ROZPRAWY MATEMATYCZNE

I. J. Nowiński, Z teorii dźwigarów cienkościennych o przekroju otwartym, obciążonych równomiernie, 1952, str. 1-48.

II. Z. Charzyński, Sur les fonctions univalentes bornées, 1953, str. 1-48.

III. W. Ślebodziński, Géométrie textile et les espaces à connexion affine, 1953, str. 1-34.

IV. A. Grzegorczyk, Some classes of recursive functions, 1953, str. 1-46.

V. S. Drobot and M. Warmus, Dimensional Analysis in sampling inspection of merchandise, 1954, str. 1-54.

VI. H. Steinhaus, Tablica liczb przetasowanych czterocyfrowych — Таблица перетасованных четырехзначных чисел — Table of shuffled four-digit numbers, 1954, str. 1-46.

VII. J. Nowiński, O pewnych charakterystycznych punktach przekrojów dźwigarów cienkościennych, 1954, str. 1-52.

POLSKA AKADEMIA NAUK · INSTYTUT MATEMATYCZNY

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY

KAROL BORSUK redaktor

ANDRZEJ MOSTOWSKI MARCELI STARK

STANISŁAW TURSKI

VII

JERZY NOWIŃSKI

O pewnych charakterystycznych punktach przekrojów dźwigarów cienkościennych

WARSZAWA 1954

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

COPYRIGHT 1954
by
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (Poland) Krakowskie Przedmieście 79

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced in any form, by mimeograph or any other means, without permission in writing from the publishers.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA 1954

Nakład 1130+160 Podpisano do druku 17. XI. 1954 r.
Ark. wyd. 3¾ druk. 3¼ Druk ukończono w grudniu 1954 r.
Papier druk. sat. kl. III gr. 80, B1. Zamówienie nr 713/54
Cena zł 7,50 F-5-19225

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Wstęp

Stosowanie w pierwszych okresach rozwoju lotnictwa uproszczonych i, co jest z tym często połączone, niedostatecznie dokładnych metod obliczeniowych powodowało przez długi czas brak jasnych i poprawnych poglądów na pracę konstrukcji cienkościennych w lotnictwie. Wiadomo bowiem, że zwykła teoria zginania i skręcania, taka jaką się rozwija w kursach wytrzymałości materiałów, prowadzi do błędnych wyników, gdy się ją stosuje do konstrukcji cienkościennych.

Przyczyn tego jest kilka. Najistotniejszą z nich jest lekkość i delikatność konstrukcji cienkościennych związana z cienkością i smukłością elementów składowych. Stąd wrażliwość tych konstrukcji na naprężenia lokalne, których wpływ pomija na ogół zwykła teoria zginania i skręcania, powstała w związku z wytrzymałością elementów masywnych; stąd zawsze zagrażająca bezpieczeństwu utrata stateczności nie tylko poszczególnych elementów jako całości, ale również pewnych ograniczonych obszarów konstrukcji i pewnych miejsc samych elementów. Zagadnienia tego zatem rodzaju, jak wprowadzenie sił skupionych, wpływ utwierdzenia itd., które nie odgrywają w istocie żadnej niemal roli w statycznych obliczeniach elementów masywnych, musiały zostać dokładnie rozważone w odniesieniu do konstrukcji cienkościennych.

Niemniej istotną rolę odegrał fakt, że elementy cienkościenne, jako szczególnie lekkie i racjonalne pod względem ukształtowania wytrzymałościowego, znalazły swe główne zastosowanie w konstrukcjach lotniczych; te zaś konstrukcje mają wiele cech im w szczególności właściwych (jak asymetria przekrojów, zbieżność, liczne wykroje) i są narażone na działanie specyficznych obciążeń, jak zginanie połączone ze skręcaniem, oraz na różnego rodzaju, często niebezpieczne dla całości konstrukcji, stany drgań, uderzeń, obciążeń zmiennych itd. Ta różnorodność czynników dynamicznych (obciążeń) oddziałujących na precyzyjną konstrukcję lotniczą, od której wymaga się niemal całkowitego bezpieczeństwa, była drugą ważną przyczyną powiększenia dokładności metod obliczeniowych i jak najbardziej szczegółowego wniknięcia w powstającą w konstrukcjach cienkościennych grę naprężeń. Zawiłość zjawisk oraz trudności natury matematycznej i, w większej jeszcze mierze, czysto rachunkowe, nie sprzyjały jednak szybkiemu wyjaśnieniu powstałych

zagadnień. Dopiero po zakończeniu ostatniej wojny ukazało się kilka prac, w których teoria konstrukcji cienkościennych, właściwie zaś teoria dźwigarów cienkościennych — o której dalej będzie wyłącznie mowa — została rozwinięta w sposób ścisły i dostatecznie ogólny. Z teorii tej nie zdołano jednak — ze względu na poprzednio wspomniane trudności — wyprowadzić wszystkich wniosków, które wyjaśniłyby w pełni zamieszanie w poglądach, panujące dotychczas wśród wielu statyków lotniczych. W szczególności odnosi się to do pożytecznych w codziennej praktyce konstruktorskiej pojęć środka ścinania i środka skręcania. Pojęcia środka ścinania i środka skręcania — właściwie zaś osi ścinania i osi skręcania, będących odpowiednimi miejscami geometrycznymi tych środków — odgrywają dość dużą rolę w teorii dźwigarów cienkościennych. Dotyczy to między innymi zagadnienia drgań skrętno-giętnych dźwigarów (skrzydłowych), dla których nie jest obojętny kształt i położenie tzw. *osi sprężystej* [1]); o tej osi zakłada się, że łączy ona właściwości osi ścinania (jeżeli w każdym przekroju dźwigara wypadkowa sił działających przechodzi przez oś ścinania, to następuje ugięcie dźwigara bez skręcania) z właściwościami osi skręcania przy czystym skręcaniu [2]). Tymczasem w wielu przypadkach stwierdzono, że założenie takie może być podane w wątpliwość. Podobne znaczenie ma kształt i położenie obu wymienionych linii w zjawiskach niestateczności prętów cienkościennych o przekroju otwartym [3]), w zagadnieniach dodatkowego wpływu skręcania na wielkość naprężeń i odkształceń dźwigarów cienkościennych itd. Dla dociekań teoretycznych nie może być również obojętny fakt, że konstruktorzy lotniczy szczególnie chętnie — zwłaszcza przy bardziej prymitywnych metodach obliczeń — posługują się pojęciem osi ścinania, czemu nie można się zresztą dziwić. Aczkolwiek bowiem z punktu widzenia ściślejszych teorii pojęcie to można uważać za niezbyt istotne, to jednak znajomość położenia osi ścinania pozwala na ocenę, jednym rzutem oka, wielkości momentów skręcających, wcale nieobojętnych np. dla obliczenia wytrzymałości skrzydeł.

Brak dokładnej definicji i analizy osi ścinania i skręcania oraz związana z tym brakiem niejasność poglądów na oba pojęcia wypływa nie tylko z trudności natury teoretycznej, lecz również z tego, że pojęcia te powstały i zakorzeniły się głęboko jeszcze w pierwszej, dość prymitywnej fazie obliczeń statycznych. W tej fazie wyznaczano naprężenia w dźwigarach skrzydłowych w założeniu, że utwierdzenie dźwigarów w kadłubie samolotu jest tzw. swobodne, i stosowano równocześnie wzory dla

[1]) Por. np. [1].

[2]) *Oś skręcania* jest miejscem geometrycznym punktów, dokoła których następuje obrót przekrojów poprzecznych w trakcie odkształceń dźwigara.

[3]) Por. podstawowe prace z tej dziedziny Własowa [12] i Kappusa [4].

naprężeń, obowiązujące ściśle tylko w szczególnym, nie mającym praktycznego znaczenia przypadku, gdy obciążenie działa na wolny koniec dźwigara.

Opierając się na tych dwóch przybliżonych założeniach wnioskowano przez ekstrapolację, że położenie osi ścinania zależy jedynie od geometrycznych własności przekrojów poprzecznych, a nie zależy od utwierdzenia dźwigara i rozmieszczenia obciążeń. Pogląd taki nie był w istocie niczym uzasadniony i jedynie na podstawie wyników doświadczeń można było przypuszczać, że w mniej dokładnych metodach obliczeń można go uważać za wystarczająco przybliżony. Ostatnio autor wykazał [8] ogólnie dla dźwigarów cienkościennych o przekroju dwuspójnym, że położenie środka ścinania w przekroju końcowym (na końcu wolnym) zależy od sposobu utwierdzenia drugiego końca dźwigara, a w innej pracy [7] podał w wątpliwość teoretyczne uzasadnienie samej definicji osi ścinania, tak jak się ją dotychczas formułuje.

Źródłem podobnych niejasności jest również pojęcie osi skręcania. Jak wiadomo, według twierdzenia C. Webera [11], środek skręcania końcowego przekroju dźwigara wspornikowego obciążonego parą sił działającą w tym przekroju (czyli poddanego czystemu skręcaniu), gdy utwierdzenie dźwigara jest sztywne, pokrywa się ze środkiem ścinania tego przekroju. Twierdzenie to było uważane za słuszne również poza granicami swej ważności, bez dostatecznego uzasadnienia. Twierdzono zatem m. in., że położenie i kształt osi skręcania (którą traktowano bez żadnych wątpliwości jako linię prostą) nie zależą od rodzaju utwierdzenia i obciążenia i że oś ta pokrywa się z osią ścinania (stąd pojęcie jednej tylko osi — sprężystej). W kilku pracach, [3], [5]-[9], wykazana została niesłuszność takiego poglądu; udowodniono również, że oś skręcania nie przedstawia w ogólności linii prostej oraz że położenie jej zależy nie tylko od rodzaju utwierdzenia, ale ponadto od rodzaju a nawet wielkości obciążenia. W pracach tych wskazano na fakt, że aczkolwiek w przekroju końcowym, obciążonym, istnieje punkt, który ma cechy przypisywane środkowi ścinania, to jednak przyłożenie siły w tym punkcie powoduje obrót wszystkich przekrojów poprzecznych, z wyjątkiem jedynie samego przekroju obciążanego (i oczywiście przekroju utwierdzonego). Taki wniosek jest naturalnie teoretycznie sprzeczny z tradycyjnym poglądem na rolę osi ścinania, chociaż trudno jest jeszcze określić jego znaczenie praktyczne (jakby wynikało z obliczonego w niniejszej pracy przykładu — raczej niewielkie). W każdym jednak razie zwęża on jeszcze bardziej granice stosowalności dotychczasowej definicji i przypisuje środkowi ścinania znaczenie raczej lokalne.

Zauważmy, że dotychczas mówiliśmy o środku ścinania przekroju końcowego i o osi skręcania tylko w takim przypadku, gdy obciążenie

działa w płaszczyźnie przekroju końcowego. Natomiast pełne wyjaśnienie zagadnienia wymagałoby rozpatrzenia wpływu sił działających w przekrojach pośrednich (a nie końcowych). Takie jednak sformułowanie napotyka na bardzo znaczne trudności natury rachunkowej, zwłaszcza gdy rzecz dotyczy konkretnych przykładów, a nie rozumowań ogólnych. Z tego względu w niniejszej pracy ograniczony został zakres uogólnienia dotychczasowych wniosków, jakkolwiek nie ma żadnych zasadniczych trudności do całkowitego wyjaśnienia istniejących wątpliwości. Nałożone ograniczenie polega przede wszystkim na tym, że rozpatrzono działanie jednej tylko siły przyłożonej w przekroju pośrednim (zresztą dowolnym), a nie działanie dowolnego obciążenia. Dla tego przypadku podane zostały wzory ogólne dla współrzędnych środka ścinania przekroju obciążonego w założeniu, że przekrój dźwigara jest dwuspójny, a utwierdzenie sztywne.

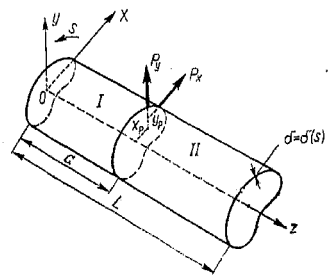
Aby pokonać znaczne trudności rachunkowe występujące przy obliczaniu konkretnych przykładów, przyjęto — bez uszczerbku dla ścisłości wniosków — że pokrycie przenosi jedynie naprężenia ścinające (jest to zatem tzw. pokrycie „niepracujące"); natomiast przyjęto równocześnie, że dźwigar ma wzmocnienia podłużne (listwy, pasy), które przejmują całkowicie istniejące naprężenia normalne. W tym założeniu przypomniane zostały poprzednio wyprowadzone wzory dla dźwigara o przekroju trapezowym niesymetrycznym [7] i przeprowadzone efektywne obliczenie dla przekroju prostokątnego mającego jedną tylko oś symetrii [4]). Przykład ten wykazał (jak oczywiście powinno być), że środek ścinania przekroju końcowego nie pokrywa się w ogólności ze środkiem skręcania tego przekroju i zespolenie obu punktów następuje dopiero wówczas, gdy obciążenie dźwigara przeradza się w tzw. *skręcanie czyste*. Udało się również stwierdzić, że przy utwierdzeniu sztywnym oś skręcania nie przedstawia w ogólności linii prostej i że położenie jej zależy na ogół od rodzaju i wielkości obciążenia. Poza tym okazało się, że położenie środka ścinania przekroju końcowego jest zależne od długości dźwigara; dla dźwigarów bardzo krótkich (właściwie — bardzo „krępych") odległość środka ścinania od środka ciężkości przekroju może wzrosnąć trzykrotnie w porównaniu z tą samą odległością dla dźwigarów wysmukłych. Charakterystyczne jest przy tym, że w miarę zmniejszania się długości dźwigara środek ścinania przesuwa się po krzywej, pokrywającej się z osią skręcania wyznaczoną dla przypadku skręcania czystego.

[4]) Asymetria przekroju prostokątnego polega na nierównych polach przekroju pasów.

1. Wzory podstawowe

Rozpatrzmy dźwigar cienkościenny walcowy utwierdzony sztywno jednym końcem w podłożu sztywnym. Załóżmy, że przekroje są nieodkształcalne w swych płaszczyznach i dwuspójne (tzn. zamknięte i bez przegród) oraz że mają co najwyżej jedną oś symetrii. Przekrój dźwigara jest uważany za niezmienny, co oznacza, że grubość δ ścianek w punktach położonych na tej samej tworzącej jest stała.

Początek O prawoskrętnego układu współrzędnych prostokątnych x, y, z umieszczamy w środku ciężkości przekroju podporowego. Za oś z przyjmujemy oś podłużną dźwigara, za dwie pozostałe osie (x i y) — główne (środkowe) osie bezwładności przekroju podporowego (rys. 1). Położenie dowolnego punktu dźwigara będziemy określali albo współrzędnymi x, y i z, albo współrzędnymi s i z, gdzie s oznacza odległość mierzoną wzdłuż konturu przekroju od pewnego punktu początkowego (leżącego na tworzącej obranej za początkową dla wszystkich przekrojów). Po przekształceniu dźwigara dowolny jego punkt ulegnie przemieszczeniu o składowych $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ i $\bar{\zeta}$, które są w ogólności funkcjami położenia.



Rys. 1

Powinny to być funkcje ciągłe współrzędnych, gdyż wszelkie ich skoki byłyby z punktu widzenia fizykalnego równoważne rozdarciu lub rozwarstwieniu materiału.

Jak wyjaśniono na innym miejscu [5], składowe przemieszczenia $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ i $\bar{\zeta}$ odpowiednio w kierunku osi x, y i z są przedstawione przez następujące wyrażenia:

$$\bar{\xi} = \xi(z) - \vartheta(z)y, \tag{1.1}$$

$$\bar{\eta} = \eta(z) + \vartheta(z)x, \tag{1.2}$$

$$\bar{\zeta} = -\frac{d\xi}{dz}x - \frac{d\eta}{dz}y + \zeta. \tag{1.3}$$

W powyższych wzorach $\xi(z)$ i $\eta(z)$ oznaczają przesunięcia (postępowe) w kierunku osi x i y, jednakowe dla wszystkich punktów przekroju, $\vartheta(z)$ zaś jest kątem, o który dany przekrój obraca się w swej płaszczyźnie. Symbol ζ lub wyraźniej: bądź $\zeta(x,y,z)$, bądź $\zeta(s,z)$, jest funkcją obrazującą zakrzywienie czyli spaczenie przekroju.

Z założenia nieodkształcalności przekrojów w swych płaszczyznach oraz nader małej wartości liczby Poissona wynika, że błonowy stan naprężenia panujący w ściankach (w powłoce) dźwigara sprowadza się do dwóch składowych. Składowymi tymi są: naprężenie normalne σ_z, lub krócej σ, w kierunku osi podłużnej dźwigara oraz naprężenie ścinające τ.

Naprężenia σ i τ w postaci uzależnionej od „składowych" przemieszczenia ξ, η, ζ i ϑ przedstawiają następujące wzory [5]):

$$\sigma = E\left(-\frac{d^2\xi}{dz^2}x - \frac{d^2\eta}{dz^2}y + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right), \tag{1.4}$$

$$\tau = G\left(\frac{d\vartheta}{dz}r + \frac{\partial\zeta}{\partial s}\right), \tag{1.5}$$

w których r oznacza długość prostopadłej opuszczonej ze środka ciężkości na styczną do konturu w dowolnym jego punkcie. Załóżmy, że siły zewnętrzne działające na dźwigar są prostopadłe do jego osi podłużnej. Wówczas równowagę napięć zewnętrznych panujących w ściankach dźwigara określa równanie rzutów sił na kierunek tworzącej [6])

$$\delta\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial(\tau\sigma)}{\partial s} = 0. \tag{1.6}$$

Równanie to po uwzględnieniu związków (1.4) i (1.5) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{G}{E\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s}\delta\right) + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + \frac{G}{E\delta}\cdot\frac{d(\delta r)}{ds}\cdot\frac{d\vartheta}{dz} - \frac{d^3\xi}{dz^3}x - \frac{d^3\eta}{dz^3}y = 0. \tag{1.7}$$

Jest to równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu względem zmiennej $\zeta(s,z)$, zawierające nadto trzy funkcje $\xi(z)$, $\eta(z)$ i $\vartheta(z)$. W ten sposób zagadnienie zasadnicze zostało sprowadzone do odnalezienia czterech nieznanych funkcji $\zeta(s,z)$, $\xi(z)$, $\eta(z)$ i $\vartheta(z)$, spełniających równanie różniczkowe (1.7) oraz pewne warunki dodatkowe, o których dalej będzie mowa.

Rozwiązanie tak sformułowanego zadania na wartości brzegowe nastręcza znaczne trudności matematyczne, może jednak być uzyskane w sposób następujący [7]):

[5]) [9], ust. 4 i następne. [6]) [9], ust. 5. [7]) [9], ust. 6 i następne.

Przedstawmy funkcje ξ, η, ζ i ϑ, które spełniają równanie różniczkowe (1.7) oraz wszystkie przepisane zadaniem warunki dodatkowe, w postaci

$$\xi = \xi^0 + \sum^{\infty}\xi^i, \tag{1.8.1}$$

$$\eta = \eta^0 + \sum^{\infty}\eta^i, \tag{1.8.2}$$

$$\zeta = \zeta^0 + \sum^{\infty}\zeta^i, \tag{1.8.3}$$

$$\vartheta = \vartheta^0 + \sum^{\infty}\vartheta^i. \tag{1.8.4}$$

Tutaj wielkości oznaczone wskaźnikiem 0 nazwiemy *przemieszczeniami związanymi z układem naprężeń według teorii „inżynierskiej"*; odpowiednio, wielkości oznaczone wskaźnikiem i nazwiemy *przemieszczeniami związanymi z i-tym układem naprężeń samozrównoważonych* (znak $\sum^{\infty}$ przedstawia sumę, w ogólności nieskończoną, tych przemieszczeń).

Jeżeli wyrażenia (1.8) podstawić do wzorów (1.4) i (1.5), to otrzymuje się

$$\sigma = \sigma^0 + \sum^{\infty}\sigma^i, \tag{1.9.1}$$

$$\tau = \tau^0 + \sum^{\infty}\tau^i, \tag{1.9.2}$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$\sigma^0 = E\left(-\frac{d^2\xi^0}{dz^2}x - \frac{d^2\eta^0}{dz^2}y + \frac{\partial\zeta^0}{\partial z}\right), \tag{1.10.1}$$

$$\tau^0 = G\left(\frac{d\vartheta^0}{dz}r + \frac{\partial\zeta^0}{\partial s}\right); \tag{1.10.2}$$

$$\sigma^i = G\left(-\frac{d^2\xi^i}{dz^2}x - \frac{d^2\eta^i}{dz^2}y + \frac{\partial\zeta^i}{\partial z}\right), \tag{1.11.1}$$

$$\tau^i = G\left(\frac{d\vartheta^i}{dz}r + \frac{\partial\zeta^i}{\partial s}\right). \tag{1.11.2}$$

Załóżmy teraz, że:

1° Naprężenia oznaczone wskaźnikiem 0 równoważą całkowicie (są statycznie równoważne) obciążenie zewnętrzne. W związku z tym są one nazywane dalej *naprężeniami obliczonymi według teorii elementarnych* („inżynierskich"), gdyż postać tych wzorów — będących na ogół wzo-

rami przybliżonymi — została zapożyczona z elementarnych teorii wytrzymałości materiałów (wzór Bredta dla czystego skręcania i wzór elementarny dla zginania).

2° Naprężenia oznaczone wskaźnikiem i tworzą samozrównoważone, czyli tzw. *zerowe* układy naprężeń, których siła wypadkowa i moment wypadkowy są równe zeru. Zadaniem tych naprężeń jest takie uzupełnienie naprężeń „inżynierskich", aby naprężenia wypadkowe spełniały wszystkie warunki dodatkowe zadania, a przemieszczenia wypadkowe były ze sobą zgodne (tzn. aby nie wywoływały ewentualnych poślizgów wewnętrznych i rozdarcia materiału ścianek dźwigara).

Dokładna analiza zagadnienia doprowadza do następujących wzorów dla naprężeń (wypadkowych) w ściankach dźwigara [8]):

$$(1.12.1)\qquad \sigma = \frac{M_x(z)}{I_x}\,y - \frac{M_y(z)}{I_y}\,x + \frac{E}{G}\sum^{\infty}\left(-A^i x - B^i y + \zeta_s^i\right)\frac{d}{dz}\left[A^i Q_x(z) + B^i Q_y(z) + C^i M_z(z) + G Z^i\right],$$

$$(1.12.2)\qquad \tau = \frac{Q_x(z)}{\delta I_y}\,F_s^{Ix} + \frac{Q_y(z)}{\delta I_x}\,F_s^{Iy} + \frac{M_z(z)}{2F\delta} + G\sum^{\infty}\left(C^i r + \frac{d\zeta_s^i}{ds}\right)Z^i.$$

W powyższych wzorach $Q_x(z)$ i $Q_y(z)$ oznaczają składowe siły poprzecznej w dowolnym przekroju z, a $M_x(z)$, $M_y(z)$ i $M_z(z)$ składowe momentu sił względem środka ciężkości tego przekroju.

Założymy raz na zawsze, że obciążenie dźwigara stanowi jedna siła $P(P_x, P_y)$ działająca w przekroju $z=a$, prostopadła do osi podłużnej i przyłożona w punkcie (x_p, y_p, a). Wówczas jest dla $z \leqslant a$

$$(1.13.1)\qquad Q_x = P_x, \qquad Q_y = P_y,$$

$$(1.13.2)\qquad M_x = -P_y(a-z), \qquad M_y = P_x(a-z), \qquad M_z = P_y x_p - P_x y_p.$$

Wyjaśnimy teraz kolejno inne oznaczenia użyte we wzorach (1.12) [9]). Przede wszystkim więc znane symbole I_x i I_y przedstawiają momenty bezwładności (główne i środkowe) odpowiednio względem osi przekroju równoległych do osi x i y; symbol F oznacza pole zawarte wewnątrz konturu przekroju. Funkcje ζ_s^i spełniają następujące równanie różniczkowe:

$$(1.14)\qquad \frac{G}{E\delta}\cdot\frac{d}{ds}\left[\delta\left(C^i r + \frac{d\zeta_s^i}{ds}\right)\right] + k_i^2\left(-A^i x - B^i y + \zeta_r^i\right) = 0,$$

[8]) [9], wzory (10.1.1) i (10.1.2).
[9]) [9], ust. 7, 9 i 10.

w którym A^i, B^i, C^i i k_i^2 oznaczają nieznane parametry. Dla wyznaczenia tych parametrów dysponujemy między innymi następującymi równaniami warunkowymi (w których występują w postaci niejawnej również obie stałe całki ogólnego równania (1.14)):

$$(1.15.1)\qquad A^i I_y - \oint \zeta_s^i\,\delta x\,ds = 0,$$

$$(1.15.2)\qquad B^i I_x - \oint \zeta_s^i\,\delta y\,ds = 0,$$

$$(1.15.3)\qquad C^i \oint \delta r^2 ds + \oint \frac{d\zeta_s^i}{ds}\,\delta r\,ds = 0,$$

$$(1.15.4)\qquad \zeta_s^i(0) = \zeta_s^i(S),$$

$$(1.15.5)\qquad \left[\delta\left(C^i r + \frac{d\zeta_s^i}{ds}\right)\right]_{s=0} = \left[\delta\left(C^i r + \frac{d\zeta_s^i}{ds}\right)\right]_{s=S}.$$

Tutaj S oznacza całkowitą długość konturu przekroju, a symbol $\oint$ całkę krzywoliniową wzdłuż tego konturu (oczywiście zamkniętą).

Wobec tego, że całkę ogólną równania niejednorodnego (1.14) można przedstawić w postaci

$$(1.16)\qquad \zeta_s^i = P^i\zeta^{i1}(s) + Q^i\zeta^{i2}(s) + A^i f^i(s) + B^i g^i(s) + C^i h^i(s),$$

gdzie ζ^{i1} i ζ^{i2} przedstawiają całki szczególne odpowiedniego równania jednorodnego, a ostatnie trzy wyrazy — całkę szczególną równania (1.14), więc z układu równań (1.15) można wyznaczyć cztery z pięciu stałych P^i, Q^i, A^i, B^i i C^i w zależności od jednej z nich. Poza tym warunek, aby układ (1.15) miał rozwiązanie różne od zera, doprowadza do równania charakterystycznego dla wyznaczenia wartości parametru k_i^2 (w ogólnym przypadku — nieskończenie wielu tych wartości).

Dla obliczania funkcji $Z^i(z)$ dysponujemy następującym równaniem różniczkowym:

$$(1.17)\qquad \frac{d^2 Z^i}{dz^2} - k_i^2 Z^i + \frac{1}{G}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\left[A^i Q_x(z) + B^i Q_y(z) + C^i M_z(z)\right] = 0.$$

Po tych wyjaśnieniach pozostaje jeszcze określić we wzorach (1.12) symbole F_s^{Ix} i F_s^{Iy}. Wartości ich są następujące:

$$(1.18.1)\qquad F_s^{Ix} = \frac{1}{2F}\oint S_y r\,ds - S_y,$$

$$(1.18.2)\qquad F_s^{Iy} = \frac{1}{2F}\oint S_x r\,ds - S_x,$$

gdzie przyjęto

(1.19.1) $$S_x = \int_0^s \delta y \, ds,$$

(1.19.2) $$S_y = \int_0^s \delta x \, ds.$$

W dalszych rozważaniach ponadto będą użyteczne wyrażenia dla składowej przemieszczenia całkowitego w kierunku osi z oraz dla kąta skręcenia. Przyjmują one następującą postać w przypadku, gdy, jak to założyliśmy, na dźwigar działa jedna tylko siła $P(P_x, P_y)$ [10]):

(1.20) $$\zeta = -\frac{1}{E}\left(\frac{P_x x}{I_y} + \frac{P_y y}{I_y}\right)\left(az - \frac{z^2}{2}\right) + \frac{1}{G}\sum^{\infty}\left(-A^i x - B^i y + \zeta_s^i\right)\left(A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z + GZ^i\right) - Kx - Ly,$$

(1.21) $$\vartheta = \frac{1}{2GF}\left(\frac{P_x \Pi_x}{I_y} + \frac{P_y \Pi_y}{I_x} + \frac{M_z \Pi}{2F}\right) z + \sum^{\infty} C^i \int_0^z Z^i dz.$$

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia:

(1.22.1) $$\Pi_x = \oint \frac{F_s^{Wx}}{\delta} ds,$$

(1.22.2) $$\Pi_y = \oint \frac{F_s^{Wy}}{\delta} ds,$$

(1.22.3) $$\Pi = \oint \frac{ds}{\delta};$$

K i L oznaczają pewne wielkości stałe.

[10]) [9], ust. 8 i 9. Oczywiście, wzory (1.20) i (1.21) w pełnym swym brzmieniu są ważne jedynie dla odcinka dźwigara, dla którego jest $0 \leqslant z \leqslant a$. Dla odcinka $a < z \leqslant L$ znikają w tych wzorach wyrazy zależne od P_x i P_y (oraz od M_z) i ulegają zmianie: postać funkcji Z^i oraz stałe K i L (por. dalej podane wzory (2.6)-(2.10)).

2. Dźwigar obciążony siłą pojedynczą

Niech na dźwigar działa jedna siła $P(P_x, P_y)$ przyłożona w punkcie (x_p, y_p, a). Przekrój $z = a$ dzieli dźwigar na dwie części: na część bliższą miejsca utwierdzenia, którą oznaczymy symbolem I (rys. 1) i na część bliższą końca swobodnego, którą oznaczymy symbolem II. Rozetnijmy w myśli dźwigar na te właśnie części I i II. Wtedy, dla zachowania równowagi, należy w płaszczyźnie podziału przyłożyć dwa zbiory układów samozrównoważonych: jeden działający na część I i drugi działający na część II. Działanie obu tych układów ma oczywiście zastąpić wzajemne oddziaływanie obu oddzielonych części, przy czym zarówno przemieszczenia obu części, jak i naprężenia normalne powinny być w płaszczyźnie dokonanego rozcięcia wzajemnie równe, aby faktycznie istniejąca ciągłość konstrukcji nie doznała uszczerbku. Zatem w płaszczyźnie dokonanego rozcięcia powinno być (dla $z = a$)

(2.1) $$\sigma^{\mathrm{I}} \equiv \sigma^{\mathrm{II}},$$

(2.2) $$\zeta^{\mathrm{I}} \equiv \zeta^{\mathrm{II}}.$$

Część I dźwigara znajduje się w takich warunkach, jak dźwigar utwierdzony sztywno jednym końcem i na końcu wolnym obciążony siłą $P(P_x, P_y)$ oraz zbiorem układów samozrównoważonych. Wiadomo, że utwierdzenie sztywne można zastąpić utwierdzeniem swobodnym, jeżeli w przekroju utwierdzonym przyłożyć zbiór układów samozrównoważonych, które sprowadzą do zera spaczenie przekroju utwierdzonego. W danym więc razie w powłoce części I działają dwa układy naprężeń zrównoważonych, które można zastąpić jednym układem, byleby spełniał on podane wyżej warunki brzegowe (2.1) i (2.2) w miejscu przecięcia oraz zrozumiały warunek brzegowy w przekroju utwierdzonym:

(2.3) $$\zeta^{\mathrm{I}}(0) \equiv 0.$$

Układ naprężeń samozrównoważonych, występujący w części II dźwigara, niezależnie od spełnienia warunków (2.1) i (2.2) w miejscu przecięcia powinien spełniać następujący warunek brzegowy w przekroju $z = L$:

(2.4) $$\sigma^{\mathrm{II}}(L) \equiv 0.$$

Warunek ten ustala, że przekrój końcowy dźwigara jest wolny od działania sił zewnętrznych równoległych do osi z, co odpowiada przyjętym poprzednio założeniom.

Rozpatrzymy teraz kolejno naprężenia i przemieszczenia w obu częściach dźwigara.

Część I. Ze wzoru (1.12.1) wynika, że w części I dźwigara panują następujące naprężenia normalne:

$$\sigma^{\mathrm{I}} = -\left(\frac{P_x x}{I_y} + \frac{P_y y}{I_x}\right)(a-z) + \sum^{\infty}(-A^i x - B^i y + \zeta_s^i)\frac{dZ^{\mathrm{I}i}}{dz}. \tag{2.5}$$

Odpowiednie przemieszczenia całkowite podłużne ζ^{I} i kąt skręcenia ϑ^{I} znajdujemy ze wzorów (1.20) i 1.21). Są one równe

$$\zeta^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{E}\left(\frac{P_x x}{I_y} + \frac{P_y y}{I_x}\right)\left(az - \frac{z^2}{2}\right) + \tag{2.6}$$

$$+\frac{1}{G}\sum^{\infty}(-A^i x - B^i y + \zeta_s^i)(A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z + Z^{\mathrm{I}i}) - K^{\mathrm{I}} x - L^{\mathrm{I}} y,$$

$$\vartheta^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2GF}\left(\frac{P_x \Pi_x}{I_y} + \frac{P_y \Pi_x}{I_x} + \frac{M_z \Pi}{2F}\right) z + \sum^{\infty} C^i \int_0^z Z^{\mathrm{I}i} dz. \tag{2.7}$$

Część II. Dla części II dźwigara otrzymujemy kolejno

$$\sigma^{\mathrm{II}} = E\sum^{\infty}(-A^i x - B^i y + \zeta_s^i)\frac{dz^{\mathrm{II}i}}{dz}, \tag{2.8}$$

$$\zeta^{\mathrm{II}} = \sum^{\infty}(-A^i x - B^i y + \zeta_s^i) Z^{\mathrm{II}i} - K^{\mathrm{II}} x - L^{\mathrm{II}} y, \tag{2.9}$$

$$\vartheta^{\mathrm{II}} = \sum^{\infty} C^i \int_0^z Z^{\mathrm{II}i} dz + \vartheta^{\mathrm{I}}(a). \tag{2.10}$$

Znaczenie symboli użytych we wzorach (2.5)-(2.10) jest zrozumiałe na podstawie poprzednio podanych wyjaśnień. Wielkości A^i, B^i, C^i oraz ζ_s^i są jednakowe dla obu części dźwigara, gdyż ma on z założenia stały przekrój, a wymienione wielkości są zależne jedynie od cech geometrycznych przekroju.

Powróćmy teraz do równania różniczkowego (1.17), które służy do wyznaczania funkcji Z^i. W danym razie przyjmuje on postać

$$\frac{d^2 Z^i}{dz^2} - k_i^2 Z^i = 0 \tag{2.11}$$

i jego całką ogólną jest wyrażenie

$$Z^i = R^i e^{k_i z} + S^i e^{k_i z}, \tag{2.12}$$

w którym R^i i S^i oznaczają stałe całkowania.

Warunek (2.4) po dłuższych przekształceniach i uwzględnieniu pewnych związków, których omówienie pominiemy [11]), można zastąpić następującym warunkiem:

$$\left[\frac{dz^{\mathrm{II}i}}{dz}\right]_{z=L} = 0. \tag{2.13}$$

Wobec tego uwzględniając (2.12) otrzymujemy

$$S^{\mathrm{II}i} = e^{2k_i L} R^{\mathrm{II}i}, \tag{2.14}$$

skąd

$$Z^{\mathrm{II}i} = R^{\mathrm{II}i}(e^{k_i z} + \beta^i e^{-k_i z}), \tag{2.15}$$

gdzie

$$\beta^i = e^{2k_i L}. \tag{2.16}$$

Zamiast warunku (2.3) otrzymuje się, również po dłuższych przekształceniach, warunek

$$[Z^{\mathrm{I}i}]_{z=0} = -\frac{A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z}{G}. \tag{2.17}$$

Uwzględniając (2.12) otrzymujemy zatem dla części I dźwigara

$$Z^{\mathrm{I}i} = R^{\mathrm{I}i}(e^{k_i z} - e^{-k_i z}) - \frac{A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z}{G} e^{-k_i z}. \tag{2.18}$$

W podobny sposób [12]) daje się wykazać, że warunki (2.1) i (2.2) można zastąpić następującymi warunkami:

$$\left[\frac{dZ^{\mathrm{I}i}}{dz}\right]_{z=a} = \left[\frac{dZ^{\mathrm{II}i}}{dz}\right]_{z=a}, \tag{2.19}$$

$$[Z^{\mathrm{I}i}]_{z=a} = [Z^{\mathrm{II}i}]_{z=a} - \frac{A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z}{G}. \tag{2.20}$$

[11]) Znaleźć je można w pracy [9].
[12]) Tutaj szczegółowo nie przedstawiony.

Z tych warunków przy uwzględnieniu związków (2.15) i (2.18) można określić wartości stałych całkowania $R^{\mathrm{I}i}$ i $R^{\mathrm{II}i}$. Pomijając przekształcenia zapisujemy jedynie ich rezultaty końcowe:

$$R^{\mathrm{I}i} = \frac{A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z}{G} \cdot \frac{e^{k_i a} - \beta^i e^{-k_i a} - 2}{2(1+\beta^i)}, \tag{2.21.1}$$

$$R^{\mathrm{II}i} = \frac{A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z}{G} \cdot \frac{e^{k_i a} + e^{-k_i a} - 2}{2(1+\beta^i)}. \tag{2.21.2}$$

Dla dalszych rozważań jest niezbędna znajomość wyrażeń dla kąta skręcania obu części, na które podzielono dźwigar. Wypiszemy te wyrażenia *explicite*, podstawiając do wzorów (2.7) i (2.10) odpowiednie wartości funkcyj Z^i przy uwzględnieniu związków (2.15), (2.18) i (2.21). Otrzymuje się wówczas

$$\begin{aligned} \vartheta^{\mathrm{I}} = {} & \frac{1}{2GF}\left(\frac{P_x H_x}{I_y} + \frac{P_y H_y}{I_x} + \frac{M_z H}{2F}\right) z + \\ & + \frac{1}{G}\sum^{\infty} \frac{C^i}{k^i}\left[\frac{e^{k_i a} + \beta^i e^{-k_i a} - 2}{2(1+\beta^i)}(e^{k_i z} + e^{-k_i z} - 2) + (e^{-k_i z} - 1)\right](A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z), \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \vartheta^{\mathrm{II}} = {} & \vartheta^{\mathrm{I}}(a) + \\ & + \frac{1}{G}\sum^{\infty} \frac{C^i}{k_i} \cdot \frac{e^{k_i a} + e^{-k_i a} - 2}{2(1+\beta^i)}(e^{k_i z} - \beta^i e^{-k_i z} + e^{k_i a} + \beta^i e^{-k_i a})(A^i P_x + B^i P_y + C^i M_z). \end{aligned} \tag{2.23}$$

3. Środek ścinania przekroju pośredniego

Nazwiemy *środkiem ścinania* przekroju, w którym działa siła P prostopadła do osi podłużnej dźwigara, taki punkt tego przekroju, że gdy siła przechodzi przez ten punkt, przekrój omawiany nie ulega obrotowi w swej płaszczyźnie; zakładamy ponadto, że na dźwigar nie działają żadne inne siły poza siłą P. W danym przypadku siła P działa w przekroju $z=a$. Aby przekrój ten nie ulegał obrotowi w swej płaszczyźnie, powinno być

$$\vartheta^{\mathrm{I}}(a) = 0. \tag{3.1}$$

Z tego warunku można wyznaczyć współrzędne $x_P = x_{SP}$ i $y_P = y_{SP}$ punktu przyłożenia siły, gdy przekrój $z=a$ nie ulega obrotowi, tzn. współrzędne środka ścinania tego przekroju.

Zanim do tego przystąpimy, zauważmy, że gdy jest spełniony warunek (3.1), to ze wzorów (2.22) i (2.23) nie wynika bezpośrednio, że pozostałe przekroje części I i II dźwigara (z wyjątkiem, oczywiście, przekroju utwierdzonego, jak to założyliśmy) nie ulegają obrotowi. Przeciwnie, wyrażenie dla ϑ^{I} staje się co prawda równe zeru dla $z=a$, ale nie ma powodu do przypuszczenia, że ϑ^{I} i ϑ^{II} są tożsamościowo równe zeru dla każdej wartości z zawartej odpowiednio w przedziałach $0<z<a$ oraz $a<z\leqslant L$ [13]).

1. Przyjmijmy teraz, że część I dźwigara została odizolowana całkowicie od części II (która wobec tego jakby nie istnieje) i że utwierdzenie części I jest swobodne. Wówczas układy naprężeń samozrównoważonych (których zadaniem jest spełnienie warunków (2.1)-(2.3), w danym razie nieistotnych) znikają. Ze wzoru (2.5) wynika, że warunek (2.4), w którym długość a odgrywa rolę długości L, jest w tym przypadku spełniony sam przez się. Aby był spełniony warunek (3.1), powinno być

$$P_x\left(\frac{H_x}{I_y} - \frac{H}{2F}\, y_P\right) + P_y\left(\frac{H_y}{I_x} + \frac{H}{2F}\, x_P\right) = 0. \tag{3.2}$$

[13]) Podobny wniosek sformułowaliśmy już przy innej okazji w pracy [7].

Ten warunek nie jest zależny od długości dźwigara (tutaj równej a). Wynika z niego, że współrzędne punktu przyłożenia siły są równe

$$x_P = x^0_{SP,L} = -\frac{2F\Pi_y}{\Pi I_x}, \tag{3.3.1}$$

$$y_P = y^0_{SP,L} = \frac{2F\Pi_x}{\Pi I_y}, \tag{3.3.2}$$

jeżeli przekrój obciążony nie ulega obrotowi bez względu na wielkość i kierunek siły $P(P_x, P_y)$, jak być powinno. Wzory (3.3) przedstawiają znane wzory dla środka ścinania przekrojów cienkościennych dwuspójnych, stosowane w praktyce, (pozornie) jawnie nie uzależnione od położenia przekroju obciążonego [14]). Widzimy stąd, że aby można było te wzory uważać za teoretycznie ścisłe, trzeba utwierdzenie przyjąć za swobodne i obciążenie za działające na końcu wolnym. Jeżeli utwierdzenie jest swobodne, ale siła działa w przekroju pośrednim, to wzory (3.3) przestają być ścisłe. Nie można zatem wnioskować, jak to się często czyni w praktyce, że ponieważ wzory (3.3) nie zależą jawnie od długości dźwigara, to wzory te przedstawiają współrzędne środków ścinania przekrojów pośrednich (a nie samego tylko przekroju końcowego, obciążonego).

Ostatecznie zatem powiemy, że współrzędne $x^0_{SP,L}$ i $y^0_{SP,L}$ według wzorów (3.3) przedstawiają współrzędne środka ścinania przekroju *obciążonego*, gdy siła działa na wolnym końcu dźwigara swobodnie utwierdzonego.

2. Załóżmy teraz, że część II dźwigara nie istnieje, lecz utwierdzenie części I jest sztywne. Oznacza to, że rozpatrujemy dźwigar sztywno utwierdzony i obciążony na wolnym końcu siłą $P(P_x, P_y)$.

Wówczas na całej długości dźwigara (w danym razie równej a) zachowuje ważność wzór (2.22), w którym wyrazy określające działanie układów samozrównoważonych nie znikają. Ponieważ w danym razie długość dźwigara wynosi a, to z uwagi na warunek (2.4) związek (2.16) przyjmuje postać

$$\beta^i = e^{2k_i a}. \tag{3.4}$$

[14]) Jeżeli oznaczenia (1.22) zastąpić przez (1.18) i (1.19), to wzory (3.3) przyjmują postać ogólną, podaną — o ile wiadomo — po raz pierwszy w pracy [4]. Wskaźnik 0 w symbolach $x^0_{SP,L}$ i $y^0_{SP,L}$ oznacza, że rozważane utwierdzenie jest swobodne; wskaźnik L oznacza, że środek ścinania wyznaczamy w przekroju obciążonym (w danym razie na końcu dźwigara o długości, powiedzmy, nie a, lecz L).

Stąd zamiast (2.22) otrzymujemy wzór

$$\vartheta^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2GF}\left(\frac{P_x\Pi_x}{I_y} + \frac{P_y\Pi_y}{I_x} + \frac{M_z\Pi}{2F}\right)z + \\ + \frac{1}{G}\sum^{\infty}\frac{C^i}{k_i}\cdot\frac{1-e^{k_i z}-\beta^i(1-e^{-k_i z})}{1-\beta^i}(A^iP_x + B^iP_y + C^iM_z), \tag{3.5}$$

z którego łatwo obliczyć współrzędne środka ścinania przekroju obciążonego

$$x_{SP,a} = \frac{\dfrac{\Pi_y a}{2FI_x} + \sum^{\infty}\dfrac{B^iC^i(1-\beta^i)}{k_i(1+\beta^i)}}{\dfrac{\Pi a}{4F^2} + \sum^{\infty}\dfrac{(C^i)^2(1-\beta^i)}{k_i(1+\beta^i)}}, \tag{3.6.1}$$

$$y_{SP,a} = \frac{\dfrac{\Pi_x a}{2FI_y} + \sum^{\infty}\dfrac{A^iC^i(1-\beta^i)}{k_i(1+\beta^i)}}{\dfrac{\Pi a}{4F^2} + \sum^{\infty}\dfrac{(C^i)^2(1-\beta^i)}{k_i(1-\beta^i)}}. \tag{3.6.2}$$

W powyższych wzorach opatrzyliśmy współrzędne środka ścinania wskaźnikiem a oraz kreską poziomą dla zaznaczenia, że mowa jest o środku ścinania przekroju obciążonego końcowego (można więc długość a uważać za całkowitą długość dźwigara L) a dźwigar jest utwierdzony sztywno.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\omega^i = \frac{C^i(1-\beta^i)}{k_i(1+\beta^i)}, \tag{3.7.1}$$

$$\gamma = \frac{\Pi}{4F^2}. \tag{3.7.2}$$

Wówczas po uwzględnieniu dodatkowo związków (3.3) otrzymujemy [15])

$$\bar{x}_{SP,a} = \frac{x^0_{SP,L}\bar{\gamma}a - \sum^{\infty}B^i\omega^i}{\bar{\gamma}a + \sum^{\infty}C^i\omega^i}, \tag{3.8.1}$$

$$\bar{y}_{SP,a} = \frac{y^0_{SP,L}\bar{\gamma}a + \sum^{\infty}A^i\omega^i}{\bar{\gamma}a + \sum^{\infty}C^i\omega^i}. \tag{3.8.2}$$

Z powyższych wzorów można stwierdzić, że gdy pominiemy wpływ utwierdzenia, tzn. gdy odrzucimy działanie układów samozrównoważonych, to współrzędne środka ścinania przekroju obciążonego (końcowego) stają się odpowiednio równe $x^0_{SP,L}$ i $y^0_{SP,L}$ według wzorów (3.3). Gdy takie

[15]) Wzory te zostały podane w pracy [8].

uproszczenie nie jest słuszne, to nie ma powodu do przypuszczenia, że, powiedzmy, nie sumy nieskończone występujące we wzorach (3.8) są w ogólnym przypadku równe zeru. W związku z tym położenie środka ścinania przekroju obciążonego końcowego zależy w ogólności od rodzaju utwierdzenia drugiego końca dźwigara. Jednakże ogólna dyskusja wzorów (3.8) byłaby nader utrudniona lub nawet wręcz niemożliwa.

3. Powróćmy teraz do przypadku ogólnego, gdy obciążenie przyłożone jest w przekroju pośrednim $z=a$ $(a<L)$, a dźwigar jest utwierdzony sztywno.

Z warunku (3.1) wyznaczamy współrzędne środka ścinania $x_{SP,a}$ i $y_{SP,a}$ przekroju obciążonego $(z=a)$. Po dłuższych przekształceniach otrzymujemy

$$x_{SP,a}=\frac{x^0_{SP}\bar{\gamma}a-\sum^{\infty}B^i\Omega^i}{\bar{\gamma}a+\sum^{\infty}C^i\Omega^i}, \tag{3.9.1}$$

$$y_{SP,a}=\frac{y^0_{SP}\bar{\gamma}a+\sum^{\infty}A^i\Omega^i}{\bar{\gamma}a+\sum^{\infty}C^i\Omega^i}. \tag{3.9.2}$$

W powyższych wzorach opuszczony został wskaźnik L przy symbolach $x^0_{SP,L}$ i $y^0_{SP,L}$ dla zaznaczenia, że współrzędne te (jeśli tylko utwierdzenie jest swobodne i obciążenie działa w przekroju końcowym) nie zależą od długości dźwigara: znaczenie symbolu $\bar{\gamma}$ jest zrozumiałe (porównaj wzór (3.7.2)), symbol zaś Ω^i przedstawia następujące wyrażenie:

$$\Omega^i=\frac{C^i}{2k_i(1+\beta^i)}\left[\bar{\beta}^i+3(1-\beta^i)-\frac{\beta^i}{\bar{\beta}^i}-4\,\frac{\beta^i-\bar{\beta}^i}{e^{k_i a}}\right], \tag{3.10}$$

gdzie wartości β^i oraz $\bar{\beta}^i$ określone są odpowiednio przez wzory (2.16) i (3.4). Zauważmy, że wzory (3.9) i (3.8) mają podobną budowę, różniąc się jedynie wartością symbolu omega.

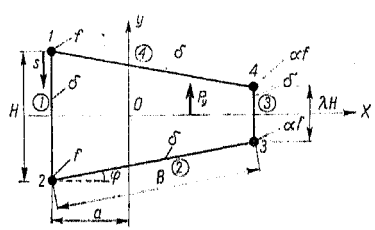
Gdy obciążenie przesuwa się w kierunku końca wolnego $(a\to L)$, to $\Omega^i\to\omega^i$ i w położeniu granicznym otrzymujemy wzory (3.8), w których jedynie wypada zastąpić długość a długością L i symbol $\bar{\beta}^i$ symbolem β^i (gdyż jest wówczas $a=L$).

Z porównania wzorów (3.9) i (3.8) nie wynika atoli jako rzecz oczywista, że w ogólnym przypadku położenie środka ścinania w przekroju obciążonym $z=a$, gdy ten przekrój przedstawia przekrój pośredni, jest takie samo, jakie byłoby, gdyby przekrój $z=a$ (tzn. przekrój obciążony) przedstawiał przekrój końcowy. Ponieważ, jak o tym była mowa, ogólna dyskusja wyprowadzonych wzorów jest niepomiernie utrudniona, zilustrujemy otrzymane wyniki na przykładzie, zresztą stosunkowo ogólnym.

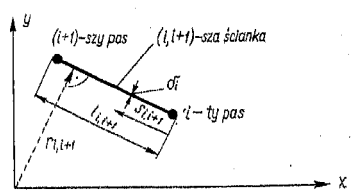
4. Dźwigar o przekroju trapezowym z tzw. pokryciem niepracującym

Rozpatrzmy dźwigar cienkościenny o przekroju trapezowym, jak na rysunku 2 [16]). Wzdłuż krawędzi dźwigara są umieszczone usztywnienia podłużne czyli pasy, oznaczone w przekroju na rysunku 2 czarnymi kółkami. Przyjmijmy, że pola przekroju pasów są skupione w wierzchołkach trapezu (wielkość ich wynosi f lub αf).

Przyjmiemy, że pasy przenoszą naprężenia normalne, a ścianki (pokrycie) tylko naprężenia styczne. To założenie, które nie zmniejsza ogólności wyprowadzonych wniosków, upraszcza nader skomplikowane rachunki. Środek ciężkości wszystkich pól przekroju pasów uważamy za środek ciężkości przekroju dźwigara, można bowiem wykazać, że jest to zgodne z założeniem przyjętym co do podziału pracy między pasy i ścianki dźwigara. Oznaczmy dowolną ściankę symbolem $(i,i+1)$, jej grubość (uważaną za stałą dla wszystkich ścianek) przez δ, długość przez $l_{i,i+1}$ oraz odległość od niej punktu O przez $r_{i,i+1}$ (rys. 3).



Rys. 2



Rys. 3

4.1. Gdy osadzenie dźwigara uważać za swobodne, a siła działa na końcu wolnym, otrzymuje się w danym razie wzory dla współrzędnych

[16]) Wyprowadzenie wzorów, które tutaj zostają podane bez dowodu, oraz dokładniejsze wyjaśnienie zawiera praca [7].

środka ścinania podobne do wzorów (3.3) [17]). Oznaczmy więc przez S_{xi} oraz S_{yi} momenty statyczne wszystkich i pasów poprzedzających daną $(i, i+1)$-szą ściankę według przyjętej rachuby współrzędnej s (na rysunku 2 współrzędna s liczona jest począwszy od pasa 1), przez I_x i I_y momenty bezwładności przekroju, tzn. wszystkich pasów, oraz przez F pole ograniczone konturem poprzecznego przekroju dźwigara. Wówczas współrzędne środka ścinania x^0_{SP} i y^0_{SP} są równe (gdy przez n oznaczyć ilość ścianek lub równą im ilość pasów)

$$x^0_{SP} = -\frac{1}{I_x}\left(\sum_{i=1}^{n} S_{xi} r_{i,i+1} l_{i,i+1} - 2F \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{xi} l_{i,i+1}}{\sum_{i=1}^{n} l_{i,i+1}}\right), \tag{4.1.1}$$

$$y^0_{SP} = \frac{1}{I_y}\left(\sum_{i=1}^{n} S_{yi} r_{i,i+1} l_{i,i+1} - 2F \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{yi} l_{i,i+1}}{\sum_{i=1}^{n} l_{i,i+1}}\right). \tag{4.1.2}$$

Zauważmy, że stosując symbole podobne do przyjętych poprzednio we wzorach (1.18), mianowicie

$$\overline{F}_s^{Ex} = \frac{1}{2F}\sum_{i=1}^{n} S_{yi} r_{i,i+1} l_{i+1} - S_{yi}, \tag{4.2.1}$$

$$\overline{F}_s^{Ey} = \frac{1}{2F}\sum_{i=1}^{n} S_{xi} r_{i,i+1} l_{i+1} - S_{xi} \tag{4.2.2}$$

oraz użyte dalej symbole (4.11) odpowiadające symbolom (1.22), można wzory (4.1) przedstawić również w postaci następującej, podobnej do (3.3):

$$x^0_{SP} = -\frac{2F\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_s^{Ey} l_{i,i+1}}{I_x \sum_{i=1}^{n} l_{i,i+1}} = \frac{2FH_y}{I_x H}, \tag{4.1.1.1}$$

$$y^0_{SP} = \frac{2F\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_s^{Ex} l_{i,i+1}}{I_y \sum_{i=1}^{n} l_{i,i+1}} = \frac{2FH_x}{I_y H}. \tag{4.1.2.1}$$

[17]) Porównaj [5]. Różnica polega jedynie na tym, że całkowanie zostaje zastąpione sumowaniem, a na „efektywny" przekrój dźwigara składają się jak gdyby wyłącznie pola przekroju pasów.

W rozpatrywanym przykładzie, w którym przekrój dźwigara przyjęto za trapezowy jak na rysunku 2, jest

$$F = \frac{1+\lambda}{2} HB\cos\varphi, \quad I_x = \frac{(1+a\lambda^2)f}{2} H^2, \quad \sin\varphi = \frac{1-\lambda}{2}\cdot\frac{H}{B},$$

$$r_{1,2} = a = \frac{a}{1+a} B\cos\varphi, \quad S_{x1} = \frac{f}{2} H, \quad S_{y1} = S_{y3} = -\frac{af}{1+a} B\cos\varphi,$$

$$r_{2,3} = r_{4,1} = \frac{1+a\lambda}{2(1+a)} H\cos\varphi, \quad S_{x2} = S_{x4} = 0, \quad S_{y2} = -\frac{2af}{1+a} B\cos\varphi,$$

$$r_{3,4} = \frac{1}{1+a} B\cos\varphi, \quad S_{x3} = -\frac{a\lambda f}{2} H, \quad S_{y4} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{i,i+1} = 2B + H(1+\lambda), \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_{xi} r_{i,i+1} l_{i,i+1} = \frac{a(1-\lambda^2)f}{2(1+a)} BH^2\cos\varphi,$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_{yi} r_{i,i+1} l_{i,i+1} = -\frac{a(1+\lambda)f}{1+a} B^2 H\cos^2\varphi,$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_{xi} l_{i,i+1} = \frac{(1+a\lambda^2)f}{2} H^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_{yi} l_{i,i+1} = -\frac{af}{1+a} B[2B + H(1+\lambda)]\cos\varphi.$$

Skąd otrzymujemy ze wzorów (4.1) i (4.2) [18])

$$x^0_{SP} = \frac{(1+\lambda)B\cos\varphi}{(1+a)(1+a\lambda^2)} \cdot \frac{(1-a^2\lambda^2)H - 2a(1-\lambda)B}{(1+\lambda)H + 2B}, \tag{4.4.1}$$

$$y^0_{SP} = 0. \tag{4.4.2}$$

Ostatni wniosek (wzór (4.4.2)) jest zrozumiały gdyż jest zgodny z warunkiem symetrii przekroju względem osi x. Podobnie, gdy przekrój ma kształt prostokąta ($\beta=1$) i gdy pola przekroju pasów są jednakowe ($a=1$), staje się x^0_{SP} równe zeru i środek ścinania pokrywa się ze środkiem symetrii przekroju.

[18]) Wzory dla współrzędnych środka ścinania przekroju trapezowego zaopatrzonego w cztery pasy, o dowolnym zarysie ścianek podano w pracy [2].

Przyjmijmy, że w przekroju końcowym $z=L$ działa siła zewnętrzna $P(P_x, P_y)$ i że drugi koniec dźwigara jest swobodnie utwierdzony. W tym przypadku spaczenie ζ przestaje być funkcją zmiennej z. Zakładając niezmiennie, że pokrycie nie przenosi naprężeń normalnych, otrzymujemy zamiast wzorów (1.10) następujące wzory [10]):

$$\sigma_i^0 = E\left(-\frac{d^2\xi^0}{dz^2}x_i - \frac{d^2\eta^0}{dz^2}y_i\right), \tag{4.5.1}$$

$$\tau_{i,i+1}^0 = G\left(\frac{d\delta}{dz} + \frac{d\zeta_{i,i+1}}{ds}\right), \tag{4.5.2}$$

w których σ_i^0 oraz $\tau_{i,i+1}^0$ oznaczają odpowiednio naprężenie normalne w i-tym pasie oraz naprężenie (styczne) w $(i, i+1)$-szej ściance, $\zeta_{i,i+1}^0$ zaś jest spaczeniem $(i, i+1)$-szej ścianki (a więc również i-tego oraz $(i+1)$-szego pasa). Naprężenia (4.5) i związane z nimi przemieszczenia zostały oznaczone wskaźnikiem 0, gdyż przedstawiają w danym razie naprężenia i przemieszczenia, które poprzednio nazwaliśmy „inżynierskimi". Wielkości x_i i y_i przedstawiają współrzędne i-tego pasa. Z równań równowagi momentów sił wewnętrznych i zewnętrznych względem osi x i y otrzymujemy

$$\frac{d^2\xi^0}{dz^2} = \frac{P_x(a-z)}{EI_y}, \tag{4.6.1}$$

$$\frac{d^2\eta^0}{dz^2} = \frac{P_y(a-z)}{EI_x}, \tag{4.6.2}$$

i w dalszym ciągu po scałkowaniu

$$\frac{d\xi^0}{dz} = \frac{P_x}{EI_y}\left(az - \frac{z^2}{2}\right) + C_1, \tag{4.7.1}$$

$$\frac{d\eta^0}{dz} = \frac{P_y}{EI_x}\left(az - \frac{z^2}{2}\right) + C_2; \tag{4.7.2}$$

gdzie C_1 i C_2 oznaczają stałe całkowania. Podstawiając (4.6) do (4.5.1) otrzymujemy znany wzór dla naprężeń normalnych, odpowiadający pierwszym dwóm członom wzoru (1.12.1)

$$\sigma_i^0 = -\left(\frac{P_x x_i}{I_y} + \frac{P_y y_i}{I_x}\right)(a-z). \tag{4.8.1}$$

[10]) Użytych tutaj i dalej wskaźników i, związanych z i-tą ścianką, nie należy, oczywiście, łączyć z poprzednio używanymi wskaźnikami i, oznaczającymi układy samozrównoważone.

Podobnie otrzymujemy wzór dla naprężeń ścinających

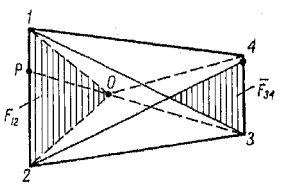
$$\tau_{i,i+1}^0 = \frac{P_x}{\delta I_y}\overline{F}_s^{Ex} + \frac{P_y}{\delta I_x}\overline{F}^{Ey} + \frac{M_z}{2F\delta}, \tag{4.8.2}$$

który odpowiada pierwszym trzem członom wzoru (1.12.2). Całkując obie strony wzoru (4.5.2) w granicach od 0 do s otrzymujemy następujące wyrażenia dla wielkości spaczenia w dowolnym punkcie P $(i, i+1)$-szej ścianki:

$$\zeta_{i,i+1}^0(s) = \frac{1}{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\tau_{j,j+1}^0 l_{j,j+1} + \tau_{i,i+1}^0 s_{i,i+1}\right) - 2\frac{d\vartheta^0}{dz}\left(\sum_{j=1}^{i-1}F_{j,j+1} + F_{i,i+1}^s\right) + \zeta_1^0, \tag{4.9}$$

gdzie $s_{i,i+1}$ oznacza współrzędną rozpatrywanego punktu mierzoną począwszy od węzła i-tego, $F_{j,j+1}$ pole trójkąta rozpiętego na punktach O, j, $j+1$ jako na wierzchołkach (rys. 4), $F_{i,i+1}^s$ pole trójkąta O i P, ζ_1^0 spaczenie pasa $i=1$ (stałe na całej jego długości), $d\vartheta^0/dz$ zaś jednostkowy kąt skręcania równy

$$\frac{d\vartheta^0}{dz} = \frac{1}{2GF}\left(\frac{P_x\Pi_x}{I_y} + \frac{P_y\Pi_y}{I_x} + \frac{M_z\Pi}{2F}\right). \tag{4.10}$$



Rys. 4

W ostatnim wzorze przyjęto następujące oznaczenia odpowiadające oznaczeniom (1.22):

$$\overline{\Pi}_x = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{F}_s^{Ex}}{\delta}l_{i,i+1}, \tag{4.11.1}$$

$$\overline{\Pi}_y = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{F}_s^{Ey}}{\delta}l_{i,i+1}, \tag{4.11.2}$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n}\frac{l_{i,i+1}}{\delta}. \tag{4.11.3}$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie w nawiasie okrągłym po prawej stronie wzoru (4.10) odpowiada wyrażeniu w nawiasie okrągłym po prawej stronie wzoru (1.21), jak być powinno.

Znajdźmy przemieszczenie całkowite $\overline{\zeta}_{i,i+1}^0(s)$ ścianek ze wzoru (1.3) podstawiając do tego wzoru wielkości (4.7) i (4.9). Otrzymujemy wówczas

$$\zeta_{i,i+1}^0(s) = \frac{1}{E}\left(\frac{P_x x}{I_y} + \frac{P_y y}{I_x}\right)\left(az - \frac{z^2}{2}\right) + \zeta_{i,i+1}^0(s) - C_1 x - C_2 y. \tag{4.12}$$

W przekroju utwierdzonym ($z=0$) przemieszczenie całkowite pasów w kierunku osi z będzie kolejno równe

$$
(4.13)\qquad
\begin{aligned}
\bar{\zeta}_1^0 &= -C_1x_1 - C_2y_1 + \zeta_1^0,\\
\bar{\zeta}_2^0 &= \frac{\tau_{12}^0 l_{12}}{G} - 2\frac{d\vartheta^0}{dz}F_{12} - C_1x_2 - C_2y_2 + \zeta_1^0,\\
\bar{\zeta}_3^0 &= \frac{\tau_{12}^0 l_{12} + \tau_{23}^0 l_{23}}{G} - 2\frac{d\vartheta^0}{dz}(F_{12}+F_{23}) - C_1x_3 - C_2y_3 + \zeta_1^0,\\
\bar{\zeta}_4^0 &= \frac{\tau_{12}^0 l_{12} + \tau_{23}^0 l_{23} + \tau_{34}^0 l_{34}}{G} - 2\frac{d\vartheta^0}{dz}(F_{12}+F_{23}+F_{34}) - C_1x_4 - C_2y_4 + \zeta_2^0.
\end{aligned}
$$

W tych wzorach $d\vartheta/dz$ przedstawia wielkość stałą określoną wzorem (4.10), ζ_1^0 oznacza spaczenie pasa 1-szego, a $\tau_{i,i+1}^0$ jest naprężeniem ścinającym, stałym dla każdej ścianki, określonym przez wzór (4.8.2); wskaźnik 0 charakteryzuje utwierdzenie swobodne.

Gdy ścianki dźwigara są płaskie — jak w danym razie przyjmujemy — to pole $F_{i,i+1}^s$ (porównać wzór (4.9)) jest liniową funkcją zmiennej $s_{i,i+1}$ i spaczenie każdej ścianki przedstawia odcinek prostej. Zatem sprowadzenie do zera spaczenia pasów w przekroju utwierdzonym usuwa automatycznie spaczenie ścianek. Jest oczywiste, że układy samozrównoważone sił, które pozwalają usunąć spaczenie pasów, składają się z czterech sił podłużnych P_i ($i=1,2,3,4$) skierowanych antysymetrycznie. Wykażemy dalej, że układy te sprowadzają się w danym przypadku do jednego tylko układu. W związku z tym pominiemy wskaźnik i, którym oznaczaliśmy poprzednio (§ 1-3) wielkości związane z układami samozrównoważonymi, i wskaźnik ten będziemy stosowali jak w § 4 dla oznaczenia wielkości związanych z poszczególnymi ściankami lub pasem (rys. 3). Załóżmy, że wielkość naprężeń tworzących układ samozrównoważony zmienia się w kierunku podłużnym dźwigara w podobny sposób. Założenie to jest zgodne z fizyczną stroną zjawiska i odpowiada matematycznie założeniu, że naprężenia dają się przedstawić w postaci iloczynu dwóch funkcji, każda jednej tylko zmiennej (s lub z), przy czym funkcja zmiennej z będzie jednakowa dla wszystkich ścianek i pasów.

W związku z tym, w analogii do wzorów (1.11), można napisać

$$
(4.14.1)\qquad \sigma_i = E\left(-Ax_i - By_i + \zeta_i^s\right)\frac{d\zeta^z}{dz},
$$

$$
(4.14.2)\qquad \tau_i = G\left(Cr_{i,i+1} + \frac{d\zeta_{i,i+1}^s}{ds}\right)\zeta^z,
$$

co jest wynikiem następujących założeń:

$$
(4.15)\qquad
\frac{d^2\xi}{dz^2} = A\frac{d\zeta^z}{dz},\qquad \frac{d^2\eta}{dz^2} = B\frac{d\zeta^z}{dz},\qquad
\frac{d\vartheta}{dz} = C\zeta^z,\qquad \zeta = \zeta^s\zeta^z.
$$

Tutaj ζ^s i ζ^z oznaczają oczywiście funkcje jednej zmiennej (s lub z), a znaczki i lub $i,i+1$ określają odpowiednio wartość pierwszej z tych funkcji dla i-tego pasa lub $(i,i+1)$-szej ścianki.

Można łatwo wykazać [7], że równania (1.14) i (1.17) przyjmują w rozpatrywanym przypadku następującą postać:

$$
(4.16)\qquad \frac{1}{f_i}\left(D_{i,i+1} - D_{i-1,i}\right) + k^2\left(Ax_i - By_i + \zeta_i^s\right) = 0,
$$

$$
(4.17)\qquad \frac{d^2\zeta^z}{dz^2} - k^2\zeta^z = 0.
$$

W powyższych wzorach f_i oznacza pole przekroju i-tego pasa, a symbol

$$
(4.18)\qquad D_{i,i+1} = \frac{G\delta}{E}\left(Cr_{i,i+1} + \frac{d\zeta_{i,i+1}^s}{ds}\right)
$$

przedstawia wielkość stałą, gdyż, jak mówiliśmy, spaczenie ścianek jest liniową funkcją miejsca (określonego współrzędną s). Całkę ogólną równania różniczkowego (4.17) można przestawić w postaci (por. (2.12))

$$
(4.19)\qquad \zeta^z = Me^{kz} + Ne^{-kz},
$$

gdzie M i N są to (na razie nieznane) stałe całkowania.

Z otrzymanych wzorów wynika, że jeżeli pominąć stałe M i N, to naprężenia układu samozrównoważonego i przynależne doń odkształcenia są uzależnione ogółem od 8 nieznanych stałych: czterech stałych typu $D_{i,i+1}$ oraz czterech dodatkowych stałych A,B,C i k^2. Jedną z tych stałych, mianowicie C, łatwo wyznaczyć bezpośrednio w postaci zależnej od stałych $D_{i,i+1}$, jeżeli scałkować obie strony wzoru (4.18) wzdłuż całkowitego konturu przekroju (uwzględniając warunek ciągłości funkcji spaczenia). Otrzymuje się wówczas

$$
(4.20)\qquad C = \frac{1}{2F}\sum_{i=1}^{n} D_{i,i+1}L_{i,i+1},
$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$
(4.21)\qquad L_{i,i+1} = \frac{E}{G\delta}l_{i,i+1}.
$$

Dla wyznaczenia pozostałych stałych dysponujemy czterema równaniami równowagi pasów typu (4.16) oraz trzema równaniami równowagi momentów sił względem osi układu współrzędnych. Otrzymuje się w ten sposób układ siedmiu równań liniowych jednorodnych względem siedmiu niewiadomych $D_{12}, D_{23}, D_{34}, D_{41}, A, B$ i C, z którego można wyznaczyć sześć nieznanych stałych w zależności od jednej, pozostałej.

Oprócz tego, aby rozpatrywany układ miał rozwiązanie różne od zera, wyznacznik tego układu, przedstawiający równanie charakterystyczne zagadnienia, powinien być równy zeru. W danym razie równanie charakterystyczne, które służy do wyznaczenia parametru k^2, ma tylko jedno rozwiązanie.

Wykonując dość uciążliwe przekształcenia otrzymujemy ostatecznie po przyjęciu krótszego oznaczenia

$$D = D_{41} \tag{4.22}$$

następujące wartości poszukiwanych stałych:

$$k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{f_i} (F_{i+1,i+2,i+3})^2}{\sum_{i=1}^{4} L_{i,i+1} [\overline{F}_{i+2,i+3} + (1-)^{i+1} m/F]^2}, \tag{4.23}$$

$$D_{12} = \frac{\overline{F}_{34} + m/F}{\overline{F}_{23} - m/F} D = d_{13} D, \tag{4.24.1}$$

$$D_{24} = \frac{\overline{F}_{41} - m/F}{\overline{F}_{23} - m/F} D = d_{23} D, \tag{4.24.2}$$

$$D_{34} = \frac{\overline{F}_{12} + m/F}{\overline{F}_{23} - m/F} D = d_{34} D^{20)}, \tag{4.24.3}$$

$$A = \frac{n_1 (y_3 - y_2) - n_2 (y_2 - y_1)}{2k^2 F_{123}} D = a D, \tag{4.25.1}$$

$$D = \frac{n_1 (x_3 - x_2) - n_2 (x_2 - x_1)}{2k^2 F_{123}} D = b D \tag{4.25.2}$$

[20]) Ze wzoru (4.22) wynika, że ewentualny symbol d_{41} byłby równy 1.

oraz na podstawie wzoru (4.20)

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{4} L_{i,i+1} d_{i,i+1}}{2F} D = c D. \tag{4.25.3}$$

W ten sposób uzależniono wszystkie poszukiwane stałe D_{12}, D_{23}, D_{34}, A, B i C od jednej tylko stałej D (porównaj wzór (4.22)) i poza tym obliczono parametr k^2.

W powyższych wzorach oznaczono przez $F_{i+1,i+2,i+3}$ pole trójkąta rozpiętego na odpowiednich pasach jako na wierzchołkach; $F_{i,i+1}$ oznacza pole trójkąta o podstawie $l_{i,i+1}$ i wierzchołku w środku ciężkości przekroju (porównaj F_{12} na rysunku 4), a $\overline{F}_{i,i+1}$ pole trójkąta o podstawie $l_{i,i+1}$ i wierzchołku w środku przecięcia przekątnych przekroju (porównaj $\overline{F}_{34}$ na rysunku 4). Poza tym przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} m &= \overline{F}_{12} F_{34} + \overline{F}_{23} F_{41} - \overline{F}_{34} F_{12} + \overline{F}_{41} F_{23}, \\ n_1 &= \frac{1}{f_1} + \left(k^2 L_{12} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}\right) d_{12} + \frac{d_{23}}{f_2} - 2k^2 c F_{12}, \\ n_2 &= \frac{d_{12}}{f_2} + \left(k^2 L_{23} - \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_3}\right) d_{23} + \frac{d_{34}}{f_3} - 2k^2 c F_{23}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Przechodzimy teraz do obliczenia całkowitego przemieszczenia pasów ξ_i w kierunku osi z pod wpływem działania samego układu samozrównoważonego. W tym celu obliczamy opierając się na wzorach (4.15)

$$\frac{d\xi}{dz} = a(\overline{M} e^{kz} + \overline{N} e^{-kz}) + K_1, \tag{4.27.1}$$

$$\frac{d\eta}{dz} = b(\overline{M} e^{kz} + \overline{N} e^{-kz}) + K_2, \tag{4.27.2}$$

$$\frac{d\vartheta}{dz} = c(\overline{M} e^{kz} + \overline{N} e^{-kz}), \tag{4.28}$$

gdzie przez K_1 i K_2 oznaczono stałe całkowania, a $\overline{M}$ i $\overline{N}$ są odpowiednio równe

$$\overline{M} = M D, \qquad \overline{N} = N D. \tag{4.29}$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy wówczas na podstawie wzoru (1.3)

$$\zeta_i = \frac{1}{k^2 f_i} (d_{i+1,i} - d_{i,i+1})(\overline{M} e^{kz} + \overline{N} e^{-kz}) - K_1 x_i - K_2 y_i. \tag{4.30}$$

Przekształćmy wzór (4.14.1) dla naprężeń normalnych układu samozrównoważonego do postaci następującej:

$$\sigma_i = \frac{E}{k}(d_{i-1,i} - d_{i,i+1})(\overline{M}e^{kz} - \overline{N}e^{-kz}). \tag{4.31}$$

Jeżeli teraz dodamy do siebie naprężenia normalne (4.8.1) i (4.31), przemieszczenia (4.12) i (4.30) oraz jednostkowe kąty skręcenia (4.10) i (4.28), to otrzymamy wypadkowe naprężenia normalne S_i, wypadkowe przemieszczenia podłużne $\overline{Z}_i$ oraz wypadkowy jednostkowy kąt skręcenia $d\Theta/dz$ dźwigara, w którym oprócz naprężeń „inżynierskich" występują naprężenia układu samozrównoważonego.

Wypiszmy *explicite* wyrażenia dla S_i oraz $d\Theta/dz$:

$$S_i = -\left(\frac{P_x x_i}{I_y} + \frac{P_y y_i}{I_x}\right)(a - z) + \frac{E}{k}(d_{i-1,i} - d_{i,i+1})(\overline{M}e^{kz} - \overline{N}e^{-kz}), \tag{4.32}$$

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{M^0_{SP}}{4EF^2}\sum_{i=1}^{4} L_{i,i-1} + c(\overline{M}e^{kz} + \overline{N}e^{-kz}), \tag{4.33}$$

gdzie

$$M^0_{SP} = P_y(x_P - x^0_{SP}) - P_x(y_P - y^0_{SP}),$$

$$c = \frac{1}{2F}\sum_{i=1}^{4} L_{i,i+1} d_{i,i+1}$$

(porównaj wzory (4.1) i (4.25.4)).

Podobnie otrzymujemy ze wzorów (4.12) i (4.30) dla przemieszczenia całkowitego i-tego pasa:

$$\overline{Z}_i = -\frac{1}{E}\left(\frac{P_x w}{I_y} + \frac{P_y y}{I_x}\right)\left(az - \frac{z^2}{2}\right) + \zeta^0_i + \frac{d_{i-1,i} - d_{i,i+1}}{k^2 f_i}(\overline{M}e^{kz} + \overline{N}e^{-kz}) - (C_1 + K_1)x_i - (C_2 + K_2)y_i. \tag{4.34}$$

W ten sposób rozpatrywane wielkości (4.32), (4.33) i (4.34) zostały uzależnione od pięciu nieznanych stałych: $\overline{M}, \overline{N}, (C_1 + K_1), (C_2 + K_2)$ oraz ζ^0_1 (porównaj wzór (4.9)). Stałe te można wyznaczyć z warunków brzegowych, analogicznych do rozpatrzonych poprzednio w § 2 (wzory (2.3) i (2.4)). Przypomnijmy, że siła $P(P_x, P_y)$ działa na końcu dźwigara o długości L; utwierdzenie dźwigara uważamy teraz za sztywne. Stosując oznacze-

nia przyjęte w § 2 otrzymujemy wówczas następujące warunki brzegowe:

$$\overline{Z}_i(0) = 0, \tag{4.35}$$

$$S_i(L) = 0. \tag{4.36}$$

Wzór (4.35) przedstawia w istocie cztery warunki. Łącznie z warunkiem (4.36) czyni to razem pięć warunków, z których można wyznaczyć pięć nieznanych stałych. Pomijając uciążliwe przekształcenia otrzymujemy z warunków (4.35)

$$\overline{M} + \overline{N} = \frac{2k^2}{\Lambda}[a_1 F_{234} + a_2(F_{234} - F_{341}) + a_3 F_{123}], \tag{4.37}$$

$$C_1 + K_1 = -\frac{1}{\Lambda}\{w_1[a_2(y_4 - y_3) - a_3(y_3 - y_2)] - w_2[a_1(y_4 - y_3) - a_3(y_2 - y_1)] + w_3[a_1(y_3 - y_2) - a_2(y_2 - y_1)]\}, \tag{4.38}$$

$$C_2 + K_2 = \frac{1}{\Lambda}\{w_1[a_2(x_4 - x_3) - a_3(x_3 - x_2)] - w_2[a_1(x_4 - x_3) - a_3(x_2 - x_1)] + w_3[a_1(x_3 - x_2) - a_2(x_2 - x_1)]\}, \tag{4.39}$$

gdzie dla krótkości zapisu przyjęto następujące oznaczenia:

$$\Lambda = 2w_1 F_{234} + 2w_2(F_{234} - F_{341}) + 2w_3 F_{123}, \tag{4.40}$$

$$w_1 = d_{12}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) - d_{23}\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}, \tag{4.41.1}$$

$$w_2 = d_{23}\left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}\right) - d_{34}\frac{1}{f_3} - \frac{d_{12}}{f_2}, \tag{4.41.2}$$

$$w_3 = d_{34}\left(\frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_1}\right) - \frac{1}{f_4} - \frac{d_{23}}{f_3}, \tag{4.41.3}$$

$$a_i = \frac{d\vartheta^0}{dz} 2F_{i,i+1} - \frac{1}{G}\tau^0_{i,i+1} l_{i,i+1} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{4.42}$$

w których wielkości $d\vartheta^0/dz$ i $\tau^0_{i,i+1}$ są wyznaczone przez wzory (4.10) i (4.8.2). Stała ζ^0_1 jest równa

$$\zeta^0_1 = (C_1 + K_1)x_1 + (C_2 + K_2)y_1 - \frac{1 - d_{12}}{f_1 k^2}(\overline{M} + \overline{N}). \tag{4.43}$$

Pozostaje jeszcze rozpatrzyć warunek (4.36). Otrzymujemy z niego bezpośrednio związek

$$\bar{N} = \beta \bar{M}, \tag{4.44}$$

w którym

$$\beta = e^{2kL} \tag{4.45}$$

(porównaj wzór (2.16)).

Przekształcamy teraz wzór (4.10) biorąc pod uwagę związki (4.1.1.1) i (4.1.2.1). Otrzymujemy wówczas

$$\frac{d\vartheta^0}{dz} = [-P_x(y_P - y^0_{SP}) + P_y(x_P - x^0_{SP})]\gamma, \tag{4.46}$$

gdzie [21])

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{4} l_{i,i+1}}{4GF^2\delta}. \tag{4.47}$$

Podobnie przekształcamy wzór (4.8.2), z którego otrzymujemy

$$\tau^0_{i,i+1} = P_x\left(s_{xi} - \frac{y_P - y^0_{SP}}{2F\delta}\right) + P_y\left(s_{yi} + \frac{x_P - x^0_{SP}}{2F\delta}\right), \tag{4.48}$$

gdzie

$$s_{xi} = \frac{1}{J_y\delta}\left(-S_{yi} + \frac{\sum_{i=1}^{4} S_{yi} l_{i,i+1}}{\sum_{i=1}^{4} l_{i,i+1}}\right), \tag{4.49.1}$$

$$s_{yi} = \frac{1}{J_x\delta}\left(-S_{xi} + \frac{\sum_{i=1}^{4} S_{xi} l_{i,i+1}}{\sum_{i=1}^{4} l_{i,i+1}}\right). \tag{4.49.2}$$

Uwzględnienie zależności (4.46) i (4.48) pozwala po odpowiednich przekształceniach przedstawić wielkości a_i według wzoru (4.42) w następującej postaci:

$$a_i = -P_x[(y_P - y^0_{SP})u_i - v_{xi}] + P_x[(x_P - x^0_{SP})u_i - v_{yi}]. \tag{4.50}$$

[21]) Symbol γ odpowiada poprzednio przyjętemu symbolowi γ we wzorze (3.7.2), różniąc się jedynie czynnikiem $1/G$.

W powyższym wzorze użyto dodatkowych oznaczeń

$$u_i = 2\gamma F_{i,i+1} - \frac{l_{i,i+1}}{2GF\delta}, \tag{4.51.1}$$

$$v_{xi} = \frac{l_{i,i+1}}{G} s_{xi}, \tag{4.51.2}$$

$$v_{yi} = \frac{l_{i,i+1}}{G} s_{yi}. \tag{4.51.3}$$

Można teraz uwzględniając wzory (4.44) i (4.50) przedstawić w prostej postaci wielkość $\bar{M}$ według wzoru (4.37). Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy zależność

$$\bar{M} = P_x[-(y_P - y^0_{SP})g + f_x] + P_y[(x_P - x^0_{SP})g + f_y], \tag{4.52}$$

w której przyjęto następujące ostateczne oznaczenia:

$$g = \frac{2k^2}{(1+\beta)\Delta}[u_1F_{234} + u_2(F_{234} - F_{341}) + u_3F_{123}], \tag{4.53.1}$$

$$f_x = \frac{2k^2}{(1+\beta)\Delta}[v_{x1}F_{234} + v_{x2}(F_{234} - F_{341}) + v_{x3}F_{123}], \tag{4.53.2}$$

$$f_y = \frac{2k^2}{(1+\beta)\Delta}[v_{y1}F_{234} + v_{y2}(F_{234} - F_{341}) + v_{y3}F_{123}]. \tag{4.53.3}$$

Pozostaje obliczyć kąt skręcenia $\Theta(z)$ drogą całkowania obu stron wzoru (4.33) przy uwzględnieniu warunku $\Theta(0)=0$. Stosując oznaczenia poprzednio wprowadzone otrzymuje się ostatecznie

$$\Theta(z) = P_x\left\{-(y_P - y^0_{SP})\left(\gamma z + \frac{gc}{k}[z]\right) + \frac{f_x c}{k}[z]\right\} + P_y\left\{(x_P - x^0_{SP})\left(\gamma z + \frac{gc}{k}[z]\right) + \frac{f_y c}{k}[z]\right\}, \tag{4.54}$$

gdzie jest

$$[z] = e^{kz} - 1 - \beta(e^{-kz} - 1). \tag{4.55}$$

Położenie środka ścinania w płaszczyźnie działania siły obciążającej określa się z warunku, że przekrój dźwigara położony w tej płaszczyźnie nie ulega obrotowi. W danym razie siła zewnętrzna $P(P_x, P_y)$ działa w przekroju końcowym $z=L$, zatem warunek wyznaczający odpowiednie położenie punktu zaczepienia siły ($x_P = \bar{x}_{SP,L}$, $y_P = \bar{y}_{SP,L}$, $z_P = L$) otrzy-

muje się z przyrównania wartości $\Theta(L)$ do zera. Ze wzoru (4.54) otrzymujemy wówczas

$$x_{SP,L} = x^0_{SP} - \frac{f_y}{g\left[\gamma k L + c[L]\right]}, \tag{4.56.2}$$

$$y_{SP,L} = y^0_{SP} + \frac{f_x}{g\left[\gamma k L + c[L]\right]}, \tag{4.56.2}$$

gdzie

$$[L] = \beta - 1. \tag{4.57}$$

Wzory (4.56) odpowiadają oczywiście poprzednio wyprowadzonym wzorom ogólnym (3.8), jeżeli w tych ostatnich zastąpić długość a długością L.

Jak wynika ze wzorów (4.56), środek ścinania ulega w ogólnym przypadku przesunięciu, jeżeli utwierdzenie swobodne, dla którego współrzędnymi środka ścinania są x^0_{SP} i y^0_{SP}, zastąpić utwierdzeniem sztywnym.

Utrzymajmy założenie, że utwierdzenie dźwigara jest sztywne i poprowadźmy siłę zewnętrzną przez środek ścinania przekroju końcowego, tj. przez punkt o współrzędnych $\bar{x}_{SP,L}$, $\bar{y}_{SP,L}$, L. Ze wzoru (4.54), przy uwzględnieniu związków (4.56), otrzymujemy wówczas następującą wartość kąta skręcenia dowolnego przekroju poprzecznego:

$$\Theta(z) = (P_x f_x + P_y f_y)\frac{a}{k}\left\{[z] - \frac{\gamma k z + c[z]}{\gamma k L + c[L]}[L]\right\}. \tag{4.58}$$

Wzór ten wskazuje, że położenie siły poprzecznej w środku ścinania nie wyklucza w ogólności skręcenia dźwigara na całej jego długości, chociaż przekroje początkowy i końcowy nie ulegają obrotom w swych płaszczyznach.

Pozostaje jeszcze wyznaczyć współrzędne x_{ss} i y_{ss} środka skręcania dowolnego przekroju poprzecznego. Uzyskujemy je, jak wiadomo, ze wzorów (1.1) i (1.2) przyjmując w tych ostatnich, że składowe ξ i η przesunięcia postępowego są równe zeru. Pominąwszy odpowiednie przekształcenia otrzymujemy ostatecznie (porównaj [7])

$$x_{ss} = \frac{\dfrac{P_y}{EI_x}\left(L\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^3}{6}\right) + \dfrac{b}{k}\bar{M}[z] + (C_2 + K_2)z}{\dfrac{M^0_{SP}}{4GF^2\delta}\sum\limits_{i=1}^{4} l_{i,i+1}z + \dfrac{a}{k}\bar{M}[z]}, \tag{4.59.1}$$

$$y_{ss} = \frac{\dfrac{P_x}{EI_y}\left(L\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^3}{6}\right) + \dfrac{a}{k}\bar{M}[z] + (C_1 + K_1)z}{\dfrac{M^0_{SP}}{4GF^2\delta}\sum\limits_{i=1}^{4} l_{i,i+1}z + \dfrac{a}{k}\bar{M}[z]}. \tag{4.59.2}$$

Przypominamy, że zgodnie z założeniem siła działa tutaj w płaszczyźnie przekroju końcowego (punkt jej przyłożenia jest zresztą dowolny). Przyjmijmy, że utwierdzenie dźwigara jest swobodne, tj. że $a = b = c = K_1 = K_2 = 0$. Otrzymujemy wówczas (wprowadzając zrozumiały wskaźnik 0)

$$x^0_{ss} = \frac{\dfrac{P_y}{EI_x}\left(L\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^3}{6}\right) + C_2}{\dfrac{M^0_{SP}}{4GF^2\delta}\sum\limits_{i=1}^{4} l_{i,i+1}}, \tag{4.60.1}$$

$$y^0_{ss} = \frac{\dfrac{P_x}{EI_y}\left(L\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^3}{6}\right) + C_1}{\dfrac{M^0_{SP}}{4GF^2\delta}\sum\limits_{i=1}^{4} l_{i,i+1}}. \tag{4.60.2}$$

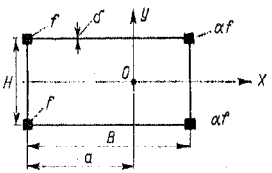
Jak wynika z tych wzorów, oś skręcania w przypadku utwierdzenia swobodnego — wbrew utartej opinii — nie przedstawia w ogólności linii prostej, lecz krzywą przestrzenną, będącą przecięciem dwóch walców o kierownicach w kształcie parabol drugiego stopnia. Łatwo wykazać, że położenie i kształt tej krzywej zależy od wyboru trzech punktów podparcia przekroju utwierdzonego (w danym razie swobodnie), natomiast ze wzorów (4.60) wynika wprost, że położenie jej i kształt zależą również od rodzaju i wielkości obciążenia. W szczególnym przypadku, gdy obciążenie dźwigara stanowi para sił o momencie M_s, co jest równoznaczne warunkom $P_x = P_y = 0$ i $M^0_{SP} = M_s$, oś skręcania przeradza się w linię prostą równoległą do osi podłużnej dźwigara. Położenie tej linii zależy już tylko od położenia punktów utwierdzających przekrój podporowy, nie zależy natomiast od wielkości momentu M_s, jak w przypadku ogólnym.

Wszystko to, co powiedzieliśmy o osi skręcania w przypadku utwierdzenia swodobnego, dotyczy w sensie ogólnym również przypadku utwierdzenia sztywnego. Z postaci wzorów (4.59) wynika bowiem bezpośrednio, że dla utwierdzenia sztywnego oś skręcania nie przedstawia również w ogólności linii prostej i położenie tej osi zależy od rodzaju i wielkości obciążenia.

Zakończywszy na tym rozważania (stosunkowo) ogólne, przejdźmy obecnie do zilustrowania wyprowadzonych wniosków na przykładzie liczbowym.

5. Przykład liczbowy
(dźwigar o przekroju prostokątnym niesymetrycznym)

Rozpatrzmy szczególny przypadek dźwigara o przekroju trapezowym, mianowicie dźwigar o przekroju prostokątnym niesymetrycznym, jak na rysunku 5. Załóżmy, że dźwigar jest utwierdzony sztywno i że na końcu wolnym działa siła P_y, tzn. siła skierowana równolegle do osi y.



Rys. 5

Przyjmijmy następujące dane szczególne, które zużytkujemy w ostatnim stadium obliczeń: $B=5H$, $\delta=H/100$, $\alpha=5$, $E=2G$.

Ze wzorów (4.3) biorąc pod uwagę, że w danym razie jest $\lambda=1$ i $\varphi=0$, otrzymujemy

$$a=\frac{\alpha}{1+\alpha}B, \qquad F=BH,$$

(5.1)
$$\sum_{i=1}^{4} l_{i,i+1}=2(B+H), \qquad I_x=\frac{1+\alpha}{2}fH^2.$$

Podobnie otrzymujemy

$$\overline{F}_{12}=\overline{F}_{23}=\overline{F}_{34}=\overline{F}_{41}=\frac{BH}{4},$$

$$F_{123}=F_{234}=F_{341}=F_{412}=\frac{BH}{2},$$

(5.2)
$$F_{12}=\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}BH,$$

$$F_{23}=F_{41}=\frac{BH}{4},$$

$$F_{34}=\frac{1}{2(1+\alpha)}BH,$$

oraz z pierwszego ze wzorów (4.26)

(5.3)
$$m=0.$$

Obliczamy współczynnik k^2 ze wzoru (4.23):

(5.4)
$$k^2=\frac{4(1+\alpha)}{\alpha}\cdot\frac{G\delta}{(H+B)Ef}.$$

Obliczamy w dalszym ciągu ze wzorów (4.3):

$$S_{x1}=\frac{Hf}{2}, \qquad S_{x2}=S_{x4}=0, \qquad S_{x3}=-\frac{\alpha Hf}{2},$$

(1.5)
$$S_{y1}=S_{y3}=\frac{\alpha Bf}{1+\alpha}, \qquad S_{y2}=-\frac{2\alpha Bf}{1+\alpha}, \qquad S_{y4}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} S_{xi}l_{i,i+1}=\frac{(1-\alpha)H^2f}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{4} S_{yi}l_{i,i+1}=-\frac{2\alpha B(B+H)f}{1+\alpha}.$$

Wobec tego ze wzorów (4.49.1) i (4.51.2) wynika

(5.6)
$$s_{x1}=s_{x3}=v_{x1}=v_{x3}=0$$

i według (4.53.2) jest

(5.7)
$$f_x=0.$$

Podobnie znajdujemy z (4.49.2) i (4.51.3)

(5.8)
$$v_{y1}=\frac{[2B+H(1+\alpha)]H^2f}{4GI_x\delta(B+H)},$$

$$v_{y3}=\frac{[2\alpha B+H(1+\alpha)]H^2f}{4GI_x\delta(B+H)},$$

i w dalszym ciągu z (4.53.3)

(5.9)
$$f_y=\frac{(1-\alpha)k^2B^2H^3f}{2(1+\beta)AGI_x\delta(B+H)}.$$

Stałą g oraz współczynniki w_1 i w_3 obliczamy odpowiednio ze wzorów (4.53.1) oraz (4.41)

(5.10)
$$g=\frac{k^2BH(B-H)}{2(1+\beta)AGF\delta},$$

(5.11)
$$w_1=\frac{4}{f}, \qquad w_3=-\frac{4}{\alpha f}.$$

Wobec tego ze wzoru (4.40) otrzymujemy

$$A = \frac{4(1+\alpha)BH}{\alpha f} \tag{5.12}$$

i ostatecznie

$$f_y = \frac{(1-\alpha)\alpha k^2 Bf}{4(1+\alpha)^2(1+\beta)G\delta(B+H)}, \tag{5.9.1}$$

$$g = \frac{\alpha k^2 (B-H)f}{8(1+\alpha)(1+\beta)GF\delta}. \tag{5.10.1}$$

Obliczamy stałe c i γ odpowiednio ze wzorów (4.25.3) oraz (4.47):

$$c = \frac{(B-H)E}{FG\delta}, \tag{5.13}$$

$$\gamma = \frac{B+H}{2GF^2\delta}, \tag{5.14}$$

oraz współrzędne środka ścinania dla dźwigara utwierdzonego swobodnie ze wzorów (4.4)

$$x^0_{SP} = \frac{(1-\alpha)BH}{(1+\alpha)(B+H)}, \tag{5.15.1}$$

$$y^0_{SP} = 0. \tag{5.15.2}$$

Mając teraz obliczone k, f_y, g, c i γ możemy znaleźć współrzędne środka ścinania ze wzorów (4.56). Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy

$$\bar{x}_{SP,L} = x^0_{SP}(1+\varkappa), \tag{5.16}$$

gdzie

(5.17)

$$\varkappa = \frac{2\alpha(\beta-1)\sqrt{(1+\alpha)\delta}\, B(B-H)f}{-\alpha(\beta-1)\sqrt{(1+\alpha)\delta}(B-H)^2 f + (1+\alpha)(1+\beta)\sqrt{2\alpha(B+H)f}\,(B+H)\delta L}$$

(wobec wzoru (5.7) jest $\bar{y}_{SP,L}=0$).

Podzielmy licznik i mianownik wzoru (5.17) przez $\beta-1$ i zastosujmy regułę l'Hospitala do drugiego wyrazu mianownika, który przyjmuje wartość nieoznaczoną dla $L=0$ oraz dla $L=\infty$. Oznaczmy ten wyraz symbolem μ. Otrzymujemy wówczas

$$\lim \mu = \lim \frac{L(1+\beta)}{\beta-1} = \lim \frac{1+L+1/e^{2KL}}{2k}. \tag{5.18}$$

Gdy $L\to\infty$, to $\mu\to\infty$ oraz $\varkappa\to 0$. Wynika stąd, że daleko od miejsca utwierdzenia jest $\bar{x}_{SP,L}\approx x^0_{SP}$, jak należało przypuszczać.

Przyjmijmy teraz, że $L\to 0$. Wówczas otrzymujemy w granicy

$$[\mu]_{L=0} = \frac{1}{k} \tag{5.19}$$

i wartość $\varkappa$ jest skończona.

Podstawmy do wzoru (5.17) wymiary dźwigara przyjęte na początku § 5. Po przekształceniach otrzymujemy

$$\bar{x}_{SP,L} = x^0_{SP}\left(1 + \frac{5}{-2 + \frac{9(1+\beta)}{2\sqrt{5}(B+1)}\cdot\frac{L}{H}}\right), \tag{5.20}$$

gdzie

$$x^0_{SP} = -\frac{5}{9}H. \tag{5.21}$$

Stosując dopiero co omówione przejście graniczne dla wyrażenia μ otrzymujemy dla $L=0$

$$\bar{x}_{SP,L=0} = 3x^0_{SP}, \tag{5.22}$$

gdyż

$$[\varkappa]_{L=0} = 2. \tag{5.23}$$

Wynik powyższy świadczy, że dla dźwigarów bardzo krótkich („nieskończenie" krótkich) dodatkowe przesunięcie środka ścinania pod wpływem utwierdzenia sztywnego wynosiłoby 200% odległości x^0_{SP}. Jest rzeczą zrozumiałą, że zgodnie z zasadą Saint-Venanta odpowiednie przesunięcie środka ścinania będzie szybko malało wraz ze wzrostem długości dźwigara. Przedstawia to rysunek 6, na którym podano wykres wielkości $\varkappa$ w zależności od stosunku L/H. Dla dźwigarów niezbyt smukłych, np. dla $L=2B=10H$, $\varkappa$ jest równe nieomal 0,3; dla dźwigarów stosunkowo wydłużonych, np. dla $L=5B=25H$ $\varkappa$ stanowi jeszcze około 0,1.

Przechodzimy obecnie do rozpatrzenia osi skręcania. Przyjęliśmy poprzednio, że $P_x\equiv 0$. Można sprawdzić, że dla rozpatrywanego przekroju jest według ostatniego ze wzorów (4.26) n_2 równe zeru. Ponieważ jest równocześnie $y_2=y_3$, to ze wzoru (4.25.1) wynika

$$a = 0. \tag{5.24.1}$$

Podobnie, korzystając ze wzorów (4.41) oraz (4.50) i (4.51) można stwierdzić, że prawa strona wzoru (4.38) przyjmująca postać

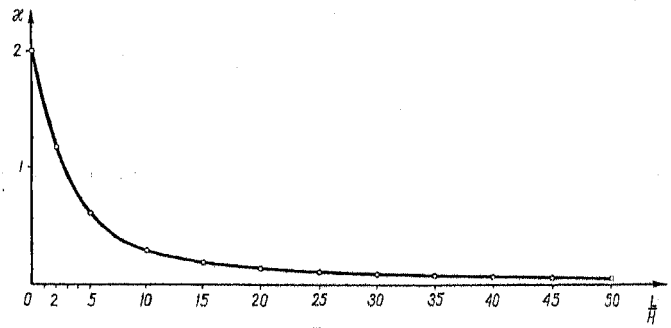
$$\frac{1+a}{a}\cdot\frac{2H}{\Delta f}(a_1+2a_1+a_3)$$

staje się równa zeru. Wynika stąd, że również

$$C_1+K_1=0, \tag{5.24.2}$$

wobec czego ostatecznie współrzędna y_{ss} osi skręcania jest tożsamościowo równa zeru (porównaj wzór (4.59.2)). Oś skręcania jest zatem krzywą płaską leżącą w płaszczyźnie xz.

Rozpatrzmy z kolei współrzędną x_{ss} osi skręcania. Obliczmy w tym celu wielkości b, c, (c_2+k_2) i $\overline{M}$ występujące we wzorze (4.59.1).



Rys. 6

Wielkość b obliczamy ze wzoru (4.25.2) uwzględniając wzór (4.26). Zważywszy, że w rozpatrywanym przykładzie jest $x_1=x_2$, otrzymujemy po wykonaniu odpowiednich przekształceń

$$b=\frac{4(1-a)}{ak^2(B+H)f}. \tag{5.25}$$

Według wzoru (4.52.3)

$$c=\frac{(B-H)E}{FG\delta}. \tag{5.26}$$

Pozostają jeszcze do obliczenia wielkości (C_2+K_2) i $\overline{M}$. Na podstawie wzorów (4.39), (4.41), (4.50) oraz (4.52) otrzymujemy

$$C_2+K_2=\frac{4BP_y}{a\Delta f}[(x_P-x_{SP}^0)(au_3-u_1)+(av_{y3}-v_{y1})], \tag{5.27}$$

$$\overline{M}=P_y[(x_P-x_{SP}^0)g+f_y], \tag{5.28}$$

gdzie (porównaj (4.51.1))

$$au_3-u_1=\frac{(1-a)H}{2GF\delta}. \tag{5.29}$$

Załóżmy, że ramię x_P siły P_y względem początku współrzędnych rośnie nieograniczenie i że równocześnie wielkość siły zdąża do zera w ten sposób, że iloczyn P_yx_P zachowuje wartość niezmienną, równą np. M. Wówczas skręcanie poczyna przeważać coraz bardziej nad zginaniem i w granicy otrzymujemy tzw. *skręcanie czyste* dźwigara (momentem M). W tym przypadku granicznym oś skręcania przyjmuje postać szczególną, odpowiadającą skręcaniu czystemu. Równanie jej przedstawione w przypadku ogólnym wzorami (4.59) jest obecnie

$$x_{SS}^{(M)}=\frac{bg[z]+\dfrac{4kB}{a\Delta f}(au_3-u_1)z}{cg[z]+\dfrac{k(B+H)}{2GF^2\delta}z} \tag{5.30}$$

$(y_{ss}^{(M)}=0)$ lub po dłuższych przekształceniach

$$x_{SS}^{(M)}=x_{SP}^0\frac{\{ak(B-H)f[z]+2(1+a)(1+\beta)\delta z\}(B+H)}{ak(B-H)^2f[z]+2(1+a)(1+\beta)(B+H)\delta z}. \tag{5.31}$$

We wzorze powyższym moment skręcający M, jak widać, nie występuje. Oznacza to, że kształt osi skręcania przy skręcaniu czystym nie zależy od wielkości momentu.

W przekroju $z=L$ jest

$$x_{SS,L}^{(M)}=x_{SP}^0(1+\varkappa), \tag{5.32}$$

a więc, jak wynika ze wzoru (5.16), również

$$x_{SS,L}^{(M)}=\bar{x}_{SP,L}. \tag{5.33}$$

Stwierdziliśmy w ten sposób bezpośrednio słuszność twierdzenia Webera, o którym wspomnieliśmy na wstępie. Przypominamy, że według tego twierdzenia środek ścinania pokrywa się w przekroju końcowym (obciążonym) ze środkiem skręcania, gdy utwierdzenie dźwigara jest sztywne i środek skręcania wyznaczony zostaje dla skręcania czystego. Gdy to ostatnie założenie zostaje odrzucone, to, jak o tym była mowa poprzednio, oba punkty charakterystyczne przekroju końcowego przestają się pokrywać.

Przekształćmy wyrażenie (5.16), podstawiając zamiast $\beta-1$ równoważny symbol $[L]$ i wprowadzając wielkość k. Otrzymujemy wówczas

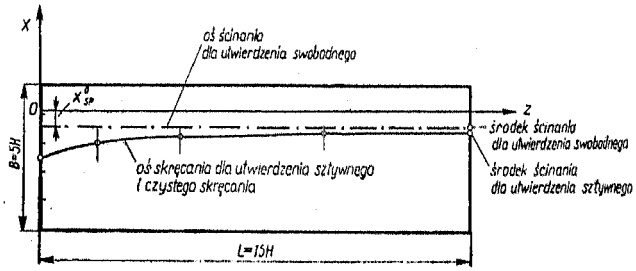
$$\bar{x}_{SP,L}=x_{SP}^0\frac{\{ak(B-H)f[L]+2(1+a)(1+\beta)\delta L\}(B+H)}{ak(B-H)^2f[L]+2(1+a)(1+\beta)(B+H)\delta L}. \tag{5.34}$$

Porównajmy teraz wzory (5.31) i (5.34). Jak widać, prawe ich strony przedstawiają identyczne wyrażenia z tą jedynie różnicą, że zmienna z odgrywa rolę wielkości stałej L i odwrotnie. Wynika stąd następujące znamienne twierdzenie:

Oś skręcania wyznaczona dla czystego skręcania przedstawia miejsce geometryczne środków ścinania przekroju końcowego (obciążonego), wyznaczonych dla dźwigarów o różnej długości L.

Jeżeli więc wykreślimy oś skręcania (przy założeniu, że rzecz dotyczy czystego skręcania) dla dźwigara o długości L i następnie długość tę będziemy zmniejszali aż do zera, to środek ścinania przekroju końcowego, położonego w zmiennej odległości od miejsca utwierdzenia, przesuwać się będzie po osi skręcania.

Dla wymiarów przyjętych w rozpatrywanym przykładzie kształt osi skręcania przy czystym skręcaniu przedstawia rysunek 7. Kształt ten



Rys. 7

odpowiada ściśle, co jest oczywiste, kształtowi krzywej przedstawionej na rysunku 6; obie te krzywe są bowiem w istocie identyczne.

Znajdźmy współrzędną $[x^{(M)}_{SS}]_{z=0}$ punktu, w którym oś skręcania w przypadku czystego skręcania przebija płaszczyznę utwierdzenia. Stosując omówione poprzednio przejście graniczne otrzymujemy

$$[x^{(M)}_{SS}]_{z=0} = x^0_{SP}\frac{[\alpha k^2(B-H)f+2(1+\alpha)\delta](B+H)}{-\alpha k^2(B-H)^2 f+2(1+\alpha)(B+H)\delta} \tag{5.35}$$

lub dla wymiarów przyjętych w przykładzie

$$[x^{(M)}_{SS}]_{z=0} = 3x^0_{SP}. \tag{5.35.1}$$

Z powyższych wzorów wynika, *że położenie punktu, w którym oś skręcania przy czystym skręcaniu przebija płaszczyznę utwierdzenia, nie jest zależne od długości dźwigara i zależy jedynie od własności geometrycznych przekroju poprzecznego.* Wynik ten ma istotne znaczenie.

Z drugiej strony dla dźwigarów wysmukłych (symbolicznie dla $L=\infty$) przyjąć można z dostatecznym przybliżeniem, że środek skręcania $[x^{(M)}_{SS}]_{z=\infty}$ przekroju obciążonego (końcowego) pokrywa się z punktem x^0_{SP}:

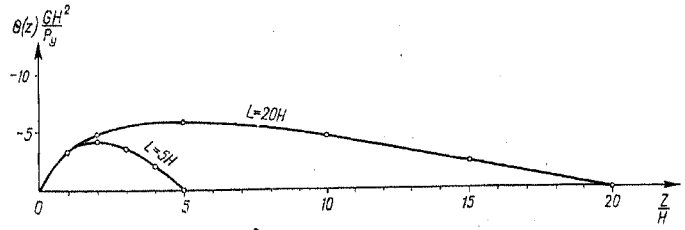
$$[x^{(M)}_{SS}]_{z=\infty} = x^0_{SP}. \tag{5.36}$$

Z porównania wzorów (5.35.1) i (5.36) można wnioskować, że zastąpienie osi skręcania prostą równoległą do osi dźwigara nie byłoby w danym razie nawet w przybliżeniu słuszne (porównaj rys. 7), jeśli idzie o część dźwigara bliską miejsca utwierdzenia.

Obliczmy jeszcze skręcanie dźwigara utwierdzonego sztywno, gdy siła P_y przechodzi przez środek ścinania przekroju końcowego. Wzór (4.58) przyjmuje w danym razie następującą postać:

$$\Theta(z) = \frac{P_y}{GH^2}\cdot\frac{200\sqrt{5}}{27(\beta+1)}\left[[z]-\frac{\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{z}{H}-\frac{4}{3}\cdot\frac{[z]}{\beta+1}}{\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{L}{H}-\frac{4}{3}\cdot\frac{\beta-1}{\beta+1}}\right], \tag{5.37}$$

gdzie $\beta=\exp\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{L}{H}$. Wykresy funkcji $\Theta\left(\frac{z}{H}\right)$ w skali $1:\frac{P_y}{GH^2}$ dla stosunków L/H równych odpowiednio 5 i 20 przedstawiono na rysunku 8.



Rys. 8

Jak z tych wykresów wynika, w połowie dźwigara bliższej końca utwierdzonego kąt skręcania osiąga wartość największą, równą np. dla $L/H=20$ około $5{,}8\,P_y/GH^2$. Aby ocenić rząd tej wielkości (nazwijmy ją Θ_{max}), obliczmy kąt skręcania ϑ_L końca tego samego dźwigara, gdy siła P_y działa wzdłuż prawej pionowej ścinki przekroju poprzecznego (porównaj rys. 5). Przyjmijmy dla uproszczenia, że utwierdzenie dźwigara jest swobodne. Wówczas ze wzoru Bredta-Batho otrzymujemy

$$\vartheta_L = \frac{M_{SP}}{4GF_2}\oint\frac{ds}{\delta}, \tag{5.38}$$

gdzie M_{SP} oznacza moment siły P_y względem środka ścinania przekroju obciążonego.

Dla wymiarów przyjętych w rozpatrywanym przykładzie otrzymujemy po prostym obliczeniu

$$\vartheta_L = 333{,}3 \frac{P_y}{GH^2}, \tag{5.39}$$

skąd wynika, że Θ_{max} wynosi około 1,7% ϑ_L. Jest to więc niewątpliwie wielkość mała, zawierająca się nieomal w granicach dokładności pomiaru efektywnych kątów skręcenia dźwigarów cienkościennych.

Bibliografia

[1] J. Bonder, *O sprzężonych drganiach płatów wolnonośnych*, Wiad. Techn. Lotn. 2 (1936), str. 50-79.

[2] A. Grzędzielski i J. Nowiński, *Wzory na obliczanie naprężeń w konstrukcjach skorupowych*, Inst. Techn. Lotn., Warszawa 1938.

[3] — *Środek sił poprzecznych i środek skręcania przekrojów belek cienkościennych osadzonych swobodnie*, Techn. Lotn. 1 (1939), str. 1-5.

[4] R. Kappus, *Drillknicken von Stäben mit offenem Profil*, Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforsch.

[5] J. Nowiński, *O pewnej metodzie obliczenia cienkościennych dźwigarów wspornikowych osadzonych swobodnie*, Biuletyn Inst. Techn. Lotn. 4 (1947), str. 1-55.

[6] — *Oś skręcania i oś ścinania w przypadku swobodnego osadzenia dźwigarów skrzynkowych*, Techn. Lotn. 1 (1950), str. 2-8.

[7] — *Naprężenia i odkształcenia skrzydła dźwigarowego osadzonego sztywno*, Techn. Lotn. 1 (1951), str. 2-13.

[8] — *O nieścisłości pewnego twierdzenia utożsamiającego środek ścinania ze środkiem skręcania*, Arch. Mech. Stos. III, 1 (1951) str. 53-60.

[9] — *Teoria dźwigarów cienkościennych zbieżnych*, Prace Gł. Inst. Lotn. 1 (1951), str. 3-47.

[10] J. Nowiński i A. Kornecki, *Wpływ zamocowania zupełnego na naprężenia w dźwigarze cienkościennym o przekroju trapezowym poddanym skręcaniu*, Biuletyn Inst. Techn. Lotn. 8 (1947), str. 39-60.

[11] C. Weber, *Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt*, Zeitschr. für Angew. Math. und Mech. 2 (1926), str. 1-55.

[12] В. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва-Ленинград 1940.

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРНЫХ ТОЧКАХ СЕЧЕНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОК

Ю. ПОВИНСКИЙ

РЕЗЮМЕ

Применение упрощенных и, в связи с этим, недостаточно точных методов вычисления в первом периоде развития самолётостроения обусловливало в течение долгого времени отсутствие чётких и правильных воззрений на работу тонкостенных конструкций. Только после окончания последней войны появилось несколько работ, в которых достаточно обобщённым и точным образом была разработана теория тонкостенных конструкций, а вернее — теории тонкостенных балок. Однако, ввиду разнообразных трудностей, из этой теории невозможно было вывести все заключения, которые выяснили бы существовавшие до сих пор противоречивые мнения. Это, в особенности, касается полезных в ежедневной конструкторской практике понятий центра изгиба и центра кручения и, соответственно, оси изгиба[1]) и оси кручения[2]).

Отсутствие точного определения и анализа этих понятий вытекает не только из теоретических трудностей, но и из упомянутых исторических причин, ибо эти понятия появились и внедрились еще в первой, примитивной фазе статических расчётов. В этой фазе напряжения в лонжеронах крыла определялись при предположении, что закрепление лонжеронов в фюзеляже так наз. свободное, а для напряжений употреблялись формулы, применяемые только в частном случае, не имеющим практического значения, когда нагрузка действует на свободный конец балки[3]).

Исходя из этих двух приближённых положений, путём экстраполяции получался вывод, что расположение оси изгиба зависит только от геометрических свойств поперечных сечений, а не зависит от закрепления балки и распределения нагрузок. Такое мнение в действительности не имело никаких обоснований, а только можно было предполагать на основании опыта, что в более грубых методах вычисления можно было считать его достаточно приближённым. В последнее время, например, автор предлагаемой работы доказал для балок двусвязного сечения, [8], что положение центра изгиба в конечном сечении (на свободном конце) зависит от способа закрепления другого конца балки. Иная работа, [7], подвергла сомнению теоретическое основание самого определения оси изгиба (в такой формулировке, которая применялась до сих пор (ср. сноску 1)).

[1]) Под *осью изгиба* подразумеваются линия, которую пересекают в любом поперечном сечении равнодействующие внешних нагрузок, когда балка не подвергается кручению.

[2]) *Ось кручения* есть геометрическое место точек, вокруг которых происходит вращение поперечных сечений во время деформации балки.

[3]) Положение еще больше осложняется, если добавочно принимается во внимание конусность балки. В дальнейшем мы этим пренебрегаем, ограничиваясь рассмотрением цилиндрических балок.

Источником таких же неясностей является понятие оси кручения. Как известно, согласно теореме К. Вебера [11], центр кручения конечного сечения консольной балки, нагруженной парой сил, действующей в этом сечении (т. е. балки подвергнутой чистому кручению) совпадает с центром изгиба этого сечения, в случае, когда закрепление балки идеально жёстко. Это утверждение распространялось за пределы его справедливости, без уважительных для этого причин. Следовательно утверждалось, между прочим, что положение и вид оси кручения, считаемой без всяких сомнений прямолинейной, не зависит от рода закрепления и нагрузки и, что эта ось совпадает в осью изгиба (отсюда вытекает, иногда, понятие одной только оси, называемой „упругой" осью). В нескольких статьях, [3], [5]-[9], автор этой работы показал неправильность такого воззрения и доказал, что ось кручения в общем случае не является прямой линией и что её положение зависит не только от рода закрепления, но и от типа, а даже величины нагрузки. В этих работах указан тоже факт, что хотя в конечном (нагруженном) сечении и существует точка, обладающая свойствами, приписываемыми центру изгиба, то, всё-таки, приложение силы в этой точке приводит к вращению всех поперечных сечений, кроме единственно самого нагружаемого сечения и, конечно, защемлённого. Такой вывод, естественно, теоретически противоречит традиционному пониманию роли оси изгиба, хотя невозможно пока определить его практического значения (как следовало бы из вычисленного в настоящей работе примера, §§ 4 и 5, и из опыта — значение его скорее небольшое). Во всяком случае, он ещё более суживает пределы применимости определения, употребляемого до сих пор, и придаёт центру изгиба значение скорее локальное.

Следует подчеркнуть, что до сих пор мы говорили о центре изгиба конечного сечения и об оси кручения только в таком случае, когда нагрузка действует в плоскости конечного сечения. Полная же разработка вопроса требует рассмотрения влияния сил, действующих в промежуточных сечениях, а не в конечном. Но такая формулировка встречается со значительными затруднениями при вычислениях, особенно когда рассматриваются конкретные примеры, а не общие положения. Именно ввиду этого в настоящей работе ограничена область обобщения известных до сих пор выводов, хотя и нет никаких принципиальных трудностей для полного выяснения существующих сомнений. Применённые ограничения состоят прежде всего в том, что рассмотрено действие только одной силы, приложенной в промежуточном сечении, впрочем любом, а не действие любой нагрузки. Для этого случая приведены общие формулы для координат центра изгиба нагруженного сечения, (3.9.1) и (3.9.2), принимая, что сечение балки двусвязно, а закрепление жёстко. Если нагруженным сечением является конечное, упомянутые формулы переходят в формулы (3.8.1.) и (3.8.2), выведенные в прежней работе автора [8].

Для разрешения значительных трудностей, возникающих при вычислении конкретных примеров, положено, что стенки переносят только срезывающие напряжения (следовательно это так наз. „неработающие" стенки); одновременно положено, что в балке находятся продольные подкрепления (поясы), которые перенимают полностью существующие нормальные напряжения. При таких положениях, приводятся раньше выведенные формулы для балки трапецоидального, несимметричного сечения, [7], и производится эффективное вычисление для прямоугольного сечения, обладающего одной только осью симметрии (асимметрия сечения состоит в неравности площадей сечения поясов).

Этот пример наглядно показывает, как конечно и должно быть, что центр изгиба конечного сечения, в общем случае, не совпадает с центром кручения

того же сечения, и что совпадение обеих точек наступает только тогда, когда нагрузка балки вызывает так называемое чистое кручение.

Установлено тоже, что действительно, при жёстком закреплении ось кручения в общем случае не является прямой линией и что ее положение вообще зависит от рода и величины нагрузки. Кроме того оказалось, что положение центра изгиба конечного сечения зависит от длины балки; для очень коротких балок, собственно говоря для балок с малой гибкостью, расстояние между центром изгиба и центром тяжести сечения может возрасти троекратно в сравнении с таким же расстоянием для гибких балок. Характерно, что по мере уменьшения длины балки, центр изгиба перемещается по кривой, совпадающей с осью кручения, определённой для случая так называемого чистого кручения.

Все рассуждения, проведенные в работе, касаются балок, имеющих жёсткие диафрагмы, недопускающие деформации поперечных сечений в их плоскостях. Сечение балки постоянно (это значит, что толщина стенок является лишь функцией местоположения в сечении), но оно любое, двусвязное. При положенной недеформируемости сечений, составляющие перемещения представлены формулами (1.1)-(1.3), а напряжения формулами (1.4) и (1.5) (ср. [5] и [9]). Решение граничной проблемы (1.7) произведено путём разделения перемещений, (1.8), и напряжений, (1.9), (1.10) и (1.11), на две группы; первая из них, означенная индексом 0, представляет величины, связанные с элементарной („инженерской") теорией изгиба и кручения, вторая же группа, обозначенная индексом i представляет величины, связанные с так наз. самоуравновешенными системами напряжений. Таким путём получены общие формулы (1.12) для напряжений (ср. [9]).

Когда на балку действует сосредоточенная сила, приложенная в любом сечении (§ 2), то получаем формулы (2.5)-(2.7), соответственно для нормальных напряжений, полной депланации и угла кручения части, находящейся ближе места укрепления; для другой части балки те же величины представлены формулами (2.8)-(2.10). Из граничных условий (2.1) и (2.2), или (2.19) и (2.20) определяются постоянные, которые позволяют записать выражения для углов закручивания в форме (2.22) и (2.23). Далее определяются координаты центра изгиба промежуточного сечения (§ 3). Когда нагрузка действует на конец балки, а закрепление свободно, то координаты представлены формулами (3.3), приведёнными впервые в работе [4]. Когда закрепление жёстко, то координаты центра изгиба конечного сечения (нагруженного) представлены, как уже упоминалось, формулами (3.6) или (3.8). Для силы, действующей в пролёте, формулы можно обобщить к форме (3.9).

В дальнейшем (§ 4) рассмотрено общий пример балки трапецоидального сечения, с так наз. неработающей оболочкой (выведение формул, данных почти без доказательств, содержится в работе [7]).

Для координат центра изгиба получаются здесь формулы (4.56), являющиеся частным случаем формул (3.8). Для координат центра кручения получаются формулы (4.59), переходящие, в случае свободного закрепления, в упрощенные формулы (4.60). Численный пример (для случая, когда сечение прямоугольное, но несимметрическое, в выше упомянутом смысле) приведен в § 5. Выводы вытекающие из дискуссии примера, уже приведены в начале настоящего резюме.

CENTRAIN CHARACTERISTIC POINTS OF CROSS-SECTIONS OF THIN WALLED TUBES

J. NOWIŃSKI

SUMMARY

The use of simplified and, in consequence, often inaccurate methods of calculation during the first period of the progress of aviation caused for a long time the lack of precise and correct knowledge concerning the thin walled structures. After the last war several papers appeared, in which the theory of thin walled structures, and more precisely, the theory of this walled tubes has been developed in a correct and sufficiently general manner. The conclusions, sufficient to explain the existing differences of opinion have not been drawn, however, because of many difficulties which have been encountered. This concerns in particular the notions of the centres of shear and twist and the axes of shear [1]) and twist [2]), useful in everyday engineering practice. The lack of exact definition and analysis of these notions is a consequence of not only the difficulties of theoretical nature but equally the above mentioned historical causes, the notions in question having been introduced in the first period characterized by primitive methods of calculation. During that period the stresses in wing beams were determined with the assumption of the so-called free supporting of the beams, and the formulae adopted for the computation of the stresses were not correct except in one particular case of no practical importance, namely that of the load acting at the free end of the tube [3]).

From these two approximate assumptions it was concluded that the position of the axis of shear depends splely upon the geometrical properties of the cross-section and is independent of the mode of fastening of the tube and the distribution of the load. Such conclusion was not correct and the approximation could not be considered as sufficient except for more rough calculation methods. The author, and other investigators, have shown recently that for tubes of doubly connected cross--section [8] the position of the centre of shear at the free end depends on the mode of fastening of the other end.

In another paper [7] the autor questioned the theoretical foundations of the existing definition of the axis of shear.

The notion of the axis of twist is a source of similar doubts. It is known that, according to the theorem of C. Weber [11], the centre of twist in the end cross-

[1]) By the *axis of shear* we mean the curve which is intersected in any cross--section by the resultant of the external load, if the tube is not subjected to torsion.

[2]) The *axis of twist* is the locus of points, around which the corresponding cross--sections are rotated as a consequence of the deformation of the tube.

[3]) The problem becomes still more complicated if a tapered tube is considered. This is not discussed here, however, and the subsequent considerations are confined to cylindrical tubes only.

-section of a cantilever loaded with a couple in the plane of that cross-section (in other words, subjected to pure torsion) coincides with the centre of shear if the fastening of the cantilever is perfectly rigid.

This theorem was considered, without sufficient grounds, to be equally exact outside the limits of its validity. It was supposed that the position and the shape of the axis of twist, which was considered to be incontestably straight, was independent of the way of fastening and the load, and that it was identical with the axis of shear (hence the notion of the *elastic axis* uniting the two axes).

In several papers [3], [5]-[9], the author has pointed out the incorrectness of this opinion and has shown that the axis of twist is not, in general, a straight line, and that its position depends not only on the system of fastening but equally on the kind and the magnitude of the load. It is equally indicated in those papers that although there exists in the (loaded) end cross-section a point having properties identical with those of the centre of shear, a force acting at this point causes rotation of all cross-sections except the loaded cross-section itself, and the fixed cross-section at the other end. Such conclusion is, of course, theoretically contrary to the traditional view on the role of the axis of shear, altough it is still difficult to estimate its practical importance. (From the numerical example, §§ 4 and 5, and according to the experience it would seem to be rather small.) In any case it makes the limits of applicability of the existing definition still more narrow and it implies a rather local importance of the centre of shear.

Let us observe that thus far we have considered the centre of shear in the end cross-section, and the axis of twist for a load acting in the plane of the end cross-section. A complete analysis of the problem would require an investigation of the influence of forces in intermediate cross-sections. This encounters considerable difficulties of mathematical nature especially in concrete cases. The generalisation of the results presented in this paper is, therefore, limited, although there exists no essential difficulty of complete investigation of the problem. The limitation in question consits principally in that the load considered is not arbitrary but consituted by a single force situated in an arbitrarily chosen cross-section. General formulae are given for this case, expressing the coordinates of the centre of shear of the loaded cross-section, (3.9.1) and (3.9.2), with the assumption of a doubly connected cross-section and a rigid fastening. If the cross-section at the free end is loaded the above equations take the form of equations (3.8.1) and (3.8.2), derived in one of the previous papers of the author, [8].

In order to overcome considerable difficulties of calculation of numerical examples it is assumed that the walls carry shearing stresses only. It is then a so-called "unstressed" skin structure. This assumption does not impair the exactness of the conclusions. At the same time, it is assumed that the tube is provided with longitudinal reinforcements (booms), carrying the whole of existing direct stresses. Under this assumption the equations derived previously for a tube with a trapezoidal asymmetric cross-section, [7], are quoted and a numerical calculation made for a rectangular cross-section having only one axis of symmetry, the asymmetry being caused by different cross-sections of the booms. This example proves, as it was expected, that the centre of shear in the end cross-section does not, in general, coincide with the centre of twist. They become identical only in the case of the so-called pure torsion.

It is equally shown that, in the case of a rigid fastening, the axis of twist does not, in general, represent a straight line and that its position depends on the kind and the magnitude of the load. The position of the centre of shear of the end cross-section proves to be dependent on the length of the tube; for very short tubes, the distance between the centre of shear and the centroid of the cross-section can become three times greater than in the case of slender tubes. It is worth to be noted, that with decreasing length, the centre of shear describes a curve identical with the axis of twist for pure torsion. The whole of the discussion presented in this paper concerns tubes provided with diaphragms preventing any deformation of the cross-sections in their planes. The arbitrary, doubly connected cross-section of the tube is constant (which means that the thickness of the wall is a function of the considered point of the cross-section only).

The cross-sections being undeformable the components of displacement are expressed by equations (1.1)-(1.3) and the stresses by equations (1.4) and (1.5) (see [5] and [9]). The corresponding boundary problem (1.7) is solved by dividing the displacements, (1.8), and the stresses, (1.9), (1.10) and (1.11), into two groups, the first, with the subscript 0 representing the quantities corresponding to the elementary (engineer's) theory of bending and torsion, the second, with the subscript i, those pertaining to the so-called self-equilibrating systems. Thus, we arrive at the final formulae (1.12) for stresses (see [9]).

If the tube is subjected to a concentrated force in an arbitrarily chosen cross-section, § 2, we obtain equations (2.5)-(2.7) expressing the normal stresses, the total warping and the angle of rotation of the part of the tube adjacent to the fixed end respectively. The corresponding quantities for the other part of the tube are expressed by equations (2.8)-(2.10). From the boundary conditions (2.1) and (2.2), or alternatively (2.19) and (2.20), we determine the constants permitting to express the angles of rotation in the form of (2.22) and (2.23).

Let us determine now the coordinates of the centre of shear in an intermediate cross-section, § 3. If the load is acting at the end of the tube and the supporting is free, the coordinates in question are expressed by equations (3.3), first derived in [4]. If the attachment is rigid, the coordinates of the centre of shear of the (loaded) end cross-section are expressed by equations (3.6) or (3.8), as mentioned before. In the case of an intermediate location of the load the formulae obtained can be generalized to the form (3.9).

Next, § 4, the general case of a trapezoidal tube with walls effective only in shear is considered. The equations, which are given here without proof, are derived in [7]. The coordinates of the centre of shear are expressed by equations (4.56) which are a particular case of equations (3.8). For the coordinates of the centre of twist we obtain equations (4.59), which in the case of free supporting reduce to the simplified form (4.60). A numerical example (in the case of a rectangular cross-section, asymmetric in the above explained meaning) is given in § 5. The conclusions have been discussed in the foregoing sections of this summary.

SPIS RZECZY

Wstęp 3

1. Wzory podstawowe 7

2. Dźwigar obciążony siłą pojedynczą 13

3. Środek ścinania przekroju pośredniego 17

4. Dźwigar o przekroju trapezowym z tzw. pokryciem niepracującym . . . 21

5. Przykład liczbowy (dźwigar o przekroju prostokątnym niesymetrycznym) . 36

Bibliografia 45

О некоторых характерных точках сечений тонкостенных балок (резюме) . 46

Certain characteristic points of cross-sections of thin walled tubes (summary) . 49