in B$ et l'image $D=p(B)$ ne contient pas les points a et $\bar a$. Considérons dans l'ensemble D la fonction inverse $p^{-1}(\zeta)$. On remarque, d'après ce qui précède, que $p^{-1}(\bar\zeta)=\overline{p^{-1}(\zeta)}$ pour $\zeta\in D$. En vertu de ceci et des lemmes 5 et 6, on peut trouver une fonction rationnelle $\pi(\zeta)$ avec uniquement deux pôles aux points a et $\bar a$, telle que

$$\pi(\bar\zeta)=\overline{\pi(\zeta)} \tag{2.2}$$

pour tout ζ, et qui est univalente, arbitrairement proche de $p^{-1}(\zeta)$ dans un ensemble fermé Q_0 compris dans D et tel que $\pi(Q_0)$ contient I à son intérieur. Posons $\pi_0(\zeta)=\pi(\zeta)$ pour $\zeta\in Q_0$ et

$$T=\pi_0^{-1}(I). \tag{2.3}$$

On voit que T est un arc analytique simple, symétrique par rapport à l'axe réel, et arbitrairement proche de l'arc H. En outre, si $\pi(\zeta)$ est suffisamment proche de $p^{-1}(\zeta)$ dans Q_0, l'arc T n'a qu'un point commun avec l'axe réel. Cela résulte du fait que l'arc H a, au point commun avec l'axe réel, la tangente perpendiculaire à ce dernier. Supposons pour la suite que l'arc T a la propriété ci-dessus et qu'il ne contient pas les points a et $\bar a$.

[3]) Voir [1], p. 105-106.

Considérons la fonction composée $\pi(l(w))$. On vérifie facilement, en vertu de ce qui précède, que c'est une fonction rationnelle spéciale. En posant

$$R=l^{-1}(P), \tag{2.4}$$

où P est la partie de T située dans le demi-plan supérieur fermé, on constate que R est un arc simple, arbitrairement proche de S.

Soit maintenant une fonction univalente bornée $a(z)$ qui transforme le cercle $K(0,1)$ en l'ensemble $E=K(0,1)-R$. Cette fonction est évidemment proche arbitrairement de $f(z)$ et il suffit de démontrer qu'elle vérifie une identité du type $\Omega(a(z))=\chi(z)$, où $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ sont des fonctions rationnelles spéciales, non constantes.

A cet effet posons

$$\Omega(w)=\varphi\big(\pi(l(w))\big), \tag{2.5}$$

où

$$\varphi(w)=w^2, \tag{2.6}$$

et considérons l'expression

$$\chi(z)=\Omega\big(a(z)\big). \tag{2.7}$$

La fonction (2.5) étant évidemment une fonction rationnelle spéciale non constante, il ne nous reste qu'à prouver la même chose pour la fonction (2.7). En considérant cette dernière sur la circonférence unitaire, on remarque qu'elle n'y admet que des valeurs réelles. En effet, en prenant un point quelconque sur la circonférence unitaire, on voit que $a(z)$ appartient à $K^*(0,1)$ ou à R. Mais, d'après (2.2), (2.6) et la définition de $l(w)$, la circonférence $K^*(0,1)$ se transforme à l'aide de (2.5) en un segment de l'axe réel, et l'arc R, en vertu de (2.3), (2.4), (2.6) et de la définition de I, se transforme lui aussi en un segment de l'axe réel. En outre on remarque que la fonction (2.7) est régulière dans le cercle unitaire et n'y a qu'un seul pôle au point zéro. Il en résulte que (2.7) doit être une fonction rationnelle spéciale, c. q. f. d.

Ce résultat montre que diverses recherches effectuées sur les familles F_T et F peuvent être réduites à des recherches analogues sur les familles $\mathfrak{A}_{TM},\mathfrak{A}_T,\mathfrak{A}$. En particulier ceci trouve application au problème des extrèmes des fonctionnelles réelles, continues dans les familles F_T et F. Pour cette raison, nous nous occuperons dans la suite des fonctions univalentes algébriques bornées parcourant les familles $\mathfrak{A}_{TM}$.

3. Propriétés générales des fonctions univalentes algébriques bornées

Nous démontrons maintenant

LEMME 8. *Toute famille $\mathfrak{A}_{TM}$ est compacte en elle-même.*

Démonstration. La famille est évidemment normale; il suffit donc de démontrer qu'elle est aussi fermée.

Soit une suite quelconque de fonctions de cette famille $\{a_j(z)\}$ convergente vers une fonction $a_0(z)$. Il est clair que $a_0(z)$ satisfait à la condition 1 de la définition de la famille $\mathfrak{A}_{TM}$. Désignons par

$$\Omega_j(w) = \sum_{s=0}^{L_j} (D_{sj} w^{-s} + \overline{D}_{sj} w^s) \qquad (j=1,2,\ldots),$$

$$\chi_j(z) = \sum_{s=0}^{L_j} (E_{sj} z^{-s} + \overline{E}_{sj} z^s) \qquad (j=1,2,\ldots),$$

où $D_{L_jj} \neq 0$, $E_{L_jj} \neq 0$, $1 \leqslant L_j \leqslant M$ $(j=1,2,\ldots)$, les suites respectives de fonctions rationnelles spéciales, analogues à $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ de la définition citée, telles que

$$\Omega_j(a_j(z)) = \chi_j(z) \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{3.1}$$

En additionnant éventuellement les fonctions $\Omega_j(w)$ et $\chi_j(z)$ à des constantes réelles et en les multipliant par des facteurs réels, on peut supposer que $D_{0j}=0$ $(j=1,2,\ldots)$ et que

$$\sum_{s=0}^{L_j} D_{sj}\overline{D}_{sj} + \sum_{s=0}^{L_j} E_{sj}\overline{E}_{sj} = 1 \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{3.2}$$

Puis en choisissant des suites partielles on peut supposer encore que les suites $\Omega_j(w)$ et $\chi_j(z)$ sont convergentes respectivement vers les limites

$$\Omega_0(w) = \sum_{s=0}^{L_0'} (D_{s0} w^{-s} + \overline{D}_{s0} w^s), \qquad \chi_0(z) = \sum_{s=0}^{L_0''} (E_{s0} z^{-s} + \overline{E}_{s0} z^s), \tag{3.3}$$

où

$$D_{L_0'0} \neq 0 \quad \text{si } L_0' \neq 0, \qquad \text{et} \qquad E_{L_0''0} \neq 0 \quad \text{si } L_0'' \neq 0, \tag{3.4}$$

et où, d'après les conditions $1 \leqslant L_j \leqslant M$, $D_{0j}=0$ $(j=1,2,\ldots)$ et (3.2) on a

$$D_{00} = 0, \tag{3.5}$$

$$0 \leqslant L_0' \leqslant M, \qquad 0 \leqslant L_0'' \leqslant M, \tag{3.5'}$$

$$\sum_{s=0}^{L_0'} D_{s0}\overline{D}_{s0} + \sum_{s=0}^{L_0''} E_{s0}\overline{E}_{s0} = 1. \tag{3.6}$$

En passant à la limite dans (3.1) on obtient l'identité

$$\Omega_0(a_0(z)) = \chi_0(z). \tag{3.7}$$

La fonction $a_0(z)$ n'étant pas constante, alors d'après (3.7) et (3.5), ou bien les deux limites $\Omega_0(w)$ et $\chi_0(z)$ se réduisent à la même constante égale à zéro, ou bien elles sont non constantes. Mais la première éventualité est impossible en vertu de (3.6). Reste donc la seconde et, d'après (3.4), (3.7), $1 \leqslant L_0' = L_0''$.

Ainsi, d'après (3.7), (3.3), (3.4), (3.5') et la dernière relation, la fonction $a_0(z)$ satisfait aussi à la condition 2 de la définition de $\mathfrak{A}_{TM}$. Donc elle appartient à cette famille, c. q. f. d.

Nous déduirons à présent quelques relations concernant les fonctions rationnelles spéciales $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ que l'on a déjà rencontrées dans la définition des fonctions univalentes algébriques bornées.

Soit une fonction univalente algébrique bornée quelconque

$$a^*(z) = a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots$$

Désignons par

$$\Omega^*(w) = \sum_{s=0}^{L^*} (D_s^* w^{-s} + \overline{D}_s^* w^s) \qquad \text{et} \qquad \chi^*(z) = \sum_{s=0}^{L^*} (E_s^* z^{-s} + \overline{E}_s^* z^s)$$

des fonctions rationnelles spéciales telles que

$$\Omega^*(a^*(z)) = \chi^*(z) \tag{3.8}$$

et

$$D_{L^*}^* \neq 0, \qquad E_{L^*}^* \neq 0, \qquad 1 \leqslant L^*. \tag{3.9}$$

En posant $T^* = a_1^*$ on voit, de (3.8), qu'il doit être

$$D_{L^*}^* = T^{*L^*} E_{L^*}^*, \tag{3.10}$$

c'est-à-dire

$$D_{L^*}^* - T^{*L^*} E_{L^*}^* = 0. \tag{3.11}$$

Considérons toutes les racines de l'équation

$$\Omega^{*\prime}(w) = 0 \tag{3.12}$$

se trouvant dans le cercle fermé $\overline{K(0,1)}$. Posons pour abréger $A = a^*\big(K(0,1)\big)$, $A^* = a^*\big(K^*(0,1)\big)$, et désignons respectivement par

$$w_k \quad (k=1,\ldots,Q), \qquad v_h \quad (h=1,\ldots,P), \qquad e^{i\omega_l} \quad (l=1,\ldots,R) \tag{3.13}$$

toutes les différentes racines de l'équation (3.8) qui appartiennent à A, $A^* \cap K(0,1)$ et $K^*(0,1)$ respectivement, et par

$$\gamma_k \quad (k=1,\ldots,Q), \qquad \delta_h \quad (h=1,\ldots,P), \qquad \sigma_l \quad (l=1,\ldots,R) \tag{3.14}$$

les ordres de multiplicité de ces racines.

Pour tout $k=1,\ldots,Q$, désignons par z_k le point z situé à l'intérieur de $K(0,1)$ tel que $a^*(z_k) = w_k$. Il résulte des relations évidentes:

$$a^{*\prime}(z)\,\Omega^{*\prime}\big(a^*(z)\big) = \chi^{*\prime}(z), \tag{3.15}$$

$$a^{*\prime}(z) \neq 0 \quad \text{pour} \quad |z| < 1, \tag{3.16}$$

que chaque point z_k est une racine de l'équation $\chi^{*\prime}(z) = 0$, dont l'ordre de multiplicité est égal à celui de la racine w_k.

Désignons pour tous les h, l de (3.13) par

$$e^{i\varphi_{hj}} \quad (j=1,\ldots,I_h;\, h=1,\ldots,P) \quad \text{ou} \quad e^{i\psi_{lj}} \quad (j=1,\ldots,G_l;\, l=1,\ldots,R) \tag{3.17}$$

tous les points z situés sur la circonférence $K^*(0,1)$, tels que

$$\chi^{*\prime}(z) = 0, \tag{3.18}$$

$$a^*(z) = v_h, \tag{3.19}$$

ou

$$a^*(z) = e^{i\omega_l}. \tag{3.20}$$

Les points (3.17) sont par définition des racines de l'équation (3.18). Désignons leurs ordres de multiplicité respectivement par

$$\xi_{hj} \quad (j=1,\ldots,I_h;\, h=1,\ldots,P), \quad \eta_{lj} \quad (j=1,\ldots,G_l;\, l=1,\ldots,R). \tag{3.21}$$

Admettons encore les notations $Q=0$, $P=0$, $I_h=0$, $G_l=0$ pour les cas exceptionnels où les racines $w_k, v_h, z_k, e^{i\varphi_{hj}}, e^{i\psi_{lj}}$ (voir (3.13) et (3.17)) n'existent pas.

En raison de tout cela et de (3.8), pour les fonctions $\Omega^*(w)$ et $\chi^*(z)$ et les racines $w_k, v_h, e^{i\varphi_{hj}}, e^{i\psi_{lj}}$ ont lieu les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
&\Omega^*(w_k) - \chi^*(z_k) = 0 && (k=1,\ldots,Q),\\
&\Omega^{*(m)}(w_k) = 0 && (m=1,\ldots,\gamma_k;\ k=1,\ldots,Q),\\
&\chi^{*(m)}(z_k) = 0 && (m=1,\ldots,\gamma_k;\ k=1,\ldots,Q),\\
&\frac{1}{i}\left(\Omega^*(v_h) - \Omega^*\left(\frac{1}{\bar v_h}\right)\right) = 0 && (h=1,\ldots,P),\\
&\Omega^*(v_h) - \chi_1^*(\varphi_{hj}) = 0 && (j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P),\\
&\Omega^{*(m)}(v_h) = 0 && (m=1,\ldots,\delta_h;\ h=1,\ldots,P),\\
&\chi_1^{*(m)}(\varphi_{hj}) = 0 && (m=1,\ldots,\xi_{hj};\ j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P),\\
&\Omega_1^*(\omega_l) - \chi_1^*(\psi_{lj}) = 0 && (j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R),\\
&\Omega_1^{*(m)}(\omega_l) = 0 && (m=1,\ldots,\sigma_l;\ l=1,\ldots,R),\\
&\chi_1^{*(m)}(\psi_{lj}) = 0 && (m=1,\ldots,\eta_{lj};\ j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

où l'on a posé pour abréger

$$\Omega_1^*(x) = \Omega^*(e^{ix}), \tag{3.23}$$

$$\chi_1^*(y) = \chi^*(e^{iy}), \tag{3.24}$$

et d'où l'on rejette éventuellement les relations qui correspondent aux cas exceptionnels $Q=0$, $P=0$, $I_h=0$, $G_l=0$[4].

On peut considérer les relations obtenues (3.11) et (3.22) comme des conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\Omega^*(w)$ et $\chi^*(z)$ pour qu'il existe une fonction univalente bornée $a^*(z)$ qui vérifie l'identité $\Omega^*\big(a^*(z)\big) = \chi^*(z)$ et la condition $T^* = \alpha_1^*$.

Ces conditions s'avèrent être aussi localement suffisantes ce que prouve le lemme suivant:

LEMME 9. *Etant donné un système de nombres complexes et réels* (S'):

$$\begin{aligned}
&\dot D_s && (s=0,\ldots,L^*),\\
&\dot E_s && (s=0,\ldots,L^*),\\
&\dot w_k && (k=1,\ldots,Q),\\
&\dot v_h && (n=1,\ldots,P),\\
&\omega_l\text{-réel} && (l=1,\ldots,R),\\
&\dot z_k && (k=1,\ldots,Q),\\
&\varphi_{hj}\text{-réel} && (j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P),\\
&\psi_{lj}\text{-réel} && (j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

---

4) Remarquons que pour tout $w = e^{ix}$ et tout s naturel les conditions: $\Omega^{*(m)}(w) = 0$ et $\Omega_1^{*(m)}(x) = 0$ $(m=1,\ldots,S)$ sont équivalentes et ceci de même pour les fonctions $\chi_1^*(z)$ et $\chi_1^*(y)$.

dont les termes sont suffisamment proches des termes respectifs du système (S^*):

$$
\begin{array}{lll}
 & D_s^* & (s=0,\dots,L^*),\\
 & E_s^* & (s=0,\dots,L^*),\\
 & w_k & (k=1,\dots,Q),\\
(3.26) & v_h & (h=1,\dots,P),\\
 & \omega_l & (l=1,\dots,R),\\
 & \varphi_{hj} & (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
 & \psi_{lj} & (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{array}
$$

de $\Omega^*(w)$, $\chi^*(z)$ *et* (3.13), (3.17), *et satisfont aux conditions suivantes, analogues à* (3.11) *et* (3.22):

$$(3.27)\qquad D^{\cdot}_{L^*}-T^{*L^*}E^{\cdot}_{L^*}=0,$$

$$
\begin{array}{rl}
\Omega^{\cdot}(w^{\cdot}_k)-\chi^{\cdot}(z^{\cdot}_k)=0 & (k=1,\dots,Q),\\
\Omega^{\cdot(m)}(w^{\cdot}_k)=0 & (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
\chi^{\cdot(m)}(z^{\cdot}_k)=0 & (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
\frac{1}{i}\left(\Omega^{\cdot}(v^{\cdot}_h)-\Omega^{\cdot}\left(\frac{1}{\bar{v}_h}\right)\right)=0 & (h=1,\dots,P),
\end{array}
$$

$$
(3.28)\qquad
\begin{array}{rl}
\Omega^{\cdot}(v^{\cdot}_h)-\chi^{\cdot}_1(\varphi^{\cdot}_{hj})=0 & (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
\Omega^{\cdot(m)}(v^{\cdot}_h)=0 & (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P),\\
\chi_1^{\cdot(m)}(\varphi^{\cdot}_{hj})=0 & (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
\Omega^{\cdot}_1(w^{\cdot}_l)=0 & (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),\\
\Omega_1^{\cdot(m)}(w^{\cdot}_l)=0 & (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R),\\
\chi_1^{\cdot(m)}(\psi^{\cdot}_{lj})=0 & (m=1,\dots,\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{array}
$$

où

$$(3.29)\qquad \Omega^{\cdot}(w)=\sum_{s=0}^{L^*}D^{\cdot}_s w^{-s}+\bar{D}^{\cdot}_s w^s,\qquad \Omega^{\cdot}_1(x)=\Omega^{\cdot}(e^{ix}),$$

$$(3.30)\qquad \chi^{\cdot}(z)=\sum_{s=0}^{L^*}E^{\cdot}_s z^{-s}+\bar{E}^{\cdot}_s z^s,\qquad \chi^{\cdot}_1(y)=\chi^{\cdot}(e^{iy}),$$

il existe alors exactement une fonction univalente, algébrique bornée

$$a^{\cdot}(z)=a^{\cdot}_1 z+a^{\cdot}_2 z^2+\dots$$

satisfaisant à l'identité

$$(3.31)\qquad \Omega^{\cdot}(a^{\cdot}(z))=\chi^{\cdot}(z)$$

et à la condition $a^{\cdot}_1=T^*$. *Cette fonction appartient à la famille* $\mathfrak{A}_{T^*L^*}$.

Démonstration. Choisissons une suite quelconque de systèmes du type précédent (S_f):

$$
\begin{array}{lll}
 & D_{sf} & (s=0,\dots,L^*),\\
 & E_{sf} & (s=0,\dots,L^*),\\
 & w_{kf} & (k=1,\dots,Q),\\
 & v_{hf} & (h=1,\dots,P),\\
(3.32) & \omega_{lf}\text{ - réel} & (l=1,\dots,R),\\
 & z_{kf} & (k=1,\dots,Q),\\
 & \varphi_{hjf}\text{ - réel} & (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
 & \psi_{ljf}\text{ - réel} & (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{array}
$$

dont les termes convergent vers les termes respectifs de (S^*) et satisfont pour tout f les conditions suivantes, analogues à (3.27) et (3.28):

$$(3.33)\qquad D_{L^*f}-T^{*L^*}E_{L^*f}=0,$$

$$
\begin{array}{rl}
\Omega_f(w_{kf})-\chi_f(z_{kf})=0 & (k=1,\dots,Q),\\
\Omega_f^{(m)}(w_{kf})=0 & (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
\chi_f^{(m)}(z_{kf})=0 & (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
\frac{1}{i}\left(\Omega_f(v_{hf})-\Omega_f\left(\frac{1}{\bar{v}_{hf}}\right)\right)=0 & (h=1,\dots,P),
\end{array}
$$

$$
(3.34)\qquad
\begin{array}{rl}
\Omega_f(v_{hf})-\chi_{1f}(\varphi_{hjf})=0 & (j=1,\dots I_h;\ h=1,\dots,P),\\
\Omega^{(m)}(v_{hf})=0 & (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P),\\
\chi_{1f}^{(m)}(\varphi_{hjf})=0 & (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
\Omega_{1f}(\omega_{lf})-\chi_1(\psi_{ljf})=0 & (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),\\
\Omega_1^{(m)}(\omega_{lf})=0 & (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R),\\
\chi_{1f}^{(m)}(\psi_{ljf})=0 & (m=1,\dots,\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{array}
$$

où

$$\Omega_f(w) = \sum_{s=0}^{L^*} D_{sf} w^{-s} + \bar{D}_{sf} w^s, \qquad \Omega_{1f}(x) = \Omega_f(e^{ix}), \tag{3.35}$$

$$\chi_f(z) = \sum_{s=0}^{L^*} E_{sf} z^{-s} + \bar{E}_{sf} z^s, \qquad \chi_{1f}(y) = \chi_f(e^{iy}) \text{ [5]}. \tag{3.36}$$

On voit de (3.33), (3.35), (3.36), qu'il existe, pour tout f suffisamment grand, exactement une fonction holomorphe dans un entourage du point zéro:

$$a_f(z) = a_{1f} z + a_{2f} z^2 + \ldots$$

satisfaisant à l'identité

$$\Omega_f(a_f(z)) = \chi_f(z) \tag{3.37}$$

et à la condition $a_{1f} = T^*$.

Soit r_f le rayon de convergence de la série $a_f(z)$. Il suffit de démontrer que r_f est non moindre que 1 pour f suffisamment grands. A cet effet supposons le contraire, c'est-à-dire qu'on a toujours, en choisissant éventuellement des suites partielles, $r_f < 1$. En outre, en raison du lemme 2, on peut admettre que toutes les fonctions $a_f(z)$ sont continues dans tout le cercle fermé $|z| \leqslant r_f$. On remarque facilement qu'il existe toujours sur la circonférence $|z| = r_f$ un point y_f dans lequel la fonction $a_f(z)$ n'est pas holomorphe. Par conséquent, en posant $x_f = a_f(y_f)$, on a $\Omega_f'(x_f) = 0$, car dans le cas contraire la fonction $a_f(z)$ serait holomorphe au point y_f en vertu de (3.37).

On peut supposer ici, en tenant compte de (3.37) et des relations évidentes

$$\lim_{f\to\infty} \Omega_f(w) = \Omega^*(w), \qquad \lim_{f\to\infty} \chi_f(z) = \chi^*(z), \tag{3.38}$$

[5]) Remarquons qu'il doit être ici, vu la définition des ordres (3.14), (3.21):

$$\Omega_f^{(m)}(w_{kf}) \neq 0 \qquad (m = \delta_k + 1;\ k = 1, \ldots, Q),$$

$$\chi_f^{(m)}(z_{kf}) \neq 0 \qquad (m = \gamma_k + 1;\ k = 1, \ldots, Q),$$

$$\Omega_f^{(m)}(v_h) \neq 0 \qquad (m = \delta_h + 1;\ h = 1, \ldots, P),$$

$$\chi_{1f}^{(m)}(\varphi_{hjf}) \neq 0 \qquad (m = \xi_{hj} + 1;\ j = 1, \ldots, I_h;\ h = 1, \ldots, P),$$

$$\Omega_{1f}^{(m)}(w_{lf}) \neq 0 \qquad (m = \sigma_l + 1;\ l = 1, \ldots, R),$$

$$\chi_{1f}^{(m)}(\psi_{ljf}) \neq 0 \qquad (m = \eta_{lj} + 1;\ j = 1, \ldots, G_l;\ l = 1, \ldots, R)$$

pour f suffisamment grands.

et, en choisissant éventuellement des suites partielles, que

$$\lim_{f\to\infty} r_f = r_0, \tag{3.39}$$

$$\lim_{f\to\infty} y_f = y_0, \tag{3.40}$$

$$\lim_{f\to\infty} a_f(z) = a_0(z), \tag{3.41}$$

où $r_0 > 0$, $|y_0| = r_0$ et $a_0(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < r_0$. Les convergences (3.38) et (3.41) sont presque uniformes respectivement dans tout le plan sans les points 0 et ∞, et dans le cercle $|z| < r_0$. La fonction $a_0(z)$ coïncide avec la fonction $a^*(z)$ dans le cercle $|z| < r_0$, en conséquence, elle s'étend avec $a^*(z)$ de manière continue sur tout le cercle $|z| \leqslant r_0$. D'après le lemme 3, les formules (3.37), (3.40), (3.41), (3.38), on a

$$\lim_{f\to\infty} x_f = x_0 = a^*(y_0), \tag{3.42}$$

$$\Omega^{*\prime}(x_0) = 0. \tag{3.43}$$

Par conséquent, il doit être, d'après (3.42), (3.43) et la définition des nombres (3.13)

$$x_0 = w_k \quad \text{et} \quad y_0 = z_k \tag{3.44}$$

ou

$$x_0 = v_h \quad \text{et} \quad |y_0| = 1 \tag{3.45}$$

ou

$$x_0 = e^{i\omega_l} \quad \text{et} \quad |y_0| = 1, \tag{3.46}$$

où k, h, l désignent respectivement certains indices de (3.13).

J'affirme que dans le premier cas (3.44) ont lieu les égalités $x_f = w_{kf}$ et $y_f = z_{kf}$ pour f suffisamment grands. En effet, en supposant $x_f \neq w_{kf}$ pour une infinité de f, il résulterait des relations (3.34), (3.42), (3.44) et de la définition des suites (3.32) et $\{x_f\}$ que

$$\Omega_f^{(m)}(w_{kf}) = 0 \qquad (m = 1, \ldots, \gamma_k;\ f = 1, 2, \ldots),$$

$$\Omega_f'(x_f) = 0 \qquad (f = 1, 2, \ldots),$$

et

$$\lim_{f\to\infty} w_{kf} = w_k \quad \text{et} \quad \lim_{f\to\infty} x_f = w_k.$$

Ceci donnerait, en passant à la limite et en tenant compte de

$$\lim_{f\to\infty} \Omega_f'(w) = \Omega^{*\prime}(w)$$

et $x_f \neq w_{kf}$ que w_k est une racine de l'équation $\Omega^{*\prime}(w)=0$ d'ordre au moins γ_k+1, contrairement à la définition du nombre γ_k. Donc l'égalité $x_f = w_{kf}$ doit avoir lieu. De la même manière on prouve l'égalité $y_f = z_{kf}$.

Quant au deuxième cas (3.45), j'affirme qu'il est impossible. En effet, on a, d'après (3.34), (3.42), (3.45) et la définition des suites (3.32) et $\{x_f\}$:

$$\Omega_f^{(m)}(v_{hf})=0 \quad (m=1,\dots,\delta_h; f=1,2,\dots), \qquad \Omega_f'(x_f)=0 \quad (f=1,2,\dots),$$

et

$$\lim_{f\to\infty} v_{hf}=v_h, \qquad \lim_{f\to\infty} x_f=v_h, \tag{3.47}$$

ce qui donne, comme ci-dessus, $x_f = v_{hf}$ pour f suffisamment grands. On voit qu'ici $\chi^{*\prime}(y_0)=0$, car il résulte du (3.47), (3.34), (3.37) et $x_f = a_f(y_f)$, $r_f<1$ ainsi que de la définition de y_f que:

$$\chi_f(y_f)=\Omega_f(v_{hf}), \qquad \chi_f\left(\frac{1}{\bar{y}_f}\right)=\Omega_f(v_{hf}), \qquad y_f\neq\frac{1}{\bar{y}_f} \tag{3.48}$$

pour f suffisamment grands; ceci implique, en passant à la limite et en tenant compte de (3.38), (3.47), (3.40) que l'équation

$$\chi^*(z)-\Omega^*(v_h)=0$$

a, au point y_0, une racine multiple, donc $\chi^{*\prime}(y_0)=0$ a lieu.

D'après $\chi^{*\prime}(y_0)=0$, les formules (3.42), (3.45) et la définition des nombres $e^{i\varphi_{hj}}$, on peut supposer que

$$y_0=e^{i\varphi_{hj}}, \tag{3.49}$$

où j est certain indice entre 1 et I_h.

En même temps on a, d'après (3.34),

$$\chi_f(e^{i\varphi_{hjf}})=\Omega_f(v_{hf}), \qquad \chi_f^{(m)}(e^{i\varphi_{hjf}})=0 \qquad (m=1,\dots,\xi_{hj}; f=1,2,\dots)^{6)}, \tag{3.50}$$

et, d'après la définition des nombres (3.32), (3.40), (3.49),

$$\lim_{f\to\infty} e^{i\varphi_{hjf}}=e^{i\varphi_{hj}}, \qquad \lim_{f\to\infty} y_f=e^{i\varphi_{hj}}.$$

Comme il résulte de $r_f<1$ que

$$y_f\neq e^{i\varphi_{hjf}}, \qquad \frac{1}{\bar{y}_f}\neq e^{i\varphi_{hjf}}, \qquad y_f\neq\frac{1}{\bar{y}_f},$$

pour f suffisamment grands, on trouve, d'après (3.47), (3.48), (3.50), (3.38), en passant à la limite, que l'équation

$$\chi^*(z)-\Omega^*(v_h)=0$$

[6]) Voir remarque p. 17.

a, au point $e^{i\varphi_{hj}}$, une racine d'ordre au moins $\xi_{hj}+3$, contrairement à la définition du nombre ξ_{hj}.

Pour le troisième cas (3.46), on constate de la même manière qu'il est impossible lui aussi.

Les relations (3.44) et, par conséquent, $x_f=w_{kf}$, $y_f=z_{kf}$ étant uniquement possibles, on obtient, en tenant compte de $x_f=a_f(y_f)$, des formules (3.37), (3.34) et de la définition des nombres (3.32):

$$\Omega_f(x_f)=\chi_f(y_f)$$

et

$$\Omega_f^{(m)}(x_f)=0 \qquad (m=1,\dots,\gamma_k), \qquad \Omega_f^{(\gamma_k+1)}(x_f)\neq 0,$$
$$\chi_f^{(m)}(y_f)=0 \qquad (m=1,\dots,\gamma_k), \qquad \chi_f^{(\gamma_k+1)}(y_f)\neq 0 \;^{6')}$$

pour tout f suffisamment grand. On voit de là que la fonction $a_f(z)$ serait holomorphe au point y_f, contrairement à la définition de ce point. La démonstration se trouve ainsi achevée.

[6']) Voir remarque p. 20.

4. Les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes algébriques bornées

Soit, pour N entier plus grand que 1, une fonction analytique réelle $H(X_2,\ldots,X_N,Y_2,\ldots,Y_N)$ définie dans un domaine suffisamment grand de variables réelles $X_2,\ldots,X_N,Y_2,\ldots,Y_N$, et dont les dérivées partielles du premier ordre ne s'annullent nulle part simultanément.

Soit une famille quelconque $\mathfrak{A}_{TM}$ telle que $M>N-1$.

Définissons dans $\mathfrak{A}_{TM}$ pour chaque fonction $a(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots$, $|z|<1$, la fonctionnelle H_a comme suit:

$$H_a=H(\lambda_2,\ldots,\lambda_N,\mu_2,\ldots,\mu_N),$$

où $\lambda_n+i\mu_n=a_n$ $(n=2,\ldots,N)$.

Choisissons pour $a(z)$ des fonctions rationnelles spéciales $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ décrites dans la condition 2 de la définition de $\mathfrak{A}_{TM}$.

Comme le quotient D_L par E_L est positif, les coefficients de $a(z)$ pour $L>N-1$ peuvent être exprimés par les coefficients des fonctions $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ comme suit:

$$\frac{a_n}{a_1}=a_{nL}(D_{G_n},\ldots,D_L,E_{G_n},\ldots,E_L)\qquad(n=2,\ldots,N),$$

où $G_n=L-n+1$ $(n=2,\ldots,N)$ et les expressions

$$(4.1)\qquad a_{nL}(\xi_{G_n},\ldots,\xi_L,\eta_{G_n},\ldots,\eta_L)\qquad(n=2,\ldots,N)$$

sont des fonctions analytiques des variables indépendantes $\xi_G,\ldots,\xi_L$, $\eta_G,\ldots,\eta_L$, où $G=L-N+1$. La forme de (4.1) dépend uniquement de L et de n.

En vertu de tout cela, on peut pour $a(z)$ et les fonctions correspondantes $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ exprimer la fonctionnelle H_a sous la forme

$$(4.2)\qquad H_a=J_L(D_G,\ldots,D_L,\overline{D}_G,\ldots,\overline{D}_L,E_G,\ldots,E_L,\overline{E}_G,\ldots,\overline{E}_L),$$

où l'expression

$$(4.2')\qquad J_L(\xi_G,\ldots,\xi_L,\hat{\xi}_G,\ldots,\hat{\xi}_L,\eta_G,\ldots,\eta_L,\hat{\eta}_G,\ldots,\hat{\eta}_L)$$

est une fonction analytique des variables indépendantes $\xi_G,\ldots,\xi_L,\hat{\xi}_G,\ldots,\hat{\xi}_L,\eta_G,\ldots,\eta_L,\hat{\eta}_G,\ldots,\hat{\eta}_L$. On l'obtient de $H(X_2,\ldots,X_N,Y_2,\ldots,Y_N)$ en substituant

$$X_n=\frac{1}{2}\left(a_{nL}(\xi_{G_n},\ldots,\xi_L,\eta_{G_n},\ldots,\eta_L)+\hat{a}_{nL}(\hat{\xi}_{G_n},\ldots,\hat{\xi}_L,\hat{\eta}_{G_n},\ldots,\hat{\eta}_L)\right)\qquad(n=2,\ldots,N),$$

$$Y_n=\frac{1}{2i}\left(a_{nL}(\xi_{G_n},\ldots,\xi_L,\eta_{G_n},\ldots,\eta_L)-\hat{a}_{nL}(\hat{\xi}_{G_n},\ldots,\hat{\xi}_L,\hat{\eta}_{G_n},\ldots,\hat{\eta}_L)\right)\qquad(n=2,\ldots,N),$$

où

$$\hat{a}_{nL}(\hat{\xi}_{G_n},\ldots,\hat{\xi}_L,\hat{\eta}_{G_n},\ldots,\hat{\eta}_L)=\overline{a_{nL}(\overline{\hat{\xi}}_{G_n},\ldots,\overline{\hat{\xi}}_L,\overline{\hat{\eta}}_{G_n},\ldots,\overline{\hat{\eta}}_L)}\qquad(n=2,\ldots,N).$$

La forme de la fonction (4.2′) dépend uniquement de la fonction $H(X_2,\ldots,X_N,Y_2,\ldots,Y_N)$ et de L.

Après avoir remarqué ceci, nous présentons le résultat suivant:

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Il existe dans $\mathfrak{A}_{TM}$ des fonctions extrémales $a^*(z)$ pour lesquelles la fonctionnelle H_a atteint sa valeur la plus grande dans cette famille.*

En même temps, si

$$(4.3)\qquad \Omega^*(w)=\sum_{s=0}^{L^*}(D_s^*w^{-s}+\overline{D}_s^*w^s),$$

$$(4.3')\qquad \chi^*(z)=\sum_{s=0}^{L^*}(E_s^*z^{-s}+\overline{E}_s^*z^s),$$

désignent des fonctions rationnelles spéciales telles que

$$D_{L^*}^*\neq0,\qquad E_{L^*}^*\neq0,\qquad N-1<L^*\leqslant M\qquad et\qquad \Omega^*(a^*(z))=\chi^*(z),$$

alors ont lieu les équations des moments

$$(4.4)\qquad \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi(w)}{\Omega^{*\prime}(w)w}(\Omega^*(w))^f\frac{dw}{w}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Psi(z)}{\chi^{*\prime}(z)z}(\chi^*(z))^f\frac{dz}{z}\right\}\qquad(f=1,2,\ldots),$$

ou

$$(4.4')\qquad \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\left(\frac{a^{*\prime}(z)}{a^*(z)}\right)^2\Phi(a^*(z))-\frac{1}{z^2}\psi(z)\right]\frac{1}{\chi^{*\prime}(z)}(\chi^*(z))^f dz\right\}=0\qquad(f=1,2,\ldots),$$

où c est une circonférence de centre zéro et d'un rayon suffisamment petit, et

$$\Phi(w) = \tau\left(\sum_{p=2}^{N} \frac{\mathfrak{D}^*_{p-1}}{w^{p-1}} + \mathfrak{D}^*_{p-1} w^{p-1}\right) - g, \tag{4.5}$$

$$\Psi(z) = \tau\left(\sum_{p=1}^{N} \frac{\mathfrak{E}^*_{p-1}}{z^{p-1}} + \mathfrak{E}^*_{p-1} z^{p-1}\right) - g, \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} \mathfrak{D}^*_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)} H_n^* \qquad (p=2,\dots,N), \\ \mathfrak{E}^*_0 = \sum_{n=2}^{N} (n-1)\, a_n^* H_n^*, \\ \mathfrak{E}^*_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N} (n-p+1)\, a^*_{n-p+1} H_n^* \qquad (p=2,\dots,N), \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n = a^*(z), \qquad \sum_{n=p}^{\infty} a_n^{*(p)} z^n = \left(a^*(z)\right)^p \qquad (p=2,\dots,N), \tag{4.7'}$$

$$\lambda_n^* + i\mu_n^* = \frac{a_n^*}{a_1^*},$$

$$H_n^* = H'_{X_n}(\lambda_2^*,\dots,\mu_N^*) - iH'_{Y_n}(\lambda_2^*,\dots,\mu_N^*) \qquad (n=2,\dots,N), \tag{4.7''}$$

tandis que τ et g sont des nombres réels ne s'annulant pas simultanément[7]).

Démonstration. L'existence des fonctions extrémales $a^*(z)$ résulte de la continuité de la fonctionelle H_a et de la compacité de la famille $\mathfrak{A}_{TM}$ (lemme 8). Il suffit donc de déduire les formules (4.4), (4.4'). On le fera en deux étapes.

I. Application de la méthode des multiplicateurs

Soient une fonction extrémale quelconque $a^*(z)$ et les deux fonctions correspondantes $\Omega^*(w)$ et $\chi^*(z)$ décrites ci-dessus. Toutes les notions et notations de paragraphe 3 sont valables pour ces fonctions.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{S}$ composé de tous les systèmes de nombres — tout court points — $(S^{\cdot})$ de (3.25) satisfaisant aux conditions (3.27), (3.28). En posant

$$\Omega^{\cdot}(w, D_0^{\cdot},\dots,D_{L^*}^{\cdot}, \overline{D}_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) = \sum_{s=0}^{L^*} (D_s^{\cdot} w^{-s} + \overline{D}_s^{\cdot} w^s), \tag{4.8}$$

$$\chi^{\cdot}(z, E_0^{\cdot},\dots,E_{L^*}^{\cdot}, \overline{E}_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}) = \sum_{s=0}^{L^*} (E_s^{\cdot} z^{-s} + \overline{E}_s^{\cdot} z^s), \tag{4.9}$$

[7]) Remarquons que les fonctions $\Phi(w)$ et $\Psi(z)$ de (4.4) et (4.4') sont tout à fait semblables à celles que j'ai obtenues dans les équations de fonctions extrémales dans F_T; voir [3], p. 5-6.

où l'on considère pour le moment w, z et $D_s^{\cdot}, \overline{D}_s^{\cdot}, E_s^{\cdot}, \overline{E}_s^{\cdot}$ $(s=0,\dots,L^*)$ comme $2+2(L^*+1)$ variables indépendantes, on peut représenter les conditions (3.28) sous la forme équivalente suivante:

$$\begin{gathered} \Omega^{\cdot}(w_k, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) - \chi^{\cdot}(z_k, E_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (k=1,\dots,Q), \\ \Omega_w^{\cdot(m)}(w_k^{\cdot}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q), \\ \chi_z^{\cdot(m)}(z_k^{\cdot}, E_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q), \end{gathered}$$

$$\frac{1}{i}\left(\Omega^{\cdot}(v_h^{\cdot}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) - \Omega^{\cdot}\left(\frac{1}{\overline{v}_h}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}\right)\right) = 0 \qquad (h=1,\dots,P), \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered} \Omega^{\cdot}(v_h^{\cdot}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) - \chi_1^{\cdot}(\varphi_{hj}^{\cdot}, E_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P), \\ \Omega_w^{\cdot(m)}(v_h^{\cdot}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P), \\ \chi_1^{\cdot(m)}(\varphi_{hj}^{\cdot}, E_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P), \\ \Omega_1^{\cdot}(\omega_l^{\cdot}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) - \chi_1^{\cdot}(\psi_{lj}^{\cdot}, E_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R), \\ \Omega_{1w}^{\cdot(m)}(\omega_l^{\cdot}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R), \\ \chi_{1y}^{\cdot(m)}(\psi_{lj}^{\cdot}, E_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}) = 0 \qquad (m=1,\dots,\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R), \end{gathered}$$

où

$$\begin{gathered} \Omega_1^{\cdot}(x, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) = \Omega^{\cdot}(e^{ix}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}), \\ \chi_1^{\cdot}(y, E_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}) = \chi^{\cdot}(e^{iy}, E_0^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}). \end{gathered}$$

Il résulte du lemme 9 qu'à chaque point $(S^{\cdot})$ de l'ensemble $\mathfrak{S}$, suffisamment proche du point (S^*) de (3.26), correspond une fonction $a^{\cdot}(z) = a_1^{\cdot} z + a_2^{\cdot} z^2 + \dots$ satisfaisant aux conditions (3.31) et $a_1^{\cdot} = T^*$, qui appartient à $\mathfrak{A}_{T^*L^*}$ et donc aussi à $\mathfrak{A}_{TM}$. Pour cette fonction a lieu l'inégalité $H_{a^{\cdot}} \leqslant H_{a^*}$, car $a^*(z)$ est extrémale. En même temps, il résulte de (4.2) que les valeurs $H_{a^{\cdot}}$ et H_{a^*} peuvent être représentées pour $(S^{\cdot})$ suffisamment proche de (S^*) sous la forme

$$H_{a^{\cdot}} = J_{L^*}(D_{G^*}^{\cdot},\dots,D_{L^*}^{\cdot}, \overline{D}_{G^*}^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}, E_{G^*}^{\cdot},\dots,E_{L^*}^{\cdot}, \overline{E}_{G^*}^{\cdot},\dots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot}), \tag{4.11}$$

$$H_{a^*} = J_{L^*}(D_{G^*}^*,\dots,D_{L^*}^*, \overline{D}_{G^*}^*,\dots,\overline{D}_{L^*}^*, E_{G^*}^*,\dots,E_{L^*}^*, \overline{E}_{G^*}^*,\dots,\overline{E}_{L^*}^*), \tag{4.12}$$

où $G^* = L^* - N + 1$.

En considérant le côté droit de (4.11) comme une fonction du point variable $(S^{\cdot})$ dans l'ensemble $\mathfrak{S}$, il résulte de l'inégalité $H_{a^{\cdot}} \leqslant H_{a^*}$ et (4.12) que cette fonction atteint au point (S^*) son maximum local dans $\mathfrak{S}$. Mais comme l'ensemble $\mathfrak{S}$ est défini par les conditions (3.27) et (4.10) pour les variables (3.25), on peut considérer le maximum local en question comme étant en outre lié. Le lemme 4 prouve qu'il existe un système non trivial de multiplicateurs complexes et réels correspondant aux conditions (4.10), (3.27) et à la fonction (4.11)[8]:

$$
\begin{array}{lll}
 & \nu_k & (k=1,\ldots,Q), \\
 & \lambda_k^{(m)} & (m=1,\ldots,\gamma_k;\ k=1,\ldots,Q), \\
 & \mu_k^{(m)} & (m=1,\ldots,\gamma_k;\ k=1,\ldots,Q), \\
 & g_h \text{ - réel} & (h=1,\ldots,P), \\
 & u_{hj} & (j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P), \\
(4.13) & \vartheta_h^{(m)} & (m=1,\ldots,\delta_h;\ h=1,\ldots,P), \\
 & d_{hj}^{(m)} \text{ - réel} & (m=1,\ldots,\xi_{hj};\ j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P), \\
 & r_{lj} \text{ - réel} & (j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R), \\
 & p_l^{(m)} \text{ - réel} & (m=1,\ldots,\sigma_l;\ l=1,\ldots,R), \\
 & q_{lj}^{(m)} \text{ - réel} & (m=1,\ldots,\eta_{lj};\ j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R), \\
 & \varkappa & \\
 & t \text{ - réel,} &
\end{array}
$$

tel que les égalités suivantes ont lieu:

(4.14)

$$
\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\nu_k\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_k}{\partial\zeta}\right)+\bar{\nu}_k\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{E}}_k}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right]+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k}\left(\lambda_k^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}_k^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+\bar{\lambda}_k^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_k^{(m)}}{\partial\zeta}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k}\left(\mu_k^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{N}_k^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+\bar{\mu}_k^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}_k^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(g_h\left(\frac{\partial\mathfrak{P}_h}{\partial\zeta}\right)+g_h\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{P}}_h}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(u_{hj}\left(\frac{\partial\mathfrak{G}_{hj}}{\partial\zeta}\right)+\bar{u}_{hj}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{G}}_{hj}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{m=1}^{\delta_h}\left(\vartheta_h^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}_h^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+\bar{\vartheta}_h^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{A}}_h^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\sum_{m=1}^{\xi_{hj}}\left(d_{hj}^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}_{hj}^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+d_{hj}^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{W}}_{hj}^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right)\right]
$$

[8]) Puisque les fonctions (4.8) et (4.9) sont envers w et z des fonctions rationnelles spéciales, on constate facilement que les 4-ième, 7-ième, 8-ième, 9-ième, 10-ième côtés gauches de (4.10) sont toujours réels.

$$
+\left[\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(r_{lj}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_{lj}}{\partial\zeta}\right)+r_{lj}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_{lj}}{\partial\bar{\sigma}}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{m=1}^{\sigma_l}\left(p_l^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_l^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+p_l^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_l^{(m)}}{\partial\zeta}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(\sum_{m=1}^{\eta_{lj}}\left(q_{lj}^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_{lj}^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+q_{lj}^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_{lj}^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right)\right]
$$

$$
=\varkappa\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\right)+\bar{\varkappa}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{R}}}{\partial\bar{\zeta}}\right)+t\left(\frac{\partial\mathfrak{I}_{L^*}}{\partial\zeta}\right)+t\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{I}}_{L^*}}{\partial\bar{\zeta}}\right);
$$

les symboles $\mathfrak{E}_k$, $\mathfrak{M}_k^{(m)}$, $\mathfrak{N}_k^{(m)}$, $\mathfrak{P}_h$, $\mathfrak{G}_{hj}$, $\mathfrak{A}_h^{(m)}$, $\mathfrak{B}_{hj}^{(m)}$, $\mathfrak{B}_{lj}$, $\mathfrak{E}_l^{(m)}$, $\mathfrak{W}_{lj}^{(m)}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{I}_{L^*}$, désignent ici respectivement les côtés gauches de (4.10), (3.27) et le côté droit de (4.11) que l'on considère ici comme des fonctions des variables indépendantes complexes et réelles (3.25) et des variables conjuguées avec celles-ci. Le symbole ζ doit être remplacé dans (4.14) respectivement par les variables citées, sauf les conjuguées. Les dérivées partielles doivent être calculées pour les valeurs extrémales (3.26) et les valeurs conjuguées avec elles, en respectant la convention du lemme 4 pour les variables réelles.

En examinant les relations (4.14), on constate, en substituant $\zeta=w_k$ puis $\zeta=z_k$ qu'elles se réduisent aux suivantes:

$$
\nu_k\Omega_w''(w_k, D_0^*,\ldots,\overline{D}_{L^*}^*)+\sum_{m=1}^{\gamma_k}\lambda_k^{(m)}\,\Omega_w^{\prime(m+1)}(w_k, D_0^*,\ldots,\overline{D}_{L^*}^*)=0 \qquad (k=1,\ldots,Q),
$$

$$
-\nu_k\,\chi_z''(z_k, E_0^*,\ldots,\overline{E}_{L^*}^*)+\sum_{m=1}^{\gamma_k}\lambda_k^{(m)}\,\chi_z^{\prime(m+1)}(z_k, E_0^*,\ldots,\overline{E}_{L^*}^*)=0 \qquad (k=1,\ldots,Q),
$$

d'où, d'après (4.10)[9]),

$$
(4.15) \qquad \lambda_k^{(m)}=0, \qquad \mu_k^{(m)}=0 \qquad (m=\gamma_k;\ k=1,\ldots,Q).
$$

En posant $\zeta=v_h$ et $\zeta=\varphi_{hj}$ ($j=1,\ldots,I_h$; $h=1,\ldots,P$), on obtient

$$
g_h\frac{1}{i}\,\Omega_w''(v_h, D_0^*,\ldots,\overline{D}_{L^*}^*)+g_h\frac{1}{i}\,\Omega_w''(v_h, D_0^*,\ldots,D_{L^*}^*)
$$

$$
+\Omega_w''(v_h, D_0^*,\ldots,\overline{D}_{L^*}^*)\left(\sum_{j=1}^{I_h}u_{hj}\right)+\sum_{m=1}^{\delta_h}\vartheta_h^{(m)}\,\Omega_w^{\prime(m+1)}(v_h, D_0^*,\ldots,\overline{D}_{L^*}^*)
$$

[9]) Voir remarque p. 20.

$$-(u_{hj}+\bar{u}_{hj})\,\chi_{1y}^{\cdot\prime}(\varphi_{hj},E_0^*,\dots,\overline{E_{L^*}^*})$$

$$+\,2\sum_{m=1}^{\xi_{hj}} d_{hj}^{(m)}\chi_1^{\cdot(m+1)}(\varphi_{hj},E_0^*,\dots,E_{L^*}^*)=0 \qquad (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P)\,[10]),$$

d'où, d'après (4.10),

$$\text{(4.16)}\qquad \begin{aligned} &\vartheta_h^{(m)}=0 \qquad (m=\delta_h;\ h=1,\dots,P),\\ &d_{hj}^{(m)}=0 \qquad (m=\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P). \end{aligned}$$

En posant $\zeta=\omega_l^{\cdot}$, $\zeta=\psi_{lj}^{\cdot}$ $(j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R)$, on obtient comme plus haut

$$2\,\Omega_{1x}^{\cdot\prime}(w_l,D_0^*,\dots,\overline{D_{L^*}^*})\sum_{j=1}^{\sigma_l} r_{lj}+2\sum_{m=1}^{G_l} p_l^{(m)}\Omega_{1x}^{\cdot(m+1)}(\omega_l,D_0^*,\dots,D_{L^*}^*)=0$$
$$(l=1,\dots,R),$$

$$-2r_{lj}\chi_{1y}^{\cdot\prime}(\psi_{lj},E_0^*,\dots,\overline{E_{L^*}^*})+2\sum_{m=1}^{\eta_{lj}} q_{lj}^{(m)}\chi_{1y}^{\cdot(m+1)}(\psi_{lj},E_0^*,\dots,\overline{E_{L^*}^*})=0$$
$$(j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),$$

d'où, d'après (4.10),

$$\text{(4.17)}\qquad \begin{aligned} &p_l^{(m)}=0 \qquad (m=\sigma_l;\ l=1,\dots,R),\\ &q_{lj}^{(m)}=0 \qquad (m=\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R). \end{aligned}$$

En posant $\zeta=D_s^{\cdot}$ et $\zeta=E_s^{\cdot}$ $(s=0,\dots,L^*)$, on obtient, après un calcul simple et en tenant compte de (4.15), (4.16), (4.17), les relations suivantes:

$$\text{(4.18)}\qquad \left[\sum_{k=1}^{Q}(v_k w_k^{-s}+\bar{v}_k\bar{w}_k^{s})\right]+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\nu_k-1}\left(\lambda_k^{(m)}F_{-s}^{(m)}w_k^{-s-m}+\bar{\lambda}_k^{(m)}F_s^{(m)}\bar{w}_k^{s-m}\right)\right)\right]$$
$$+\left[2\sum_{h=1}^{P} g_h\frac{1}{i}(v_h^{-s}-\bar{v}_h^{s})\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}(u_{hj}v_h^{-s}+\bar{u}_{hj}\bar{v}_h^{s})\right)\right]$$
$$+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{m=1}^{\delta_h-1}(\vartheta_h^{(m)}F_{-s}^{(m)}v_h^{-s-m}+\bar{\vartheta}_h^{(m)}F_s^{(m)}\bar{v}_h^{s-m})\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l} r_{lj}e^{-i\omega_l s}\right)\right]$$
$$+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{m=1}^{\sigma_l-1} p_l^{(m)}\Gamma_{-s}^{(m)}e^{-i\omega_l s}\right)\right]=\begin{cases} X_s & (s=0,\dots,L^*-1),\\ X_s+\varkappa & (s=L^*); \end{cases}$$

---

[10]) Remarquons qu'on a toujours

$$\Omega_w^{\cdot\prime}\left(\frac{1}{\bar{w}},D_0^*,\dots,D_{L^*}^*\right)\frac{1}{\bar{w}}=-\overline{\Omega_w^{\cdot\prime}(w,D_0^*,\dots,D_{L^*}^*)w}.$$

$$\text{(4.19)}\qquad -\left[\sum_{k=1}^{Q}(v_k z_k^{-s}+\bar{v}_k\bar{z}_k^{s})\right]+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\nu_k-1}\left(\mu_k^{(m)}F_{-s}^{(m)}z_k^{-s-m}+\bar{\mu}_k^{(m)}F_s^{(m)}\bar{z}_k^{s-m}\right)\right)\right]$$
$$-\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}(u_{hj}+\bar{u}_{hj})e^{-i\varphi_{hj}s}\right)\right]+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\sum_{m=1}^{\xi_{hj}-1} d_{hj}^{(m)}\Gamma_{-s}^{(m)}e^{-i\varphi_{hj}s}\right)\right)\right]$$
$$-\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l} r_{lj}e^{-i\psi_{lj}s}\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(\sum_{m=1}^{\eta_{lj}-1} q_{lj}^{(m)}\Gamma_{-s}^{(m)}e^{-i\psi_{lj}s}\right)\right)\right]$$
$$=\begin{cases} Y_s & (s=0,\dots,L^*-1),\\ Y_s-\varkappa T^{*L^*} & (s=L^*), \end{cases}$$

où

$$\text{(4.20)}\qquad X_s=\begin{cases} 0 & (s=0,\dots,G^*-1),\\ t\left(\dfrac{\partial J_{L^*}}{\partial D_s^{\cdot}}\right)+t\left(\overline{\dfrac{\partial J_{L^*}}{\partial D_s^{\cdot}}}\right) & (s=G^*,\dots,L^*), \end{cases}$$

et

$$\text{(4.20}')\qquad Y_s=\begin{cases} 0 & (s=0,\dots,G^*-1),\\ t\left(\dfrac{\partial J_{L^*}}{\partial E_s^{\cdot}}\right)+t\left(\overline{\dfrac{\partial J_{L^*}}{\partial E_s^{\cdot}}}\right) & (s=G^*,\dots,L^*), \end{cases}$$

et où

$$F_s^{(m)}=s(s-1)\dots(s-m+1),$$
$$\Gamma_s^{(m)}=(si)^m \qquad (s=0,\pm1,\pm2,\dots;\ m=1,2,\dots).$$

II. Déduction des formules fondamentales

Considérons les côtés gauches de (4.18) et (4.19) pour les indices s plus grands que L^* et désignons les respectivement par

$$\text{(4.21)}\qquad X_s \qquad (s=L^*+1,L^*+2,\dots),$$

$$\text{(4.21}')\qquad Y_s \qquad (s=L^*+1,L^*+2\dots).$$

Posons

$$
(4.22)\qquad X(w) = \left[\sum_{k=1}^{Q}\left(-\frac{\nu_k w}{w-w_k}+\frac{\bar{\nu}_k \bar{w}_k w}{1-w\bar{w}_k}\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\nu_k-1}\left(\lambda_k^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-\frac{w}{\zeta}}\right)_{\zeta=w_k}\right)+\bar{\lambda}_k^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-w\zeta}\right)_{\zeta=\bar{w}_k}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(-\frac{\frac{g_h}{i}w}{w-v_h}+\frac{-\frac{g_h}{i}w\bar{v}_h}{1-w\bar{v}_h}\right)\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\frac{u_{hj}w}{w-v_h}+\frac{\bar{u}_{hj}\bar{v}_h w}{1-w\bar{v}_h}\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{p=1}^{P}\left(\sum_{m=1}^{\delta_h-1}\left(\vartheta_h^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-\frac{w}{v_h}}\right)_{\zeta=v_h}\right)+\bar{\vartheta}_h^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-w\zeta}\right)_{\zeta=\bar{v}_h}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\frac{r_{lj}}{1-we^{-i\omega_l}}\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{m=1}^{m_l-1}\rho_l^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{1}{1-we^{-ix}}\right)_{x=\omega_l}\right)\right)\right]
$$

et

$$
(4.22')\qquad Y(z) = -\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(-\frac{\nu_k z}{z-z_k}+\frac{\bar{\nu}_k \bar{z}_k z}{1-z\bar{z}_k}\right)\right]
$$

$$
+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\nu_k-1}\left(\mu_k^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\right)_{\zeta=z_k}\right)+\bar{\mu}_k^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-z\zeta}\right)_{\zeta=\bar{z}_k}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
-\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\frac{u_{hj}+\bar{u}_{hj}}{1-ze^{-i\varphi_{hj}}}\right)\right]+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\sum_{m=1}^{\delta_{hj}-1}d_{hj}^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{1-ze^{-iy}}\right)_{y=\varphi_{hj}}\right)\right)\right)\right]
$$

$$
-\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\frac{r_{lj}}{1-ze^{-i\psi_{lj}}}\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(\sum_{m=1}^{\eta_{lj}-1}q_{lj}^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{1-ze^{-iy}}\right)_{y=\psi_{lj}}\right)\right)\right)\right].
$$

On vérifie facilement en vertu de (4.22), (4.22′) et de la définition des nombres (4.20), (4.21) et (4.20′), (4.21′) que

$$
(4.24)\qquad X\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = -\overline{X(w)},
$$

$$
(4.24')\qquad Y\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\overline{Y(z)}\ ^{11)},
$$

et

$$
(4.25)\qquad X(w) = \left(\sum_{s=G^*}^{\infty} X_s w^s\right) + \varkappa w^{L^*},
$$

$$
(4.25')\qquad Y(z) = \left(\sum_{s=G^*}^{\infty} Y_s z^s\right) - \varkappa T^{*L^*} z^{L^*}
$$

pour w et z suffisamment petits. En posant ensuite

$$
(4.26)\qquad \Phi(w) = -\Omega^{*\prime}(w)\,wX(w),
$$

$$
(4.26')\qquad \Psi(z) = +\chi^{*\prime}(z)\,zY(z),
$$

il résulte de (3.22), (4.22), (4.24), (4.25) et (4.22′), (4.24′), (4.25′) ainsi que des relations évidentes

$$
(4.27)\qquad \Omega^{*\prime}\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)\frac{1}{\bar{w}} = -\overline{\Omega^{*\prime}(w)w},
$$

$$
(4.27')\qquad \chi^{*\prime}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\frac{1}{\bar{z}} = -\overline{\chi^{*\prime}(z)z},
$$

que les expressions (4.26) et (4.26′) n'admettent des pôles qu'aux points zéro et l'infini et que $\Phi(1/\bar{w}) = \overline{\Phi(w)}$ et $\Psi(1/\bar{z}) = \overline{\Psi(z)}$. Ces expressions sont donc des fonctions rationnelles spéciales. En outre, en considérant les identités

$$
(4.28)\qquad X(w) = -\frac{\Phi(w)}{\Omega^{*}(w)w},
$$

$$
(4.28')\qquad Y(z) = +\frac{\psi(z)}{\chi^{*\prime}(z)z}
$$

pour w et z suffisamment petits, on déduit de (4.25) et (4.25′) que les degrés des fonctions (4.26) et (4.26′) ne sont pas plus grands que $2N-2$.

---

[11]) Remarquons qu'en vertu de (4.18) et (4.19), la somme

$$
\left[\sum_{k=1}^{Q}(\nu_k+\bar{\nu}_k)\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}(u_{hj}+\bar{u}_{hj})\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}r_{lj}\right)\right]
$$

doit être nulle.

Posons

$$\Phi(w) = \sum_{p=0}^{N} \frac{\mathfrak{D}_{p-1}}{w^{p-1}} + \overline{\mathfrak{D}}_{p-1} w^{p-1} \qquad (\mathfrak{D}_0 = \overline{\mathfrak{D}}_0), \tag{4.29}$$

$$\Psi(z) = \sum_{p=0}^{N} \frac{\mathfrak{E}_{p-1}}{z^{p-1}} + \mathfrak{E}_{p-1} z^{p-1} \qquad (\mathfrak{E}_0 = \overline{\mathfrak{E}}_0), \tag{4.29'}$$

et examinons les coefficients dans les côtés droits de ces expressions. On a, d'après (4.29), (4.26), (4.25), (4.3) et (4.29′) (4.26′), (4.25′), (4.3′),

$$2\mathfrak{D}_0 = \left(\sum_{s=G^*}^{L^*} X_s s D_s^*\right) + \varkappa L^* D_{L^*}^*, \tag{4.30}$$

$$2\mathfrak{E}_0 = -\left(\sum_{s=G^*}^{L^*} Y_s s D_s^*\right) + \varkappa L^* D_{L^*} T^{*L^*}, \tag{4.30'}$$

et

$$\mathfrak{D}_{p-1} = \sum_{s=G^*}^{L^*-p+1} X_s (s+p-1) D^*_{s+p-1} \qquad (p=2,\ldots,N), \tag{4.31}$$

$$\mathfrak{E}_{p-1} = -\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1} Y_s (s+p-1) E^*_{s+p-1} \qquad (p=2,\ldots,N). \tag{4.31'}$$

Revenons aux fonctions (4.8) et (4.9), et considérons y w, z et $D^{\cdot}_s, \overline{D}^{\cdot}_s, E^{\cdot}_s, \overline{E}^{\cdot}_s$ $(s=0,\ldots,L^*)$ comme des variables indépendantes suffisamment proches de 0,0 et $D^*_s, \overline{D}^*_s, E^*_s, \overline{E}^*_s$ $(s=0,\ldots,L^*)$. On voit facilement qu'il existe une fonction

$$w = a^{\cdot}(z, D^{\cdot}_0, \ldots, D^{\cdot}_{L^*}, \overline{D}^{\cdot}_0, \ldots, \overline{D}^{\cdot}_{L^*}, E^{\cdot}_0, \ldots, E^{\cdot}_{L^*}, \overline{E}^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*}) \tag{4.32}$$

holomorphe envers les variables citées et telle que identiquement

$$\Omega^{\cdot}\left(a^{\cdot}(z, D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*}), D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{D}^{\cdot}_{L^*}\right) = \chi^{\cdot}(z, E^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*}), \tag{4.33}$$

en outre $a^{\cdot}(0, D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*}) = 0$ et $-\pi/L < \arg a^{\cdot\prime}_z(0, D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*}) < \pi/L$. En posant dans un entourage du point $z=0$

$$a^{\cdot}(z, D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*}) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\cdot}_n(D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*}) z^n, \tag{4.34}$$

on a en particulier

$$\frac{a^{\cdot}_n(D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*})}{a^{\cdot}_1(D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{E}^{\cdot}_{L^*})} = a_{nL^*}(D^{\cdot}_{G_n}, \ldots, D^{\cdot}_{L^*}, E^{\cdot}_{G_n}, \ldots, E^{\cdot}_{L^*}) \quad (n=2,\ldots,N), \tag{4.35}$$

où les expressions du côté droit coïncident avec celles de (4.1).

Enfin on calcule facilement de (4.33), (4.34) et (4.8), (4.9):

$$\frac{\partial a^{\cdot}_n}{\partial D^{\cdot}_s} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial D^{\cdot}_s}\left(\left(\frac{\partial^n a^{\cdot}}{\partial z^n}\right)_{z=0}\right)\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{\partial a^{\cdot}}{\partial D^{\cdot}_s}\right)\right)_{z=0} \tag{4.36}$$

$$(n=2,\ldots,N;\ s=G^*,\ldots,L^*),$$

$$\frac{\partial a^{\cdot}}{\partial D^{\cdot}_s}\, \Omega^{\cdot\prime}_w(a^{\cdot}, D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{D}^{\cdot}_{L^*}) + \frac{\partial \Omega^{\cdot}}{\partial D^{\cdot}_s} = 0 \qquad (s=G^*,\ldots,L^*),$$

$$\frac{\partial \Omega^{\cdot}}{\partial D^{\cdot}_s} = \frac{1}{a^{\cdot s}} \qquad (s=G^*,\ldots,L^*)$$

et

$$\frac{\partial a^{\cdot}_n}{\partial E^{\cdot}_s} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial E^{\cdot}_s}\left(\left(\frac{\partial^n a^{\cdot}}{\partial z^n}\right)_{z=0}\right)\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{\partial a^{\cdot}}{\partial E^{\cdot}_s}\right)\right)_{z=0}$$

$$(n=2,\ldots,N;\ s=G^*,\ldots,L^*), \tag{4.36'}$$

$$\frac{\partial a^{\cdot}}{\partial E^{\cdot}_s}\, \Omega^{\cdot\prime}_w(a^{\cdot}, D^{\cdot}_0, \ldots, \overline{D}^{\cdot}_{L^*}) - \frac{\partial \chi^{\cdot}}{\partial E^{\cdot}_s} = 0 \qquad (s=G^*,\ldots,L^*),$$

$$\frac{\partial \chi^{\cdot}}{\partial E^{\cdot}_s} = \frac{1}{z^s} \qquad (s=G^*,\ldots,L^*),$$

où $a^{\cdot}, \Omega^{\cdot}, \chi^{\cdot}$ et $a^{\cdot}_n$ désignent respectivement les expressions (4.32), (4.8), (4.9) et les coefficients de (4.34). On obtient de là, après un calcul simple et d'après (4.35), (4.20), (4.20′) et la définition de (4.2′) et (4.7″)

$$\frac{\partial a^{\cdot}_1}{\partial D^{\cdot}_s} = \begin{cases} 0 & (s=G^*,\ldots,L^*-1), \\ \dfrac{a^{\cdot}_1}{L^* D^{\cdot}_{L^*}} & (s=L^*), \end{cases}$$

$$\frac{\partial a^{\cdot}_1}{\partial E^{\cdot}_s} = \begin{cases} 0 & (s=G^*,\ldots,L^*-1), \\ \dfrac{-a^{\cdot}_1 a^{\cdot L^*}_1}{L^* D_{L^*}} & (s=L^*), \end{cases}$$

$$\frac{\partial a_{nL^*}}{\partial D^{\cdot}_s} = \begin{cases} \dfrac{1}{a^{\cdot}_1}\dfrac{\partial a^{\cdot}_n}{\partial D^{\cdot}_s} & (s=G^*,\ldots,L^*-1), \\ \dfrac{1}{a^{\cdot}_1}\left(\dfrac{\partial a^{\cdot}_n}{\partial D^{\cdot}_s} - \dfrac{a^{\cdot}_n}{L^* D^{\cdot}_{L^*}}\right) & (s=L^*), \end{cases}$$

$$\frac{\partial a_{nL^*}}{\partial E^{\cdot}_s} = \begin{cases} \dfrac{1}{a^{\cdot}_1}\dfrac{\partial a^{\cdot}_n}{\partial E^{\cdot}_s} & (s=G^*,\ldots,L^*-1), \\ \dfrac{1}{a^{\cdot}_1}\left(\dfrac{\partial a^{\cdot}_n}{\partial E^{\cdot}_s} + \dfrac{a^{\cdot L^*}_1 a^{\cdot}_n}{L^* D^{\cdot}_{L^*}}\right) & (s=L^*), \end{cases}$$

où a_{nL^*} désignent les fonctions des côtés droits de (4.35), et ensuite

$$
(4.38)\qquad X_s=\begin{cases}\dfrac{t}{T^*}\displaystyle\sum_{n=2}^{N}H_n^*\left(\frac{\partial \dot a_n}{\partial D_s}\right) & (s=G^*,\dots,L^*-1),\\[2ex] \dfrac{t}{T^*}\left(\displaystyle\sum_{n=2}^{N}H_n^*\left(\frac{\partial \dot a_n}{\partial D_s}\right)-\frac{1}{L^*D_{L^*}^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*a_n^*\right) & (s=L^*),\end{cases}
$$

$$
(4.38')\qquad Y_s=\begin{cases}\dfrac{t}{T^*}\displaystyle\sum_{n=2}^{N}H_n^*\left(\frac{\partial \dot a_n}{\partial E_s}\right) & (s=G^*,\dots,L^*-1),\\[2ex] \dfrac{t}{T^*}\left(\displaystyle\sum_{n=2}^{N}H_n^*\left(\frac{\partial \dot a_n}{\partial E_s}\right)+\frac{T^{*L^*}}{L^*D_{L^*}^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*a_n^*\right) & (s=L^*),\end{cases}
$$

où les dérivées partielles se rattachent aux valeurs extrémales $D_s^*,\overline{D}_s^*$, $E_s^*,\overline{E}_s^*$ $(s=0,\dots,L^*)$. En appliquant les formules (4.36), (4.38), (4.36′), (4.38′) on obtient de (4.31) et (4.31′):

$$
\mathfrak{D}_{p-1}=\frac{t}{T^*}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}\left(\sum_{n=2}^{N}H_n^*\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{\Omega^{*\prime}\big(a^*(z)\big)\big(a^*(z)\big)^s}\right)_{z=0}\right]\right)(s+p-1)D_{s+p-1}^*
$$

$$
=-\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\big(a^*(z)\big)^p\frac{1}{\Omega^{*\prime}\big(a^*(z)\big)}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}(s+p-1)D_{s+p-1}^*\frac{1}{\big(a^*(z)^{s+p}\big)}\right)\right)_{z=0}\right]
$$

$$
(p=2,\dots,N),
$$

$$
\mathfrak{E}_{p-1}=-\frac{t}{T^*}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}\left(\sum_{n=2}^{N}H_n^*\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{\Omega^{*\prime}\big(a^*(z)\big)z^s}\right)_{z=0}\right]\right)(s+p-1)E_{s+p-1}^*
$$

$$
=-\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z_n}\left(a^{*\prime}(z)z^p\frac{1}{\chi^{*\prime}(z)}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}(s+p-1)E_{s+p-1}^*\frac{1}{z^{s+p}}\right)\right)_{z=0}\right]
$$

$$
(p=2,\dots,N).
$$

Puisqu'on a, en introduisant les notations (4.7′),

$$
\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\big(a^*(z)\big)^p\frac{1}{\Omega^{*\prime}\big(a^*(z)\big)}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}(s+p-1)D_{s+p-1}^*\frac{1}{\big(a^*(z)\big)^{s+p}}\right)\right)_{z=0}=-a_n^{*(p)}
$$

$$
(n,p=2,\dots,N),
$$

$$
\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(a^{*\prime}(z)z^p\frac{1}{\chi^{*\prime}(z)}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}(s+p-1)E_{s+p-1}^*\frac{1}{z^{s+p}}\right)\right)_{z=0}=-(n-p+1)a_{n-p+1}^*
$$

$$
(n,p=2,\dots,N),
$$

on en déduit

$$
(4.39)\qquad \mathfrak{D}_{p-1}=\frac{t}{T^*}\sum_{n=1}^{N}H_n^*a_n^{*(p)}\qquad (p=2,\dots,N),
$$

$$
(4.39')\qquad \mathfrak{E}_{p-1}=\frac{t}{T^*}\sum_{n=p}^{N}H_n^*(n-p+1)\,a_{n-p+1}^*\qquad (p=2,\dots,N).
$$

On calcule de la même manière de (4.36), (4.38), (4.30), (4.36′), (4.38′), (4.30′) et (3.10)

$$
(4.40)\qquad 2\mathfrak{D}_0=\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*a_n^*-\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*a_n^*+\varkappa L^*D_{L^*}^*=\varkappa L^*D_{L^*}^*,
$$

$$
(4.40')\qquad 2\,\mathfrak{E}_0=\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*a_n^*-\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*a_n^*+\varkappa T^{*L^*}L^*E_{L^*}^*
$$

$$
=\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N}H_n^*(n-1)\,a_n^*+\varkappa T^{*L^*}L_{L^*}^*E_{L^*}^*.
$$

En posant donc

$$
\tau=\frac{t}{2T^*},\qquad g=-\varkappa L^*D_{L^*}^*=-\varkappa T^{*L^*}L^*E_{L^*}^*,
$$

on vérifie, suivant (4.39), (4.40), (4.29) et (4.39′), (4.40′), (4.29′) que les fonctions (4.26) et (4.26′) ont la forme (4.5) et (4.6).

Passons maintenant à la déduction des formules (4.4). On déduit de (4.22), (4.25) et (4.22′), (4.25′) que

$$
(4.41)\qquad \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C X(w)\big(\Omega^*(w)\big)^l\frac{dw}{w}\right\}
$$

$$
=\left(\frac{1}{2}\sum_{s=G^*}^{L^*l}\big(X_sD_s^{*(l)}+\overline{X}_s\overline{D}_s^{*(l)}\big)\right)+\frac{1}{2}\big(\varkappa D_{L^*}^{*(l)}+\varkappa\,\overline{D}_{L^*}^{*(l)}\big),
$$

$$
(4.41')\qquad \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C Y(z)\big(\chi^*(z)\big)^l\frac{dz}{z}\right\}
$$

$$
=\left(\frac{1}{2}\sum_{s=G^*}^{L^*l}\big(Y_sE_s^{*(l)}+\overline{Y}_s\overline{E}_s^{*(l)}\big)\right)-\frac{1}{2}\big(\varkappa E_{L^*}^{*(l)}+\bar{\varkappa}\overline{E}_{L^*}^{*(l)}\big)T^{*L^*},
$$

où C désigne une circonférence suffisamment petite de centre zéro, et f un nombre naturel quelconque et où nous admettons les notations

$$(4.42)\qquad \left(\Omega^*(w)\right)^f = \sum_{s=0}^{L^*f} D_s^{*(f)} w^{-s} + \bar{D}_s^{*(f)} w^s = \Omega_f^*(w) \qquad (f=1,2,\ldots),$$

$$(4.42')\qquad \left(\chi^*(z)\right)^f = \sum_{s=0}^{L^*f} E_s^{*(f)} z^{-s} + \bar{E}_s^{*(f)} z^s = \chi_f^*(z) \qquad (f=1,2,\ldots).$$

On vérifie facilement, en tenant compte de (4.42), (4.18) et (4.42′), (4.18′) et de la définition des nombres (4.21) et (4.21′) que les côtes droits de (4.41) et (4.41′) se reduisent à la forme

$$(4.43)\qquad \left[\sum_{k=1}^{Q}\left(v_k \Omega_f^*(w_k) + \bar{v}_k \overline{\Omega_f^*(w_k)}\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k-1}\left(\lambda_k^{(m)}\Omega_f^{*(m)}(w_k)+\bar{\lambda}_k^{(m)}\overline{\Omega_f^{*(m)}(w_k)}\right)\right)\right]$$

$$+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(\frac{g_h}{i}\,\Omega_f^*(v_h)-\frac{g_h}{i}\,\overline{\Omega_f^*(v_h)}\right)\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(u_{hj}\,\Omega_f^*(v_h)+\bar{u}_{hj}\,\overline{\Omega_f^*(v_h)}\right)\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{m=1}^{\delta_h-1}\left(\vartheta_h^{(m)}\,\Omega_f^{*(m)}(v_h)+\bar{\vartheta}_h^{(m)}\,\overline{\Omega_f^{*(m)}(v_h)}\right)\right)\right]$$

$$+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l} r_{lj}\,\Omega_{f1}^*(\omega_l)\right)\right]+2\left[\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{m=1}^{\delta_l} p_l^{(m)}\,\Omega_{f1}^{*(m)}(\omega_l)\right)\right] \qquad (f=1,2,\ldots),$$

(4.43′)

$$-\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(v_k\chi_f^*(z_k)+\bar{v}_k\overline{\chi_f^*(z_k)}\right)\right]+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k-1}\left(\mu_k^{(m)}\chi_f^{*(m)}(z_k)+\bar{\mu}_k^{(m)}\chi_f^{*(m)}(z_k)\right)\right)\right]$$

$$-\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}(u_{hj}+\bar{u}_{hj})\,\chi_{f1}^*(\varphi_{hj})\right)\right]+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\sum_{m=1}^{\xi_{hj}-1} d_{hj}^{(m)}\chi_{f1}^{*(m)}(\varphi_{hj})\right)\right)\right]$$

$$-\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l} r_{lj}\,\chi_{f1}^*(\psi_{lj})\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(\sum_{m=1}^{\eta_{lj}-1} q_{lj}^{(m)}\chi_{f1}^{*(m)}(\psi_{lj})\right)\right)\right] \qquad (f=1,2,\ldots),$$

où $\Omega_{f1}^*(x)=\Omega_f^*(e^{ix})$ et $\chi_{f1}^*(y)=\chi_f^*(e^{iy})$. Mais revenant aux relations (4.21′), on obtient pour (4.42), (4.42′) et tout f naturel les égalités

$$(4.44)\qquad \begin{array}{ll}
\Omega_f^*(w_k)=\chi_f^*(z_k) & (k=1,\ldots,Q),\\
\Omega_f^{*(m)}(w_k)=0 & (m=1,\ldots,\gamma_k;\ k=1,\ldots,Q),\\
\chi_f^{*(m)}(z_k)=0 & (m=1,\ldots,\gamma_k;\ k=1,\ldots,Q),\\
\Omega_f^*(v_h)=\overline{\Omega_f^*(v_h)} & (h=1,\ldots,P),\\
\Omega_f^*(v_h)=\chi_{f1}^*(\varphi_{hj}) & (j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P),\\
\Omega_f^{*(m)}(v_h)=0 & (m=1,\ldots,\delta_h;\ h=1,\ldots,P),\\
\chi_{f1}^{*(m)}(\varphi_{hj})=0 & (m=1,\ldots,\xi_{hj};\ j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P),\\
\Omega_{f1}^*(\omega_l)=\chi_{f1}^*(\psi_{lj}) & (j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R),\\
\Omega_{f1}^{*(m)}(\omega_l)=0 & (m=1,\ldots,\sigma_l;\ l=1,\ldots,R),\\
\chi_{f1}^{*(m)}(\psi_{lj})=0 & (m=1,\ldots,\eta_{lj};\ j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R).
\end{array}$$

Donc, en comparant les formules (4.44), (4.28), (4.41), (4.43) et (4.28′), (4.41′), (4.43′) on a immédiatement les formules cherchées (4.4).

En faisant une substitution dans les intégrales à gauche dans (4.4), et en profitant de l'identité évidente

$$a^{*\prime}(z)\,\Omega^{*\prime}\left(a^*(z)\right)=\chi^{*\prime}(z),$$

on parvient aux formules (4.4′). Enfin, en passant aux nombres τ et g, nous voyons facilement de (4.39), (4.40), (4.29), (4.28), (4.22) et de (4.39′), (4.40′), (4.29′), (4.28′), (4.22′), qu'ils ne peuvent s'annuler simultanément, car dans ce cas les multiplicateurs (4.13) devraient être tous égaux à zéro.

Bibliographie

[1] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte, konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. 89 (1923), p. 103-121.

[2] H. L. Royden, *The coefficient problem for bounded functions*, Proc. Nat. Ac. Sc. U. S. A. 1949, p. 657-662.

[3] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne II (1953).

TABLE DES MATIÈRES

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

JOURNAUX

FUNDAMENTA MATHEMATICAE I-XLI.
STUDIA MATHEMATICA I-XIV.
COLLOQUIUM MATHEMATICUM I-III.
ZASTOSOWANIA MATEMATYKI I, II.1-II.2.
ROZPRAWY MATEMATYCZNE I-X.
ANNALES POLONICI MATHEMATICI I.

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

XVIII. A. Mostowski, Logika matematyczna, 1948, p. VIII+388.
XIX. W. Sierpiński, Teoria liczb, 3-ème éd., 1950, p. VIII+544.
XX. C. Kuratowski, Topologie I, 3-ème éd., 1952, p. XI+450.
XXI. C. Kuratowski, Topologie II, 2-ème éd., 1952, p. VIII+444.
XXIII. W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles, 1951, p. 202.
XXIV. S. Banach, Mechanics, 1951, p. IV+546.
XXVII. K. Kuratowski i A. Mostowski, Teoria mnogości, 1952, p. IX+311.
XXVIII. S. Saks and A. Zygmund, Analytic Functions, 1953, p. VIII+452.
XXX. J. Mikusiński, Rachunek operatorów, 1953, p. II+368.
XXXI. W. Ślebodziński, Formes extérieures symboliques et leurs applications, 1954, p. VI+156.

Słownik statystyczny rosyjsko-polski i angielsko-polski, 1952, p. 1-20.
