ROZPRAWY MATEMATYCZNE

POLSKA AKADEMIA NAUK · INSTYTUT MATEMATYCZNY

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

VIII

ГЕОРГИЙ ГЕОРГИЕВ

(GEORG GEORGĚV)

Формулы механической кубатуры с минимальным числом членов

(Mechanical quadratures with a minimal number of terms)

WARSZAWA 1955

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Warszawa 1955

Nakład 1480 egz. Podpisano do druku 3. II. 1955 r.
Ark. wyd. 4,25; druk. 4,5 Druk ukończono w lutym 1955 r.
Papier druk. sat. kl. III. 80 g, 70×100 Zam. nr 1081/54
Cena zł 8,50. F-5-19348

Wrocławska Drukarnia Naukowa — Wrocław, Świerczewskiego 19

*ВВЕДЕНИЕ**

Обозначим через $C_n^{(m)}$ множество всех полиномов $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, степень которых не превышает натурального числа n. Пусть R есть область пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ такая, что многократные интегралы

$$I_{k,l,\ldots,r} = \iint\limits_R \ldots \int x_1^k x_2^l \ldots x_m^r \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m$$

$$(k \geqslant 0,\ l \geqslant 0,\ \ldots,\ r \geqslant 0;\ k + l + \ldots + r \leqslant n)$$

существуют.

Различными способами можно найти натуральное число N, N точек $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)})$ в пространстве и N соответствующих чисел λ_i, выбор которых не зависит от полинома $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, таким образом, что формула

$$\text{(I)} \qquad \iint\limits_R \ldots \int P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)})$$

будет верна для всякого полинома $P \in C_n^{(m)}$.

Условимся говорить, что *формула имеет минимальное число членов*, если число N самое малое из возможных.

Будем также говорить, что *существует формула механической кубатуры с минимальным числом членов и с равными коэффициентами, применимая к множеству $C_n^{(m)}$ по отношению к области R*, если можно определить минимальное натуральное число N и действительные числа $\lambda, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ таким образом, что формула

---

* Часть результатов этой статьи опубликована без доказательств в Докладах Академии наук СССР:

1. *Формулы механической квадратуры с минимальным числом членов при многократных интегралах*, Доклады Академии наук СССР т. 83, № 4 (1952), стр. 521-524.

2. *Формулы механических квадратур с равными коэффициентами для кратных интегралов*, Доклады Академии наук СССР т. 89, № 3 (1953), стр. 389-392.

$$\text{(II)} \qquad \iint_R \dots \int P(x_1, x_2, \dots, x_m)\, dx_1 dx_2 \dots dx_m = \lambda \sum_{i=1}^{N} P(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$$

будет верна для всякого полинома $P \in C_n^{(m)}$.

В настоящей статье приводятся все формулы вида (I) и (II) для множеств $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}$ и $C_1^{(3)}, C_2^{(3)}$ относительно произвольной области R и для множеств $C_3^{(2)}, C_3^{(3)}$ при предположении, что область R симметрична относительно одной точки.

§ 1. ФОРМУЛЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ КУБАТУРЫ ДЛЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Множество $C_1^{(2)}$; $P(x,y) = ax + by + c$. Легко устанавливается следующая теорема:

Теорема 1. *Существует только одна формула вида* (I) (*которая является также формулой вида* (II)) *для множества* $C_1^{(2)}$ *относительно произвольной области* R:

$$\text{(1)} \qquad \iint_R P(x,y)\, dx\, dy = \lambda_0 P(x_0, y_0),$$

где

$$\text{(2)} \qquad \lambda_0 = I_{00}, \qquad x_0 = \frac{I_{10}}{I_{00}}, \qquad y_0 = \frac{I_{01}}{I_{00}} \qquad \left(I_{kl} = \iint_R x^k y^l\, dx\, dy\right).$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ *является центром тяжести однородной области* R, *а число* $\lambda_0 = I_{00}$ *площадью области* R *и, следовательно,* $\lambda_0 > 0$.

2. Множество $C_2^{(2)}$; $P(x,y) = \sum_{k+l \leq 2} a_{kl} x^k y^l$.

I. Формулы вида (I) для $C_2^{(2)}$. Установим прежде всего, что не существует формула вида (I) для $C_2^{(2)}$, в которой $N \leq 2$.

Допустим, что формула

$$\iint_R P(x,y)\, dx\, dy = \lambda_1 P(x_1, y_1) + \lambda_2 P(x_2, y_2)$$

верна для каждого полинома $P \in C_2^{(2)}$. Пусть $l(x,y) = ax + by + c$ линейная функция, отличная от постоянной и такая, что $l_i = l(x_i, y_i) = 0$ $(i = 1, 2)$. Применяя двучленную формулу к полиному $P_2 = l^2(x,y) \in C_2^{(2)}$, находим

$$\iint l^2(x,y)\, dx\, dy = \lambda_1 l_1^2 + \lambda_2 l_2^2 = 0,$$

что невозможно, так как левая часть этого равенства положительное число.

Докажем, что существует бесконечное множество формул вида

$$\text{(3)} \qquad \iint_R P(x,y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P(x_i, y_i),$$

применимых к множеству $C_2^{(2)}$. С этой целью вводим функцию действительных переменных $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$:

$$(4)\qquad F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & z & x & y \\ \zeta & I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ \xi & I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ \eta & I_{01} & I_{11} & I_{02}\end{vmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix} I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ I_{01} & I_{11} & I_{02}\end{vmatrix}$$

$$(I_{kl}=\iint x^k y^l\,dx\,dy).$$

Так как Δ является определителем положительно определенной квадратичной формы $I(u,v,w)=\iint\limits_R (ux+vy+w)^2\,dx\,dy$, то $\Delta>0$ для каждой области R.

Из определения (4) функции F вытекают следующие тождества:

$$(5)\qquad F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=F(\xi,\eta,\zeta;x,y,z),$$

для всех значений переменных $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ и

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\iint F(x,y,1;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy=\zeta,\\ &\iint xF(x,y,1;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy=\xi,\\ &\iint yF(x,y,1;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy=\eta \end{aligned}$$

для всех значений переменных ξ, η, ζ.

Пусть $g(x,y,z)=ax+by+cz$ произвольный полином первой степени. Перемножая равенства (6) соответственно на c, a, b и складывая почленно, получаем

$$(7)\qquad \iint g(x,y,1)F(x,y,1;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy=g(\xi,\eta,\zeta).$$

С другой стороны, интегрируя очевидное тождество

$$g(x,y,1)F(x,y,1;\xi,\eta,\zeta)=F(xg,yg,g;\xi,\eta,\zeta),$$

где $g=g(x,y,1)$, получаем

$$(8)\qquad \iint g(x,y,1)F(x,y,1;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy=F(u,v,w;\xi,\eta,\zeta),$$

где обозначено

$$(9)\qquad u=\iint xg(x,y,1)\,dx\,dy,\qquad v=\iint yg(x,y,1)\,dx\,dy,\qquad w=\iint g(x,y,1)\,dx\,dy.$$

Из (7), (8) и (5) следует, что каждую линейную функцию $g(x,y,z)=ax+by+cz$ можно представить в виде

$$(10)\qquad g(x,y,z)=F(x,y,z;u,v,w),$$

где u, v, w — постоянные, определенные формулами (9).

Обозначим

$$F_k=F(x,y,1;x_k,y_k,1),\qquad F_{kr}=F(x_k,y_k,1;x_r,y_r,1),$$

где x_i, y_i, x, y — произвольные действительные числа. Подставляя в (7) $g=F_k$, $\xi=x_r$, $\eta=y_r$, $\zeta=1$, получаем

$$(11)\qquad \iint\limits_R F_k F_r\,dx\,dy=F_{kr}.$$

При $r=k$ имеем $\iint F_k^2\,dx\,dy=F_{kk}$, т. е.

$$(12)\qquad \iint\limits_R F^2(x,y,1;x_k,y_k,1)\,dx\,dy=F(x_k,y_k,1;x_k,y_k,1),$$

и следовательно $F(x,y,1;x,y,1)\geqslant 0$ для всех x, y.

Покажем, что

$$(13)\qquad F(x,y,1;x,y,1)>0$$

для всех действительных x, y. С этой целью заметим, что левая часть (12) равна нулю только в том случае, если функция $F(x,y,1;\xi,\eta,\zeta)$ переменных x, y, тождественно равна нулю, что невозможно. В самом деле, обозначая

$$(14)\qquad \begin{gathered} \alpha(x,y,z)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} I_{00} & z & I_{01} \\ I_{10} & x & I_{11} \\ I_{01} & y & I_{02}\end{vmatrix},\qquad \beta(x,y,z)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} I_{00} & I_{10} & z \\ I_{10} & I_{20} & x \\ I_{01} & I_{11} & y\end{vmatrix},\\ \gamma(x,y,z)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} z & I_{10} & I_{01} \\ x & I_{20} & I_{11} \\ y & I_{11} & I_{02}\end{vmatrix}, \end{gathered}$$

из (4) находим

$$(15)\qquad \begin{aligned} F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)&=x\alpha(\xi,\eta,\zeta)+y\beta(\xi,\eta,\zeta)+z\gamma(\xi,\eta,\zeta)=\\ &=\xi\alpha(x,y,z)+\eta\beta(x,y,z)+\zeta\gamma(x,y,z). \end{aligned}$$

Это тождество показывает, что для того, чтобы функция $F(x,y,1;\ \xi,\eta,\zeta)$ переменных x, y тождественно равнялась постоянной, необходимо и достаточно, чтобы параметры ξ, η, ζ удовлетворяли уравнениям

$$(16)\qquad \alpha(\xi,\eta,\zeta)=0,\qquad \beta(\xi,\eta,\zeta)=0.$$

Тогда имеем

$$(17)\qquad F(x,y,1;\xi,\eta,\zeta)=\gamma(\xi,\eta,\zeta).$$

Подставляя (16) в тождества (6) получаем

$$\frac{\xi}{I_{10}}=\frac{\eta}{I_{01}}=\frac{\zeta}{I_{00}}=\gamma(\xi,\eta,\zeta),$$

так что решение системы (16) имеет вид

$$\xi=\zeta x_0, \qquad \eta=\zeta y_0,$$

где x_0, y_0 — числа определенные формулами (2). Подставляя полученные таким образом ξ, η и $\gamma=\zeta/I_{00}$ в (17) находим окончательно $F(x,y,1;\zeta x_0,\zeta y_0,\zeta)=\zeta/I_{00}$, т. е.

$$F_0=F(x,y,1;x_0,y_0,1)=\frac{1}{I_{00}}. \tag{18}$$

И так мы установили, что функция $F(x,y,1;\xi,\eta,1)$ тождественно равна постоянной только для значений $\xi=x_0$, $\eta=y_0$ параметров ξ,η, притом эта постоянная равна положительному числу $1/I_{00}$.

Легко показать, что функция $F(x,y,1;x,y,1)$ имеет минимум $1/I_{00}$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, т. е.

$$F(x,y,1;x,y,1)\geqslant\frac{1}{I_{00}}, \tag{19}$$

притом знак $=$ будем иметь только в случае $x=x_0$, $y=y_0$.

Установим необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа x_i, y_i, λ_i $(i=1,2,3)$ формулы (3).

Прежде всего отметим, что $\lambda_i\neq 0$ $(i=1,2,3)$. В самом деле, если например $\lambda_3=0$, то формула (3) будет двучленная, что невозможно.

Другим необходимым условием является, чтобы определитель

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}$$

был отличным от нуля. В самом деле, условие $D=0$ равносильно тому, что точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой, что невозможно.

Покажем, что точка M_0 не лежит на сторонах треугольника $M_1M_2M_3$. Допустим, что точки M_0, M_1, M_2 лежат на одной прямой. Тогда линейная функция

$$g(x,y)=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x\\y_1&y_2&y\end{vmatrix}$$

обращается в нуль в точке $M_0(x_0,y_0)$, т. е. $g_0=g(x_0,y_0)=0$. С другой стороны имеем

$$\iint_R g(x,y)\,dx\,dy=\iint_R\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x\\y_1&y_2&y\end{vmatrix}dx\,dy=\begin{vmatrix}1&1&I_{00}\\x_1&x_2&I_{10}\\y_1&y_2&I_{01}\end{vmatrix}=$$

$$=I_{00}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_0\\y_1&y_2&y_0\end{vmatrix}=I_{00}\,g_0=0.$$

Применяя формулу (3) к полиному $g(x,y)\in C_2^{(2)}$, получаем

$$\iint_R g(x,y)\,dx\,dy=\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3.$$

Но $g_1=g(x_1,y_1)=0$, $g_2=g(x_2,y_2)=0$, $\iint g(x,y)\,dx\,dy=0$, $\lambda_3\neq 0$, следовательно $g_3=g(x_3,y_3)=0$. В виду того, что $g_3=D$, следует $D=0$, что невозможно.

Таким образом мы установили, что любые три из точек M_0, M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой. Тем самым мы установили, что ни одна из точек M_1, M_2, M_3 не совпадает с точкой M_0.

Предположим теперь, что x_i, y_i, λ_i определяют формулу вида (3). Применим эту формулу к трем полиномам

$$F=F(x,y,1;\xi,\eta,1), \qquad xF, \qquad yF,$$

где ξ, η — произвольные действительные числа. Принимая во внимание (6), получаем

$$\begin{aligned}\lambda_1F_1\quad+\lambda_2F_2\quad+\lambda_3F_3\quad&=1,\\ \lambda_1F_1x_1+\lambda_2F_2x_2+\lambda_3F_3x_3&=\xi,\\ \lambda_1F_1y_1+\lambda_2F_2y_2+\lambda_3F_3y_3&=\eta,\end{aligned} \tag{20}$$

где $F_i=F(x_i,y_i,1;\xi,\eta,1)$. Решая эту систему относительно неизвестных λ_iF_i, получаем

$$F\lambda_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}1&1&1\\\xi&x_2&x_3\\\eta&y_2&y_3\end{vmatrix}, \qquad \lambda_2F_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&\xi&x_3\\y_1&\eta&y_3\end{vmatrix},$$

$$\lambda_3F_3=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&\xi\\y_1&y_2&\eta\end{vmatrix}.$$

Подставляя $\xi=x_i$, $\eta=y_i$ $(i=1,2,3)$ находим

(21) $$\lambda_i=\frac{1}{F_{ii}}\qquad (i=1,2,3),$$

(22) $$F_{kr}=0\qquad (k,r=1,2,3;\ k\neq r).$$

Отметим, что из зависимостей (22) только 3 различны, так как $F_{kr}=F_{rk}$, т. е.

(23) $$\begin{aligned}F_{12}&=F(x_1,y_1,1;x_2,y_2,1)=0,\\ F_{13}&=F(x_1,y_1,1;x_3,y_3,1)=0,\\ F_{23}&=F(x_2,y_2,1;x_3,y_3,1)=0.\end{aligned}$$

Из (13) и (21) следует, что все λ_i положительны, т. е.

(24) $$\lambda_i=\frac{1}{F(x_i,y_i,1;x_i,y_i,1)}>0\qquad (i=1,2,3).$$

Зависимости (23) и (24) выражают необходимые условия, которым должны удовлетворять числа x_i,y_i,λ_i формулы (3). Докажем, что эти условия являются и достаточными.

Предположим, что числа x_i,y_i — произвольное решение системы (23). Легко заметить, что тогда функции $F_i=F(x,y,1;\ x_i,y_i,1)$ $(i=1,2,3)$ линейно независимы. В самом деле, если для постоянных c_i имеем тождественно

$$c_1F_1+c_2F_2+c_3F_3\equiv 0,$$

то подставляя $x=x_1$, $y=y_1$, получим равенство $c_1F_{11}+c_2F_{21}+c_3F_{31}=0$, которое согласно (23) обращается в $c_1F_{11}=0$, т. е. $c_1=0$, так как $F_{11}>0$. Аналогично доказываем, что $c_2=0$, $c_3=0$, т. е. F_i линейно независимы. Но в таком случае произвольный полином $P(x,y)\in C_2^{(2)}$ можно представить в виде

(25) $$\begin{aligned}P(x,y)&=\sum_{k\leqslant r}a_{kr}F_kF_r=\\ &=a_{11}F_1^2+a_{22}F_2^2+a_{33}F_3^2+a_{12}F_1F_2+a_{13}F_1F_3+a_{23}F_2F_3,\end{aligned}$$

где a_{kr} постоянные. Подставляя в (25) $x=x_i$, $y=y_i$ и имея в виду (23), получаем $P(x_i,y_i)=a_{ii}F_{ii}^2$, откуда находим $a_{ii}F_{ii}=P(x_i,y_i)/F_{ii}$. Но $1/F_{ii}=\lambda_i$, так что

(26) $$a_{ii}F_{ii}=\lambda_iP(x_i,y_i).$$

С другой стороны, интегрируя (25), находим

$$\iint P(x,y)\,dx\,dy=\sum_{k\leqslant r}a_{kr}\iint F_kF_r\,dx\,dy.$$

Имея в виду (11), (23) и (26) получаем последовательно

$$\iint P(x,y)\,dx\,dy=\sum_{k\leqslant r}a_{kr}F_{kr}=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}F_{ii}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_iP(x_i,y_i),$$

чем мы и установили, что формула (3) верна для произвольного полинома $P(x,y)\in C_2^{(2)}$, и тем самым доказали следующую теорему:

Для того, чтобы числа x_i,y_i, вместе с числами $\lambda_i=1/F_{ii}$ определяли формулу вида (3), *применимую к множеству $C_2^{(2)}$ относительно произвольной двумерной области R, необходимо и достаточно, чтобы x_i,y_i были решением системы* (23).

Остается еще показать, что система (23), состоящая из трех уравнений с шестью неизвестными x_i,y_i, разрешима. Докажем, что эта система допускает бесконечное множество решений.

Пусть числа x_1,y_1 — произвольные, подчиненные единственному ограничению, чтобы точка $M_1(x_1,y_1)$ не совпадала с точкой $M_0(x_0,y_0)$, где числа x_0,y_0 определены формулами (2). Отметим, что при этом выборе x_1,y_1, функция $F_1=F(x,y,1;x_1,y_1,1)$ отлична от постоянной.

Примем далее, что x_2,y_2 — одно из решений уравнения $F_1=0$ (такие решения существуют, так как F_1 отлична от постоянной). Ясно, что при этом выборе x_2,y_2, будет удовлетворено уравнение $F_{12}=0$ системы (23). Отметим, что точка $M_2(x_2,y_2)$ не совпадает с точкой $M_0(x_0,y_0)$, так как в противном случае $F_{12}=F_{10}=1/I_{00}>0$, что невозможно, потому что $F_{12}=0$. Подчиним x_2,y_2 условию, чтобы точка M_2 не лежала на прямой, определенной точками M_0, M_1, т. е. чтобы точка M_2 не совпадала с точкой пересечения $M'(x',y')$ прямых $F_1=0$ и M_0M_1.

Легко получаются координаты этой точки:

$$x'=\frac{x_1-I_{00}F_{11}x_0}{1-I_{00}F_{11}},\qquad y'=\frac{y_1-I_{00}F_{11}y_0}{1-I_{00}F_{11}}.$$

Следовательно, можно выбрать

$$x_2=x'-\lambda\beta_1,\qquad y_2=y'+\lambda\alpha_1,$$

где $\lambda\neq 0$ произвольное действительное число, а α_1,β_1 — коэффициенты в выражении $F_1=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1$.

Теперь докажем, что при таком выборе чисел x_1,y_1, x_2,y_2, последние два уравнения системы (23), или, что то же самое, уравнения

$$F_1=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1=0,$$

$$F_2=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2=0$$

имеют вполне определенное решение x_3, y_3. С этой целью докажем, что определитель

$$d=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, не равен нулю. Допустим, что $d=0$. Из этого следует, что $\alpha_2=\mu\alpha_1$, $\beta_2=\mu\beta_1$ и, следовательно,

$$F_2-\mu F_1=\gamma_2-\mu\gamma_1.$$

Перемножая это тождество на $1, x, y$, интегрируя и имея в виду (6), получаем

$$\begin{aligned}1-\mu\quad &= I_{00}(\gamma_2-\mu\gamma_1),\\ x_2-\mu x_1 &= I_{10}(\gamma_2-\mu\gamma_1),\\ y_2-\mu y_1 &= I_{01}(\gamma_2-\mu\gamma_1).\end{aligned}$$

Из этих зависимостей получаем

$$x_0=\frac{x_2-\mu x_1}{1-\mu},\qquad y_0=\frac{y_2-\mu y_1}{1-\mu},$$

и, следовательно, точка M_0 лежит на прямой M_1M_2, что невозможно. Отметим, что $\gamma_2-\mu\gamma_1\neq 0$ и, следовательно, $1-\mu\neq 0$. В самом деле, если $\gamma_2-\mu\gamma_1=0$, то $F_2-\mu F_1=0$. Но из $F_2=\mu F_1$ следует, что прямые $F_1=0$, $F_2=0$ совпадают, что невозможно, так как точка M_1 лежит на прямой $F_2=0$ $(F_{12}=0)$ и та же самая точка не лежит на прямой $F_1=0$ $(F_{11}>0)$.

Таким образом мы установили, что система (23) имеет бесконечное множество решений, зависимых от трех параметров: x_1, y_1, $\lambda\neq 0$. Тем самым мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. *Формулы механической кубатуры с минимальным числом членов для множества $C_2^{(2)}$, относительно произвольной двумерной области R — трехчленны. Существует бесконечное множество формул этого вида; зависят они от трех произвольных параметров.*

Для того, чтобы формула

$$\iint_R P(x, y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i P(x_i, y_i)$$

была верна для каждого полинома $P\in C_2^{(2)}$, необходимо и достаточно, чтобы числа x_i, y_i были решением системы трех уравнений

$$F(x_k, y_k, 1; x_r, y_r, 1)=0\qquad (k<r;\ k, r=1, 2, 3),$$

где функция F определена в (4), а коэффициенты λ_i были определены по формуле

$$\lambda_i=\frac{1}{F(x_i, y_i, 1; x_i, y_i, 1)}\qquad (i=1, 2, 3),$$

согласно которой эти числа положительны.

Полученному результату можно дать геометрическое толкование. С этой целью рассмотрим мнимую кривую

$$E(x, y, z)=0\qquad (z=1),$$

где $E(x, y, z)$ неотрицательная однородная функция:

$$E(x, y, z)=F(x, y, z; x, y, z).$$

Имея в виду определение (4) функции F, легко устанавливается, что для произвольных x_i, y_i, z_i имеет место тождество

$$\frac{\partial E}{\partial x}x_i+\frac{\partial E}{\partial y}y_i+\frac{\partial E}{\partial z}z_i=2F_i,$$

из которого заключаем, что поляра точки $M_i(x_i, y_i)$ относительно кривой E имеет уравнение $F_i=0$.

Предположим теперь, что треугольник с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$ автополярен относительно E. Тогда уравнения его сторон будут $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$. Но на поляре $F_i=0$ вершины M_i лежат две остальные вершины, т. е. $F_{12}=0$, $F_{13}=0$, $F_{23}=0$. Из этого заключаем, что координаты вершин автополярного треугольника $M_1M_2M_3$ являются решением системы (23). Нетрудно показать обратное, т. е. что каждое решение x_i, y_i системы (23) определяет треугольник автополярный относительно E.

Таким образом мы установили следующую теорему:

Теорема 3. *Для того, чтобы формула (3) была формулой механической кубатуры с минимальным числом членов для множества $C_2^{(2)}$ относительно области R, необходимо и достаточно, чтобы треугольник с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ был автополярным относительно мнимой кривой второго порядка $F(x, y, 1; x, y, 1)=0$, где функция F определена в (4). В каждой из этих формул, коэффициенты λ_i определяются по формуле*

$$\lambda_i=\frac{1}{F(x_i, y_i, 1; x_i, y_i, 1)}$$

и, следовательно, всегда положительны.

Относительно взаимного положения точек M_0, M_1, M_2, M_3 заметим, что центр тяжести M_0 области R лежит внутри треугольника

$M_1M_2M_3$. В самом деле, применяя формулу (3) к полиномам $1, x, y$, получаем

$$I_{00}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \qquad I_{10}=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3, \qquad I_{01}=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3,$$

откуда

$$x_0=\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \qquad y_0=\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}.$$

Так как $\lambda_i>0$, то $M_0(x_0, y_0)$ лежит внутри треугольника $M_1M_2M_3$.

II. Формулы вида (II) для $C_2^{(2)}$. Установим, что *формулы вида* (II) *для множества* $C_2^{(2)}$ *трехчленны*, т. е. вида

$$\iint\limits_R P(x,y)\,dx\,dy=\lambda\sum_{i=1}^{3}P(x_i,y_i), \tag{27}$$

и докажем, что *существует бесконечное множество формул этого вида*. Заметим, что для

$$\xi=\frac{x_r+\vartheta x_k}{1+\vartheta}, \qquad \eta=\frac{y_r+\vartheta y_k}{1+\vartheta}, \tag{28}$$

где $x_r, y_r, x_k, y_k, \vartheta$ произвольные действительные числа, имеем

$$F(x,y,1;\xi,\eta,1)=\frac{F_r+\vartheta F_k}{1+\vartheta}, \tag{29}$$

$$F(\xi,\eta,1;\xi,\eta,1)=\frac{F_{rr}+2F_{kr}\vartheta+F_{kk}\vartheta^2}{(1+\vartheta)^2}. \tag{30}$$

Эти зависимости получаются из (4), если подставим на место ξ и η выражения (28).

Теперь воспользуемся формулой (3). Предположим, что x_i, y_i этой формулы такие, что коэффициенты λ_i равны между собой, т. е $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$. Но тогда

$$\lambda_i=\frac{I_{00}}{3} \qquad (i=1,2,3), \tag{31}$$

так как $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=I_{00}$. Из (31) и (21) заключаем, что $F_{ii}=3/I_{00}$, т. е.

$$F(x_i,y_i,1;\ x_i,y_i,1)=\frac{3}{I_{00}} \qquad (i=1,2,3). \tag{32}$$

Таким образом мы установили, что точки $M_i(x_i, y_i)$ лежат на кривой второго порядка

$$F(x,y,1;x,y,1)=\frac{3}{I_{00}}. \tag{33}$$

Докажем, что каждая кривая

$$F(x,y,1;x,y,1)=\frac{c}{I_{00}} \qquad (c>1) \tag{34}$$

есть эллипс с центром M_0. Для этого достаточно установить, что прямая определенная точкой $M_0(x_0, y_0)$ и произвольной точкой $M_r(x_r, y_r)$ несовпадающей с M_0, пересекает кривую (34) в двух действительных точках, равноудаленных от M_0. В самом деле, параметрические уравнения этой прямой имеют вид

$$\xi=\frac{x_r+\vartheta x_0}{1+\vartheta}, \qquad \eta=\frac{y_r+\vartheta y_0}{1+\vartheta}. \tag{35}$$

В виду (30) и (34), для точек пересечения будем иметь квадратное уравнение относительно ϑ:

$$\frac{F_{rr}+2F_{r0}\vartheta+F_{00}\vartheta^2}{(1+\vartheta)^2}=\frac{c}{I_{00}}.$$

Но $F_{r0}=F_{00}=1/I_{00}$, так что это уравнение получает вид

$$(\vartheta+1)^2=\frac{I_{00}F_{rr}-1}{c-1}. \tag{36}$$

Так как $M_r\neq M_0$, то из (19) следует $I_{00}F_{rr}-1>0$, а так как кроме этого $c-1>0$, то корни уравнения (36) действительны и различны, какое бы ни было положение точки M_r. С другой стороны, из (35) и (36) получаем равенство

$$(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2=\frac{c-1}{I_{00}F_{rr}-1}\left[(x_r-x_0)^2+(y_r-y_0)^2\right],$$

второй член которого не зависит от корней уравнения (36). Эта зависимость показывает, что кривая (34) ограничена и симметрична относительно точки M_0, т. е. эта кривая, следовательно и кривая (33), есть эллипс с центром M_0.

Теперь докажем, что система шести уравнений (23) и (32), с таким-же числом неизвестных x_i, y_i $(i=1,2,3)$, имеет бесконечное множество решений.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ произвольная точка кривой (33), т. е. $F_{11}=3/I_{00}$. Докажем, что остальные две точки M_2, M_3 являются точками пересечения прямой $F_1=0$ с эллипсом (33). Для этого докажем предварительно, что прямая $F_1=0$ пересекает эллипс (33) в двух различных точках, если только точка M_1 лежит на этом эллипсе.

Рассмотрим точку $M_4(x_4, y_4)$ с координатами

(37) $$x_4=\frac{3x_0-x_1}{2},\qquad y_4=\frac{3y_0-y_1}{2}.$$

Эта точка лежит на прямой $F_1=0$ и внутри эллипса (33). В самом деле, из (29) для

$$x=x_1,\quad y=y_1,\quad \xi=x_4=\frac{x_1-3x_0}{1-3},\quad \eta=y_4=\frac{y_1-3y_0}{1-3},\quad \vartheta=-3,\quad r=1,\quad k=0$$

получаем

$$F_{14}=\frac{F_{11}-3F_{10}}{1-3}=\frac{3}{2}F_{10}-\frac{1}{2}F_{11}.$$

Так как $F_{10}=1/I_{00}$, $F_{11}=3/I_{00}$, то $F_{14}=0$, т. е. точка M_4 лежит на прямой $F_1=0$. С другой стороны, из (30), для $\xi=x_4$, $\eta=y_4$, получаем $F_{44}=3/2I_{00}$.

Введем функцию

$$U(x,y)=F(x,y,1;x,y,1)-\frac{3}{I_{00}}.$$

Тогда уравнение (33) эллипса примет вид $U(x,y)=0$. Так как

$$U(x_4,y_4)=F_{44}-\frac{3}{I_{00}}=\frac{3}{2I_{00}}-\frac{3}{I_{00}}=-\frac{3}{2I_{00}}<0,$$

$$U(x_0,y_0)=F_{00}-\frac{3}{I_{00}}=\frac{1}{I_{00}}-\frac{3}{I_{00}}=-\frac{2}{I_{00}}<0,$$

то точка M_4 лежит в той-же области, что и точка M_0, т. е. внутри эллипса.

Предположим теперь, что точка $M_2(x_2,y_2)$ есть одна из точек пересечения прямой $F_1=0$ с эллипсом (33). Так как точки M_2 и M_4 лежат на прямой $F_1=0$, то координаты (ξ,η) произвольной точки этой прямой будут определены формулами (28) при $r=2$, $k=4$. Согласно (30), для этих координат имеем

$$F(\xi,\eta,1;\xi,\eta,1)=\frac{F_{22}+2F_{24}\vartheta+F_{44}\vartheta^2}{(1+\vartheta)^2}.$$

Но $F_{22}=3/I_{00}$, так как точка M_2 лежит на эллипсе (33). С другой стороны, из (37) находим $F_4=(3F_0-F_1)/2$, так что согласно (18) имеем

$$F_4=\frac{3}{2I_{00}}-\frac{1}{2}F_1,$$

откуда получаем

$$F_{24}=\frac{3}{2I_{00}}-\frac{1}{2}F_{12},\qquad F_{44}=\frac{3}{2I_{00}}-\frac{1}{2}F_{14}.$$

Но точки M_2, M_4 лежат на прямой $F_1=0$, т. е. $F_{12}=F_{14}=0$, так что $F_{24}=F_{44}=3/2I_{00}$. Таким образом

$$F(\xi,\eta,1;\xi,\eta,1)=\frac{3}{2I_{00}}\cdot\frac{\vartheta^2+2\vartheta+2}{(1+\vartheta)^2}.$$

Но точка (ξ,η) лежит на эллипсе (33), т. е. $F(\xi,\eta,1;\xi,\eta,1)=3/I_{00}$, так что получаем уравнение $\vartheta^2+2\vartheta=0$, корни которого очевидно суть 0 и -2. Для $\vartheta=0$ из (28), при $r=2$, $k=4$, находим точку $M_2(x_2,y_2)$. Для $\vartheta=-2$ находим другую точку пересечения $M_3(x_3,y_3)$ прямой $F_1=0$ с эллипсом (33), координаты которой будут $x_3=2x_4-x_2$, $y_3=2y_4-y_2$.

Из определения точек M_1, M_2, M_3 следует, что их координаты удовлетворяют первым двум уравнениям (23) и всем уравнениям (32). Остается показать, что удовлетворяют они также последнему уравнению $F_{23}=0$ системы (23). В самом деле, если подставим в (28) $r=2$, $k=4$, $\vartheta=-2$, получим

$$\xi=x_3=\frac{x_2-2x_4}{1-2},\qquad \eta=y_3=\frac{y_2-2y_4}{1-2}.$$

Подставляя эти выражения в (29) находим

$$F_3=F(x,y,1;x_3,y_3,1)=2F_4-F_2.$$

Отсюда, для $x=x_2$, $y=y_2$, получаем

$$F_{23}=F_{32}=2F_{42}-F_{22}=2\cdot\frac{3}{2I_{00}}-\frac{3}{I_{00}}=0.$$

Таким образом мы установили следующую теорему:

Теорема 4. *Для множества $C_2^{(3)}$ существует бесконечное множество формул механической кубатуры с минимальным числом членов и с равными коэффициентами, относительно произвольной двумерной области R. Эти формулы трехчленны:*

$$\iint\limits_R P(x,y)\,dx\,dy=\lambda\sum_{i=1}^{3}P(x_i,y_i),$$

где $\lambda=I_{00}/3$, а точки $M_i(x_i,y_i)$ лежат на эллипсе E:

$$F(x,y,1;x,y,1)=\frac{3}{I_{00}},$$

притом их координаты удовлетворяют еще следующим трем уравнениям:

$$F(x_k, y_k, 1; x_r, y_r, 1) = 0 \qquad (k<r; k, r=1,2,3).$$

Эти точки можно получить выбрав одну из них (ξ, η) *на эллипсе* $E^{(1)}$ *произвольно, а другие две определяя как точки пересечения этого эллипса с прямой* $F(x,y,1;\xi,\eta,1)=0$.

Замечание. *Множество, состоящее из всех треугольников* $M_1M_2M_3$ *теоремы 4 совпадает с множеством, состоящим из всех треугольников вписанных в эллипс* $F(x,y,1;x,y,1)=3/I_{00}$ *и одновременно описанных около эллипса* $F(x,y,1;x,y,1)=3/2I_{00}$.

В самом деле точка $M_4(x_4,y_4)$, координаты которой определены в (37), лежит на эллипсе $F(x,y,1;x,y,1)=3/2I_{00}$. Это следует из зависимости $F_{44}=3/2I_{00}$. С другой стороны легко заметить, что уравнение касательной в этой точке к этому эллипсу имеет вид

$$F_4 = \frac{3}{2I_{00}}. \tag{38}$$

Но согласно (29), при $\xi=x_4$, $\eta=y_4$, имеем $F_4=3F_0/2-F_1/2$, т. е.

$$F_4 = \frac{3}{2I_{00}} - \frac{1}{2}F_1. \tag{39}$$

Из (38) и (39) находим $3/2I_{00}-F_1/2=3/2I_{00}$, т. е. уравнение касательной будет

$$F_1 = 0. \tag{40}$$

Пример 1. Область интегрирования R есть квадрат с вершинами (1,1), (−1,1), (−1,−1), (1,−1). Тогда

$$I_{10}=I_{01}=I_{11}=0, \qquad I_{00}=4, \qquad I_{20}=I_{02}=\frac{4}{3}, \qquad \Delta=\frac{64}{9},$$

$$F(x,y,1;\xi,\eta,1)=\frac{3}{4}\xi x+\frac{3}{4}\eta y+\frac{1}{4}, \qquad \lambda_i=\frac{4}{3x_i^2+3y_i^2+1}.$$

Координаты точек $M_i(x_i,y_i)$ удовлетворяют уравнениям

$$x_1x_2+y_1y_2+\frac{1}{3}=0, \qquad x_1x_3+y_1y_3+\frac{1}{3}=0, \qquad x_2x_3+y_2y_3+\frac{1}{3}=0.$$

Для $x_1=1$, $y_1=0$, $y_2=2/3$ получается следующая формула кубатуры для множества $C_2^{(2)}$:

$$\iint\limits_{\Box} P(x,y)\,dx\,dy = P(1,0)+\frac{3}{2}P\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{2}P\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

Для того, чтобы получить формулу с равными коэффициентами, необходимо выбрать точки M_i на эллипсе (33), который в нашем случае является окружностью

$$x^2+y^2=\frac{2}{3}.$$

Пусть $x_1=0$, $y_1=\sqrt{6}/3$. Тогда M_2, M_3 являются точками пересечения этой окружности с прямой $\sqrt{6}y+1=0$: $M_2(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{6})$, $M_3(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{6})$ и так как $\lambda_i=I_{00}/3=4/3$, получаем формулу

$$\iint\limits_{\Box} P(x,y)\,dx\,dy=\frac{4}{3}\left[P\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)+P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right].$$

Пример 2. Область интегрирования R есть круг $x^2+y^2\leqslant r^2$. Тогда

$$I_{10}=I_{01}=I_{11}=0, \qquad I_{00}=\pi r^2, \qquad I_{20}=I_{02}=\frac{\pi r^4}{4}, \qquad \Delta=\frac{\pi^3 r^{10}}{16},$$

$$F(x,y,1;\xi,\eta,1)=\frac{4}{\pi r^4}\xi x+\frac{4}{\pi r^4}\eta y+\frac{1}{\pi r^2}, \qquad \lambda_i=\frac{\pi r^4}{4x_i^2+4y_i^2+r^2}.$$

Координаты точек $M_i(x_i,y_i)$ удовлетворяют уравнениям

$$x_1x_2+y_1y_2+\frac{r^2}{4}=0, \qquad x_1x_3+y_1y_3+\frac{r^2}{4}=0, \qquad x_2x_3+y_2y_3+\frac{r^2}{4}=0.$$

Для $x_1=0$, $y_1=r/2$, $x_2=r/2$, получается следующая формула механической кубатуры для множества $C_2^{(2)}$:

$$\iint\limits_{\bigcirc} P(x,y)\,dx\,dy=\frac{\pi r^2}{2}P\left(0,\frac{r}{2}\right)+\frac{\pi r^2}{3}P\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)+\frac{\pi r^2}{6}P\left(-r,-\frac{r}{2}\right).$$

Для того, чтобы получить формулу с равными коэффициентами, необходимо выбрать точки M_i на окружности

$$x^2+y^2=\frac{r^2}{2}.$$

Пусть $x_1=r/\sqrt{2}$, $y_1=0$. Точки пересечения этой окружности с прямой $2\sqrt{2}x+r=0$ и числа $\lambda_i=I_{00}/3=\pi r^2/3$ определяют формулу

$$\iint\limits_{\bigcirc} P(x,y)\,dx\,dy=\frac{\pi r^2}{3}\left[P\left(\frac{r}{\sqrt{2}},0\right)+P\left(-\frac{r}{2\sqrt{2}},\frac{r\sqrt{6}}{4}\right)+P\left(-\frac{r}{2\sqrt{2}},-\frac{r\sqrt{6}}{4}\right)\right].$$

3. Множество $C_3^{(2)}$; $P(x,y)=\sum\limits_{k+r\leq 3} a_{kr}x^k y^r$.

I. Формулы вида (I) для $C_3^{(2)}$. Предположим, что двумерная область R симметрична относительно начала O координат. Тогда

(41) $$I_{kr}=0 \quad \text{для} \quad k+r=1,3 \qquad \left(I_{kr}=\iint\limits_R x^k y^r\,dx\,dy\right).$$

Докажем прежде всего, что не существует трехчленная формула вида (I) для $C_3^{(2)}$ относительно R. Допустим, что формула (3) применима к множеству $C_3^{(2)}$. Имея в виду (41) и определение полинома $F_1=F(x,y,1;x_1,y_1,1)$, находим

$$\iint x^2F_1\,dx\,dy=\frac{I_{20}}{I_{00}},\qquad \iint xyF_1\,dx\,dy=\frac{I_{11}}{I_{00}},\qquad \iint y^2F_1\,dx\,dy=\frac{I_{02}}{I_{00}}.$$

Но применяя (3) к полиномам x^2F_1, xyF_1 и y^2F_1 получаем

$$\iint x^2F_1\,dx\,dy=x_1^2,\qquad \iint xyF_1\,dx\,dy=x_1y_1,\qquad \iint y^2F_1\,dx\,dy=y_1^2,$$

так что

(42) $$x_1^2=\frac{I_{20}}{I_{00}},\qquad x_1y_1=\frac{I_{11}}{I_{00}},\qquad y_1^2=\frac{I_{02}}{I_{00}}.$$

Эти равенства однако несовместимы. В самом деле, исключая x_1,y_1, получаем $\delta=0$, где

$$\delta=\begin{vmatrix} I_{20} & I_{11}\\ I_{11} & I_{02}\end{vmatrix}.$$

Но δ является определителем положительно определенной квадратичной формы $I(u,v)=\iint(ux+vy)^2\,dx\,dy$ и, следовательно, $\delta>0$.

Установим, что существует бесконечное множество четырехчленных формул

(43) $$\iint\limits_R P(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i P(x_i,y_i)$$

механической кубатуры для множества $C_3^{(2)}$ и области R, симметричной относительно начала координат. Ясно, что коэффициенты λ_i в этой формуле отличны от нуля, так как не существуют трехчленные формулы этого вида для множества $C_3^{(2)}$.

Сначала докажем, что любые три из точек M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат на одной прямой. В самом деле, допустим например, что точки M_2, M_3, M_4 лежат на прямой $l(x,y)=ax+by+c=0$, т. е. $l_i=l(x_i,y_i)=0$ $(i=2,3,4)$. Применяя формулу (43) к полиномам l, x^2l, xyl, y^2l и имея в виду (41), находим

$$cI_{00}=\lambda_1l_1,\qquad cI_{20}=\lambda_1l_1x_1^2,\qquad cI_{11}=\lambda_1l_1x_1y_1,\qquad cI_{02}=\lambda_1l_1y_1^2.$$

Если из этих зависимостей исключим λ_1l_1, получим зависимости (42), которые несовместимы.

Теперь ясно, что прямые соединяющие одну из точек M_1, M_2, M_3, M_4 с другими, различны.

Для того, чтобы найти необходимые условия, которым должны удовлетворять числа x_i, y_i, λ_i формулы (43), вводим функцию

(44) $$f(x,y;\xi,\eta)=-\frac{I_{00}}{\delta}\begin{vmatrix} 0 & x & y\\ \xi & I_{20} & I_{11}\\ \eta & I_{11} & I_{02}\end{vmatrix}$$

действительных переменных x,y,ξ,η. Из определения (44) функции f следует

(45) $$f(x,y;\xi,\eta)=f(\xi,\eta;x,y),$$

так как

$$\delta=\begin{vmatrix} I_{20} & I_{11}\\ I_{11} & I_{02}\end{vmatrix}$$

является симметрическим определителем. Из определения (44) вытекают также следующие свойства функции f:

(46) $$\iint x^k y^r f(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy=0 \quad \text{для} \quad k+r=0,2;$$

(47) $$\iint x f(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy=I_{00}\xi,\qquad \iint y f(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy=I_{00}\eta.$$

Последние тождества можно записать в виде

(48) $$\begin{aligned} I_{20}\alpha(\xi,\eta)+I_{11}\beta(\xi,\eta)&=I_{00}\xi,\\ I_{11}\alpha(\xi,\eta)+I_{02}\beta(\xi,\eta)&=I_{00}\eta,\end{aligned}$$

где обозначено

(49) $$\alpha(x,y)=\frac{I_{00}}{\delta}\begin{vmatrix} x & I_{11}\\ y & I_{02}\end{vmatrix},\qquad \beta(x,y)=\frac{I_{00}}{\delta}\begin{vmatrix} I_{20} & x\\ I_{11} & y\end{vmatrix}.$$

Ясно, что

$$f(x,y;\xi,\eta)=x\alpha(\xi,\eta)+y\beta(\xi,\eta)=\xi\alpha(x,y)+\eta\beta(x,y).$$

Если $g(x,y)=ax+by$ произвольный однородный полином первой степени, то умножая тождества (47) соответственно на a,b и складывая, получим

(50) $$\iint g(x,y)f(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy=I_{00}g(\xi,\eta).$$

С другой стороны, интегрируя очевидное тождество

$$g(x,y)f(x,y;\xi,\eta)=f(xg,yg;\xi,\eta),$$

получаем

$$\iint g(x,y)f(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy=f(u,v;\xi,\eta), \tag{51}$$

где обозначено

$$u=\iint xg(x,y)\,dx\,dy,\qquad v=\iint yg(x,y)\,dx\,dy. \tag{52}$$

Из (50) и (51) следует, что каждую функцию $g(x,y)=ax+by$ можно представить в виде

$$g(x,y)=\frac{1}{I_{00}}f(x,y;u,v), \tag{53}$$

где постоянные u,v определены формулами (52). Следовательно, произвольную линейную функцию $p(x,y)=ax+by+c$ можно представить в виде

$$p(x,y)=\frac{1}{I_{00}}[f(x,y;u,v)+w], \tag{54}$$

где u,v,w соответствующие постоянные.

Обозначим

$$f_k=f(x,y;x_k,y_k),\qquad f_{kr}=f(x_k,y_k;x_r,y_r), \tag{55}$$

где x_i,y_i,x,y — произвольные действительные числа. Если в (50) поставим $g=f_r$, $\xi=x_k$, $\eta=y_k$, получим

$$\iint\limits_R f_kf_r\,dx\,dy=I_{00}f_{kr}. \tag{56}$$

При $r=k$ находим $\iint f_k^2\,dx\,dy=I_{00}f_{kk}$, т. е.

$$\iint f^2(x,y;x_k,y_k)\,dx\,dy=I_{00}f(x_k,y_k;x_k,y_k). \tag{57}$$

Это тождество относительно x_k,y_k показывает, что

$$f(x,y;x,y)>0 \tag{58}$$

для всех значений переменных x,y, за исключением случая $x=0$, $y=0$, для которого $f(x,y;0,0)\equiv 0$.

Пусть теперь линейная функция $p(x,y)$ обращается в нуль в точках M_1, M_2, а линейная функция $q(x,y)$ — в точках M_3, M_4. Ясно, что полиномы

$$P(x,y)=p(x,y)q(x,y),\qquad xP(x,y),\qquad yP(x,y)$$

принадлежат множеству $C_3^{(2)}$. Применяя формулу (43) к этим полиномам и имея в виду, что $P(x_i,y_i)=0\quad(i=1,2,3,4)$, получаем

$$\begin{gathered}\iint p(x,y)\,q(x,y)\,dx\,dy=0,\\ \iint xp(x,y)\,q(x,y)\,dx\,dy=0,\\ \iint yp(x,y)\,q(x,y)\,dx\,dy=0.\end{gathered} \tag{59}$$

Пусть $q(x,y)=ax+by+c$; тогда интегрируя систему (59) получаем

$$\begin{gathered}cu_{00}+au_{10}+bu_{01}=0,\\ cu_{10}+au_{20}+bu_{11}=0,\\ cu_{01}+au_{11}+bu_{02}=0,\end{gathered} \tag{60}$$

где обозначено

$$u_{kr}=\iint x^ky^rp(x,y)\,dx\,dy.$$

Так как система (60) с неизвестными a,b,c однородна, необходимым (и достаточным) условием существования решения отличного от нулевого есть, чтобы определитель

$$D(p)=\begin{vmatrix}u_{00}&u_{10}&u_{01}\\ u_{10}&u_{20}&u_{11}\\ u_{01}&u_{11}&u_{02}\end{vmatrix}$$

был равен нулю.

Следовательно, каждая прямая p, проходящая через любые две из точек $M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3,4)$, удовлетворяет условию

$$D(p)=0. \tag{61}$$

Если $p(x,y)$ представлена в виде (54), то согласно (46) и (47) получаем

$$u_{00}=w,\quad u_{10}=u,\quad u_{01}=v,\quad u_{20}=\frac{I_{20}}{I_{00}}w,\quad u_{11}=\frac{I_{11}}{I_{00}}w,\quad u_{02}=\frac{I_{02}}{I_{00}}w,$$

так что

$$D(p)=\frac{\delta}{I_{00}^2}w\,[w^2-f(u,v;u,v)]. \tag{62}$$

Следовательно, если прямая p проходит через любые две из точек M_i, то

$$w\,[w^2-f(u,v;u,v)]=0. \tag{63}$$

Рассмотрим две возможности:

$$1^\circ\quad w=0;\qquad\qquad 2^\circ\quad w^2-f(u,v;u,v)=0. \tag{64}$$

В случае 1° из (54) находим

$$p(x,y)=\frac{1}{I_{00}}f(x,y;u,v),$$

т. е. прямая p проходит через начало координат. Отметим, что при $w=0$, второй множитель $w^2-f(u,v;u,v)=-f(u,v;u,v)\neq 0$.

В случае 2° первый множитель $w=\pm\sqrt{f(u,v;u,v)}\neq 0$. Если примем

$$\xi=\frac{u}{w},\qquad \eta=\frac{v}{w}, \tag{65}$$

то условие 2° запишется в виде

$$f(\xi,\eta;\xi,\eta)-1=0, \tag{66}$$

а для функции $p(x,y)$ из (54) получим

$$p(x,y)=\frac{w}{I_{00}}\left[f(x,y;\xi,\eta)+1\right]. \tag{67}$$

Следовательно, уравнение прямой p будет иметь вид

$$f(x,y;\xi,\eta)+1=0, \tag{68}$$

где параметры ξ,η связаны зависимостью (66), которую можем интерпретировать как уравнение геометрического места точки $M(\xi,\eta)$. Но согласно определению (44)

$$E(\xi,\eta)=f(\xi,\eta;\xi,\eta)-1=\frac{I_{00}}{\delta}\left[I_{02}\xi^2+I_{20}\eta^2-2I_{11}\xi\eta-\frac{\delta}{I_{00}}\right],$$

откуда следует, что геометрическое место (66) есть эллипс с центром в начале координат. Касательная к этому эллипсу в точке (ξ,η) будет

$$f(x,y;\xi,\eta)-1=0. \tag{69}$$

Если в этом уравнении заменим ξ,η через $-\xi,-\eta$, получим уравнение (68) прямой p. Этим мы установили, что прямая (68) является касательной к эллипсу (66) в точке $(-\xi,-\eta)$.

Таким образом, рассмотрев случаи (64), мы установили, что для каждой прямой, проходящей через любые две из точек M_1, M_2, M_3, M_4, существуют только две возможности: такая прямая или проходит через начало координат, или является касательной к эллипсу (66).

Рассмотрим прямые M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4. Одна из них проходит через начало координат, а две другие составляют пару касательных к эллипсу (66), проходящих через M_1. Следовательно, точки $M_i(x_i,y_i)$ определяют четыреугольник, описанный около эллипса (66). Диагонали этого четыреугольника пересекаются в центре O эллипса, так что $M_1M_2M_3M_4$ является параллелограммом, описанным около этого эллипса.

Предположим теперь, что прямая p с уравнением $p(x,y)=0$, где $p(x,y)$ определено формулой (54), проходит через две из точек M_i, а прямая q, с уравнением $q(x,y)=0$, где

$$q(x,y)=\frac{1}{I_{00}}\left[f(x,y;u_1,v_1)+w_1\right],$$

проходит через другие две точки M_i. Имея в виду (46), (47) и (56), зависимости (59) принимают вид

$$\begin{aligned} f(u,v;u_1,v_1)+w_1w&=0,\\ uw_1+u_1w&=0,\\ vw_1+v_1w&=0. \end{aligned} \tag{70}$$

Если из последних двух определим u_1,v_1, получим

$$u_1=-\frac{w_1}{w}u,\qquad v_1=-\frac{w_1}{w}v.$$

Согласно формуле (62), для $D(q)$ имеем

$$D(q)=\frac{\delta}{I_{00}^2}w\left[w_1^2-f(u_1,v_1;u_1,v_1)\right],$$

откуда, принимая во внимание определенные выше значения u_1 и v_1, получаем

$$w^3D(q)=w_1^3D(p).$$

Из этой зависимости следует, что $D(p)$ и $D(q)$ одновременно равны нулю. Покажем, что прямые p,q или обе проходят через начало координат, или обе являются касательными к эллипсу (66), притом параллельными.

Пусть $w=0$. Тогда из (70) находим $w_1=0$, а выражения для p и q принимают вид

$$p(x,y)=\frac{1}{I_{00}}f(x,y;u,v),\qquad q(x,y)=\frac{1}{I_{00}}f(x,y;u_1,v_1)\qquad (f(u,v;u_1,v_1)=0).$$

Ясно, что пара прямых p и q проходит в этом случае через начало координат.

Пусть $w^2-f(u,v;u,v)=0$. Тогда $w=\pm\sqrt{f(u,v;u,v)}\neq 0$, так что из (70) находим $w_1\neq 0$. Пусть $\xi_1=u_1/w_1$, $\eta_1=v_1/w_1$. Имея в виду (65), зависимости (70) получают тогда вид

$$\begin{aligned} f(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)+1&=0,\\ \xi_1+\xi&=0,\\ \eta_1+\eta&=0. \end{aligned} \tag{71}$$

Если исключим отсюда ξ_1, η_1 или ξ, η, получим соответственно

$$(72)\qquad f(\xi,\eta;\xi,\eta)-1=0, \qquad f(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1)-1=0.$$

Эти зависимости и последние две зависимости (71) показывают, что обе точки (ξ,η), (ξ_1,η_1) лежат на эллипсе (66) и симметричны относительно центра O этой кривой.

С другой стороны, из (67), (72) и из

$$(73)\qquad g(x,y)=\frac{w_1}{I_{00}}\,[f(x,y;\xi_1,\eta_1)+1]$$

следует, что прямые p и q являются касательными к эллипсу (66), причем p касается в точке $(\xi_1=-\xi, \eta_1=-\eta)$, а q касается в точке $(\xi=-\xi_1, \eta=-\eta_1)$. Если подставим в (73) $\xi_1=-\xi$, $\eta_1=-\eta$, получим

$$(74)\qquad q(x,y)=\frac{w_1}{I_{00}}\,[1-f(x,y;\xi,\eta)],$$

откуда заключаем, что касательные p и q параллельны.

Следовательно, *пара прямых*

$$(75)\qquad \begin{aligned} p(x,y)&\equiv f(x,y;\xi,\eta)+1=0,\\ q(x,y)&\equiv f(x,y;\xi,\eta)-1=0, \end{aligned}$$

где ξ,η удовлетворяют условию (66), *содержит все точки $M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3,4)$ из* (43) *и является парой параллельных касательных к эллипсу* (66).

Для того, чтобы найти все формулы вида (43), возьмем точку $M_1(x_1,y_1)$ произвольно и предположим, что на прямой OM_1 лежит точка $M_3(x_3,y_3)$. Тогда точки M_2 и M_4 определяют прямую, которая также проходит через начало координат, а прямые определенные парами точек (M_1,M_2), (M_2,M_3), (M_3,M_4) и (M_4,M_1), являются касательными к эллипсу (66). Обозначим через p и q параллельные касательные, определенные парами точек (M_3,M_4) и (M_1,M_2), а через r прямую, определенную парой (M_2,M_4). Если $M(\xi,\eta)$ — точка касания прямой q, то для p и q будем иметь выражения (75), причем ξ, η будут удовлетворять уравнению (66). Прямая r будет иметь уравнение вида

$$(76)\qquad r(x,y)\equiv\frac{1}{I_{00}}\,f(x,y;u_0,v_0)=0,$$

где u_0, v_0 зависимые от ξ и η параметры.

Обозначим для удобства $\vartheta_i=\vartheta(x_i,y_i)$ для каждой функции $\vartheta=\vartheta(x,y)$.

Согласно определению функций p, q и r имеем

$$(77)\qquad r_2=r_4=0, \qquad p_3=p_4=0;$$

$$(78)\qquad q_1=0, \quad \text{т. е.} \quad f(x_1,y_1;\xi,\eta)=1;$$

$$(79)\qquad q_2=0, \quad \text{т. е.} \quad f(x_2,y_2;\xi,\eta)=1.$$

Имея в виду (78), (79) и определение функции p, находим

$$(80)\qquad p_1=p_2=2.$$

Рассмотрим теперь полином

$$P(x,y)=p(x,y)r(x,y)=\frac{1}{I_{00}}\,f(x,y;\xi,\eta)f(x,y;u_0,v_0)+\frac{1}{I_{00}}\,f(x,y;u_0,v_0).$$

Согласно (77) и (80) имеем

$$(81)\qquad P_1=p_1r_1=2r_1, \qquad P_2=P_3=P_4=0.$$

Применим формулу (43) к полиномам $xP(x,y)$ и $yP(x,y)$, которые очевидно принадлежат к $C_3^{(2)}$. Имея в виду (46), (47) и (81), получаем

$$u_0=\lambda_1P_1x_1, \qquad v_0=\lambda_1P_1y_1.$$

Подставляя эти выражения в (76), получаем

$$(82)\qquad r(x,y)=\frac{\lambda_1P_1}{I_{00}}\,f_1.$$

Если в (82) подставим $x=x_1$, $y=y_1$, $P_1=2r_1$ и сократим на $r_1\neq0$, получим

$$\lambda_1=\frac{I_{00}}{2f_{11}}.$$

Так как точка $M_1(x_1,y_1)$ выбрана произвольно, заключаем, что

$$(83)\qquad \lambda_i=\frac{I_{00}}{2f_{ii}} \qquad (i=1,2,3,4).$$

Эти формулы, совместно с (58), показывают, что $\lambda_i>0$ $(i=1,2,3,4)$ при условии, что никакая из точек M_i не совпадает с началом координат O.

Если в (82) подставим $x=x_2$, $y=y_2$, получим

$$(84)\qquad f_{12}=f(x_1,y_1;x_2,y_2)=0,$$

так как $r_2=0$.

Применим теперь формулу (43) к полиномам $x\,p(x,y)$ и $y\,p(x,y)$. Принимая во внимание (77), (80) и (83) для $i=1$, $i=2$, из (46) и (47) получаем

$$(85)\qquad \xi=\frac{x_1}{f_{11}}+\frac{x_2}{f_{22}}, \qquad \eta=\frac{y_1}{f_{11}}+\frac{y_2}{f_{22}}.$$

Перемножая эти зависимости соответственно на $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ и складывая почленно, получаем

$$f(x,y;\xi,\eta)=\frac{f_1}{f_{11}}+\frac{f_2}{f_{22}}. \tag{86}$$

Таким образом, в силу (75), имеем

$$g(x,y)=\frac{f_1}{f_{11}}+\frac{f_2}{f_{22}}-1. \tag{87}$$

Рассмотрим полином $\Phi(x,y)=\dfrac{1}{\lambda_1 P_1}g(x,y)r(x,y)$:

$$\Phi(x,y)=\frac{f_1^2}{I_{00}f_{11}}+\frac{f_1 f_2}{I_{00}f_{22}}-\frac{f_1}{I_{00}},$$

где мы воспользовались выражением (82) для $r(x,y)$. Очевидно

$$\Phi_1=\Phi_2=\Phi_4=0,\qquad \Phi_3\neq 0.$$

Применяя формулу (43) к полиномам $\Phi(x,y)$, $x\Phi(x,y)$, $y\Phi(x,y)$, на основании (84), (46), (47) и зависимостей

$$\iint f(x,y;u,v)f(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy=I_{00}f(u,v;\xi,\eta),$$
$$\iint f^2(x,y;u,v)\,dx\,dy=I_{00}f(u,v;u,v),$$

которые являются следствием (56), находим окончательно

$$\lambda_3\Phi_1=1,\qquad \lambda_3\Phi_3 x_3=-x_1,\qquad \lambda_3\Phi_3 y_3=-y_1,$$

т. е.

$$x_3=-x_1,\qquad y_3=-y_1. \tag{88}$$

Аналогично находим

$$x_4=-x_2,\qquad y_4=-y_2. \tag{89}$$

Из (88) получаем $f_{33}=f_{11}$, так что из (83) следует

$$\lambda_3=\lambda_1=\frac{I_{00}}{2f_{11}}. \tag{90}$$

Аналогично, из (89) находим $f_{44}=f_{22}$, так что

$$\lambda_4=\lambda_2=\frac{I_{00}}{2f_{22}}. \tag{91}$$

Если теперь подставим в (86) $x=\xi$, $y=\eta$, то принимая во внимание (66), (78) и (79), получим

$$\frac{1}{f_{11}}+\frac{1}{f_{22}}=1. \tag{92}$$

Разрешим систему уравнений (84) и (92) относительно неизвестных x_2, y_2. Очевидно, зависимость (84) можно написать в виде $x_2\alpha_1+y_2\beta_1=0$ или в виде

$$x_2=t\beta_1,\qquad y_2=-t\alpha_1, \tag{93}$$

где согласно условию $\alpha_1=\alpha(x_1,y_1)$, $\beta_1=\beta(x_1,y_1)$. В таком случае зависимости (49) для $x=x_2$, $y=y_2$ принимают вид

$$\alpha_2=\frac{I_{00}t}{\delta}(I_{11}\alpha_1+I_{02}\beta_1),\qquad \beta_2=-\frac{I_{00}t}{\delta}(I_{20}\alpha_1+I_{11}\beta_1),$$

откуда, принимая во внимание зависимости (48) для $\xi=x_1$, $\eta=y_1$, находим

$$\alpha_2=\frac{I_{00}^2 t}{\delta}y_1,\qquad \beta_2=-\frac{I_{00}^2 t}{\delta}x_1,$$

а так как $f_{22}=x_2\alpha_2+y_2\beta_2$, получаем $f_{22}=I_{00}^2t^2(x_1\alpha_1+y_1\beta_1)/\delta$, т. е.

$$f_{22}=\frac{I_{00}^2t^2}{\delta}f_{11}.$$

Подставляя это выражение в (92), находим

$$\frac{1}{f_{11}}+\frac{\delta}{I_{00}^2t^2f_{11}}=1,$$

откуда

$$t^2=\frac{\delta}{I_{00}^2(f_{11}-1)},\qquad\text{т. е.}\qquad t_{12}=\pm\frac{\sqrt{\delta}}{I_{00}\sqrt{f_{11}-1}},$$

а так как t действительное и вполне определенное число, должно быть $f_{11}-1>0$, т. е. $f(x_1,y_1;x_1,y_1)>1$. Из условия $f_{11}-1>0$ следует, что точка $M_1(x_1,y_1)$ лежит вне эллипса (66).

Таким образом система (84), (92) имеет два решения относительно x_2,y_2 соответствующие t_1 и t_2; но так как $x_4=-x_2$, $y_4=-y_2$, можем принять

$$\begin{aligned} x_2&=\frac{\beta_1\sqrt{\delta}}{I_{00}\sqrt{f_{11}-1}}, & y_2&=\frac{-\alpha_1\sqrt{\delta}}{I_{00}\sqrt{f_{11}-1}},\\ x_4&=\frac{-\beta_1\sqrt{\delta}}{I_{00}\sqrt{f_{11}-1}}, & y_4&=\frac{\alpha_1\sqrt{\delta}}{I_{00}\sqrt{f_{11}-1}}. \end{aligned} \tag{94}$$

Из (91) и (92) получаем

$$\lambda_4=\lambda_2=\frac{I_{00}(f_{11}-1)}{2f_{11}}. \tag{95}$$

Таким образом, мы выразили координаты всех точек M_i и все числа λ_i в зависимости от координат одной из точек M_i, именно точки $M_1(x_1, y_1)$ (выражения (88), (90), (94) и (95)). Координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ подчинены единственному ограничению $f_{11}>1$, благодаря которому координаты точек M_2 и M_4 действительны, а коэффициенты λ_2, λ_4 положительны.

Легко проверить, что так выбранные числа x_i, y_i $(i=1,2,3,4)$ определяют формулу вида (43). Отметим, что в этом случае функции f_1, f_2 линейно независимы. В самом деле, если для постоянных c_1, c_2 имеет место зависимость $c_1 f_1 + c_2 f_2 \equiv 0$, то подставляя $x=x_1$, $y=y_1$, получаем $c_1 f_{11} + c_2 f_{12} = c_1 f_{11} = 0$, т. е. $c_1=0$, ибо $f_{11}>0$. Аналогично находим $c_2=0$. Но если f_1 и f_2 линейно независимы, то каждый полином $P(x,y) \in C_3^{(2)}$ можно представить в виде

$$P(x,y) = \sum_{k+l\leq 3} a_{kl} f_1^k f_2^l.$$

Принимая во внимание, что

$$\iint f_1^k f_2^l \, dx\, dy = 0 \qquad \text{для} \quad k+l=1,3,$$

и имея в виду зависимости (56), (57) и (84), получаем

$$(*) \qquad \iint P(x,y)\, dx\, dy = I_{00}(a_{00} + a_{20} f_{11} + a_{02} f_{22}).$$

С другой стороны, из (44), (84), (88) и (89) находим

$$f_{12} = f_{21} = f_{14} = f_{23} = 0, \qquad f_{13} = -f_{11}, \qquad f_{24} = -f_{22}.$$

Для $x=x_i$, $y=y_i$, получаем $P_i = P(x_i, y_i) = \sum\limits_{k+l\leq 3} a_{kl} f_{1i}^k f_{2i}^l$, т. е.

$$P_1 = a_{00} + a_{10} f_{11} + a_{20} f_{11}^2 + a_{30} f_{11}^3,$$

$$P_2 = a_{00} + a_{01} f_{22} + a_{02} f_{22}^2 + a_{03} f_{22}^3,$$

$$P_3 = a_{00} - a_{10} f_{11} + a_{20} f_{11}^2 - a_{30} f_{11}^3,$$

$$P_4 = a_{00} - a_{01} f_{22} + a_{02} f_{22}^2 - a_{03} f_{22}^3.$$

Перемножая эти зависимости соответсвенно на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, складывая почленно и принимая во внимание (90), (91) и (92), получаем

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i P(x_i, y_i) = I_{00}(a_{00} + a_{20} f_{11} + a_{02} f_{22}).$$

Из этой зависимости и из зависимости (*) следует, что формула (43) верна для произвольного полинома $P(x,y) \in C_3^{(2)}$.

Так мы установили следующую теорему:

Теорема 5. *Формулы механической кубатуры с минимальным числом членов для множества $C_3^{(2)}$, относительно двумерной области R,*

симметричной относительно начала координат — четырехчленны. Существует бесконечное множество формул этого вида; зависят они от двух произвольных параметров u, v, подчиненных единственному ограничению $f(u, v; u, v) > 1$.

Для того, чтобы формула

$$\iint_R P(x,y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i P(x_i, y_i)$$

была верна для каждого полинома $P \in C_3^{(2)}$, необходимо и достаточно, чтобы четыре точки $M_i(x_i, y_i)$ были вершинами параллелограмма описанного около эллипса $f(x,y;x,y)=1$. Коэффициенты λ_i определяются по формулам

$$\lambda_i = \frac{I_{00}}{2f(x_i, y_i; x_i, y_i)}$$

и, следовательно, всегда положительны.

II. Формулы вида (II) для $C_3^{(2)}$. Установим, что формулы вида (II) для $C_3^{(2)}$ при симметричной области четырехчленны:

$$(96) \qquad \iint_R P(x,y)\, dx\, dy = \lambda \sum_{i=1}^{4} P(x_i, y_i).$$

В самом деле, в виду (90) и (95) для того, чтобы в формуле (43) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$, необходимо и достаточно иметь

$$\frac{I_{00}}{2f_{11}} = \frac{I_{00}(f_{11}-1)}{2f_{11}},$$

откуда

$$(97) \qquad f_{11} = 2,$$

т. е. точка $M_1(x_1, y_1)$ должна лежать на эллипсе

$$(98) \qquad f(x,y;x,y) = 2.$$

Тогда, при условии $f_{11}=2$, из (96) при $P(x,y)\equiv 1$ следует

$$\lambda = \lambda_i = \frac{I_{00}}{4} \qquad (i=1,2,3,4).$$

Докажем, что параллелограмм с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,3,4)$ где x_i, y_i — числа, при которых формула (96) верна, является вписанным в эллипс (98) при условии, что одна из его вершин, например M_1, лежит на этом эллипсе. Легко заметить, что для этого достаточно проверить, что из $f_{11}=2$ и из (92) следует $f_{22}=2$.

Так мы установим следующую теорему:

Теорема 6. *Для множества $C_3^{(2)}$ существует бесконечное множество формул механической кубатуры с минимальным числом членов и с равными коэффициентами вида*

$$\iint_R P(x,y)\,dx\,dy=\lambda\sum_{i=1}^{4} P(x_i,y_i),$$

при предположении, что область R симметрична относительно начала координат. В каждой из этих формул $\lambda=I_{00}/4$, а четыре точки $M_i(x_i,y_i)$ являются вершинами параллелограмма, описанного около эллипса $f(x,y;x,y)=1$ и вписанного в эллипс $f(x,y;x,y)=2$. Каждая точка последнего эллипса является вершиной одного такого параллелограмма.

Замечание. *Множество, состоящее из всех параллелограммов теоремы 6, совпадает с множеством, состоящим из всех описанных около эллипса $f(x,y;x,y)=1$ параллелограммов, стороны которых являются касательными к этому эллипсу в концевых точках двух сопряженных диаметров.*

В самом деле, пусть (ξ,η) произвольная точка эллипса (66). Тогда касательная в этой точке имеет уравнение

$$f(x,y;\xi,\eta)=1,$$

а диаметр сопряженный с диаметром $\xi y-\eta x=0$, имеет уравнение $f(x,y;\xi,\eta)=0$. Если (u,v) — одна из концевых точек этого диаметра, то

$$f(u,v;\xi,\eta)=0. \tag{99}$$

Ясно, что для точки пересечения (x,y) касательных в точках (ξ,η) и (u,v) имеем $x=\xi+u$, $y=\eta+v$. Откуда

$$\begin{aligned} f(x,y;x,y)&=f(\xi+u,\eta+v;\xi+u,\eta+v)=\\ &=f(\xi,\eta;\xi,\eta)+f(u,v;u,v)+2f(\xi,\eta;u,v). \end{aligned}\tag{100}$$

Но точки (ξ,η) и (u,v) лежат на эллипсе (66), т. е. $f(\xi,\eta;\xi,\eta)=1$, $f(u,v;u,v)=1$, так что из (99) и (100) находим $f(x,y;x,y)=2$.

Пример 1. Область интегрирования R есть квадрат с вершинами $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$. Тогда

$$I_{00}=4,\qquad I_{11}=0,\qquad I_{20}=I_{02}=\frac{4}{3},\qquad \delta=\frac{16}{9},$$

$$f(x,y;\xi,\eta)=3\xi x+3\eta y,\qquad \lambda_i=\frac{2}{3x_i^2+3y_i^2}.$$

Кривая $f=1$ есть окружность $x^2+y^2=1/3$. Выбирая один из описанных квадратов около этой окружности, получается следующая формула:

$$\iint_{\square} P(x,y)\,dx\,dy=P\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)+P\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+P\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)+P\left(0,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Пример 2. Область интегрирования R есть круг $x^2+y^2\leqslant r^2$. Тогда

$$I_{00}=\pi r^2,\qquad I_{20}=I_{02}=\frac{\pi r^4}{4},\qquad I_{11}=0,\qquad \delta=\frac{\pi^2 r^8}{16},$$

$$f(x,y;\xi,\eta)=\frac{4}{r^2}\xi x+\frac{4}{r^2}\eta y,\qquad \lambda_i=\frac{\pi r^4}{4x_i^2+4y_i^2}.$$

Кривая $f=1$ есть окружность $x^2+y^2=r^2/4$. Выбирая два из описанных квадратов около этой окружности, получаются следующие формулы механической кубатуры для множества $C_3^{(2)}$:

$$\iint_{O} P(x,y)\,dx\,dy=\frac{\pi r^2}{4}\left[P\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)+P\left(-\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)+P\left(-\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)+P\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)\right],$$

$$\iint_{O} P(x,y)\,dx\,dy=\frac{\pi r^2}{4}\left[P\left(\frac{r}{\sqrt{2}},0\right)+P\left(0,\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+P\left(-\frac{r}{\sqrt{2}},0\right)+P\left(0,-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

§ 2. ФОРМУЛЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ КУБАТУРЫ ДЛЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Множество $C_1^{(3)}$; $P(x,y)=ax+by+cz+d$. Легко устанавливается следующая теорема:

Теорема 7. *Существует только одна формула вида* (I), *которая является также формулой вида* (II) *для* $C_1^{(3)}$ *относительно произвольной области* R:

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lambda_0 P(x_0,y_0,z_0), \tag{1}$$

где

$$\lambda_0=I_{000},\qquad x_0=\frac{I_{100}}{I_{000}},\qquad y_0=\frac{I_{010}}{I_{000}},\qquad z_0=\frac{I_{001}}{I_{000}} \tag{2}$$

$$\left(I_{klr}=\iiint x^k y^l z^r\,dx\,dy\,dz\right).$$

Точка $M(x_0,y_0,z_0)$ *является центром тяжести однородной области* R, *а число* λ_0 — *объемом области* R *и, следовательно,* $\lambda_0>0$.

2. Множество $C_2^{(3)}$; $P(x,y,z)=\sum\limits_{k+l+r\leqslant 2} a_{klr}x^k y^l z^r$.

I. Формулы вида (I) для $C_2^{(3)}$. Установим прежде всего, что не существует формула вида (I) для $C_2^{(3)}$, в которой $N\leqslant 3$.

Допустим, что формула

$$\iiint P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i P(x_i,y_i,z_i)$$

верна для каждого полинома $P\in C_2^{(3)}$. Пусть $l(x,y,z)=ax+by+cz+d$ линейная функция, отличная от постоянной и такая, что $l_i= l(x_i,y_i,z_i)=0$ $(i=1,2,3)$. Применяя трехчленную формулу к полиному $P(x,y,z)=l^2(x,y,z)\in C_2^{(3)}$, находим

$$\iiint l^2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lambda_1 l_1^2+\lambda_2 l_2^2+\lambda_3 l_3^2=0,$$

что невозможно, так как левая часть этого равенства положительное число.

Докажем, что существует бесконечное множество формул вида

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i P(x_i,y_i,z_i), \tag{3}$$

применимых к множеству $C_2^{(3)}$. С этой целью вводим функцию действительных переменных $x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau$:

$$\Phi(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,\tau)=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & t & x & y & z\\ \tau & I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001}\\ \xi & I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101}\\ \eta & I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011}\\ \zeta & I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001}\\ I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101}\\ I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011}\\ I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix},\qquad I_{klr}=\iiint_R x^k y^l z^r\,dx\,dy\,dz.$$

Так как Δ является определителем положительно определенной квадратичной формы $I(u,v,w,\vartheta)=\iiint(ux+vy+wz+\vartheta)^2\,dx\,dy\,dz$, то $\Delta>0$ для каждой области R.

Из определения (4) функции Φ вытекают следующие тождества:

$$\Phi(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,\tau)=\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau;x,y,z,t) \tag{5}$$

для всех значений переменных $x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau$, и

$$\begin{aligned} &\iiint \Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,\tau)\,dx\,dy\,dz=\tau,\\ &\iiint x\,\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,\tau)\,dx\,dy\,dz=\xi,\\ &\iiint y\,\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,\tau)\,dx\,dy\,dz=\eta,\\ &\iiint z\,\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,\tau)\,dx\,dy\,dz=\zeta, \end{aligned} \tag{6}$$

для всех значений переменных ξ,η,ζ,τ.

Пусть $g(x,y,z,t)=ax+by+cz+dt$ произвольный полином первой степени. Перемножая равенства (6) соответственно на d,a,b,c и складывая почленно, получаем

$$\iiint g(x,y,z,1)\,\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,\tau)\,dx\,dy\,dz=g(\xi,\eta,\zeta,\tau). \tag{7}$$

С другой стороны, интегрируя очевидное тождество

$$g(x,y,z,1)\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,\tau)=\Phi(xg,yg,zg,g;\xi,\eta,\zeta,\tau),$$

где $g=g(x,y,z,1)$, получаем

$$\iiint g(x,y,z,1)\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,\tau)\,dx\,dy\,dz=\Phi(u,v,w,\vartheta;\xi,\eta,\zeta,\tau), \tag{8}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\vartheta&=\iiint g(x,y,z,1)\,dx\,dy\,dz,\\ u&=\iiint xg(x,y,z,1)\,dx\,dy\,dz,\\ v&=\iiint yg(x,y,z,1)\,dx\,dy\,dz,\\ w&=\iiint zg(x,y,z,1)\,dx\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{9}$$

Из (7) и (8) следует, что каждую линейную функцию $g(x,y,z,t)=$ $=ax+by+cz+dt$ можно представить в виде

$$g(x,y,z,t)=\Phi(x,y,z,t;u,v,w,\vartheta), \tag{10}$$

где u,v,w,ϑ постоянные, определены формулами (9).

Обозначим

$$\Phi_k=\Phi(x,y,z,1;x_k,y_k,z_k,1),$$

$$\Phi_{kr}=\Phi(x_k,y_k,z_k,1;x_r,y_r,z_r,1),$$

где x_i,y_i,z_i,x,y,z произвольные действительные числа. Подставляя в (7) $g=\Phi_k$, $\xi=x_r$, $\eta=y_r$, $\zeta=z_r$, $\tau=1$, получаем

$$\iiint_R \Phi_k\Phi_r\,dx\,dy\,dz=\Phi_{kr}. \tag{11}$$

При $r=k$ имеем $\iiint \Phi_k^2\,dx\,dy\,dz=\Phi_{kk}$, т. е.

$$\iiint \Phi^2(x,y,z,1;x_k,y_k,z_k,1)\,dx\,dy\,dz=\Phi(x_k,y_k,z_k,1;x_k,y_k,z_k,1), \tag{12}$$

и, следовательно, $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)\geqslant 0$ для всех x,y,z.

Докажем, что

$$\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)>0, \tag{13}$$

для всех действительных x,y,z.

С этой целью заметим, что левая часть (12) равна нулю только в том случае, если функция $\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,1)$ переменных x,y,z тождественно равна нулю, что невозможно. В самом деле, обозначая

$$\omega(x,y,z,t)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} t & I_{100} & I_{010} & I_{001}\\ x & I_{200} & I_{110} & I_{101}\\ y & I_{110} & I_{020} & I_{011}\\ z & I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix},$$

$$\alpha(x,y,z,t)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} I_{000} & t & I_{010} & I_{001}\\ I_{100} & x & I_{110} & I_{101}\\ I_{010} & y & I_{020} & I_{011}\\ I_{001} & z & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix},$$

$$\beta(x,y,z,t)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} I_{000} & I_{100} & t & I_{001}\\ I_{100} & I_{200} & x & I_{101}\\ I_{010} & I_{110} & y & I_{011}\\ I_{001} & I_{101} & z & I_{002}\end{vmatrix},$$

$$\gamma(x,y,z,t)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} I_{000} & I_{100} & I_{010} & t\\ I_{100} & I_{200} & I_{110} & x\\ I_{010} & I_{110} & I_{020} & y\\ I_{001} & I_{101} & I_{011} & z\end{vmatrix},$$

из (4) находим

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,\tau)&=\\ =x\alpha(\xi,\eta,\zeta,\tau)+y\beta(\xi,\eta,\zeta,\tau)&+z\gamma(\xi,\eta,\zeta,\tau)+t\omega(\xi,\eta,\zeta,\tau)=\\ =\xi\alpha(x,y,z,t)+\eta\beta(x,y,z,t)&+\zeta\gamma(x,y,z,t)+\tau\omega(x,y,z,t),\end{aligned} \tag{14}$$

что показывает, что для того, чтобы функция $\Phi(x,y,z,1;\ \xi,\eta,\zeta,\tau)$, переменных x,y,z, тождественно равнялась постоянной, необходимо и достаточно, чтобы параметры ξ,η,ζ,τ удовлетворяли уравнениям

$$\alpha(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0,\qquad \beta(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0,\qquad \gamma(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0. \tag{15}$$

Тогда имеем

(16) $$\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,\tau)=\omega(\xi,\eta,\zeta,\tau).$$

Подставляя (15) в тождества (6) получаем

$$\frac{\xi}{I_{100}}=\frac{\eta}{I_{010}}=\frac{\zeta}{I_{001}}=\frac{\tau}{I_{000}}=\omega(\xi,\eta,\zeta,\tau),$$

так что решение системы (15) имеет вид

$$\xi=\tau x_0,\qquad \eta=\tau y_0,\qquad \zeta=\tau z_0,$$

где x_0, y_0, z_0 — числа определены формулами (2). Подставляя определенные таким образом ξ,η,ζ и $\omega=\tau/I_{00}$ в (16), получаем

$$\Phi(x,y,z,1;\tau x_0,\tau y_0,\tau z_0,\tau)=\frac{\tau}{I_{000}},$$

т. е.

(17) $$\Phi_0=\Phi(x,y,z,1;x_0,y_0,z_0,1)=\frac{1}{I_{000}}.$$

Мы установили, что функция $\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,1)$ тождественно равна постоянной только для значений $\xi=x_0, \eta=y_0, \zeta=z_0$ параметров ξ,η,ζ, притом эта постоянная равна положительному числу $1/I_{000}$.

Легко показать, что функция $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)$ имеет минимум $1/I_{000}$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, т. е.

(18) $$\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)\geqslant\frac{1}{I_{000}},$$

притом знак = имеем только в случае $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$.

Установим необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа x_i, y_i, z_i, λ_i формулы (3).

Прежде всего отметим, что $\lambda_i\neq 0$ $(i=1,2,3,4)$. В самом деле, если например $\lambda_4=0$, то формула (3) будет трехчленная, что невозможно.

Другим необходимым условием является, чтобы определитель

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\y_1&y_2&y_3&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_4\end{vmatrix}$$

был отличным от нуля. В самом деле, условие $D=0$ равносильно тому, что точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на одной плоскости, что невозможно.

Покажем теперь, что точка M_0 не лежит на гранях тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$. Допустим, что точки M_0, M_1, M_2, M_3 лежат на одной плоскости. Тогда линейная функция

$$g(x,y,z)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x\\y_1&y_2&y_3&y\\z_1&z_2&z_3&z\end{vmatrix}$$

обращается в нуль в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, т. е. $g_0=g(x_0,y_0,z_0)=0$. С другой стороны, имеем

$$\iiint g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x\\y_1&y_2&y_3&y\\z_1&z_2&z_3&z\end{vmatrix}dx\,dy\,dz=\begin{vmatrix}1&1&1&I_{000}\\x_1&x_2&x_3&I_{100}\\y_1&y_2&y_3&I_{010}\\z_1&z_2&z_3&I_{001}\end{vmatrix}=I_{000}g_0=0.$$

Применяя формулу (3) к полиному $g(x,y,z)\in C_2^{(3)}$, получаем

$$\iiint g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lambda_1g_1+\lambda_2g_2+\lambda_3g_3+\lambda_4g_4.$$

Но

$$g_i=g(x_i,y_i,z_i)=0\qquad(i=1,2,3);\qquad \iiint g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=0,\qquad \lambda_4\neq 0,$$

следовательно

$$g_4=g(x_4,y_4,z_4)=0.$$

Ввиду того, что $g_4=D$ следует $D=0$, что невозможно.

Таким образом мы установили, что любые четыре из точек M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат на одной плоскости. Тем самым мы установили, что ни одна из точек M_1, M_2, M_3, M_4 не совпадает с точкой M_0 и что любые три из точек M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат на одной прямой.

Предположим теперь, что числа x_i, y_i, z_i, λ_i определяют формулу вида (3). Применим эту формулу к четырем полиномам

$$\Phi=\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,1),\qquad x\Phi,\qquad y\Phi,\qquad z\Phi,$$

где ξ, η, ζ произвольные действительные числа. Принимая во внимание (6), получаем

$$\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 + \lambda_4 \Phi_4 = 1,$$
$$\lambda_1 \Phi_1 x_1 + \lambda_2 \Phi_2 x_2 + \lambda_3 \Phi_3 x_3 + \lambda_4 \Phi_4 x_4 = \xi,$$
$$\lambda_1 \Phi_1 y_1 + \lambda_2 \Phi_2 y_2 + \lambda_3 \Phi_3 y_3 + \lambda_4 \Phi_4 y_4 = \eta,$$
$$\lambda_1 \Phi_1 z_1 + \lambda_2 \Phi_2 z_2 + \lambda_3 \Phi_3 z_3 + \lambda_4 \Phi_4 z_4 = \zeta,$$

где $\Phi_i = \Phi(x, y, z, 1; x_i, y_i, z_i, 1)$. Решая эту систему относительно неизвестных $\lambda_i \Phi_i$, находим

$$\lambda_1 \Phi_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi & x_2 & x_3 & x_4 \\ \eta & y_2 & y_3 & y_4 \\ \zeta & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \lambda_2 \Phi_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \xi & x_3 & x_4 \\ y_1 & \eta & y_3 & y_4 \\ z_1 & \zeta & z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_3 \Phi_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \xi & x_4 \\ y_1 & y_2 & \eta & y_4 \\ z_1 & z_2 & \zeta & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \lambda_4 \Phi_4 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \xi \\ y_1 & y_2 & y_3 & \eta \\ z_1 & z_2 & z_3 & \zeta \end{vmatrix}.$$

Подставляя $\xi = x_i$, $\eta = y_i$, $\zeta = z_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, получаем $\lambda_i \Phi_{ii} = 1$, $\Phi_{kr} = 0$ $(r \neq k)$, т. е.

(19) $$\lambda_i = \frac{1}{\Phi_{ii}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

(20) $$\Phi_{kr} = 0 \qquad (k \neq r;\ k, r = 1, 2, 3, 4).$$

Отметим, что из зависимостей (20) только шесть различны, так как $\Phi_{kr} = \Phi_{rk}$:

(21) $$\Phi_{12} = 0, \quad \Phi_{13} = 0, \quad \Phi_{14} = 0, \quad \Phi_{23} = 0, \quad \Phi_{24} = 0, \quad \Phi_{34} = 0.$$

Из (13) и (19) заключаем, что все λ_i положительные, т. е.

(22) $$\lambda_i = \frac{1}{\Phi(x_i, y_i, z_i, 1; x_i, y_i, z_i, 1)} > 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Зависимости (21) и (22) выражают необходимые условия, которым должны удовлетворять числа x_i, y_i, z_i, λ_i формулы (3). Докажем, что эти условия являются и достаточными.

Предположим, что числа x_i, y_i, z_i произвольное решение системы (21). Легко заметить, что в этом случае функции

$$\Phi_i = \Phi(x, y, z, 1; x_i, y_i, z_i, 1) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

линейно независимы. В самом деле, если для постоянных c_i имеем тождественно

$$c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3 + c_4 \Phi_4 = 0,$$

то подставляя $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ получаем равенство $c_1 \Phi_{11} + c_2 \Phi_{21} + c_3 \Phi_{31} + c_4 \Phi_{41} = 0$, которое, согласно (21), обращается в $c_1 \Phi_{11} = 0$, т. е. $c_1 = 0$, так как $\Phi_{11} > 0$. Аналогично доказываем, что $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, т. е. Φ_i линейно независимы. Но в таком случае произвольный полином $P(x, y) \in C_2^{(3)}$ можно представить в виде

(23) $$P(x, y, z) = \sum a_{kr} \Phi_k \Phi_r =$$
$$= a_{11} \Phi_1^2 + a_{22} \Phi_2^2 + a_{33} \Phi_3^2 + a_{44} \Phi_4^2 + a_{12} \Phi_1 \Phi_2 + a_{13} \Phi_1 \Phi_3 +$$
$$+ a_{14} \Phi_1 \Phi_4 + a_{23} \Phi_2 \Phi_3 + a_{24} \Phi_2 \Phi_4 + a_{34} \Phi_3 \Phi_4,$$

где a_{kr} — постоянные. Подставляя в (23) $x = x_i$, $y = y_i$, $z = z_i$, получаем $P(x_i, y_i, z_i) = a_{ii} \Phi_{ii}^2$, откуда находим $a_{ii} \Phi_{ii} = P(x_i, y_i, z_i)/\Phi_{ii}$. Но $1/\Phi_{ii} = \lambda_i$, так что будем иметь

(24) $$a_{ii} \Phi_{ii} = \lambda_i P(x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

С другой стороны, интегрируя (23), находим

$$\iiint P(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{k \leq r} a_{kr} \iiint \Phi_k \Phi_r\, dx\, dy\, dz.$$

Имея в виду (11), (21) и (24) получаем последовательно

$$\iiint P(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{k \leq r} a_{kr} \Phi_{kr} = \sum_{k=1}^{4} a_{kk} \Phi_{kk} = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k P(x_k, y_k, z_k),$$

чем мы и установили, что формула (3) верна для произвольного полинома $P(x, y, z) \in C_2^{(3)}$, и тем самым доказали следующую теорему:

Для того, чтобы числа x_i, y_i, z_i, λ_i определяли формулу вида (3), *применимую к множеству $C_2^{(3)}$, относительно произвольной трехмерной области R, необходимо и достаточно, чтобы x_i, y_i, z_i были решением* (21), *а коэффициенты λ_i определялись по формулам* (22).

Остается еще показать, что система (21), состоящая из 6 уравнений с 12 неизвестными x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, разрешима. Докажем теперь, что эта система допускает бесконечное множество решений.

Пусть числа x_1, y_1, z_1 — произвольные, подчиненные единственному ограничению, чтобы точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ не совпадала с точкой

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, где числа x_0, y_0, z_0 определены формулами (2). Отметим, что при этом выборе x_1, y_1, z_1, функция $\Phi_1 = \Phi(x, y, z, 1; x_1, y_1, z_1, 1)$ отлична от постоянной.

Примем далее, что x_2, y_2, z_2 — произвольное решение уравнения $\Phi_1 = 0$ (такие решения существуют, так как Φ_1 отлична от постоянной). Ясно, что при этом выборе x_2, y_2, z_2 будет удовлетворено уравнение $\Phi_{12} = 0$ системы (21). Отметим, что точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ не совпадает с точкой M_0, так как в противном случае $\Phi_{12} = \Phi_{10} = 1/I_{000} > 0$, что невозможно, ибо $\Phi_{12} = 0$. Отметим также, что M_2 не совпадает с точкой M_1, так как x_2, y_2, z_2 — решение уравнения $\Phi_1 = 0$ ($\Phi_{12} = 0$), а x_1, y_1, z_1 не является решением этого уравнения, потому что $\Phi_{11} > 0$. Подчиним далее x_2, y_2, z_2 ограничению, чтобы точка M_2 не лежала на прямой, определенной точками M_0 и M_1, т. е. чтобы M_2 не совпадала с точкой пересечения $M'(x', y', z')$ плоскости $\Phi_1 = 0$ и прямой определенной точками M_0 и M_1. Легко получаются координаты этой точки:

$$\frac{x'}{x_1 - I_{000}\Phi_{11}x_0} = \frac{y'}{y_1 - I_{000}\Phi_{11}y_0} = \frac{z'}{z_1 - I_{000}\Phi_{11}z_0} = \frac{1}{1 - I_{000}\Phi_{11}}.$$

Отметим, что функция $\Phi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \omega_2$ отлична от постоянной, так как M_2 не совпадает с M_0. Отметим также, что функции Φ_1 и Φ_2 линейно независимы. В самом деле, пусть для постоянных c_1, c_2 тождественно $c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 = 0$. Подставляя $x = x_i$, $y = y_i$, $z = z_i$ $(i = 1, 2)$, получаем,

$$c_1\Phi_{11} + c_2\Phi_{21} = 0, \qquad c_1\Phi_{12} + c_2\Phi_{22} = 0.$$

Но $\Phi_{12} = \Phi_{21} = 0$, $\Phi_{11} > 0$, $\Phi_{22} > 0$, так что $c_1 = c_2 = 0$.

Далее необходимо выбрать x_3, y_3, z_3 таким образом, чтобы они удовлетворяли уравнениям $\Phi_{13} = 0$, $\Phi_{23} = 0$ системы (21). Рассмотрим с этой целью систему двух уравнений

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0,$$

с неизвестными x, y, z. Эту систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \omega_1 = 0, \\ &\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \omega_2 = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

где $u_i = u(x_i, y_i, z_i)$ для $u = \alpha, \beta, \gamma, \omega$. Докажем, что система (25) имеет бесконечное множество решений, зависящих от одного произвольного параметра. В самом деле, допустим, что уравнения системы (25) несовместимы, т. е.

$$\alpha_2 = \mu\alpha_1, \qquad \beta_2 = \mu\beta_1, \qquad \gamma_2 = \mu\gamma_1, \qquad \omega_2 \neq \mu\omega_1.$$

Из этих соотношений легко находим

$$\Phi_2 - \mu\Phi_1 = \omega_2 - \mu\omega_1.$$

Перемножая это тождество на $1, x, y, z$, интегрируя и принимая во внимание (6), получаем

$$\begin{aligned} 1 - \mu &= I_{000}(\omega_2 - \mu\omega_1) \neq 0, \\ x_2 - \mu x_1 &= I_{100}(\omega_2 - \mu\omega_1), \\ y_2 - \mu y_1 &= I_{010}(\omega_2 - \mu\omega_1), \\ z_2 - \mu z_1 &= I_{001}(\omega_2 - \mu\omega_1). \end{aligned}$$

Но $I_{000} > 0$, $\omega_2 - \mu\omega_1 \neq 0$, ибо $\omega_2 \neq \mu\omega_1$ и следовательно $1 - \mu \neq 0$, так что

$$x_0 = \frac{x_2 - \mu x_1}{1 - \mu}, \qquad y_0 = \frac{y_2 - \mu y_1}{1 - \mu}, \qquad z_0 = \frac{z_2 - \mu z_1}{1 - \mu}.$$

Эти зависимости показывают, что точки M_0, M_1, M_2 лежат на одной прямой, что невозможно.

Допустим теперь, что система (25) имеет бесконечное множество решений, зависящих от двух произвольных параметров. Но в таком случае функции Φ_1 и Φ_2 должны быть линейно зависимыми, что невозможно.

Пусть x_3, y_3, z_3 — произвольное решение системы (25), подчиненное единственному ограничению, чтобы точка $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежала на плоскости, определенной точками M_0, M_1, M_2, т. е. чтобы точка M_3 не совпадала с точкой $M''(x'', y'', z'')$ общей для трех плоскостей

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x & x_0 \\ y_1 & y_2 & y & y_0 \\ z_1 & z_2 & z & z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

Легко определить координаты этой точки:

$$\frac{x''}{\dfrac{x_1}{\Phi_{11}} + \dfrac{x_2}{\Phi_{22}} - I_{000}x_0} = \frac{y''}{\dfrac{y_1}{\Phi_{11}} + \dfrac{y_2}{\Phi_{22}} - I_{000}y_0} =$$

$$= \frac{z''}{\dfrac{z_1}{\Phi_{11}} + \dfrac{z_2}{\Phi_{22}} - I_{000}z_0} = \frac{1}{\dfrac{1}{\Phi_{11}} + \dfrac{1}{\Phi_{22}} - I_{000}}.$$

Таким образом, для x_3, y_3, z_3, мы можем взять произвольное решение системы (25), за исключением решения x'', y'', z'' системы (26). Отметим, что при этом выборе чисел x_3, y_3, z_3, первые два уравнения системы (26) удовлетворяются, а последнее уравнение не удовлетворяется, т. е.

$$D_0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_0 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Остается выбрать x_4, y_4, z_4 таким образом, чтобы удовлетворялись остальные три уравнения $\Phi_{14}=0$, $\Phi_{24}=0$, $\Phi_{34}=0$ системы (21). Докажем, что эти уравнения имеют вполне определенное решение относительно неизвестных x_4, y_4, z_4. Для этого рассмотрим систему трех уравнений с неизвестными x, y, z:

$$\begin{aligned} \Phi_1&\equiv\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\omega_1=0,\\ \Phi_2&\equiv\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\omega_2=0,\\ \Phi_3&\equiv\alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z+\omega_3=0. \end{aligned}\tag{27}$$

Докажем, что определитель

$$d=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. В самом деле, зависимости (6), при $\tau=1$, $\xi=x_i$, $\eta=y_i$, $\zeta=z_i$, после почленного интегрирования, можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_{100}\alpha_i+I_{010}\beta_i+I_{001}\gamma_i&=1-I_{000}\omega_i,\\ I_{200}\alpha_i+I_{110}\beta_i+I_{101}\gamma_i&=x_i-I_{100}\omega_i,\\ I_{110}\alpha_i+I_{020}\beta_i+I_{011}\gamma_i&=y_i-I_{010}\omega_i,\\ I_{101}\alpha_i+I_{011}\beta_i+I_{002}\gamma_i&=z_i-I_{001}\omega_i. \end{aligned}\tag{28}$$

Перемножим теперь определители d и Δ:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix} I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001} \\ I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{vmatrix},$$

пользуясь правилом умножения по строкам. Принимая во внимание (28), легко получаем:

$$d\Delta=\begin{vmatrix} I_{000} & 1-I_{000}\omega_1 & 1-I_{000}\omega_2 & 1-I_{000}\omega_3 \\ I_{100} & x_1-I_{100}\omega_1 & x_2-I_{100}\omega_2 & x_3-I_{100}\omega_3 \\ I_{010} & y_1-I_{010}\omega_1 & y_2-I_{010}\omega_2 & y_3-I_{010}\omega_3 \\ I_{001} & z_1-I_{001}\omega_1 & z_2-I_{001}\omega_2 & z_3-I_{001}\omega_3 \end{vmatrix}.$$

Если теперь элементы первого столбца умножим на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и прибавим соответственно к элементам второго, третьего и четвертого столбца, то получим

$$d\Delta=\begin{vmatrix} I_{000} & 1 & 1 & 1 \\ I_{100} & x_1 & x_2 & x_3 \\ I_{010} & y_1 & y_2 & y_3 \\ I_{001} & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=I_{000}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=-I_{000}D_0,$$

так как $I_{100}=I_{000}x_0$, $I_{010}=I_{000}y_0$, $I_{001}=I_{000}z_0$. Следовательно

$$d\cdot\Delta=-I_{000}D_0,\qquad \text{т. е.}\qquad d=(-I_{000}/\Delta)\cdot D_0.$$

Из $I_{000}>0$, $\Delta>0$, $D_0\neq 0$ следует $d\neq 0$.

Таким образом мы установили следующую теорему:

Теорема 8. *Формулы механической кубатуры с минимальным числом членов для множества $C_2^{(3)}$, относительно произвольной трехмерной области R — четырехчленны. Существует бесконечное множество формул этого вида; зависят они от шести произвольных параметров. Для того, чтобы формула*

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i P(x_i,y_i,z_i)$$

была верна для каждого полинома $P\in C_2^{(3)}$, необходимо и достаточно, чтобы числа x_i, y_i, z_i были решением системы из шести уравнений:

$$\Phi(x_k,y_k,z_k,1;x_r,y_r,z_r,1)=0\qquad (k<r;\ k,r=1,2,3,4),$$

где функция Φ определена формулой (4), а коэффициенты определялись по формуле

$$\lambda_i=\frac{1}{\Phi(x_i,y_i,z_i,1;x_i,y_i,z_i,1)},$$

согласно которой эти числа положительны.

Полученному результату можно дать геометрическое толкование. С этой целью рассмотрим мнимую поверхность

$$E(x,y,z,t)=0 \qquad (t=1),$$

где $E(x,y,z,t)$ неотрицательная однородная функция:

$$E(x,y,z,t)=\Phi(x,y,z,t;x,y,z,t).$$

Имея в виду определение (4) функции Φ, легко находим

$$\frac{\partial E}{\partial x}x_i+\frac{\partial E}{\partial y}y_i+\frac{\partial E}{\partial z}z_i+\frac{\partial E}{\partial t}t_i=2\Phi_i$$

для произвольных x_i, y_i, z_i, t_i. Из этого тождества заключаем, что полярная плоскость точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ относительно поверхности E имеет уравнение $\Phi_i=0$.

Предположим теперь, что тетраэдр с вершинами $M_i(x_i,y_i,z_i)$, автополярен относительно E. Тогда, уравнения его граней будут $\Phi_i=0$. Но на полярной плоскости $\Phi_i=0$ вершины M_i лежат три остальные вершины, т. е. $\Phi_{kr}=0$ для $k<r$ и $k,r=1,2,3,4$. Из этого заключаем, что координаты вершин автополярного тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$ являются решением системы (21). Нетрудно показать обратное, т. е., что каждое решение x_i, y_i, z_i системы (21) определяет тетраэдр автополярный относительно E.

Таким образом мы установили следующую теорему:

Теорема 9. *Для того, чтобы формула* (3) *была формулой механической кубатуры с минимальным числом членов для множества* $C_2^{(3)}$, *относительно области* R, *необходимо и достаточно, чтобы тетраэдр с вершинами* $M_i(x_i,y_i,z_i)$ *был автополярен относительно мнимой поверхности второго порядка* $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)$, *где функция* Φ *определена формулой* (4). *В каждой из этих формул коэффициенты* λ_i *определяются по формуле* $\lambda_i=1/\Phi(x_i,y_i,z_i,1;x_i,y_i,z_i,1)$ *и, следовательно, всегда положительны.*

Относительно взаимного положения точек M_i $(i=1,2,3,4)$ заметим, что центр тяжести M_0 области R лежит внутри тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$. В самом деле, применяя формулу (3) к полиномам $1,x,y,z$, получаем

$$I_{000}=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i, \qquad I_{100}=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_i, \qquad I_{010}=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i y_i, \qquad I_{001}=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i z_i,$$

откуда

$$x_0=\frac{\sum\lambda_i x_i}{\sum\lambda_i}, \qquad y_0=\frac{\sum\lambda_i y_i}{\sum\lambda_i}, \qquad z_0=\frac{\sum\lambda_i z_i}{\sum\lambda_i}.$$

Так как $\lambda_i>0$, то M_0 лежит внутри тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$.

II. Формулы вида (II) для $C_2^{(3)}$. Установим, что формулы вида (II) для $C_2^{(3)}$ четырехчленны, т. е. вида

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lambda\sum_{i=1}^{4}P(x_i,y_i,z_i) \tag{29}$$

и докажем, что существует бесконечное множество формул этого вида.

Заметим, что для

$$\xi=\frac{x_r+\vartheta x_k}{1+\vartheta}, \qquad \eta=\frac{y_r+\vartheta y_k}{1+\vartheta}, \qquad \zeta=\frac{z_r+\vartheta z_k}{1+\vartheta}, \tag{30}$$

где $x_r, y_r, z_r, x_k, y_k, z_k, \vartheta\neq-1$ произвольные действительные числа, будем иметь

$$\Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,1)=\frac{\Phi_r+\vartheta\Phi_k}{1+\vartheta}, \tag{31}$$

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta,1;\xi,\eta,\zeta,1)=\frac{\Phi_{rr}+2\Phi_{rk}\vartheta+\Phi_{kk}\vartheta^2}{(1+\vartheta)^2}. \tag{32}$$

Эти зависимости получаются из (4) если подставить на место ξ,η,ζ выражения (30).

Теперь воспользуемся формулой (3). Предположим, что коэффициенты λ_i в этой формуле равны между собой: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$. Но тогда

$$\lambda_i=\frac{I_{000}}{4} \qquad (i=1,2,3,4), \tag{33}$$

так как $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=I_{000}$. Из (33) и (22) следует $\Phi_{ii}=4/I_{000}$, т. е.

$$\Phi(x_i,y_i,z_i,1;x_i,y_i,z_i,1)=\frac{4}{I_{000}} \qquad (i=1,2,3,4). \tag{34}$$

Таким образом мы установили, что все точки M_i лежат на поверхности второго порядка

$$\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)=\frac{4}{I_{000}}. \tag{35}$$

Докажем, что каждая поверхность

$$\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)=\frac{c}{I_{000}} \qquad (c>1) \tag{36}$$

есть эллипсоид с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Для этого достаточно установить, что прямая, определенная точкой M_0 и произвольной точкой $M_r(x_r, y_r, z_r)$, не совпадающей с M_0, пересекает поверхность (36) в двух действительных точках, равноудаленных от M_0. В самом деле, параметрические уравнения этой прямой будут

$$\text{(37)}\quad \xi = \frac{x_r + \vartheta x_0}{1+\vartheta}, \qquad \eta = \frac{y_r + \vartheta y_0}{1+\vartheta}, \qquad \zeta = \frac{z_r + \vartheta z_0}{1+\vartheta} \qquad (1+\vartheta \neq 0).$$

Имея в виду (32) и (36), для точек пересечения будем иметь квадратное уравнение относительно ϑ:

$$\frac{\Phi_{rr} + 2\Phi_{r0}\vartheta + \Phi_{00}\vartheta^2}{(1+\vartheta)^2} = \frac{c}{I_{000}}.$$

Но $\Phi_{r0} = \Phi_{00} = 1/I_{000}$, так что это уравнение получит вид

$$\text{(38)}\qquad (\vartheta+1)^2 = \frac{I_{000}\Phi_{rr} - 1}{c-1}.$$

Так как $M_r \neq M_0$, то из (18) следует неравенство $I_{000}\Phi_{rr} - 1 > 0$, а так как кроме этого $c-1>0$, то корни уравнения (38) действительны и различны, какое бы ни было положение точки M_r.

С другой стороны, из (37) и (38) получаем равенство

$$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 = \frac{c-1}{I_{000}\Phi_{rr} - 1}\left[(x_r - x_0)^2 + (y_r - y_0)^2 + (z_r - z_0)^2\right],$$

второй член которого не зависит от корней уравнения (38). Эта зависимость показывает, что поверхность (36) ограничена и симметрична относительно точки M_0, т. е. эта поверхность, следовательно и поверхность (35), есть эллипсоид с центром M_0.

Теперь докажем, что система, состоящая из 10 уравнений (21) и (34) с 12 неизвестными x_i, y_i, z_i имеет бесконечное множество решений.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ произвольная точка поверхности (35), т. е. $\Phi_{11} = 4/I_{000}$. Рассмотрим плоскость $\Phi_1 = 0$, т. е.

$$\text{(39)}\qquad \Phi(x, y, z, 1; x_1, y_1, z_1, 1) = 0.$$

Докажем, что эта плоскость пересекает эллипсоид (35) по действительному эллипсу. Для этого рассмотрим точку $M_5(x_5, y_5, z_5)$:

$$\text{(40)}\quad x_5 = \frac{4}{3}x_0 - \frac{1}{3}x_1, \qquad y_5 = \frac{4}{3}y_0 - \frac{1}{3}y_1, \qquad z_5 = \frac{4}{3}z_0 - \frac{1}{3}z_1.$$

Эта точка лежит на плоскости (39) и внутри эллипсоида (35). В самом деле, из (31), при $r=1$, $k=0$, $\vartheta=-4$, находим

$$\text{(41)}\qquad \Phi_5 = \frac{4}{3}\Phi_0 - \frac{1}{3}\Phi_1.$$

Если подставим $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, получим

$$\Phi_5 = \frac{4}{3}\Phi_{01} - \frac{1}{3}\Phi_{11},$$

откуда, согласно $\Phi_{11} = 4/I_{000}$, $\Phi_{01} = 1/I_{000}$, получим $\Phi_{51} = 0$, т. е., что точка M_5 лежит на плоскости (39).

С другой стороны, из (41), при $x=x_5$, $y=y_5$, $z=z_5$, находим

$$\text{(42)}\qquad \Phi_{55} = \frac{4}{3I_{000}}.$$

Введем функцию

$$U(x, y, z) = \Phi(x, y, z, 1; x, y, z, 1) - \frac{4}{I_{000}}.$$

Тогда уравнение эллипсоида (35) примет вид $U(x, y, z) = 0$. Так как

$$U(x_5, y_5, z_5) = \Phi_{55} - \frac{4}{I_{000}} = -\frac{8}{3I_{000}} < 0,$$

$$U(x_0, y_0, z_0) = \Phi_{00} - \frac{4}{I_{000}} = -\frac{3}{I_{000}} < 0,$$

то точка M_5 лежит в той же области, что и точка M_0, т. е. внутри эллипсоида (35).

Таким образом мы установили, что существуют точки плоскости (39), лежащие внутри эллипсоида (35). Этим мы установили, что кривая пересечения (35) и (39) есть действительный эллипс E. Пусть $M_2(x_2, y_2, z_2)$ произвольная точка этого эллипса. Тогда

$$\text{(43)}\qquad \Phi_{12} = 0, \qquad \Phi_{22} = \frac{4}{I_{000}}.$$

Докажем, что эллипс E пересекается с плоскостью $\Phi_2 = 0$ в двух различных действительных точках. Ясно, что эти точки являются точками пересечения прямой g: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, с эллипсоидом (35). Докажем, что точка $M_6(x_6, y_6, z_6)$,

$$\text{(44)}\quad x_6 = 2x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_6 = 2y_0 - \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z_6 = 2z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2},$$

лежит на прямой g и внутри эллипсоида (35). В самом деле, из (31) и (44) получается тождество

$$\Phi_6 = 2\Phi_0 - \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}. \tag{45}$$

Если подставим в нем $x=x_i$, $y=y_i$, $z=z_i$ $(i=1,2)$, то получим

$$\Phi_{61}=2\Phi_{01}-\frac{\Phi_{11}+\Phi_{21}}{2}, \qquad \Phi_{62}=2\Phi_{02}-\frac{\Phi_{12}+\Phi_{22}}{2}.$$

Но $\Phi_{01}=\Phi_{02}=1/I_{000}$, $\Phi_{11}=\Phi_{22}=4/I_{000}$, $\Phi_{12}=\Phi_{21}=0$, так что

$$\Phi_{61}=0, \qquad \Phi_{62}=0. \tag{46}$$

Эти зависимости показывают, что точка M_6 лежит на прямой g. С другой стороны, из (45), при $x=x_6$, $y=y_6$, $z=z_6$, находим $\Phi_{66}=2/I_{000}$, так что

$$U(x_6,y_6,z_6)=\Phi_{66}-\frac{4}{I_{000}}=-\frac{2}{I_{000}}<0.$$

Это доказывает, что точка M_6 лежит внутри эллипсоида определенного формулой (35).

Таким образом мы установили, что прямая g: $\Phi_1=0$, $\Phi_2=0$, пересекает эллипсоид (35) в двух различных точках. Пусть эти точки $M_3(x_3,y_3,z_3)$, $M_4(x_4,y_4,z_4)$. Из определения M_3, M_4 следует

$$\Phi_{33}=\frac{4}{I_{000}}, \quad \Phi_{44}=\frac{4}{I_{000}}, \quad \Phi_{13}=0, \quad \Phi_{14}=0, \quad \Phi_{23}=0, \quad \Phi_{24}=0. \tag{47}$$

Теперь докажем, что координаты точек $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$ удовлетворяют уравнениям (21) и (34). Из $\Phi_{11}=4/I_{000}$, (43) и (47) следует, что остается лишь доказать зависимость $\Phi_{34}=0$. Точки M_3, M_4, M_6 лежат на одной прямой и, следовательно, существует действительное $\vartheta\neq-1$, для которого

$$x_4=\frac{x_3+\vartheta x_6}{1+\vartheta}, \qquad y_4=\frac{y_3+\vartheta y_6}{1+\vartheta}, \qquad z_4=\frac{z_3+\vartheta z_6}{1+\vartheta}. \tag{48}$$

Из (32) при $r=3$, $k=6$, получаем

$$\Phi_{44}=\frac{\Phi_{33}+2\Phi_{36}\vartheta+\Phi_{66}\vartheta^2}{(1+\vartheta)^2}. \tag{49}$$

Из (45), при $x=x_3$, $y=y_3$, $z=z_3$, получаем $\Phi_{36}=2\Phi_{03}-(\Phi_{13}+\Phi_{23})/2$, откуда, принимая во внимание $\Phi_{03}=1/I_{000}$ и (47), получаем $\Phi_{36}=2/I_{000}$. Если в (49) подставим $\Phi_{36}=2/I_{000}$, $\Phi_{33}=\Phi_{44}=4/I_{000}$, $\Phi_{66}=2/I_{000}$, полу-

чим уравнение $\vartheta^2+2\vartheta=0$. Корень $\vartheta=0$ определяет точку M_3, а корень $\vartheta=-2$ определяет точку M_4, т. е.

$$x_4=2x_6-x_3, \qquad y_4=2y_6-y_3, \qquad z_4=2z_6-z_3.$$

Из этих зависимостей и из (31) находим

$$\Phi_4=2\Phi_6-\Phi_3.$$

Подставляя $x=x_3$, $y=y_3$, $z=z_3$, получаем

$$\Phi_{34}=\Phi_{43}=2\Phi_{63}-\Phi_{33}=2\cdot\frac{2}{I_{000}}-\frac{4}{I_{000}}=0.$$

Таким образом мы установили следующую теорему:

Теорема 10. *Для множества $C_2^{(3)}$ существует бесконечное множество формул механической кубатуры с минимальным числом членов и с равными коэффициентами относительно произвольной трехмерной области R. Эти формулы четырехчленны:*

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lambda\sum_{i=1}^{4}P(x_i,y_i,z_i),$$

где $\lambda=I_{000}/4$. Точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ лежат на эллипсоиде

$$\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)=\frac{4}{I_{000}},$$

притом их координаты удовлетворяют еще следующим 6 уравнениям:

$$\Phi(x_k,y_k,z_k,1;x_r,y_r,z_r,1)=0 \qquad (k<r;\ k,r=1,2,3,4).$$

Замечание. *Множество, которое состоит из всех тетраэдров $M_1M_2M_3M_4$ теоремы 10, совпадает с множеством, состоящим из всех вписанных в эллипсоид $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)=4/I_{000}$ и одновременно описанных около эллипсоида $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)=4/3I_{000}$ тетраэдров.*

В самом деле, из (42) следует, что точка M_5, координаты которой определены формулами (40), лежит на эллипсоиде

$$\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)=4/3I_{000}. \tag{50}$$

С другой стороны легко заметить, что уравнение касательной плоскости в этой точке к этому эллипсоиду имеет вид $\Phi_5=4/3I_{000}$. Если из этой зависимости и из зависимости (41) исключим Φ_5, то принимая во внимание, что $\Phi_0=1/I_{000}$, получаем уравнение касательной плоскости в виде $\Phi_i=0$, т. е. уравнение грани тетраэдра противоположной вершины M_i.

3. Множество $C_3^{(3)}$; $P(x,y,z)=\sum\limits_{k+l+r\le 3} a_{klr}x^k y^l z^r$.

I. Формулы вида (I) для $C_3^{(3)}$. Предположим, что трехмерная область R симметрична относительно начала координат. Тогда

$$(51)\qquad I_{klr}=0 \quad \text{для} \quad k+l+r=1,3 \qquad \Big(I_{klr}=\iiint\limits_R x^k y^l z^r\,dx\,dy\,dz\Big).$$

Докажем, что существует бесконечное множество формул вида

$$(52)\qquad \iiint\limits_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\sum_{i=1}^{6}\lambda_i P(x_i,y_i,z_i),$$

каждая из которых применяется к произвольному полиному $P\in C_3^{(3)}$. С этой целью вводим функцию

$$(53)\qquad \varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\frac{I_{000}}{\delta}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z\\ \xi & I_{200} & I_{110} & I_{101}\\ \eta & I_{110} & I_{020} & I_{011}\\ \zeta & I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix},$$

где

$$\delta=\begin{vmatrix} I_{200} & I_{110} & I_{101}\\ I_{110} & I_{020} & I_{011}\\ I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix}$$

является определителем положительно определенной квадратичной формы $I(u,v,w)=\iiint(ux+vy+wz)^2\,dx\,dy\,dz$, и, следовательно, $\delta>0$. Очевидно $\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\varphi(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)$, так как δ является симметричным определителем. Обозначим:

$$\varphi_i=\varphi(x,y,z;x_i,y_i,z_i),\qquad \varphi_{kr}=\varphi(x_k,y_k,z_k;x_r,y_r,z_r).$$

Из определения функции φ и имея в виду (51), получаем следующие свойства функции φ:

$$(54)\qquad \iiint x^k y^l z^r \varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy\,dz=0 \quad \text{для} \quad k+l+r=0,2,$$

$$(55)\qquad \begin{aligned}&\iiint x\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy\,dz=I_{000}\,\xi,\\ &\iiint y\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy\,dz=I_{000}\,\eta,\\ &\iiint z\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\,dx\,dy\,dz=I_{000}\,\zeta,\end{aligned}$$

где ξ,η,ζ произвольные действительные числа.

Легко заметить, что имеет место тождество

$$\iiint g(x,y,z)\varphi_k\,dx\,dy\,dz=I_{000}\,g(x_k,y_k,z_k),$$

где $g(x,y,z)=ax+by+cz$ — произвольный однородный полином первой степени. Если подставим $g=\varphi_r$, получим

$$(56)\qquad \iiint\limits_R \varphi_k\varphi_r\,dx\,dy\,dz=I_{000}\,\varphi_{kr}.$$

При $r=k$ находим $\iiint \varphi_k^2\,dx\,dy\,dz=I_{000}\,\varphi_{kk}$, т. е.

$$(57)\qquad \iiint\limits_R \varphi^2(x,y,z;x_k,y_k,z_k)\,dx\,dy\,dz=I_{000}\,\varphi(x_k,y_k,z_k;x_k,y_k,z_k),$$

откуда следует, что

$$(58)\qquad \varphi(x,y,z;x,y,z)>0$$

для всех x,y,z, за исключением случая $x=y=z=0$.

Если $p(x,y,z)=ax+by+cz+d$ произвольная линейная функция, то легко установить следующее тождество:

$$(59)\qquad p(x,y,z)=\frac{1}{I_{000}}\,[\varphi(x,y,z;u,v,w)+\tau],$$

где постоянные u,v,w,τ определяются по формулам:

$$\tau=\iiint p\,dx\,dy\,dz,\qquad u=\iiint xp\,dx\,dy\,dz,$$
$$v=\iiint yp\,dx\,dy\,dz,\qquad w=\iiint zp\,dx\,dy\,dz.$$

Пусть линейная функция $p(x,y,z)$ из (59) обращается в нуль в точках M_1,M_2,M_3, а линейная функция

$$(60)\qquad q(x,y,z)=\frac{1}{I_{000}}\,[\varphi(x,y,z;u_1,v_1,w_1)+\tau_1]$$

обращается в нуль в остальных точках M_4,M_5,M_6. Тогда полином

$$P(x,y,z)=I_{000}\,p(x,y,z)\,q(x,y,z)=$$
$$=\frac{1}{I_{000}}\,\varphi(x,y,z;u,v,w)\,\varphi(x,y,z;u_1,v_1,w_1)+\frac{\tau}{I_{000}}\,\varphi(x,y,z;u_1,v_1,w_1)+$$
$$+\frac{\tau_1}{I_{000}}\,\varphi(x,y,z;u,v,w)+\frac{\tau\tau_1}{I_{000}}$$

обращается в нуль во всех точках $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,\ldots,6)$. Применим формулу (52) к полиномам $P=P(x,y,z)$, xP, yP и zP. Принимая во внимание (56), (57) и $P(x_i,y_i,z_i)=0$, получаем

$$(61)\qquad \begin{gathered}\varphi(u,v,w;u_1,v_1,w_1)+\tau_1\tau=0,\\ \tau u_1+\tau_1 u=0,\qquad \tau v_1+\tau_1 v=0,\qquad \tau w_1+\tau_1 w=0.\end{gathered}$$

Эти уравнения удовлетворяются при

$$\tau=0, \qquad \tau_1=0, \qquad \varphi(u,v,w;u_1,v_1,w_1)=0.$$

Из условий $\tau=0$, $\tau_1=0$ следует, что в этом случае плоскости p и q проходят через начало координат.

Легко заметить, что $\tau_1=0$, $\tau\neq0$ невозможно. В самом деле, из (61) находим в этом случае $u=v=w=0$, что невозможно.

Таким образом мы установили, что плоскости p и q, или обе проходят через начало координат O, или обе не проходят через O. Рассмотрим случай, когда плоскости не проходят через точку O.

Пусть $\tau\neq0$, $\tau_1\neq0$. Подставим

$$\xi=\frac{u}{\tau}, \qquad \eta=\frac{v}{\tau}, \qquad \zeta=\frac{w}{\tau};$$

$$\xi_1=\frac{u_1}{\tau_1}, \qquad \eta_1=\frac{v_1}{\tau_1}, \qquad \zeta_1=\frac{w_1}{\tau_1}.$$

Тогда уравнения (61) получают вид

$$\begin{gathered}\varphi(\xi,\eta,\zeta;\xi_1,\eta_1,\zeta_1)+1=0,\\ \xi+\xi_1=0, \qquad \eta+\eta_1=0, \qquad \zeta+\zeta_1=0,\end{gathered} \tag{62}$$

а выражения p и q получают вид

$$\begin{gathered}p(x,y,z)=\frac{\tau}{I_{000}}\,[\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)+1],\\ q(x,y,z)=\frac{\tau_1}{I_{000}}\,[\varphi(x,y,z;\xi_1,\eta_1,\zeta_1)+1].\end{gathered} \tag{63}$$

Если исключим из (62) ξ_1,η_1,ζ_1, или ξ,η,ζ, получим

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta;\xi,\eta,\zeta)=1, \qquad \varphi(\xi_1,\eta_1,\zeta_1;\xi_1,\eta_1,\zeta_1)=1. \tag{64}$$

С другой стороны, если в (63) подставим $\xi_1=-\xi$, $\eta_1=-\eta$, $\zeta_1=-\zeta$, получим

$$q(x,y,z)=-\frac{\tau_1}{I_{000}}\,[\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)-1].$$

Зависимость (64) между ξ,η,ζ можем интерпретировать как уравнение геометрического места точек $M(\xi,\eta,\zeta)$. Легко заметить, что этим геометрическим местом является эллипсоид с центром в начале координат. Касательная плоскость в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$ к этому эллипсоиду имеет уравнение

$$\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=1.$$

Заменяя в этом уравнении ξ на $-\xi$, η на $-\eta$, ζ на $-\zeta$, получаем уравнение

$$\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-1.$$

Ясно, что последние два уравнения представляют соответственно плоскости q и p. Следовательно, обе плоскости p и q, содержащие все точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,\ldots,6)$, если не проходят через начало координат, то являются двумя параллельными касательными плоскостями к эллипсоиду E:

$$\varphi(x,y,z;x,y,z)=1.$$

Таким образом мы установили, что для каждой пары плоскостей, содержащих все точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$, существуют лишь две возможности: 1° или обе проходят через начало координат, 2° или обе являются касательными к эллипсоиду E и притом параллельными.

Теперь мы докажем, что не существует формула механической квадратуры вида (I) для $C_3^{(3)}$, в которой $N\leqslant5$. В самом деле, допустим, что $N=5$. Пусть плоскость p проходит через точки M_1 и M_2, а плоскость q через все остальные точки M_3, M_4, M_5. Согласно доказанному выше, плоскости p и q или обе касательные к эллипсоиду E, или обе проходят через начало координат. Но плоскость p проходит через две точки и, следовательно, не должна быть касательной, так как положение этой плоскости неопределенное. С другой стороны, если плоскости p и q проходят через начало O, то ясно, что каждая плоскость, проходящая через M_1 и M_2, должна проходить через O, т. е. точка O лежит на прямой M_1M_2. Следовательно, точка O лежит на каждой прямой определенной каждыми двумя точками M_i. Из этого следует, что все точки M_i $(i=1,2,\ldots,5)$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, что невозможно.

Рассмотрим теперь прямую g, определенную точками M_1, M_2. Прямая g, вместе с каждой из остальных точек, определяет четыре плоскости, причем не более чем две из них могут быть касательными к эллипсоиду E. Из остальных, по крайней мере две плоскости должны проходить через начало O. Из этого следует, что вместе с точками M_1, M_2, по крайней мере еще две из точек M_i должны лежать в одной плоскости, проходящей через O. Докажем далее, что для каждых двух точек из 6 точек M_i, существуют среди остальных еще две и и только две, которые, вместе с первыми двумя точками, лежат в общей плоскости проходящей через начало O.

Отметим, что среди 6 точек M_i существуют по крайней мере 3, которые определяют плоскость, касательную к эллипсоиду E. В самом деле, если не существует такая плоскость, то каждые три точки будут определять плоскость, проходящую через начало O. Из этого следует, что все точки M_i должны лежать на одной плоскости, что невозможно.

Предположим, что плоскость

$$\varrho = \varphi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - 1 = 0,$$

касательная к эллипсоиду E, проходит через точки M_1, M_2, M_3. Тогда плоскость σ, проходящая через остальные три точки M_4, M_5, M_6, будет также касательной к эллипсоиду E, причем ее уравнение будет вида

$$\sigma = \varphi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) + 1 = 0.$$

Обозначим через r плоскость, проходящую через точки M_2, M_3 и начало O. Согласно вышедоказанному, существуют еще две точки из точек M_i, через которые проходит плоскость r; пусть это будут точки M_5, M_6. Так как r проходит через O, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$r = \frac{1}{I_{000}} \varphi(x, y, z; u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Обозначая $t_i = t(x_i, y_i, z_i)$ для произвольной функции $t = t(x, y, z)$, согласно определениям функции ϱ, σ, r, имеем

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0, \qquad \varrho_4 \neq 0, \qquad \varrho_5 \neq 0, \qquad \varrho_6 \neq 0;$$

$$\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0, \qquad \sigma_1 \neq 0, \qquad \sigma_2 \neq 0, \qquad \sigma_3 \neq 0;$$

$$r_2 = r_3 = r_5 = r_6 = 0, \qquad r_1 \neq 0, \qquad r_4 \neq 0.$$

Отметим, что из $\varrho_i = 0$ следует $\varphi(\xi, \eta, \zeta; x_i, y_i, z_i) = 1$ для $i = 1, 2, 3$, так что

$$\sigma_i = \varphi(\xi, \eta, \zeta; x_i, y_i, z_i) + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим полином

$$P(x, y, z) = \sigma(x, y, z) r(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{I_{000}} \varphi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \varphi(x, y, z; u_0, v_0, w_0) + \frac{1}{I_{000}} \varphi(x, y, z; u_0, v_0, w_0).$$

Очевидно $P_i = \sigma_i r_i = 0$ для $i = 2, 3, 4, 5, 6$, и $P_1 = \sigma_1 r_1$, т. е. $P_1 = 2r_1 \neq 0$. Применяя формулу (52) к полиномам xP, yP, zP и принимая во внимание (51), (55) и (56), получаем $u_0 = \lambda_1 P_1 x_1$, $v_0 = \lambda_1 P_1 y_1$, $w_0 = \lambda_1 P_1 z_1$, откуда

$$u_0 = 2\lambda_1 r_1 x_1, \qquad v_0 = 2\lambda_1 r_1 y_1, \qquad w_0 = 2\lambda_1 r_1 z_1, \tag{65}$$

так как $P_1 = 2r_1$. Подставляя эти значения в выражение r, получаем

$$r = \frac{2\lambda_1 r_1}{I_{000}} \varphi_1.$$

Если подставим $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, получим $r_1 = 2\lambda_1 r_1 \varphi_{11} / I_{000}$, откуда

$$\lambda_1 = \frac{I_{000}}{2\varphi_{11}}.$$

Аналогично получаем

$$\lambda_i = \frac{I_{000}}{2\varphi_{ii}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{66}$$

Из (66) следует, что $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, так как $I_{000} > 0$, $\varphi_{ii} > 0$.

Применим формулу (52) к полиномам r, xr, yr, zr.

Согласно (55) и $r_2 = r_3 = r_5 = r_6 = 0$,

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_4 r_4 = 0,$$

$$u_0 = \lambda_1 r_1 x_1 + \lambda_4 r_4 x_4, \qquad v_0 = \lambda_1 r_1 y_1 + \lambda_4 r_4 y_4, \qquad w_0 = \lambda_1 r_1 z_1 + \lambda_4 r_4 z_4.$$

Из первого соотношения имеем $\lambda_4 r_4 = -\lambda_1 r_1$, так что

$$u_0 = \lambda_1 r_1 (x_1 - x_4), \qquad v_0 = \lambda_1 r_1 (y_1 - y_4), \qquad w_0 = \lambda_1 r_1 (z_1 - z_4).$$

Из этих зависимостей и из (65) находим

$$x_4 = -x_1, \qquad y_4 = -y_1, \qquad z_4 = -z_1. \tag{67}$$

Следовательно, точки M_i парами симметричны относительно начала O.

Из (67) следует $\varphi_{44} = \varphi_{11}$ откуда $\lambda_4 = \lambda_1$, т. е. λ_i парами равны между собой.

Из (67) находим $\varphi_{14} = -\varphi_{11}$, а из $r_2 = r_3 = r_5 = r_6 = 0$, получаем $\varphi_{12} = 0$, $\varphi_{13} = 0$, $\varphi_{15} = 0$, $\varphi_{16} = 0$.

Предположим, что точка M_5 симметрична точки M_2, а точка M_6 — точки M_3. Тогда согласно вышедоказанному имеем

$$x_{i+3} = -x_i, \qquad y_{i+3} = -y_i, \qquad z_{i+3} = -z_i \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{68}$$

$$\lambda_{i+3} = \lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{69}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{15} = \varphi_{16} = 0, \\ &\varphi_{42} = \varphi_{43} = \varphi_{45} = \varphi_{46} = 0, \\ &\varphi_{21} = \varphi_{23} = \varphi_{24} = \varphi_{26} = 0, \\ &\varphi_{51} = \varphi_{53} = \varphi_{54} = \varphi_{56} = 0, \\ &\varphi_{31} = \varphi_{32} = \varphi_{34} = \varphi_{35} = 0, \\ &\varphi_{61} = \varphi_{62} = \varphi_{64} = \varphi_{65} = 0; \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} &-\varphi_{14} = -\varphi_{41} = \varphi_{44} = \varphi_{11}, \\ &-\varphi_{25} = -\varphi_{52} = \varphi_{55} = \varphi_{22}, \\ &-\varphi_{36} = -\varphi_{63} = \varphi_{66} = \varphi_{33}. \end{aligned} \tag{71}$$

Применяя формулу (52) к полиному $P(x,y,z)=1$, получаем $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6=I_{000}$, откуда, в силу (66) и (69), получаем

(72) $$\frac{1}{\varphi_{11}}+\frac{1}{\varphi_{22}}+\frac{1}{\varphi_{33}}=1.$$

С другой стороны, из $\varphi_{kr}=\varphi_{rk}$ и из (68) заключаем, что из уравнений (70) только три независимы между собой:

(73) $$\varphi_{12}=0,\qquad \varphi_{13}=0,\qquad \varphi_{23}=0.$$

Таким образом мы установили, что для того, чтобы координаты точек $M_i(x_i,y_i,z_i)$ определяли формулу вида (52), необходимо, чтобы эти координаты удовлетворяли зависимостям (68), (72) и (73). Следовательно, если сумеем определить координаты точек M_1, M_2, M_3 таким образом, чтобы эти координаты удовлетворяли уравнениям (72) и (73), то зависимости (68) позволят определить и координаты остальных точек M_4, M_5, M_6.

Пусть $M_1(x_1,y_1,z_1)$ произвольная точка лежащая вне эллипсоида E: $\varphi_{11}>1$.

Рассмотрим плоскость $\varphi_1=0$. Пусть $M_2(x_2,y_2,z_2)$ произвольная точка, лежащая на плоскости $\varphi_1=0$: $\varphi_{12}=0$. Подчиним M_2 ограничению, чтобы

$$\varphi_{22}>\frac{1}{1-\frac{1}{\varphi_{11}}}.$$

Такой выбор точки M_2 вполне возможен, так как вышеуказанное условие означает, что точка M_2 лежит вне эллипсоида

$$\varphi(x,y,z;x,y,z)=\frac{1}{1-\frac{1}{\varphi_{11}}}.$$

Этот эллипсоид действительный, так как из $\varphi_{11}>1$ следует $1-1/\varphi_{11}>0$.

Пусть теперь координаты точки M_3 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{\varphi_{11}}+\frac{1}{\varphi_{22}}+\frac{1}{\varphi_{33}}=1,\qquad \varphi_{13}=0,\qquad \varphi_{23}=0.$$

Это означает, что числа x_3,y_3,z_3 являются решением системы уравнений

$$\frac{1}{\varphi_{11}}+\frac{1}{\varphi_{22}}+\frac{1}{\varphi(x,y,z;x,y,z)}=1,\qquad \varphi_1=0,\qquad \varphi_2=0,$$

с неизвестными x,y,z. Первое уравнение очевидно можно записать в виде

$$\varphi(x,y,z;x,y,z)=\frac{1}{1-\frac{1}{\varphi_{11}}-\frac{1}{\varphi_{22}}}.$$

Это уравнение представляет действительный эллипсоид, так как из $\varphi_{22}>1/(1-1/\varphi_{11})$ следует $1-1/\varphi_{11}-1/\varphi_{22}>0$. Так как прямая $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ проходит через центр O эллипсоида E_2, то эта прямая пересекает E_2 в двух действительных точках. Следовательно, система

$$\varphi=k,\qquad \varphi_1=0,\qquad \varphi_2=0,$$

где обозначено

$$\varphi=\varphi(x,y,z;x,y,z),\qquad k=\frac{1}{1-\frac{1}{\varphi_{11}}-\frac{1}{\varphi_{22}}},$$

имеет вполне определенные два решения.

Пусть $M_s(x_s,y_s,z_s)$ точка пересечения эллипсоида $\varphi=1$ с прямой $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$:

(74) $$\varphi_{ss}=1,\qquad \varphi_{1s}=0,\qquad \varphi_{2s}=0.$$

Очевидно, произвольная точка прямой $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, будет иметь координаты tx_s, ty_s, tz_s. Если подставим $x=tx_s$, $y=ty_s$, $z=tz_s$ в уравнение $\varphi=k$, получим $t^2\varphi_{ss}=k$, т. е. $t^2=k$, откуда $t=\pm\sqrt{k}$. Следовательно, координаты точки M_3 будут

(75) $$x_3=\sqrt{k}\,x_s,\qquad y_3=\sqrt{k}\,y_s,\qquad z_3=\sqrt{k}\,z_s\qquad \left(k=\frac{1}{1-\frac{1}{\varphi_{11}}-\frac{1}{\varphi_{22}}}\right),$$

где x_s,y_s,z_s удовлетворяют уравнениям (74).

Таким образом мы установили, что системы уравнений (72) и (73) с неизвестными x_i,y_i,z_i $(i=1,2,3)$ имеют бесконечное множество решений, зависящих от 5 произвольных параметров: координаты точек M_1 и M_2 связаны зависимостью $\varphi_{12}=0$.

Докажем, что если числа x_i,y_i,z_i,λ_i удовлетворяют зависимостям (66), (68), (72) и (73), то эти числа определяют формулу вида (52). Отметим, что в этом случае функции $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ линейно независимые. В самом деле, если для постоянных c_1,c_2,c_3 имеем $c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3\varphi_3\equiv0$, то подставляя $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, получим $c_1\varphi_{11}+c_2\varphi_{21}+c_3\varphi_{31}=0$, т. е. $c_1\varphi_{11}=0$, или $c_1=0$, так как $\varphi_{11}>0$. Аналогично находим $c_2=0$, $c_3=0$. Но если $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ линейно независимы, то каждый полином $P(x,y,z)\in C_3^{(3)}$ можно представить в виде

$$P(x,y,z)=\sum_{p+q+r\leqslant 3} a_{pqr}\varphi_1^p\varphi_2^q\varphi_3^r.$$

Принимая во внимание, что

$$\iiint \varphi_1^p \varphi_2^q \varphi_3^r \, dx\, dy\, dz = 0 \quad \text{для} \quad p+q+r = 1, 3,$$

и (55), (56), (70), получаем

$$\iiint\limits_R P(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = I_{000}(a_{200}\varphi_{11} + a_{020}\varphi_{22} + a_{002}\varphi_{33} + a_{000}). \tag{76}$$

Аналогично, имея в виду (71), находим

$$\begin{aligned}
P_1 &= P(x_1, y_1, z_1) = a_{300}\varphi_{11}^3 + a_{200}\varphi_{11}^2 + a_{100}\varphi_{11} + a_{000},\\
P_2 &= a_{030}\varphi_{22}^3 + a_{020}\varphi_{22}^2 + a_{010}\varphi_{22} + a_{000},\\
P_3 &= a_{003}\varphi_{33}^3 + a_{002}\varphi_{33}^2 + a_{001}\varphi_{33} + a_{000},\\
P_4 &= -a_{300}\varphi_{11}^3 + a_{200}\varphi_{11}^2 - a_{100}\varphi_{11} + a_{000},\\
P_5 &= -a_{030}\varphi_{22}^3 + a_{020}\varphi_{22}^2 - a_{010}\varphi_{22} + a_{000},\\
P_6 &= -a_{003}\varphi_{33}^3 + a_{002}\varphi_{33}^2 - a_{001}\varphi_{33} + a_{000}.
\end{aligned}$$

Перемножая на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$, складывая почленно, и имея в виду (66), (69) и (72), получаем

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i P(x_i, y_i, z_i) = I_{000}(a_{200}\varphi_{11} + a_{020}\varphi_{22} + a_{002}\varphi_{33} + a_{000}).$$

Из этой зависимости и из зависимости (76) следует, что формула (52) верна для полинома $P(x, y, z) \in C_3^{(3)}$.

Таким образом мы установили следующую теорему:

Теорема 11. *Формулы механической кубатуры с минимальным числом членов для множества $C_3^{(3)}$, относительно трехмерной области R, симметричной относительно начала координат, шестичленны. Существует бесконечное множество формул этого вида; зависят они от 5 произвольных параметров.*

Для того, чтобы формула

$$\iiint\limits_R P(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i P(x_i, y_i, z_i)$$

была верна для каждого полинома $P \in C_3^{(3)}$, необходимо и достаточно, чтобы координаты x_i, y_i, z_i трех точек M_1, M_2, M_3 удовлетворяли уравнениям

$$\frac{1}{\varphi_{11}} + \frac{1}{\varphi_{22}} + \frac{1}{\varphi_{33}} = 1, \qquad \varphi_{12} = 0, \qquad \varphi_{13} = 0, \qquad \varphi_{23} = 0,$$

и чтобы точки M_4, M_5, M_6, были симметричными соответственно точкам M_1, M_2, M_3 относительно начала O. Коэффициенты λ_i определяются по формулам

$$\lambda_i = \frac{I_{000}}{2\varphi(x_i, y_i, z_i; x_i, y_i, z_i)}$$

и, следовательно, всегда положительны.

Отметим, что *точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ являются вершинами октаэдра с треугольными гранями, описанного около эллипсоида $\varphi(x, y, z; x, y, z) = 1$ таким образом, что симметричная точка относительно начала координат каждой его вершины, является также его вершиной.*

II. Формулы вида (II) для $C_3^{(3)}$. Установим, что формулы вида (II) для $C_3^{(3)}$ при симметричной области — шестичленны:

$$\iiint\limits_R P(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda \sum_{i=1}^{6} P(x_i, y_i, z_i). \tag{77}$$

Для этого достаточно в формуле (52) принять $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$. Но тогда имеем

$$\lambda_i = \frac{I_{000}}{6} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{78}$$

так как $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_6 = I_{000}$. Из (78) и (66) находим $\varphi_{ii} = 3$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Из этого следует, что все точки M_i лежат на эллипсоиде E':

$$\varphi(x, y, z; x, y, z) = 3.$$

Докажем, что можно выбрать точки M_1, M_2, M_3 на эллипсоиде E' таким образом, чтобы их координаты удовлетворяли уравнениям

$$\frac{1}{\varphi_{11}} + \frac{1}{\varphi_{22}} + \frac{1}{\varphi_{33}} = 1, \qquad \varphi_{12} = 0, \qquad \varphi_{13} = 0, \qquad \varphi_{23} = 0, \tag{79}$$

причем бесконечным множеством способов. Мы построим точки M_i таким образом, что все λ_i будут равны между собой.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка эллипсоида $\varphi = 3$, где $\varphi = \varphi(x, y, z; x, y, z)$:

$$\varphi_{11} = 3. \tag{80}$$

Пусть $M_2(x_2, y_2, z_2)$ произвольная точка эллипса $\varphi = 3$, $\varphi_1 = 0$, т. е.

$$\varphi_{22} = 3, \qquad \varphi_{12} = 0. \tag{81}$$

Выбор точки M_3 вполне возможен, так как этот эллипсоид действительный. Пусть координаты точки $M_3(x_3, y_3, z_3)$ удовлетворяют первому и последним двум уравнениям системы (79):

$$\frac{1}{\varphi_{11}} + \frac{1}{\varphi_{22}} + \frac{1}{\varphi_{33}} = 1, \qquad \varphi_{13} = 0, \qquad \varphi_{23} = 0.$$

Имея в виду (80) и (81), эти уравнения примут вид

$$\varphi_{33} = 3, \qquad \varphi_{13} = 0, \qquad \varphi_{23} = 0.$$

Из этих уравнений следует, что M_3 является точкой пересечения эллипсоида $\varphi=3$ с прямой $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$. Но эта прямая проходит через центр O эллипсоида $\varphi=3$ и, следовательно, пересекается с ним в двух различных точках M_3 и M_6. Точки M_4 и M_5 получаем по формулам (68).

Таким образом мы установили следующую теорему:

Теорема 12. *Для множества $C_3^{(3)}$ существует бесконечное множество формул механической кубатуры с минимальным числом членов и с равными коэффициентами вида*

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lambda\sum_{i=1}^{6}P(x_i,y_i,z_i)$$

при предположении, что трехмерная область R симметрична относительно начала координат. В каждой из этих формул $\lambda=I_{000}/6$. Координаты точек M_1, M_2, M_3 удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_{11}=3,\qquad \varphi_{22}=3,\qquad \varphi_{33}=3;\qquad \varphi_{12}=0,\qquad \varphi_{13}=0,\qquad \varphi_{23}=0,$$

а координаты точек M_4, M_5, M_6 определяются по формулам $x_{i+3}=-x_i$, $y_{i+3}=-y_i$, $z_{i+3}=-z_i$ $(i=1,2,3)$.

Отметим, что *точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,\ldots,6)$ являются вершинами октаэдра с треугольными гранями описанного около эллипсоида $\varphi(x,y,z;x,y,z)=1$ и вписанного в эллипсоид $\varphi(x,y,z;x,y,z)=3$ таким образом, что симметричная точка относительно начала координат каждой его вершины, является также его вершиной.*

MECHANICAL QUADRATURES WITH A MINIMAL NUMBER OF TERMS

G. GEORGĚV

SUMMARY

Let us denote by $C_n^{(m)}$ the set of all polynomials $P(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ of degree not exceeding n, the variables $x_1,x_2,\ldots,x_m$ being supposed to be real. Let R be a domain in the space of the variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$ in which exist the integrals

$$I_{kl\ldots r}=\iint_R\ldots\int x_1^k x_2^l\ldots x_m^r\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m\qquad (k\geqslant 0,\ l\geqslant 0,\ldots,\ r\geqslant 0;\ k+l+\ldots+r\leqslant n).$$

These are many possible ways of finding a positive integer N, N points $x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_m^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ and N numbers $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$, independent of the polynomial $P(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, such that the formula

$$\text{(I)}\qquad \iint_R\ldots\int P(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i P(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_m^{(i)})$$

is valid for every $P\in C_n^{(m)}$. We shall say that *formula* (I) *represents a mechanical quadrature with a minimal number of terms* if number N is the least possible. We shall also say that *there exists a mechanical quadrature, of a minimal number of terms and of equal coefficients, defined for the set $C_n^{(m)}$ and the domain R* if it is possible to find the smallest positive integer N and real λ, $x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_m^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,N)$ such that

$$\text{(II)}\qquad \iint_R\ldots\int P(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m=\lambda\sum_{i=1}^{N}P(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_m^{(i)})$$

holds for every polynomial $P\in C_n^{(m)}$.

In the present paper we give all formulae of type (I) and (II) for the sets $C_1^{(2)},C_2^{(2)},C_1^{(3)},C_2^{(3)}$, and an arbitrary domain R, and also for the sets $C_3^{(2)}$ and $C_3^{(3)}$, assuming that the domain R is symmetrical with respect to a point. We obtain the following results.

§ 1. Mechanical quadratures for double integrals

1. The set $C_1^{(2)}$: $P(x,y)=ax+by+c$.

Theorem 1. *For $C_1^{(2)}$ and an arbitrary domain R in the plane, there exists only one formula of type* (I),

$$\iint_R P(x,y)\,dx\,dy=\lambda_0 P(x_0,y_0),$$

valid for every polynomial $P \in C_1^{(2)}$. The point $M_0(x_0, y_0)$, with

$$x_0 = \frac{I_{10}}{I_{00}}, \qquad y_0 = \frac{I_{01}}{I_{00}} \qquad \left(I_{kl} = \iint x^k y^l \, dx\, dy\right),$$

is the centre of mass of the domain R (supposed to be homogeneous) and $\lambda_0 = I_{00}$ is equal to the area of the domain R, whence $\lambda_0 > 0$.

2. The set $C_2^{(2)}$; $P(x,y) = \sum_{k+l \leq 2} a_{kl} x^k y^l$.

I. Formulae of type (I) for $C_2^{(2)}$.

To determine mechanical quadratures for the set $C_2^{(2)}$ and an arbitrary domain R in the plane let us introduce the function

$$F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & z & x & y \\ \xi & I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ \eta & I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ \zeta & I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}$$

$$\left(I_{kl} = \iint x^k y^l \, dx\, dy\right).$$

The determinant Δ is positive, since it is equal to the discriminant of the positive by definite form $I(u,v,w) = \iint (w + ux + vy)^2 \, dx\, dy$. By the definition of the function F:

(a) $F(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = F(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)$;

(b) $g(x,y,z) = \iint g(\xi,\eta,1)\, F(x,y,z;\xi,\eta,1)\, d\xi\, d\eta = F(x,y,z;u,v,w)$,

where the linear function $g(x,y,z) = ax + by + cz$ is arbitrary and $w = \iint g \, dx\, dy$, $u = \iint xg \, dx\, dy$, $v = \iint yg \, dx\, dy$;

(c) $\iint F^2(x,y,1;\xi,\eta,1)\, d\xi\, d\eta = F(x,y,1;x,y,1) > 0$;

(d) The conic $F(x,y,1;x,y,1) = c/I_{00}$ $(c > 1)$ is a real ellipse with centre $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 = I_{10}/I_{00}$, $y_0 = I_{01}/I_{00}$.

THEOREM 2. *For the set $C_2^{(2)}$ and an arbitrary domain R in the plan, the mechanical quadratures of a minimal number of terms are of the form*

(1) $$\iint_R P(x,y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P(x_i, y_i).$$

There exist infinitely many formulae of this type; they depend on three arbitrary parameters.

Formula (1) is valid for every polynomial $P \in C_2^{(2)}$ if and only if the numbers x_i, y_i satisfy the system of three equations

(2) $$F(x_k, y_k, 1; x_r, y_r, 1) = 0 \qquad (k < r;\ k, r = 1, 2, 3),$$

and if the coefficients λ_i are defined by the formulae

(3) $$\lambda_i = \frac{1}{F(x_i, y_i, 1; x_i, y_i, 1)} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

in virtue of which λ_i are positive.

Indeed, applying formula (1) to the polynomials $F = F(x,y,1;\xi,\eta,1)$, xF and yF, we obtain

$$\begin{aligned} \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 &= 1, \\ \lambda_1 F_1 x_1 + \lambda_2 F_2 x_2 + \lambda_3 F_3 x_3 &= \xi, \\ \lambda_1 F_1 y_1 + \lambda_2 F_2 y_2 + \lambda_3 F_3 y_3 &= \eta, \end{aligned}$$

where $F_i = F(x_i, y_i, 1; \xi, \eta, 1)$. This gives

$$\lambda_1 F_1 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & x_2 & x_3 \\ \eta & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \qquad \lambda_2 F_2 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \xi & x_3 \\ y_1 & \eta & y_3 \end{vmatrix}, \qquad \lambda_3 F_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \xi \\ y_1 & y_2 & \eta \end{vmatrix},$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Substituting $\xi = x_i$ and $\eta = y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ in these formulae we get (2) and (3). This proves the necessity of the condition.

To prove that the condition is sufficient, let x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ be an arbitrary solution of system (2). In this case the function F_i are linearly independent, whence every polynomial $P(x,y)$ may be represented in the form

$$P(x,y) = \sum_{k \leq r} a_{kl} F_k F_l.$$

This formula gives

$$a_{kk} F(x_k, y_k, 1; x_k, y_k, 1) = \lambda_k P(x_k, y_k)$$

and

$$\iint P(x,y)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{3} a_{kk} F(x_k, y_k, 1; x_k, y_k, 1),$$

which implies (1).

It will be observed that (2) is a system of three equations with six unknowns, whence it has infinitely many solutions depending on three independent parameters.

The above result has the following geometrical interpretation:

THEOREM 3. *Formula (1) represents a mechanical quadrature with a minimal number of terms for the set $C_2^{(2)}$ and the domain R if and only if the triangle with vertices $M_i(x_i, y_i)$ is autopolar with respect to the imaginary conic $F(x,y,1;x,y,1) = 0$. Numbers λ_i are defined by formula (3).*

II. Formulae of type (II) for $C_2^{(2)}$.

THEOREM 4. *There exist infinitely many mechanical quadratures with a minimal number of terms and with equal coefficients for the set $C_2^{(2)}$ and an arbitrary domain R of the plane. They are all defined by the formula*

$$\iint_R P(x,y)\, dx\, dy = \lambda \sum_{i=1}^{3} P(x_i, y_i),$$

where $\lambda = I_{00}/3$, and the points $M_i(x_i, y_i)$ are situated on the ellipse

(E) $$F(x,y,1;x,y,1) = \frac{3}{I_{00}},$$

their coordinates satisfying the following three equations:

$$F(x_k, y_k, 1; x_r, y_r, 1) = 0 \qquad (k < r;\ k, r = 1, 2, 3).$$

These three points may be defined in the following way: we choose one of them, say (ξ,η), arbitrarily in the ellipse (E), *and we determine the other two as intersection points of the ellipse* (E) *with the straight line* $F(x,y,1;\xi,\eta,1)=0$.

Remark. The set of all triangles determined by Theorem 3 is identical with the set of all triangles inscribed in the ellipse $F(x,y,1;x,y,1)=3/I_{00}$ and simultaneously circumscribed on the ellipse $F(x,y,1;x,y,1)=3/2I_{00}$.

3. The set $C_3^{(2)}$; $P(x,y)=\sum\limits_{k+l\leq 3} a_{kl}x^k y^l$.

I. **Formulae of type** (I) **for** $C_3^{(2)}$. To establish formulae (I) for the set $C_3^{(2)}$ we suppose that the domain R is symmetrical with respect to the origin. Let us write

$$f(x,y;\xi,\eta)=-\frac{I_{00}}{\delta}\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ \xi & I_{20} & I_{11} \\ \eta & I_{11} & I_{02}\end{vmatrix}, \qquad \delta=\begin{vmatrix} I_{20} & I_{11} \\ I_{11} & I_{02}\end{vmatrix} \qquad \left(I_{kl}=\iint x^k y^l\,dx\,dy\right).$$

Since δ is equal to the discriminant of the positively definite form $I(u,v)=\iint (ux+vy)^2\,dx\,dy$, therefore $\delta>0$. By the definition of the function f

(a) $$f(x,y;\xi,\eta)=f(\xi,\eta;x,y),$$

(b) $$I_{00}\,g(x,y)=\iint g(\xi,\eta)f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=f(x,y;u,v),$$

where the linear function $g(x,y)=ax+by$ is arbitrary,

$$u=\iint xg\,dx\,dy \quad \text{and} \quad v=\iint yg\,dx\,dy.$$

(c) $$\iint f^2(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=I_{00}f(x,y;x,y)>0 \quad \text{for} \quad x^2+y^2>0.$$

(d) The conic $f(x,y;x,y)=c$ $(c>0)$ is an ellipse with centre at the origin.

Theorem 5. *The mechanical quadratures with a minimal number of terms for the set* $C_3^{(2)}$ *and an arbitrary domain* R, *symmetrical with respect to the origin, are of the form*

(4) $$\iint\limits_R P(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i P(x_i,y_i).$$

There exist infinitely many formulae of this type, all involving two arbitrary parameters u,v *satisfying the unique condition* $f(u,v;u,v)>1$. *Formula* (4) *is valid for every polynomial* $P\in C_3^{(2)}$ *if and only if* $M_i(x_i,y_i)$ *are vertices of a parallelogram circumscribed on the ellipse* $f(x,y;x,y)=1$. *The coefficients* λ_i *are defined by the formula*

$$\lambda_i=\frac{I_{00}}{2f(x_i,y_i;x_i,y_i)},$$

whence they are positive in every case.

II. **Formulae of type** (II) **for** $C_3^{(2)}$.

Theorem 6. *For the set* $C_3^{(2)}$ *there exist infinitely many mechanical quadratures with a minimal number of terms and with equal coefficients. Under the hypothesis that the domain* R *is symmetrical with respect to the origin, they are all of the form*

$$\iint\limits_R P(x,y)\,dx\,dy=\lambda\sum_{i=1}^{4}P(x_i,y_i).$$

In all these formulae $\lambda=I_{00}/4$ *and the points* $M_i(x_i,y_i)$ *are vertices of the parallelogram circumscribed on the ellipse* $f(x,y;x,y)=1$ *and inscribed in the ellipse* $f(x,y;x,y)=2$. *Each point of the second ellipse may be chosen as a vertex of one of those parallelograms.*

Remark. The set of all parallelograms of Theorem 6 is identical with the set of all parallelograms circumscribed on the ellipse $f(x,y;x,y)=1$, with sides conjugate with respect to this ellipse.

§ 2. Mechanical quadratures for triple integrals

1. The set $C_1^{(3)}$; $P(x,y,z)=ax+by+cz+d$.

Theorem 7. *For the set* $C_1^{(3)}$ *and an arbitrary three-dimensional domain* R, *there exists only one formula of type* (I):

$$\iiint\limits_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lambda_0 P_0(x_0,y_0,z_0),$$

valid for every polynomial $P\in C_1^{(3)}$. *The point* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *with*

$$x_0=\frac{I_{100}}{I_{000}}, \qquad y_0=\frac{I_{010}}{I_{000}}, \qquad z_0=\frac{I_{001}}{I_{000}} \qquad \left(I_{klr}=\iiint x^k y^l z^r\,dx\,dy\,dz\right)$$

concides with the centre of mass of the domain R *supposed to be homogeneous, and* $\lambda_0=I_{00}$ *is equal to the volume of* R, *whence it is positive.*

2. The set $C_2^{(3)}$; $P(x,y,z)=\sum\limits_{k+l+r\leq 2} a_{klr}x^k y^l z^r$.

To determine mechanical quadratures for the set $C_2^{(3)}$ and an arbitrary three-dimensional domain R let us introduce the function

$$\Phi(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,\tau)=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & t & x & y & z \\ \tau & I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001} \\ \xi & I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ \eta & I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ \zeta & I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix}, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001} \\ I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix}$$

$$\left(I_{klr}=\iiint x^k y^l z^r\,dx\,dy\,dz\right).$$

The determinant Δ is positive, since it is equal to the discriminant of positively definite form

$$I(u,v,w,\vartheta)=\iiint(\vartheta+ux+vy+wz)^2\,dx\,dy\,dz.$$

By the definition of the function Φ

(a) $$\Phi(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,\tau)=\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau;x,y,z,t);$$

(b) $$g(x,y,z,t)=\iiint g(\xi,\eta,\zeta,1)\,\Phi(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,1)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\Phi(x,y,z,t;u,v,w,\vartheta),$$

where the linear function $g(x,y,z,t)=ax+by+cz+dt$ is arbitrary and

$$\vartheta=\iiint g\,dx\,dy\,dz, \quad u=\iiint xg\,dx\,dy\,dz, \quad v=\iiint yg\,dx\,dy\,dz, \quad w=\iiint zg\,dx\,dy\,dz;$$

(c) $$\iiint\Phi^2(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,1)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)>0;$$

(d) The quadric surface $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1)=c/I_{000}$ $(c>1)$ is a real ellipsoid with centre $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$x_0=\frac{I_{100}}{I_{000}}, \qquad y_0=\frac{I_{010}}{I_{000}}, \qquad z_0=\frac{I_{001}}{I_{000}}.$$

THEOREM 8. *The mechanical quadratures with a minimal number of terms for the set $C_2^{(3)}$ and an arbitrary three-dimensional domain R are of the form*

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i P(x_i,y_i,z_i). \tag{5}$$

There exist infinitely many formulae of this type, depending on four arbitrary parameters. Formula (5) is valid for every polynomial $P \in C_2^{(3)}$ if and only if the numbers x_i, y_i, z_i are solutions of the system of six equations

$$\Phi(x_k,y_k,z_k,1;x_r,y_r,z_r,1) = 0 \qquad (k<r;\ k,r = 1,2,3,4), \tag{6}$$

and the coefficients are defined by the formulae

$$\lambda_i = \frac{1}{\Phi(x_i,y_i,z_i,1;x_i,y_i,z_i,1)} \qquad (i = 1,2,3,4), \tag{7}$$

in virtue of which λ_i are positive.

Indeed, formulae (4), applied to the polynomials $\Phi = \Phi(x,y,z,1;\xi,\eta,\zeta,1)$, $x\Phi, y\Phi, z\Phi$, give

$$\begin{aligned}
\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \lambda_3\Phi_3 + \lambda_4\Phi_4 &= 1,\\
\lambda_1\Phi_1 x_1 + \lambda_2\Phi_2 x_2 + \lambda_3\Phi_3 x_3 + \lambda_4\Phi_4 x_4 &= \xi,\\
\lambda_1\Phi_1 y_1 + \lambda_2\Phi_2 y_2 + \lambda_3\Phi_3 y_3 + \lambda_4\Phi_4 y_4 &= \eta,\\
\lambda_1\Phi_1 z_1 + \lambda_2\Phi_2 z_2 + \lambda_3\Phi_3 z_3 + \lambda_4\Phi_4 z_4 &= \zeta,
\end{aligned}$$

where $\Phi_i = \Phi(x_i,y_i,z_i,1;\xi,\eta,\zeta,1)$. Hence

$$\lambda_1\Phi_1 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \xi & x_2 & x_3 & x_4\\ \eta & y_2 & y_3 & y_4\\ \zeta & z_2 & z_3 & z_4\end{vmatrix}, \qquad \lambda_2\Phi_2 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & \xi & x_3 & x_4\\ y_1 & \eta & y_3 & y_4\\ z_1 & \zeta & z_3 & z_4\end{vmatrix},$$

$$\lambda_3\Phi_3 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \xi & x_4\\ y_1 & y_2 & \eta & y_4\\ z_1 & z_2 & \zeta & z_4\end{vmatrix}, \qquad \lambda_4\Phi_4 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \xi\\ y_1 & y_2 & y_3 & \eta\\ z_1 & z_2 & z_3 & \zeta\end{vmatrix},$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{vmatrix}.$$

Substituting $\xi = x_i$, $\eta = y_i$, $\zeta = z_i$ $(i = 1,2,3,4)$ in these formulae we obtain (6) and (7). This proves the necessity of the condition.

Conversely, let x_i, y_i, z_i $(i = 1,2,3,4)$ satisfy system (6). In this case the functions Φ_i are linearly independent, whence every polynomial $P(x,y,z) \in C_2^{(3)}$ may be represented as

$$P(x,y,z) = \sum_{k=1}^{4} a_{kk}\Phi_k\Phi_i.$$

This formula gives

$$a_{kk}\Phi(x_k,y_k,z_k,1;x_k,y_k,z_k,1) = \lambda_k P(x_k,y_k,z_k),$$

$$\iiint P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{k=1}^{4} a_{kk}\Phi(x_k,y_k,z_k,1;x_k,y_k,z_k,1),$$

which implies formula (5).

It will be observed that system (6), consisting of six equations with twelve unknowns, has infinitely many solutions depending on six independent parameters.

The above result has the following geometrical interpretation:

THEOREM 9. *Formula (5) represents a mechanical quadrature with a minimal number of terms for the set $C_2^{(3)}$ and the domain R if and only if the parallelepiped with vertices $M_i(x_i,y_i,z_i)$ is autopolar with respect to the imaginary quadric surface $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1) = 0$. The numbers λ_i are defined by formulae (7).*

II. Formulae of type (II) for $C_2^{(3)}$.

THEOREM 10. *For the set $C_2^{(3)}$ and an arbitrary three-dimensional domain R there exist infinitely many mechanical quadratures with a minimal number of terms and with equal coefficients. They are all of the form*

$$\iiint P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lambda\sum_{i=1}^{4} P(x_i,y_i,z_i),$$

where $\lambda = I_{000}/4$ and the points $M_i(x_i,y_i,z_i)$ are situated on the ellipsoid

$$\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1) = \frac{4}{I_{000}},$$

their coordinates satisfying six equations

$$\Phi(x_k,y_k,z_k,1;x_r,y_r,z_r,1) = 0 \qquad (k<r;\ k,r = 1,2,3,4).$$

Remark. The set of all parallelepipeds $M_1M_2M_3M_4$ of theorem 10 is identical with the set of all parallelepipeds inscribed in the ellipsoid $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1) = 4/3I_{000}$ and simultaneously circumscribed on the ellipsoid $\Phi(x,y,z,1;x,y,z,1) = 4/3I_{000}$.

3. The set $C_3^{(3)}$; $P(x,y,z) = \sum_{k+l+r\leq 3} a_{klr}x^k y^l z^r$.

I. Formulae of type (I) for $C_3^{(3)}$. To determine the formulae of type (I) for $C_3^{(3)}$ we suppose that the domain R is symmetrical with respect to the origin. Let us write

$$\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = -\frac{I_{000}}{\delta}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z\\ \xi & I_{200} & I_{110} & I_{101}\\ \eta & I_{110} & I_{020} & I_{011}\\ \zeta & I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} I_{200} & I_{110} & I_{101}\\ I_{110} & I_{020} & I_{011}\\ I_{101} & I_{011} & I_{002}\end{vmatrix}$$

$$\left(I_{klr} = \iiint x^k y^l z^r\,dx\,dy\,dz\right).$$

The determinant δ is positive, since it is equal to the discriminant of the positively definite form

$$I(u,v,w) = \iiint (ux+vy+wz)^2\,dx\,dy\,dz.$$

By the definition of the function φ:

(a) $\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\varphi(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)$,

(b) $I_{000}\,g(x,y,z)=\iiint g(\xi,\eta,\zeta)\varphi(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\varphi(x,y,z;u,v,w)$, where the linear function $g(x,y,z)=ax+by+cz$ is arbitrary and

$$u=\iiint xg\,dx\,dy\,dz,\quad v=\iiint yg\,dx\,dy\,dz,\quad w=\iiint zg\,dx\,dy\,dz,$$

(c) $\iiint\varphi^2(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=I_{000}\varphi(x,y,z;x,y,z)>0$ for $x^2+y^2+z^2>0$,

(d) The quadric surface $\varphi(x,y,z;x,y,z)=c$ $(c>0)$ is an ellipsoid with centre at the origin.

THEOREM 11. *The mechanical quadratures with a minimal number of terms for the set $C^{(3)}$ and the three-dimensional domain R are of the form*

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\sum_{i=1}^{6}\lambda_i P(x_i,y_i,z_i). \tag{8}$$

There exist infinitely many formulae of this type, depending on five arbitrary parameters. Formula (8) *is valid for every polynomial $P\in C_3^{(3)}$ if and only if the coordinates x_i,y_i,z_i of the points M_1, M_2, M_3 satisfy the equations*

$$\frac{1}{\varphi_{11}}+\frac{1}{\varphi_{22}}+\frac{1}{\varphi_{33}}=1,\qquad \varphi_{12}=0,\qquad \varphi_{13}=0,\qquad \varphi_{23}=0,$$

where $\varphi_{kr}=\varphi(x_k,y_k,z_k;x_r,y_r,z_r)$, and the points M_4, M_5, M_6 are symmetrical to the points M_1, M_2, M_3 respectively, with respect to the origin. The coefficients λ_i are defined by formulae

$$\lambda_i=\frac{I_{000}}{2\varphi(x_i,y_i,z_i;x_i,y_i,z_i)}\qquad (i\leqslant 6),$$

whence they are always positive.

It will be observed that the points $M_i(x_i,y_i,z_i)$ are vertices of an octahedron with triangular faces circumscribed on the ellipsoid $\varphi(x,y,z;x,y,z)=1$ in such a manner that its opposite vertices are symmetrical with respect to the origin.

II. Formulae of type (II) for $C_3^{(3)}$.

THEOREM 12. *For the set $C_3^{(3)}$ there exist infinitely many mechanical quadratures with a minimal number of terms and with equal coefficients. Under the hypothesis that the three-dimensional domain R is symmetrical with respect to the origin, they are all determined by formulae*

$$\iiint_R P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lambda\sum_{i=1}^{6}P(x_i,y_i,z_i).$$

In every formula of this type $\lambda=I_{000}/6$. The coordinates of the points M_1, M_2, M_3 satisfy the equations

$$\varphi_{11}=3,\qquad \varphi_{22}=3,\qquad \varphi_{33}=3,\qquad \varphi_{12}=0,\qquad \varphi_{13}=0,\qquad \varphi_{23}=0,$$

where $\varphi_{kr}=\varphi(x_k,y_k,z_k;x_r,y_r,z_r)$ and the coordinates of the points M_4, M_5, M_6 are defined by formulae

$$x_{i+3}=-x_i,\qquad y_{i+3}=-y_i,\qquad z_{i+3}=-z_i\qquad (i=1,2,3).$$

It will be observed that the points $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i\leqslant 6$, are vertices of an octahedron with triangular faces circumscribed on the ellipsoid $\varphi(x,y,z;x,y,z)=1$ and inscribed in the ellipsoid $\varphi(x,y,z;x,y,z)=3$ in such a manner that its opposite vertices are symmetrical with respect to the origin.

СОДЕРЖАНИЕ