ROZPRAWY MATEMATYCZNE

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

III

WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI

Géométrie textile et les espaces à connexion affine

WARSZAWA 1953

PRINTED IN POLAND

Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa, Śniadeckich 8.
Nakład 600 Papier druk. satyn., kl III, 70x100, 80 g. Arkuszy 2, 2/16
Oddano do składu w grudniu 1952 r. Druk ukończono w czerwcu 1953 r.
Zam. 166/53 Wrocławska Drukarnia Naukowa, Wrocław, Świerczewskiego 19. F-4-18995

Introduction.

Dans leur excellent livre sur la Géométrie textile MM. W. Blaschke et G. Bol[1]) ont traité, entre autres, le problème des invariants de divers réseaux du plan et de l'espace. Je reprends ici le même problème en se servant d'une autre méthode: je montre que les réseaux de n ou de $n+1$ familles de courbes et les réseaux de $n+1$ familles d'hypersurfaces d'un espace $\mathcal{X}_n$ peuvent être associés univoquement à une variété généralisée de Klein. Par suite, l'étude d'un réseau se réduit à celle d'un espace généralisé ce qui permet, en particulier, d'appliquer les méthodes bien connues pour résoudre le problème de l'équivalence de deux réseaux et celui des isomorphies d'un réseau.

Ce travail est divisé en quatre chapitres. Au chapitre premier j'établis les conditions qui doivent satisfaire les coefficients Γ_{ij}^h d'une connexion affine sans torsion pour que ses géodésiques puissent être partagées en ∞^{n-1} congruences telles que les directions des lignes appartenant à ces congruences se correspondent homographiquement en divers points. Je désigne cette connexion par (H) et je fais voir qu'on peut lui associer d'une façon invariante une autre connexion (P) qui est douée d'une torsion et du parallélisme absolu des directions des vecteurs. La connexion (P) a été définie et étudiée pour la première fois par M. M. Haimovici[2]). Après avoir étudié les propriétés de la connexion (P) je résous le problème de l'équivalence de deux variétés à connexion (P) et celui des isomorphies d'une telle variété. Je montre finalement qu'aux connexions (H) et (P) peut être liée d'une manière bien déterminée une variété à connexion weylienne.

Le chapitre II est consacré aux réseaux du plan composés de trois familles de courbes. On y montre que ce réseau peut être associé d'une façon invariante à l'espace généralisé qui, dans le schéma

[1]) W. Blaschke u. G. Bol [1], Zweiter Abschnitt. Les chiffres entre crochets se rapportent à l'index bibliographique placé à la fin du travail.

[2]) Cf. Haimovici [4].

de Klein-Cartan, correspond au groupe des substitutions linéaires $\bar{u}=ku+a$, $\bar{v}=kv+b$. En utilisant les notions et les propriétés de cet espace je trouve les conditions pour qu'un réseau admette un groupe d'isomorphies.

Au chapitre III je considère les réseaux composés de $n+1$ familles de courbes ou d'hypersurfaces d'un espace $\mathcal{X}_n$. Dans l'un et dans l'autre cas ces réseaux sont liés à une variété à connexion (P) dont le vecteur d'Einstein est nul. Il en résulte que le problème de l'équivalence des réseaux dont il est question peut être résolu au moyen de la méthode développée au chapitre premier.

Le dernier chapitre est consacré aux réseaux composés de n familles de courbes de l'espace $\mathcal{X}_n$. Ici encore on peut construire un espace généralisé lié invariablement au réseau. Cet espace est basé sur le groupe de substitutions linéaires $\bar{u}^k=r_k u^k+a^k$.

Dans tout le travail je me sers de méthodes du Calcul des différentielles extérieures de Cartan[3]).

I. Connexions (H) et (P).

1. Soient x^h les coordonnées d'un point arbitraire M d'une variété A_n $(n\geqslant 2)$ à connexion affine sans torsion[4]). Attachons à ce point un repère affine U_M composé de ce point comme origine et de n vecteurs indépendants I_h. Le mouvement infinitésimal qui fait passer le repère U_M en le repère $U_{M'}$ attaché à un point infiniment voisin $M'(x^h+dx^h)$ soit défini au moyen des formules

$$(1)\qquad DM=\omega^r I_r,\qquad DI_h=\omega_h^r I_r,\qquad \omega_h^r=\Gamma_{hs}^r\omega^s,$$

les symboles $\omega^h=\omega^h(x,dx)$ désignant des formes différentielles linéaires aux variables x^i et les symboles Γ_{hs}^r désignant des fonctions des mêmes variables. On suppose bien entendu que les formes ω_h sont linéairement indépendantes dans un domaine D dans lequel la connexion est définie.

Des formules (1) on déduit les équations de structure de la variété A_n

$$(2)\qquad \begin{aligned} &d\omega^h+[\omega_r^h\omega^r]=0, && d\omega_i^h+[\omega_r^h\omega_i^r]=\Omega_i^h,\\ &\Omega_i^h=\tfrac{1}{2}R_{pqi}^{\cdots h}[\omega^p\omega^q], && R_{pqi}^{\cdots h}+R_{qpi}^{\cdots h}=0\end{aligned}$$

[3]) Voir p. ex. Cartan [3].

[4]) Dans tout ce qui suit les indices latins parcourent les valeurs $1,2,\ldots,n$.

et les équations de ses géodésiques

$$(3)\qquad \frac{d\omega^h\left(x,\dfrac{dx}{dt}\right)}{dt}+\Gamma_{rs}^h\omega^r\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\omega^s\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=\varphi(t)\,\omega_h\left(x,\frac{dx}{dt}\right);$$

$\varphi(t)$ désignant une fonction arbitraire de la variable t.

2. *Supposons que les géodésiques de la variété A_n puissent être partagées en ∞^{n-1} congruences de telle façon qu'il y ait une correspondance homographique entre les directions des lignes appartenant à ces congruences et passant par divers points de la variété;* nous désignerons par le symbole (R) ce système de congruences et nous lui donnerons le nom du *système homographique*. La variété à connexion affine jouissant de la propriété demandée sera désignée par le symbole (H).

Cette hypothèse admise, on peut choisir le repère U_M de manière qu'en chaque point de la variété le vecteur I_h soit tangent à une ligne de la même congruence du système (R). Nous désignerons cette congruence par le symbole $[h]$; ses équations différentielles auront donc la forme:

$$(4)\qquad \omega^1=0,\quad \ldots,\quad \omega^{h-1}=0,\quad \omega^{h+1}=0,\quad \ldots,\quad \omega^h=0$$

et celles d'une congruence quelconque du système (R) pourront être présentées de la manière suivante:

$$(5)\qquad \omega^h\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=\frac{c^h}{\psi(t)},$$

où $c^1, c^2,\ldots,c^h$ sont des constantes quelconques et $\psi(t)$ une fonction arbitraire de la variable t. Observons que les équations (4) seront conservées si l'on remplace le repère U_M par un autre repère $\bar{U}_M$ au moyen de la substitution

$$(6)\qquad I_h=\varrho\bar{I}_h,$$

où ϱ désigne une fonction arbitraire différente de zéro dans le domaine D, et que c'est la seule substitution qui les conserve.

Les équations (3) devant être des conséquences des relations (5), on est conduit à l'égalité

$$c^h\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\psi}\right)+\frac{1}{\psi^2}\Gamma_{rs}^h c^r c^s=\frac{\varphi}{\psi}c^h$$

que l'on peut écrire

(7) $$\Gamma^h_{rs} c^r c^s = \sigma(t) c^h.$$

En désignant la partie symétrique et la partie antisymétrique du coefficient Γ^h_{rs} par Λ^h_{rs} et M^h_{rs} respectivement:

(8) $$\Gamma^h_{rs} = \Lambda^h_{rs} + M^h_{rs}, \qquad \Lambda^h_{rs} = \Lambda^h_{sr}, \qquad M^h_{rs} + M^h_{sr} = 0,$$

on peut réduire la relation (7) à l'équation suivante:

$$\Lambda^h_{rs} c^r c^s = \sigma(t) c^h.$$

Cette condition devant être satisfaite quelles que soient les constantes c^h, on en conclut que les coefficients Λ^h_{rs} doivent avoir la forme

(8a) $$\Lambda^h_{rs} = \frac{1}{2}(\delta^h_r a_s + \delta^h_s a_r),$$

a_r étant des fonctions arbitraires de point (δ^h_r symboles de Kronecker). Donc, si l'on se raporte à la formule (8), on aura

$$\Gamma^h_{rs} = \frac{1}{2}\delta^h_r a_s + \frac{1}{2}\delta^h_s a_r + M^h_{rs}$$

ou

$$\Gamma^h_{rs} = \delta^h_r a_s + \frac{1}{2}(\delta^h_s a_r - \delta^h_r a_s) + M^h_{rs}.$$

Le deuxième et le troisième terme du second membre étant antisymétriques par rapport aux indices inférieurs, la dernière formule peut être ramenée à la forme plus simple

(9) $$\Gamma^h_{rs} = \delta^h_r a_s + \frac{1}{2} S_{rs}^{\cdot\cdot h}, \qquad S_{rs}^{\cdot\cdot h} + S_{sr}^{\cdot\cdot h} = 0.$$

En tenant compte de cette formule, la troisième des égalités (1) devient

(10) $$\omega^r_h = \delta^r_h \omega + \frac{1}{2} S_{hs}^{\cdot\cdot r} \omega^s,$$

où l'on a posé

(11) $$\omega = a_s \omega^s.$$

Nous voyons ainsi qu'*une variété est douée de la connexion* (H), *si l'on peut choisir le repère* U_M *de façon que les coefficients* Γ^h_{rs} *soient donnés par les formules* (9). Si l'on porte ces expressions dans les équations (3) des géodésiques, on obtient

(12) $$\frac{d\omega^h\left(x, \frac{dx}{dt}\right)}{dt} + \omega\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\omega^h\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \varphi(t)\,\omega^h\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Ajoutons que *la forme de l'expression* (9) *et*, par conséquent, *celle des équations* (12), *sera conservée, si l'on remplace le repère* U_M *par un autre repère* $\bar{U}_M$ *à l'aide de la substitution* (6). En effet, en se servant des équations (1) on vérifie facilement que les formes ω^h et ω^r_h se changeront d'après les formules

(13) $$\bar{\omega}^h = \varrho\omega^h, \qquad \bar{\omega}^r_h = \omega^r_h - \delta^r_h\, d\log\varrho;$$

on aura donc

(14) $$\bar{\Gamma}^r_{hs} = \frac{1}{\varrho}\delta^r_h(a_s - \partial_s \log\varrho) + \frac{1}{2}\frac{1}{\varrho} S_{hr}^{\cdot\cdot s},$$

l'opérateur ∂_s étant défini au moyen de l'identité

(15) $$df = \omega^s \partial_s f.$$

En posant

(16) $$\bar{\omega} = \omega - d\log\varrho, \qquad \bar{a}_s = a_s - \partial_s \log\varrho$$

et

(17) $$\bar{S}_{hs}^{\cdot\cdot r} = \frac{1}{\varrho} S_{hs}^{\cdot\cdot r},$$

la formule (14) peut s'écrire

$$\bar{\Gamma}^r_{hs} = \delta^r_h \bar{a}_s + \frac{1}{2}\bar{S}_{hs}^{\cdot\cdot r},$$

c'est ce qui justifie notre remarque.

3. En tenant compte de la formule (10) *le premier groupe d'équations de structure* (2) *de la variété à connexion* (H) *peut s'écrire*

$$d\omega^h + [\omega\omega^h] = \frac{1}{2} S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s].$$

Imaginons maintenant que dans l'espace de coordonnées x^h soit donnée *une seconde connexion affine* (P) telle que le mouvement infinitésimal du repère U_M soit défini au moyen des formules

$$DM = \omega^r I_r, \qquad DI_h = \omega I_h, \tag{18}$$

les symboles ω^r et ω ayant la même signification que ci-dessus. On en déduit *les équations de structure* de la variété à connexion (P); les voici

$$\begin{gathered} d\omega^h + [\omega\omega^h] = \frac{1}{2} S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s], \qquad d\omega = \frac{1}{2} K_{rs}[\omega^r\omega^s], \\ K_{rs} + K_{sr} = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

On voit donc que *la variété à connexion* (P) *est douée d'une courbure et d'une torsion, les composantes de ces tenseurs étant respectivement K_{rs} et $S_{rs}^{\cdot\cdot h}$*; il est aussi bien évident que tout vecteur transporté parallélement à lui même le long d'un cycle infinitésimal conserve sa direction.

La connexion (P) *est liée d'une façon invariante à la connexion* (H). Effectivement, si le système des vecteurs I_h subit la substitution (6), les équations (19) seront remplacées par les relations suivantes:

$$d\bar{\omega}^h + [\bar{\omega}\bar{\omega}^h] = \frac{1}{2} \bar{S}_{rs}^{\cdot\cdot h}[\bar{\omega}^r\bar{\omega}^s], \qquad d\bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{K}_{rs}[\bar{\omega}^r\bar{\omega}^s],$$

où l'on doit poser

$$\begin{gathered} \bar{\omega}_h = \varrho\omega_h, \qquad \bar{\omega} = \omega - d \log \varrho, \\ \bar{S}_{rs}^{\cdot\cdot h} = \varrho^{-1} S_{rs}^{\cdot\cdot h}, \qquad \bar{K}_{rs} = \varrho^{-2} K_{rs}. \end{gathered} \tag{20}$$

Réciproquement, *étant donnée la connexion* (P), *on peut lui associer d'une façon invariante une connexion* (H); il suffit pour cela de définir les coefficients Γ^h_{rs} conformément aux formules (9). Il est aussi facile de montrer que le lien entre les deux connexions sera conservée, si l'on remplace le repère U_M par un autre repère en effectuant sur les vecteurs I_h de U_M une substitution linéaire à coefficients constants. Les deux connexions (H) et (P), ainsi liées l'une à l'autre, ont les mêmes géodésiques déterminées par les équations (12) ou par le système équivalent (5).

4. *Supposons maintenant que dans un domaine* (D) *de l'espace de coordonnées x_i soit donné un système homographique de ∞^{n-1} congruences de courbes* (cf. nº 2); nous le désignerons, comme auparavant, par le symbole (R). Pour définir le système (R) il suffit de donner les équations de $n+1$ de ses congruences; les équations d'une congruence arbitraire du système peuvent être présentées sous la forme

$$\frac{\omega^1}{c^1} = \frac{\omega^2}{c^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{c^n}, \tag{21}$$

où les ω^h sont n formes différentielles, linéaires et indépendantes en dx^i, les c^h étant des constantes arbitraires. Nous allons montrer qu'*avec le système* (R) *est liée d'une façon intrinsèque une variété à connexion* (P) *dont le vecteur d'Einstein est nul* [5].

Posons pour ce but

$$d\omega^h = \frac{1}{2} A^h_{rs}[\omega^r\omega^s], \qquad A^h_{rs} + A^h_{sr} = 0.$$

En tenant compte de ces formules et de la relation (11), le premier groupe des équations (19) devient

$$\frac{1}{2} A^h_{rs}[\omega^r\omega_s] + a_r\delta^h_s[\omega^r\omega^s] = \frac{1}{2} S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s].$$

Il en résulte

$$S_{rs}^{\cdot\cdot h} + \delta^h_r a_s - \delta^h_s a_r = A^h_{rs}.$$

En y supposant successivement $h \neq r, s$ et $h = s$, on obtient

$$S_{rs}^{\cdot\cdot h} = A^h_{rs} \qquad (h \neq r, s) \tag{22'}$$

et

$$S_{rs}^{\cdot\cdot s} - a_r = A^s_{rs} \qquad (r \neq s). \tag{22''}$$

(Il ne faut pas sommer par rapport à l'indice s dans la dernière relation!) Si l'on pose dans les équations (22') successivement $s = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n$ et que l'on fait la somme des relations ainsi obtenues, il viendra

$$S_{rs}^{\cdot\cdot s} - (n-1)\, a_r = A^s_{rs}.$$

En tenant compte de la condition imposée au vecteur d'Einstein d'être nul ($S_{rs}^{\cdot\cdot s} = 0$), la dernière équation nous donnera

$$a_r = -\frac{1}{n-1} A^s_{rs}.$$

[5]) Cf. Haimovici [4].

Le coefficient a_r une fois déterminé, on calcule les coefficients $S_{rs}^{\cdot\cdot h}$ à l'aide des relations (22′) et (22″). Nous voyons ainsi que *ces formules déterminent d'une façon univoque les grandeurs a_r et $S_{rs}^{\cdot\cdot h}$ de la connexion* (P) *en fonction des coefficients A_{rs}^h des différentielles $d\omega^h$.*

Si nous remplaçons le système (21) par un système équivalent en multipliant toutes les formes ω^h par un facteur arbitraire ϱ, nous obtiendrons la même variété à connexion (P) rapportée aux systèmes locaux qui se déduisent des systèmes primitifs au moyen de la substitution (6).

5. En vue des applications ultérieures de la connexion (P) à la géométrie textile nous allons consacrer ce numéro à l'étude des propriétées d'une variété P_n à connexion (P).

Rappelons d'abord que les équations (18) définissent la connexion et que les équations (19) déterminent sa structure. En se servant de ces équations et en différentiant extérieurement l'identité (15) nous obtenons la relation suivante:

$$\partial_r\partial_s f - \partial_s\partial_r f = (a_r\delta_s^t - a_s\delta_r^t - S_{rs}^{\cdot\cdot t})\partial_t f \tag{23}$$

dont nous ferons un usage fréquent dans la suite.

Après avoir fait ces remarques préliminaires, constatons en premier lieu que dans la variété P_n on peut introduire une métrique angulaire en définissant l'angle θ de deux éléments linéaires $\omega^h(x, dx)$ et $\omega^h(x, \delta x)$ au moyen de la formule

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\omega^i(x,dx)\,\omega^i(x,\delta x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\omega^i(x,dx)\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\omega^i(x,\delta x)\right)^2}}. \tag{24}$$

En appelant θ_{hi} l'angle entre deux lignes appartenant respectivement aux congruences $[h]$ et $[i]$ et passant par un même point, la dernière formule nous donne $\cos\theta_{hi} = 0$; plus généralement, l'angle θ_{ic} entre la ligne de la congruence $[i]$ et la ligne de la congruence

$$\frac{\omega^1}{c^1} = \frac{\omega^2}{c^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{c^n}$$

sera donnée par la formule

$$\cos\theta_{ic} = \frac{c^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(c^i)^2}}.$$

Nous voyons ainsi que *les lignes appartenant à deux congruences différentes de système* (R) *se coupent sous un angle constant et que, en particulier, les lignes des congruences $[h]$ et $[i]$ se coupent sous un angle droit.*

Considérons maintenant dans la variété à connexion (P) un champ des vecteurs contrevariants et désignons par les symboles X^h les composantes par rapport au repère U_M du vecteur du champ attaché au point M. Si l'on change le repère U_M en se servant de la substitution (6), les composantes X^h seront transformés d'après les formules

$$\bar{X}^h = \varrho X^h;$$

il s'ensuit que les composantes Y_h d'un vecteur covariant subissent la transformation suivante:

$$\bar{Y}_h = \varrho^{-1} Y_h.$$

On en déduit d'une façon bien connue la loi de transformation d'un tenseur quelconque, r fois contrevariant et s fois covariant, de composantes $A_{(\ldots)}^{(\ldots)}$:

$$\bar{A}_{(\ldots)}^{(\ldots)} = \varrho^{r-s} A_{(\ldots)}^{(\ldots)}.$$

En particulier les composantes des tenseurs de courbure et de torsion se transforment comme suit:

$$\bar{K}_{hi} = \varrho^{-2} K_{hi}, \qquad \bar{S}_{hi}^{\cdot\cdot j} = \varrho^{-1} S_{hi}^{\cdot\cdot j}.$$

Remarquons que les tenseurs de la variété à connexion (P) sont identiques avec les grandeurs auxquelles M. Blaschke a donné le nom de „Halbinvarianten" [6]).

En se raportant aux formules (18) on trouve pour les différentielles absolues des vecteurs (X^h) et (Y_h) les expressions suivantes:

$$DX^h = dX^h + \omega X^h, \qquad DY_h = dY_h - \omega Y_h; \tag{25}$$

d'une façon générale on aura

$$DA_{h_1\ldots h_s}^{i_1\ldots i_r} = dA_{h_1\ldots h_s}^{i_1\ldots i_r} + (r-s)\omega A_{h_1\ldots h_s}^{i_1\ldots i_r}.$$

En tenant compte des formules (11) et (15), on obtient les dérivées covariantes

$$\begin{gathered}\nabla_j X^h = \partial_j X^h + a_j X^h, \qquad \nabla_j Y_h = \partial_j Y_h - a_j Y_h,\\ \nabla_j A_{h_1\ldots h_s}^{i_1\ldots i_r} = \partial_j A_{h_1\ldots h_s}^{i_1\ldots i_r} + (r-s)\,a_j A_{h_1\ldots h_s}^{i_1\ldots i_r}.\end{gathered} \tag{25'}$$

---

[6]) Blaschke u. Bol [1], p. 155.

L'application de l'identité (23) nous conduit à la relation

$$\nabla_i \nabla_j X^h - \nabla_j \nabla_i X^h = K_{ij} X^h - S_{ij}^{\cdot\cdot r} \nabla X^h$$

et aux relations analogues pour un vecteur covariant et pour un tenseur quelconque.

En différentiant extérieurement les équations (19) on obtient *la loi de la conservation de la courbure et de la torsion*

$$(26) \qquad \nabla_{[r} K_{st]} + K_{p[r} S_{st]}^{\cdot\cdot p} = 0, \qquad \nabla_{[r} S_{st]}^{\cdot\cdot h} = \delta^h_{[r} K_{st]} - S_{p[r}^{\cdot\cdot h} S_{st]}^{\cdot\cdot p}.$$

Si l'on assujetti la seconde équation à la saturation des indices h et t, on trouve

$$(27) \qquad (n-2) K_{rs} = \nabla_s S_r - \nabla_r S_s + \nabla_t S_{rs}^{\cdot\cdot t} + S_{rs}^{\cdot\cdot t} S_t,$$

où l'on a désigné par les symboles S_p les composantes du vecteur d'Einstein de la variété ($S_p = S_{pt}^{\cdot\cdot t}$). Nous voyons donc que *la courbure de la variété s'exprime au moyen de sa torsion;* si celle-ci s'annule, il en est de même de la courbure. Si, en particulier, le vecteur d'Einstein est nul, la relation (27) prend la forme plus simple

$$(28) \qquad (n-2) K_{rs} = \nabla S_{rs}^{\cdot\cdot t}.$$

Nous allons maintenant considérer quelques cas spéciaux des variétés P_n.

(a) *Supposons en premier lieu que chacune des équations $\omega^h = 0$ soit complètement intégrable*; elle représentera donc une famille d'hypersurfaces que nous désignerons par le symbole $\{h\}$. Les lignes de la congruence $[h]$ étant des trajectoires orthogonales des hypersurfaces de la famille $\{h\}$, ces familles forment un *système orthogonal.* Ajoutons que *la famille $\{h\}$ est composée d'hypersurfaces totalement géodésiques*, les lignes des congruences $[1], \ldots, [h-1], [h+1], \ldots, [n]$ étant toutes des géodésiques de la variété.

Pour que ce cas soit réalisé, il faut, d'après le théorème de Frobenius[7]), que l'on ait $[\omega^h d\omega^h] = 0$. En tenant compte de la première des équations (19) on en conclut qu'il doit être

$$S_{rs}^{\cdot\cdot h} = 0 \qquad (h \neq r, s).$$

Ces conditions expriment que le vecteur de torsion Ω^h calculé pour un cycle infinitésimal situé dans l'élément plan déterminé par les vecteurs I_r et I_s est situé dans cet élément.

[7]) Cartan [3], p. 48.

(b) *Envisageons maintenant le cas, où l'on a $K_{rs} = 0$.* D'après la deuxième des équations (19) on aura $d\omega = 0$. Ceci montre que la forme ω est une différentielle exacte; on peut donc choisir le repère U_M de manière qu'il soit $\omega = 0$ (cf. n⁰ 3). *La variété à connexion* (P) *est douée dans ce cas de parallélisme absolu* et la formule (10) prend ici la forme

$$\omega_h^r = \frac{1}{2} S_{hs}^{\cdot\cdot r} \omega^s.$$

Si l'on suppose de plus que le vecteur d'Einstein est nul, on aura $\omega_r^r = 0$ ce qui veut dire que *la connexion* (H) *associée à la connexion* (P) *est isométrique*, c'est-à-dire qu'elle admet une unité de volume.

(c) Si les composantes $S_{ij}^{\cdot\cdot h}$ du tenseur de torsion satisfont à la condition $S_{ij}^{\cdot\cdot h} + S_{ih}^{\cdot\cdot j} = 0$, on a, d'après l'équation (10), $\omega_r^h + \omega_h^r = 0$ $(h \neq r)$; la variété H_n est dans ce cas une variété weylienne et, si l'on a aussi $d\omega = 0$, c'est une variété de Riemann.

6. Nous allons aborder dans ce n⁰ le problème suivant: *Soient donnés deux systèmes d'équations*

$$\frac{\omega^1}{c^1} = \frac{\omega^2}{c^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{c^n}$$

et

$$\frac{\bar\omega^1}{\bar c^1} = \frac{\bar\omega^2}{\bar c^2} = \ldots = \frac{\bar\omega^n}{\bar c^n},$$

les ω^h étant des formes différentielles linéairement indépendantes en x^i, les $\bar\omega^h$ étant des formes linéairement indépendantes en $\bar x^i$ et les c^h et $\bar c^h$ étant des constantes arbitraires; nous nous proposons de trouver les conditions nécessaires et satisfaisantes pour que ces systèmes soient équivalents. En d'autres termes il s'agit ici du problème de l'équivalence de deux systèmes homographiques de congruences de courbes, définis au moyen des équations ci-dessus.

Or, nous avons démontré au n⁰ 4 que les deux systèmes d'équations que nous avons en vue peuvent être liés d'une façon invariante à deux variétés P_n et $\bar P_n$ à connexion (P). Le problème proposé revient donc à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces variétés puissent être transformées l'une dans l'autre au moyen d'un changement de variables.

En adoptant toutes les conventions des n^{os} précédents, imaginons qu'on a choisi d'une façon la plus générale les repères U_M et $\bar{U}_{\bar{M}}$ dans les deux variétés P_n et $\bar{P}_n$; les composantes ω, ω^h et $\bar{\omega}, \bar{\omega}^h$ de leurs mouvements infinitésimaux satisferont donc aux équations (19) et aux équations analogues que l'on obtient en affectant d'une barre toutes les lettres principales du système (19). Les formes ω, ω^h dépendent de coordonnées x^i du point M et d'un paramètre ϱ et elles sont indépendantes par rapport aux différentielles de ces variables; ajoutons que la différentielle $d\varrho$ n'intervient que dans la forme ω (voir p. 11). Une remarque analogue est valable pour les composantes $\bar{\omega}, \bar{\omega}^h$.

Considérons maintenant une fonction quelconque f des variables x^i et ϱ; nous introduirons deux opérations différentielles $\partial_0 f$, $\partial_r f$ sur cette fonction en posant

(29) $$df = \omega\partial_0 f + \omega^r\partial_r f.$$

En dérivant extérieurement cette égalité et en tenant compte des équations (19), on est conduit aux identités

(30) $$\partial_0\partial_i f - \partial_i\partial_0 f = \partial_i f, \qquad \partial_i\partial_j f - \partial_j\partial_i f = K_{ij}\partial_0 f + S_{ij}^{\cdot\cdot r}\partial_r f.$$

Convenons de dire que les quantités $\partial_0 f, \partial_r f$ et celles qui s'en déduisent par les mêmes opérations sont des dérivées de divers ordres de la fonction f.

Ceci posé, reprenons le système (19) et dérivons extérieurement ses différentes équations. La première d'elles fournit ainsi l'égalité

$$[d\omega\omega_h] - [\omega d\omega_h] = \frac{1}{2}[dS_{rs}^{\cdot\cdot h}\omega^r\omega^s] + S_{rs}^{\cdot\cdot h}[d\omega^r\omega^s].$$

Si l'on y remplace les différentielles $d\omega, d\omega^h$ par les expressions déduites des équations (19) mêmes et la différentielle $dS_{rs}^{\cdot\cdot h}$ par l'expression

$$dS_{rs}^{\cdot\cdot h} = \omega\partial_0 S_{rs}^{\cdot\cdot h} + \omega^t\partial_t S_{rs}^{\cdot\cdot h},$$

on arrive aux relations

(31′) $$\partial_0 S_{rs}^{\cdot\cdot h} = S_{rs}^{\cdot\cdot h},$$

(31″) $$K_{[rs}\delta^h_{t]} = \partial_{[t}S_{rs]}^{\cdot\cdot h} + S_{p[r}^{\cdot\cdot h}S_{st]}^{\cdot\cdot p}.$$

La dernière équation entraîne, par saturation des indices, l'égalité suivante:

(32) $$(n-2)K_{rs} = \partial_h S_{rs}^{\cdot\cdot h} + \partial_r S_s - \partial_s S_r + S_p S_{rs}^{\cdot\cdot p},$$

où l'on a désigné par les symboles S_r les composantes du vecteur d'Einstein. La dérivation de la seconde des équations (19) conduit de même aux relations

(33) $$\partial_0 K_{rs} = 2K_{rs}, \qquad \partial_{[t}K_{rs]} + K_{p[r}S_{st]}^{\cdot\cdot p}.$$

Si l'on porte la composante $S_{rs}^{\cdot\cdot h}$ dans la première des identités (30) et que l'on utilise la relation (31′), on trouve

$$\partial_0\partial_i S_{rs}^{\cdot\cdot h} = 2\partial_i S_{rs}^{\cdot\cdot h}.$$

En poursuivant ce procédé de proche en proche on démontre facilement que toutes les dérivées $\partial_{a_q}\partial_{a_{q-1}}\dots\partial_{a_1}S_{sr}^{\cdot\cdot h}$ $(q=1,2,\dots;\ a_1, a_2, \dots, a_q = 0,1,\dots,n)$ s'expriment au moyen de celles, où tous les indices sont différents de zéro.

Nous allons montrer que les quantités

(34) $$S_{rs}^{\cdot\cdot h}, \partial_{i_q}\partial_{i_{q-1}}\dots\partial_{i_1}S_{rs}^{\cdot\cdot h} \qquad (q=1,2,\dots;\ i_1, i_2, \dots, i_q = 1,2,\dots,n)$$

constituent le système complet des invariants de la variété P_n (invariants relatifs). Supposons pour cela qu'il se laisse établir entre les points M et $\bar{M}$ et entre les repères U_M et $\bar{U}_{\bar{M}}$ des variétés P_n et $\bar{P}_n$ une correspondance telle que le mouvement du repère U_M soit transformé en le mouvement du repère $\bar{U}_{\bar{M}}$. Il en résulte qu'il doit exister un changement des variables x^i, ϱ en les variables $\bar{x}^i, \bar{\varrho}$ tel que l'on ait

(35) $$\bar{\omega} = \omega, \qquad \bar{\omega}^h = \omega^h.$$

En différentiant extérieurement ces égalités et en ayant égard aux équations (19), on trouve

$$\bar{K}_{rs} = K_{rs}, \qquad \bar{S}_{rs}^{\cdot\cdot h} = S_{rs}^{\cdot\cdot h};$$

les composantes K_{rs} et $S_{rs}^{\cdot\cdot h}$ sont donc des invariants de la variété P_n. Soit I l'un d'eux; il suffit d'employer la formule

$$dI = \omega\partial_0 I + \omega^r\partial_r I$$

pour en déduire des invariants dérivés $\partial_0 I$, $\partial_r I$. Chacun de ces invariants conduit à son tour à des nouveaux invariants dérivés. Nous obtenons ainsi une suite illimitée d'invariants relatifs qui, d'après ce qui précède, se ramènent tous aux quantités (34). Supposons que parmi les invariants (34) il y a p indépendants; nous préciserons cette hypothèse en admettant que parmi les invariants dérivés d'ordre $k<m$ il y a des invariants indépendants des compo-

santes $S_{sr}^{\cdot\cdot h}$ et de leurs dérivées d'ordres inférieurs à k, mais que les invariants dérivés d'ordre m et, par conséquent, ceux d'ordres supérieurs à m s'expriment tous en fonction des précédents.

Désignons par I_a $(a=1,2,\ldots,p)$ les invariants indépendants; on peut donc poser

$$(36)\qquad \begin{gathered} S_{rs}^{\cdot\cdot h}=\Phi_{rs}^{h}(I_1,I_2,\ldots,I_p),\\ \partial_{i_k}\partial_{i_{k-1}}\ldots\partial_{i_1}S_{rs}^{\cdot\cdot h}=\Phi_{rsi_1,\ldots,i_k}^{h}(I_1,I_2,\ldots,I_p)\quad (k=1,2,\ldots,m). \end{gathered}$$

Remarquons que parmi les fonctions Φ il y a des relations qui résultent des identités (30); nous excluons dans la suite celles des équations (36) qui correspondent à des fonctions dépendantes des autres.

Supposons maintenant que les invariants relatifs $\bar{I}_a$ de la variété $\bar{P}_n$ qui correspondent aux invariants I_a sont aussi indépendants et que les composantes $\bar{S}_{rs}^{\cdot\cdot h}$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre m s'expriment au moyen des invariants $\bar{I}_a$ par les mêmes fonctions Φ qui se présentent dans les équations (36). Si ces conditions sont réalisées, le système d'équations

$$(37)\qquad \begin{gathered} \bar{I}_a=I_a \qquad (a=1,2,\ldots,p),\\ \bar{\omega}=\omega,\qquad \bar{\omega}^h=\omega^h \end{gathered}$$

est complétement intégrable, puisque les équations qui s'en déduisent par différentiation extérieure sont des conséquences des équations du système. La solution générale du système (37) dépend de $n+1-p$ constantes arbitraires; dans le changement de variables que définit cette solution les $\bar{x}^i$ ne dépendent que de x^i; cela résulte du fait dans les formes $\bar{\omega}^h$ et ω^h n'interviennent que les différentielles dx^i, $d\bar{x}^i$ et que les équations $\bar{\omega}^h=\omega^h$ peuvent être résolues par rapport à $d\bar{x}^i$.

Nous avons ainsi démontré que *les invariants* (34) *constituent le système complet des invariants relatifs de la variété P_n et que celle-ci est complétement déterminée par les équations* (36) *que l'on peut appeler les équations naturelles de la variété.* Il faut observer que les fonctions Φ qui entrent dans les équations naturelles ne peuvent être prises arbitrairement; elles sont assujetties aux relations qu'il est facile d'obtenir des identités (30).

Les raisonnements qui précèdent permettent encore de résoudre *le problème d'isomorphies de la variété P_n*; pour obtenir sa solution générale il suffit de supposer que dans les équations (37)

les symboles $\bar{I}_a,\bar{\omega},\bar{\omega}^h$ désignent ce que deviennent les expressions I_a,ω,ω^h, si l'on y remplace les variables x^i,ϱ par les variables $\bar{x}^i,\bar{\varrho}$. On arrive ainsi au résultat que la variété P_n admet un groupe d'isomorphies à $n+1-p$ paramètres, si le nombre des invariants relatifs indépendants est égal à p.

Nous terminerons ce chapitre en montrant que *la connexion P peut être liée aussi, d'une façon invariante, à une connexion weylienne* (W). Définissons pour cela le mouvement infinitésimal qui fait passer le repère U_M en le repère $U_{M'}$ attaché au point $M'(x^i+dx^i)$ au moyen des équations

$$DM=\omega^h I_h,\qquad DI_h=\omega I_h+\overset{*}{\omega}{}_h^r I_r,\qquad \overset{*}{\omega}{}_h^r=\overset{*}{\Gamma}{}_{hs}^r\omega^s,$$

les symboles ω^h et ω ayant la même signification que ci-dessus et les formes $\overset{*}{\omega}{}_h^r$ satisfaisant à la condition $\overset{*}{\omega}{}_h^r+\overset{*}{\omega}{}_r^h=0$, d'où il résulte que l'on doit avoir

$$(38)\qquad \overset{*}{\Gamma}{}_{ir}^h+\overset{*}{\Gamma}{}_{hr}^i=0.$$

Les équations de structure de la connexion prendront donc la forme

$$d\omega^h+[\omega\omega^h]+[\overset{*}{\omega}{}_r^h\omega^r]=0,\qquad d\omega=\Omega,\qquad d\overset{*}{\omega}{}_i^h+[\overset{*}{\omega}{}_r^h\overset{*}{\omega}{}_i^r]=\overset{*}{\Omega}{}_i^h.$$

Nous nous proposons de choisir les coefficients $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^h$ de manière que la première des équations ci-dessus soit identique avec la première des équations (19), autrement dit qu'il soit

$$[\overset{*}{\omega}{}_r^h\omega^r]=-\frac{1}{2}S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s],$$

c'est-à-dire

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{rs}^h[\omega^r\omega^s]=\frac{1}{2}S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s].$$

Il en résulte la condition

$$(39)\qquad \overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^h-\overset{*}{\Gamma}{}_{ji}^h=S_{ij}^{\cdot\cdot h}.$$

En permutant circulairement les indices h,i,j dans la relation (39), on trouve

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^h-\overset{*}{\Gamma}{}_{ji}^h=S_{ij}^{\cdot\cdot h},\qquad \overset{*}{\Gamma}{}_{jh}^i-\overset{*}{\Gamma}{}_{hj}^i=S_{jh}^{\cdot\cdot i},\qquad \overset{*}{\Gamma}{}_{hi}^j-\overset{*}{\Gamma}{}_{ih}^j=S_{hi}^{\cdot\cdot j}.$$

Si de la somme de deux premières de ces équations on retranche la troisième et que l'on tient compte de la relation (38), on trouve

$$2\overset{*}{\Gamma}{}^h_{ij} = S_{ij}{}^{\cdot\cdot h} + S_{jh}{}^{\cdot\cdot i} - S_{ih}{}^{\cdot\cdot j}.$$

Ceci détermine complétement la connexion (W). On vérifie aisément au moyen des formules du n⁰ 3 que la forme des dernières relations reste inaltérée, si l'on assujetti les vecteurs du repère $U_{M'}$ à la substitution (6) ou à une substitution linéaire à coefficients constants.

Nous pouvons donc constater qu'avec la connexion (H) on peut lier d'une façon invariante les deux connexions (P) et (W); les variétés aux connexions (H) et (P) ont les mêmes géodésiques définies au moyen des équations (12); les géodésiques de la variété à connexion (W) sont en général différentes, leurs équations ayant la forme suivante:

$$\frac{d\omega^h(x, dx/dt)}{dt} - \sum_{r,s=1}^{n} S_{rs}{}^{\cdot\cdot r}\, \omega^r\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\omega^s\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \varphi(t)\,\omega^h\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

II. Réseaux de trois familles de courbes dans le plan.

8. Soient x, y les coordonnées d'un point arbitraire M d'une variété V_2. Supposons que dans un domaine D de celle-ci soit donné *un réseau* (R) *formé de trois familles de courbes;* nous les désignerons par les symboles [0], [1] et [2] et nous écrirons leurs équations comme suit:

(1) $$\omega^0 = 0, \qquad \omega^1 = 0, \qquad \omega^2 = 0,$$

ω^0, ω^1 et ω^2 étant des formes différentielles linéaires aux variables x, y. On suppose bien entendu que ces formes sont deux-à-deux indépendantes. Nous les supposons *normées* de façon qu'il soit identiquement

(2) $$\omega^0 = \omega^1 - \omega^2.$$

Il est facile de vérifier qu'on peut trouver d'une façon unique une forme différentielle ω telle que l'on ait

(3) $$d\omega^1 + [\omega\omega^1] = 0, \qquad d\omega^2 + [\omega\omega^2] = 0.$$

La forme ω devant s'exprimer linéairement au moyen des formes ω^1, ω^2 nous poserons

(4) $$\omega = a_1\omega^1 + a_2\omega^2.$$

Il est évident que les formes $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ ne sont déterminées qu'à un facteur près. Si l'on fait la substitution

(5) $$\bar{\omega}^k = \varrho\omega^k \qquad (k = 0, 1, 2),$$

ϱ étant une fonction arbitraire, différente de zéro dans tout le domaine D, la forme des équations (3) sera conservée à condition de remplacer ω par l'expression

(6) $$\bar{\omega} = \omega - d\log\varrho.$$

9. Nous allons montrer que *le réseau* (R) *induit dans le domaine D une connexion affine sans torsion basée sur le groupe des substitutions linéaires*

$$\bar{u} = ku + a, \qquad \bar{v} = kv + b.$$

Dans ce but attachons à chaque point $M(x, y)$ du domaine D un repère local U_M composé du point M comme origine et de deux vecteurs I_1 et I_2 et supposons que le mouvement infinitésimal de ce repère soit défini par les formules

$$dM = \omega^i I_i, \qquad dI_i = \omega I_i \qquad (i = 1, 2).$$

Les équations de structure de la connexion seront donc

(7) $$d\omega^1 + [\omega\omega^1] = 0, \qquad d\omega^2 + [\omega\omega^2] = 0, \qquad d\omega = \Omega, \qquad \Omega = K[\omega^1\omega^2].$$

En se servant de la formule (4) on trouve

$$K = \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1,$$

l'opération ∂_i étant définie au moyen de l'identité

(8) $$df = \omega^1\partial_1 f + \omega^2\partial_2 f.$$

Nous désignerons la connexion ainsi définie par le symbole (H) et nous donnerons au coefficient K le nom de *courbure* de celle-ci; K est identique avec la grandeur que M. Blaschke a désigné par le symbol ϱ[8]).

Il est évident que la connexion (H) est liée d'une façon invariante au réseau (R) et que sa courbure se transforme d'après la formule $\bar{K} = \varrho^2 K$, si l'on fait sur les vecteurs du repère U_M la substitution

(9) $$I_1 = \varrho\bar{I}_1, \qquad I_2 = \varrho\bar{I}_2.$$

[8]) Blaschke u. Bol [1], p. 155.

La courbure est donc bien un tenseur deux fois covariant ($K_{11}=K_{22}=0$, $K_{12}=-K_{21}=K$). Remarquons encore que la connexion (H) est un cas spécial de la connexion weylienne et que K est identique avec la *Streckenkrümmung* de la variété[9]). On peut aussi dire que *la connexion liée au réseau* (R) *est un cas spécial de la connexion définie au n⁰ 2*; pour obtenir ce cas il faut supposer $S_{hs}^{\cdot\cdot r}=0$ dans la formule (10) de ce n⁰.

Les équations des géodésiques de la variété à connexion (H) peuvent être réduites à la forme suivante:

$$(10)\qquad \frac{d}{dt}\,\omega^i\left(x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)+\omega\left(x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)\omega^i\left(x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=0.$$

Ces équations ont l'intégrale intermédiaire $\omega^1/c^1=\omega^2/c^2$, c^1 et c^2 désignant deux constantes arbitraires. On en conclut que les trois familles [0], [1] et [2] du réseau sont composées de géodésiques. En définissant au moyen de la formule

$$\cos\theta=\frac{\omega^1(d)\,\omega^1(\delta)+\omega^2(d)\,\omega^2(\delta)}{\sqrt{(\omega^1(d))^2+(\omega^2(d))^2}\ \sqrt{(\omega^1(\delta))^2+(\omega^2(\delta))^2}}$$

l'angle θ entre les directions de deux éléments linéaires $\omega^i(d)$ et $\omega^i(\delta)$, on trouve que les lignes des familles [1] et [2] se coupent sous un angle droit et que celles de la famille [0] font un angle égal à $\pi/4$ avec les lignes de deux autres familles. A l'aide de la dernière formule on peut aussi montrer que les géodésiques définies au moyen de l'équation $\omega^1/c^1=\omega^2/c^2$ coupent toutes les lignes de la même famille du réseau (R) sous un angle constant. Il s'ensuit que *la somme des angles d'un triangle géodésique est égale à* π.

Pour les dérivées covariantes des composantes X^h d'un vecteur contrevariant et des composantes Y_h d'un vecteur covariant on trouve des expressions

$$\nabla_i X^h=\partial_i X^h+a_i X^h,\qquad \nabla_i Y_h=\partial_i Y_h-a_i Y_h,$$

l'opérateur ∂_i étant défini au moyen de la relation (8) et les coefficients a_i au moyen de l'identité (4). On en déduit les relations

$$\nabla_1\nabla_2 X^h-\nabla_2\nabla_1 X^h=KX^h,\qquad \nabla_1\nabla_2 Y_h-\nabla_2\nabla_1 Y_h=-KY_h.$$

10. Nous nous proposons maintenant de trouver *les conditions pour que le réseau* (R) *admette un groupe d'isomorphies*. Imaginons dans ce but qu'on a choisi d'une façon la plus générale les formes ω^0,ω^1 et ω^2 satisfaisant à la condition (2). On a vu que les formes ω^1 et ω^2, linéaires et homogènes par rapport aux différentielles dx,dy, dépendent alors d'un paramètre ϱ et que la forme ω est linéaire par rapport aux différentielles dx,dy et $d\varrho$ (voir les équations (5) et (6) du n⁰ 7).

[9]) Weyl [6], p. 111.

La différentielle $d\Omega$ étant nulle d'après la troisième des équations (7), on déduit de là

$$(11)\qquad [dK\omega^1\omega^2]+K[d\omega^1\omega^2]-K[\omega^1 d\omega^2]=0.$$

Si f est une fonction arbitraire des variables x,y,ϱ, nous pouvons présenter sa différentielle sous la forme suivante:

$$(12)\qquad df=f_0\,\omega+f_1\,\omega^1+f_2\,\omega^2.$$

Si l'on se sert de ces notations et que l'on tient compte des équations (7), on déduit facilement de l'équation (11) la relation suivante:

$$(13)\qquad K_0=2K_1.$$

En différentiant la relation

$$dK=K_0\,\omega+K_1\,\omega^1+K_2\,\omega^2$$

et en tenant compte de l'égalité (13) on obtient

$$2[dK\omega]+[dK_1\omega^1]+[dK_2\omega^2]+2Kd\omega+K_1 d\omega^1+K_2 d\omega^2=0;$$

si l'on se raporte aux équations (7), on en conclut

$$(14)\qquad K_{10}=3K_1,\qquad K_{20}=3K_2,\qquad K_{12}-K_{21}=2K_2.$$

La différentiation de l'égalité (13) conduit de la même manière aux relations

$$(15)\qquad K_{00}=4K,\qquad K_{01}=2K_1,\qquad K_{02}=2K_2.$$

Pour trouver les isomorphies du réseau (R) *on a à intégrer le système de Pfaff formé des équations*

$$(16)\qquad \bar\omega^1=\omega^1,\qquad \bar\omega^2=\omega^2,\qquad \bar\omega=\omega,$$

les symboles $\bar\omega^1,\bar\omega^2,\bar\omega$ désignant ici ce que deviennent les formes ω^1,ω^2,ω, si l'on y remplace les variables x,y,ϱ par les variables $\bar x,\bar y,\bar\varrho$. En différentiant extérieurement ces équations et en tenant compte des relations (7), on trouve qu'il doit être

$$(17)\qquad \bar K=K.$$

Donc, *pour que le système* (16) *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que la courbure K soit constante.* Il résulte de l'équation (13) que cette constante doit être nulle et que, par conséquent, on aura $d\omega=0$. Là connexion attachée au réseau (R) est donc holonome et le réseau admet un groupe continu à 3 paramètres. Il est, comme on sait, équivalent au système de trois familles de droites parallèles [10]).

Supposons maintenant que la courbure ne soit pas constante. La différentiation de l'équation (17) conduit à la relation

$$\bar{K}_0\bar{\omega}+\bar{K}_1\bar{\omega}^1+\bar{K}_2\bar{\omega}^2=K_0\omega+K_1\omega^1+K_2\omega^2,$$

d'où l'on tire les conditions suivantes:

$$\bar{K}_0=K_0, \qquad \bar{K}_1=K_1, \qquad \bar{K}_2=K_2;$$

la première de ces relations étant, d'après l'égalité (13), une conséquence de l'équation (17), on peut remplacer les dernières conditions par le système

$$\bar{K}=K, \qquad \bar{K}_1=K_1, \qquad \bar{K}_2=K_2. \tag{18}$$

La différentiation de ces relations donne de même

$$\bar{K}_{11}=K_{11}, \qquad \bar{K}_{12}=K_{12}, \qquad \bar{K}_{22}=K_{22}.$$

En procédant de cette manière de proche en proche, on trouve une suite infinie de relations de la forme suivante:

$$\bar{K}=K, \qquad \bar{K}_{i_1i_2\ldots i_k}=K_{i_1i_2\ldots i_k} \quad (i_1,i_2,\ldots,i_k=1,2,\ldots). \tag{19}$$

Il semblerait qu'aux indices i on devrait donner trois valeurs suivantes $0,1,2$. Mais il est facile de montrer que les relations ainsi obtenues sont des conséquences des équations (19). En effet, en différantiant l'équation (12) et en ayant égard aux équations (7), on trouve

$$f_{10}-f_{01}=f_1, \qquad f_{20}-f_{02}=f_2, \qquad f_{12}-f_{21}=Kf_0. \tag{20}$$

Si dans la première de ces identités on pose $f=K_1$, on obtient

$$K_{110}-K_{101}=K_{11};$$

d'autre part, si l'on se reporte à la première des équations (14), on trouve

$$K_{101}=3K_{11}.$$

---

[10]) Blaschke u. Bol [1], p. 155. Voir aussi Lie [5], p. 162-169 et Cartan [2], p. 78.

La comparaison de deux dernières relations donne

$$K_{110}=4K_{11}.$$

Observons aussi que de la deuxième des équations (15) on déduit

$$K_{011}=2K_{11}.$$

On voit ainsi que les conditions

$$\bar{K}_{110}=K_{110}, \qquad \bar{K}_{101}=K_{101}, \qquad \bar{K}_{011}=K_{011}$$

sont des conséquences de l'équation $\bar{K}_{11}=K_{11}$. En procédant de cette manière on justifie la remarque faite ci-dessus sur les équations (19).

Ceci établi, nous distinguerons dans la suite trois cas.

(a) *Supposons d'abord que parmi les fonctions*

$$K, \quad K_{i_1i_2\ldots i_k} \quad (k=1,2,\ldots;\ i_1,i_2,\ldots,i_k=1,2) \tag{21}$$

il y a une seule qui soit indépendante.

Le cas $K=\text{const}$ étant exclu, nous pouvons admettre que toutes les grandeurs (21) sont exprimées en fonction de K. Posons en particulier

$$K_1=\varphi(K), \qquad K_2=\psi(K). \tag{22}$$

Il résulte de là

$$K_{10}=\varphi'(K)K_0;$$

l'application des relations (14) et (15) permet d'écrire cette égalité de la façon suivante:

$$3K_1=2\varphi'(K)K.$$

En rapprochant la première des équations (22), on trouve $3\varphi(K)=2\varphi'(K)K$, d'où $\varphi(K)=\alpha K^{3/2}$, α étant une constante. La deuxième des équations (23) donne de même $\psi(K)=\beta K^{3/2}$. En portant ces équations dans les équations (22), on aura

$$K_1=\alpha K^{3/2}, \qquad K_2=\beta K^{3/2},$$

d'où

$$K_{12}=\frac{3}{2}\alpha K^{1/2}K_2, \qquad K_{21}=\frac{3}{2}\beta K^{1/2}K_1,$$

ou encore

$$K_{12}=\frac{3}{2}\alpha\beta K^2, \qquad K_{21}=\frac{3}{2}\alpha\beta K^2.$$

En égard à la troisième des identités (20) et à la relation (13) on trouve $K=0$ contrairement à l'hypothèse faite sur la courbure K. Le cas, où parmi les fonctions (21) il n'y aurait pas deux indépendantes, est donc à rejeter.

(b) Examinons maintenant *le cas, où parmi les fonctions* (21) *il y a deux indépendantes: K et K_1*. (L'hypothèse que K_1 et K_2 seraient des fonctions de K conduit comme ci-dessus au résultat: $K=0$).

Formons le système suivant:

$$d\bar{K}=dK, \qquad d\bar{K}_1=dK_1$$

ou, en développant les différentielles,

$$\bar{K}_0\bar{\omega}+\bar{K}_1\bar{\omega}^1+\bar{K}_2\bar{\omega}^2=K_0\omega+K_1\omega^1+K_2\omega^2,$$

$$\bar{K}_{10}\bar{\omega}+\bar{K}_{11}\bar{\omega}^1+\bar{K}_{12}\bar{\omega}^2=K_{10}\omega+K_{11}\omega^1+K_{12}\omega^2.$$

Les relations (21) et (13) permettent de réduire ces équations à la forme suivante:

$$K_0(\bar{\omega}-\omega)+K_1(\bar{\omega}^1-\omega^1)+K_2(\bar{\omega}^2-\omega^2)=0,$$

$$K_{10}(\bar{\omega}-\omega)+K_{11}(\bar{\omega}^1-\omega^1)+K_{12}(\bar{\omega}^2-\omega^2)=0.$$

Les fonctions K et K_1 étant, par hypothèse, indépendantes, les deux dernières équations le sont aussi; supposons, pour fixer les idées, qu'elles peuvent êtres résolues aux différences $\bar{\omega}-\omega$ et $\bar{\omega}^1-\omega^1$. Nous en concluons que le système (16) est une conséquence des équations

$$\bar{K}=K, \qquad \bar{K}_1=K_1, \qquad \bar{\omega}^2-\omega^2=0.$$

Ce dernier système est, d'après ce qui précède, complétement intégrable, son intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire. Le réseau (R) admet donc un groupe continu à un paramètre.

(c) Si parmi les fonctions (21) il y a trois indépendantes le réseau admet seulement la transformation identique ou un groupe discontinu.

III. Réseaux de $n+1$ familles de courbes ou de $n+1$ familles d'hypersurfaces dans l'espace $\mathfrak{X}_n$.

11. Soient x^h les coordonnées d'un point arbitraire M d'un espace $\mathfrak{X}_n$ à n dimensions ($n>2$). *Supposons que dans un domaine* (D) *de cet espace soit donné un réseau* (S) *formé de $n+1$ familles de courbes.* Nous désignerons ces familles par les symboles [0], [1], ..., [n] et nous admettrons qu'en chaque point du domaine (D) les directions des courbes du réseau sont représentées par $n+1$ vecteurs dont les n pris d'une façon arbitraire sont indépendants. On peut donc choisir n formes indépendantes de Pfaff $\omega^h(x,dx)$ telles que les familles [h] et [0] soient définies respectivement par les deux systèmes d'équations

$$(1)\qquad \omega^1=0, \quad \ldots, \quad \omega^{h-1}=0, \quad \omega^{h+1}=0, \quad \ldots, \quad \omega^n=0$$

et

$$(2)\qquad \omega^1=\omega^2=\ldots=\omega^n.$$

Remarquons que la forme de ces équations sera conservée, si l'on assujetti les ω^h à la substitution

$$\bar{\omega}^h=\varrho\omega^h,$$

ϱ étant une fonction arbitraire du point, différente de zéro dans tout le domaine (D), et que c'est la seule substitution qui les conserve.

Le réseau (S) détermine un système homographique de ∞^{n-1} familles de courbes données par les équations

$$(3)\qquad \frac{\omega^1}{c^1}=\frac{\omega^2}{c^2}=\ldots=\frac{\omega^n}{c^n},$$

les c^h désignant des constantes arbitraires. Or, nous avons démontré au nº 4 qu'avec le système homographique de ∞^{n-1} familles de courbes est liée intrinsèquement une variété P_n à connexion affine (P) dont le vecteur d'Einstein est nul. L'étude du réseau (S) revient donc à celle de la variété P_n et le système complet d'invariants de la variété est en même temps celui du réseau (S). Ceci permet en particulier, de résoudre le problème de l'équivalence de deux réseaux et celui des isomorphies d'un réseau au moyen de la méthode développée au nº 6.

Rappelons encore que les équations (3) représentent les géodésiques de la variété P_n.

On en conclut que les courbes du réseau sont des géodésiques et qu'elles se coupent sous des angles constants: deux courbes de deux familles différentes $[h]$ et $[k]$ se coupent sous un angle droit et elles coupent les courbes de la famille $[0]$ sous un angle dont le cosinus est égal à $1/\sqrt{n}$.

Si le tenseur de torsion de la variété P_n est nul, on aura aussi $K_{rs}=0$ d'après la formule (27) du n° 5. On peut donc normer les formes ω^h de façon qu'il soit $\omega=0$ et, par conséquent, $d\omega^h=0$ (équations (19) du n° 3). Les équations finies des courbes de la famille $[h]$ pourront être réduites à la forme

$$x^1=\text{const}, \ \ldots, \ x^{h-1}=\text{const}, \ x^{h+1}=\text{const}, \ \ldots, \ x^n=\text{const}$$

et celles de la congruence $[0]$ à la forme

$$x^1=x^2=\ldots=x^n.$$

Nous voyons ainsi que *le réseau (S) équivaut dans ce cas au système de $n+1$ familles de droites parallèles.* Il admet évidemment un groupe à $n+1$ paramètres composé de translations et d'homothéties.

12. Considérons maintenant dans le domaine (D) de l'espace $\mathfrak{X}_n$ *un réseau (T) formé de $n+1$ familles d'hypersurfaces* définies par les équations

$$f_k(x^1, x^2, \ldots, x^n)=\text{const} \qquad (k=1,2,\ldots,n+1);$$

nous désignerons ces familles respectivement par les symboles $[1],[2],\ldots,[n+1]$. Nous supposons bien entendu que tous les déterminants

$$\frac{D(f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_n})}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}$$

sont différents de zéro, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ désignant n nombres différents choisis arbitrairement parmi les nombres $1,2,\ldots,n+1$. Les équations différentielles des familles du réseau peuvent être écrites de la manière suivante:

$$\omega^1=0, \qquad \omega^2=0, \qquad \ldots, \qquad \omega^{n+1}=0, \tag{4}$$

les $\omega^k(x,dx)$ $(k=1,2,\ldots,n+1)$ étant des formes linéaires différentielles normées de façon qu'il soit

$$\omega^1+\omega^2+\ldots+\omega^{n+1}=0. \tag{5}$$

Il est clair que n quelconques de ces formes prises arbitrairement sont indépendantes.

Les équations (4) et (5) admettant la seule substitution

$$\bar{\omega}^h=\varrho\omega^h,$$

nous pouvons associer au réseau (T) le système homographique de ∞^{n+1} familles de courbes donné es par les équations

$$\frac{\omega^1}{c^1}=\frac{\omega^2}{c^2}=\ldots=\frac{\omega^n}{c^n}, \tag{6}$$

les c^h étant des constantes arbitraires. Ceci permet d'appliquer les raisonnements du n° 4 et de lier au réseau (T), d'une façon invariante, une variété P_n à connexion (P) dont le vecteur d'Einstein est nul. Les équations de structure de la variété auront la forme (voir n° 3)

$$d\omega^h+[\omega\omega^h]=\Omega^h, \qquad d\omega=\Omega, \tag{7}$$

où

$$\begin{gathered}\omega=a_r\omega^r, \qquad \Omega^h=\frac{1}{2}S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s], \qquad \Omega=\frac{1}{2}K_{rs}[\omega^r\omega^s];\\ S_{rs}^{\cdot\cdot h}+S_{sr}^{\cdot\cdot h}=0, \qquad S_{hr}^{\cdot\cdot r}=0, \quad K_{rs}+K_{sr}=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Chacune des équations (4) devant être, par hypothèse, complétement intégrable, on est conduit aux relations

$$[d\omega^h\omega^h]=0, \qquad [d\omega^{n+1}\omega^{n+1}]=0. \tag{9}$$

La première de ces égalités, si l'on y porte l'expression de $d\omega^h$ tirée de la première des équations (4), donne

$$[\Omega^h\omega^h]=0$$

ou

$$S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s\omega^h]=0,$$

d'où il résulte

$$S_{rs}^{\cdot\cdot h}=0 \qquad (h\neq r,s). \tag{10}$$

La deuxième des équations (9), en égard à l'identité (2), devient

$$\Big[\sum_h d\omega^h \sum_t \omega^t\Big]=0.$$

En y remplaçant $d\omega^h$ par l'expression tirée de la première des équations (7), on sera conduit à la relation

$$\left[\left(\sum_h \omega\omega^h + \sum_h \Omega^h\right)\sum_t \omega^t\right] = 0$$

ou

$$\left[\sum_h \Omega^h \sum_t \omega^t\right] = 0.$$

En tenant compte de la formule

$$\Omega^h = \frac{1}{2} S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r \omega^s],$$

on en déduit la relation

$$\sum_{ht} S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r \omega^s \omega^t] = 0.$$

On en conclut que les coefficients $S_{rs}^{\cdot\cdot h}$ doivent satisfaire aux relations

$$\sum_h (S_{rs}^{\cdot\cdot h} + S_{st}^{\cdot\cdot h} + S_{tr}^{\cdot\cdot h}) = 0.$$

Si l'on rapproche les identités (10), les conditions ci-dessus pourront être remplacées par les suivantes:

(11) $$S_{rs}^{\cdot\cdot r} + S_{tr}^{\cdot\cdot r} + S_{rs}^{\cdot\cdot s} + S_{st}^{\cdot\cdot s} + S_{st}^{\cdot\cdot t} + S_{tr}^{\cdot\cdot t} = 0$$

(il ne faut pas sommer par rapport aux indices r, s, t!).

Nous voyons ainsi que les relations (10) et (11) établissent toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire les composantes du tenseur de torsion de la variété liée au réseau de $n+1$ familles d'hypersurfaces.

Ceci posé, le problème de l'équivalence de deux réseaux d'hypersurfaces et le problème d'isomorphie d'un réseau se réduisent aux problème déjà résolus au nº 6.

13. Le système

$$\frac{d}{dt}\omega^h\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \omega\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\omega^h\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

définissant les géodésiques de la variété P_n associée au réseau (T) équivaut aux équations

$$\frac{\omega^1}{c^1} = \frac{\omega^2}{c^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{c^n}.$$

Les géodésiques définies par les équations

$$\frac{\omega^1}{c^1} = \ldots = \frac{\omega^{h-1}}{c^{h-1}} = \frac{\omega^h}{0} = \frac{\omega^{h+1}}{c^{h+1}} = \ldots = \frac{\omega^h}{c^n}$$

étant toutes contenues dans les hypersurfaces de la famille $[h]$, on en conclut que *les hypersurfaces du réseau (T) sont des hypersurfaces totalement géodésiques.* Les courbes d'intersection des hypersurfaces des familles $[1], \ldots, [h-1], [h+1], \ldots, [n]$ sont données par les équations $\omega^1 = \omega^2 = \ldots = \omega^{h-1} = \omega^{h+1} = \ldots = \omega^n = 0$; ce sont donc des géodésiques orthogonales aux surfaces de la famille $[h]$. Il s'ensuit que *les familles $[1], [2], \ldots, [n]$ forment un système orthogonal.*

IV. Réseaux de *n* familles de courbes dans l'espace $\mathfrak{X}_n$ [11]).

Soient x^h les coordonnées d'un point arbitraire M d'un espace $\mathfrak{X}_n$. Supposons que dans un domaine (D) de $\mathfrak{X}_n$ soit donné *un réseau (S) formé de n familles de courbes.* Nous désignerons ces familles par les symboles $[1], [2], \ldots, [n]$ et nous les supposerons définies de telle manière que par un point arbitraire du domaine (D) il passe une seule courbe de chaque famille et que les directions de ces courbes soient indépendantes. Il résulte de ces hypothèses que les équations différentielles de la famille $[h]$ peuvent être écrites comme suit:

(1) $$\omega^1 = 0, \ \ldots, \ \omega^{h-1} = 0, \ \omega^{h+1} = 0, \ \ldots, \ \omega^n = 0,$$

$\omega^i(x, dx)$ étant des formes différentielles linéaires indépendantes dans tout le domaine (D). La forme de ces équations sera conservée, si l'on assujettit les ω^h à la substitution

(2) $$\overline{\omega}^h = \sigma_h \omega^h$$

et il est évident que c'est la seule substitution qui les conserve.

Nous allons montrer que *le réseau (S) induit univoquement dans le domaine (D) une connexion affine basée sur le groupe des substitutions linéaires de la forme*

(3) $$u^h = r_h \overline{u}^h + a^h.$$

11) Dans ce chapitre nous ne ferons pas usage de la convention de supprimer le signe de sommation devant un terme qui contient l'indice de sommation deux fois répété; le symbole $\sigma_h \overline{\omega}^h$ par exemple ne désignera par conséquent une somme mais un monôme.

Imaginons en effet au point M un repère affine U_M constitué par ce point comme origine et par n vecteurs indépendants I_h. Nous définirons le mouvement de ce repère au moyen des formules

(4) $$dM=\sum \omega^r I_r, \qquad dI_h=\pi_h I_h,$$

les coefficients π_h étant des formes différentielles linéaires aux variables x^h. Les formes ω^h étant indépendantes nous pouvons exprimer les π_h au moyen des formes ω^r:

(5) $$\pi_h=\sum_r a_{h_r}\omega^r.$$

Nous donnerons aux *équations de structure* de la connexion la forme suivante:

(6′) $$d\omega^h+[\pi_h\omega^h]=\Omega^h, \qquad d\pi_h=\Pi_h,$$

où l'on a posé

(6″) $$\Omega^h=\frac{1}{2}\sum_{rs} S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s], \qquad \Pi_h=\frac{1}{2}\sum_{rs} K_{h,rs}[\omega^r\omega^s],$$
$$S_{rs}^{\cdot\cdot h}+S_{sr}^{\cdot\cdot h}=0, \qquad K_{h,rs}+K_{h,sr}=0.$$

Les Π_h et Ω_h pouvant être choisis d'une infinité de manières, on obtient ainsi toute une famille des connexions affines basées sur le groupe (3). Nous allons montrer qu'il en existe une qui est associée intrinsèquement au réseau (S). Pour le faire voir imposons aux formes quadratiques Ω^h la condition

(7) $$[\Omega^h\omega^{i_1}\omega^{i_2}\ldots\omega^{i_{n-2}}]=0;$$

en se reportant à la première des formules (6′) on en déduit les relations

(8) $$S_{ij}^{\cdot\cdot i}=0$$

qui sont invariantes vis-à-vis du groupe des substitutions (2). Il résulte de ces relations que le vecteur d'Einstein est nul:

$$\sum_i S_{ij}^{\cdot\cdot i}=0.$$

Si l'on fait dans les équations (6′) la substitution (2), il viendra

$$d\bar\omega^h+[\bar\pi_h\bar\omega^h]=\bar\Omega^h, \qquad d\bar\pi=\bar\Pi_h,$$

où l'on a posé

$$\bar\Pi_h=\sum_r \bar a_{hr}\bar\omega^r, \qquad \bar\Omega^h=\frac{1}{2}\sum_{rs}\bar S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\bar\omega^r\bar\omega^s].$$

On aura donc

(9) $$\bar\pi_h=\pi_h-d\log\sigma_h, \qquad \bar\Omega^h=\sigma_h\Omega^h$$

et

(10) $$\bar a_{hr}=a_{hr}-\partial_r\sigma_h, \qquad \bar S_{rs}^{\cdot\cdot h}=\frac{\sigma_h}{\sigma_r\sigma_s}S_{rs}^{\cdot\cdot h},$$

l'opérateur $\partial_r f$ étant défini par la formule

(11) $$df=\sum_r \omega^r\partial_r f.$$

Posons maintenant

(12) $$d\omega^h=\frac{1}{2}\sum_{rs}A_{rs}^h[\omega^r\omega^s], \qquad A_{rs}^h+A_{sr}^h=0.$$

Si dans la première des équations (6′) on remplace $d\omega^h$ et π_h par les expressions (12) et (5), on obtient

$$\frac{1}{2}\sum_{rs}A_{rs}^h[\omega^r\omega^s]+\sum_{rs}a_{hr}\delta_s^h[\omega^r\omega^s]=\frac{1}{2}\sum_{rs}S_{rs}^{\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s],$$

d'où il suit

$$a_{hi}=A_{hi}^h, \qquad S_{ij}^{\cdot\cdot h}=A_{ij}^h \qquad (h\neq i).$$

Les équations ci-dessus et équations (8) montrent que, à l'exception des quantités a_{hh}, tous les autres coefficients des formes Π_h et Ω^h sont complétement déterminés par les formes ω^h et par leurs différentielles $d\omega^h$. Mais on peut choisir la substitution (2) de cette façon qu'il soit $\bar a_{hh}=0$. Il suffit pour cela, d'après la première des équations (10), de poser $\partial_h\sigma_h=a_{hh}$. Nous admettrons dans la suite que les formes ω^h sont normées de telle façon qu'il soit $a_{hh}=0$ et que, par suite, on peut effectuer sur celles-ci seulement celles des substitutions (2) qui satisfont à la condition

(13) $$\partial_h\sigma_h=0.$$

15. Nous avons montré au numéro précédent qu'avec le réseau (S) est lié d'une manière invariante une connexion affine dont les équations de structure sont présentées par les égalités (6′) et dont le tenseur de torsion satisfait à la condition (7). Imaginons donc maintenant que dans le domains (D) soit donné un champ des vecteurs contrevariants $\{A_h\}$ et un champ des vecteurs covariants $\{B_h\}$, les composantes de ces vecteurs étant rapportées au repère U_M.

Si l'on remplace le repère U_M par un autre repère $\bar{U}_{M'}$ au moyen de la substitution (2), où les coefficients σ_h satisfont à la condition (13), les composantes des vecteurs se transformeront d'après les formules:

$$\bar{A}_h = \sigma_h A^h, \qquad \bar{B}_h = \frac{1}{\sigma_h} B_h;$$

d'une façon plus générale, les composantes d'un tenseur mixte T^{rs}_{hij} se changeront comme suit

$$\bar{T}^{rs}_{hij} = \frac{\sigma_r \sigma_s}{\sigma_h \sigma_i \sigma_j} T^{rs}_{hij}.$$

En particulier, pour les composantes $S_{ij}^{\cdot\cdot h}$ du tenseur de torsion on aura les égalités

$$\bar{S}_{ij}^{\cdot\cdot h} = \frac{\sigma_h}{\sigma_i \sigma_j} S_{ij}^{\cdot\cdot h}.$$

Il résulte de la première des relations (9) et des équations de structure (6') et (6'') que l'on a $d\bar{\Pi}_h = d\Pi_h$ et, par suite $\bar{\Pi}_h = \Pi_h$ ou

$$\sum_{rs} \bar{K}_{h,rs}[\bar{\omega}^r \bar{\omega}^s] = \sum_{rs} K_{h,rs}[\omega^r \omega^s].$$

On en déduit les formules de transformation des composantes du tenseur de courbure:

$$\bar{K}_{h,rs} = \frac{1}{\sigma_r \sigma_s} K_{h,rs}.$$

Les différentielles absolues des vecteurs sont données par les formules

$$DA^h = dA^h + \pi_h A^h, \qquad DB^h = dB_h - \pi_h B_h,$$

qui peuvent être généralisées d'une façon bien connue pour les tenseurs d'ordre plus élevés.

Ajoutons finalement que la différentiation des équations (6') conduit aux lois de conservation de la courbure et de la torsion; les voici

$$\nabla_r S_{st}^{\cdot\cdot h} + \nabla_s S_{tr}^{\cdot\cdot h} + \nabla_t S_{rs}^{\cdot\cdot h} - S_{rs}^{\cdot\cdot p} S_{tp}^{\cdot\cdot h} - S_{st}^{\cdot\cdot p} S_{rp}^{\cdot\cdot h} - S_{tr}^{\cdot\cdot p} S_{sp}^{\cdot\cdot h}$$
$$= \delta^h_r K_{h,st} + \delta^h_s K_{h,tr} + \delta^h_t K_{h,rs},$$

$$\nabla_t K_{h,rs} + \nabla_r K_{h,st} + \nabla_s K_{h,tr} = S_{rs}^{\cdot\cdot p} K_{h,tp} + S_{st}^{\cdot\cdot p} K_{h,rp} + S_{tr}^{\cdot\cdot p} K_{h,sp}.$$

Ceci établi, on peut maintenant résoudre le problème d'équivalence et le problème d'isomorphies des réseaux (S) en employant une méthode analogue à celle développée au nº 6.

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[1] W. Blaschke und G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Berlin 1938.

[2] E. Cartan, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Annales de l'École Normale 25 (1908), p. 57 - 100.

[3] — *Les systèmes différentiels extérieurs*, Paris 1945.

[4] M. Haimovici, *Les espaces à connexion affine à parallélisme absolu et les systèmes homographiques*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, 1 Partie 29 (1943), p. 90 - 100.

[5] S. Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, Leipzig-Berlin 1891.

[6] H. Weyl, *Raum—Zeit—Materie*, 4 Auf., Berlin 1921.

PUBLICATIONS
de la
SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

JOURNAUX

FUNDAMENTA MATHEMATICAE I-XXXIX (XL sous presse).
STUDIA MATHEMATICA I-XIII.1 (XIII.2 sous presse).
ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE I-XXIV.1, XXV (XXIV.2 sous presse).
COLLOQUIUM MATHEMATICUM I-II (III en préparation).
ZASTOSOWANIA MATEMATYKI I.1 (I.2-I.3 sous presse).
ROZPRAWY MATEMATYCZNE I-III (IV-VI sous presse).
ANNALES POLONICI MATHEMATICI (I en préparation).
WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE (I en préparation).

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

I.	S.	**Banach**, Théorie des opérations linéaires, 1932, p. VIII+256.
II.	S.	**Saks**, Théorie de l'intégrale, 1933, p. X+292, épuisé.
III.	C.	**Kuratowski**, Topologie I, 1933, p. X+288.
IV.	W.	**Sierpiński**, Hypothèse du continu, 1934, p. VI+194.
V.	A.	**Zygmund**, Trigonometrical Series, 1935, p. IV+332.
VI.	S.	**Kaczmarz** und H. **Steinhaus**, Theorie der Orthogonalreihen, 1936, p. VI+300.
VII.	S.	**Saks**, Theory of the Integral, 1937, p. VIII+348.
VIII.	S.	**Banach**, Mechanika I, 3-ème éd., 1950, p. VI+234.
IX.	S.	**Banach**, Mechanika II, 3-ème éd., 1950, p. 235-556, vol. I and II.
X.	S.	**Saks** i A. **Zygmund**, Funkcje analityczne, 2-ème éd., 1948, p. VIII+432.
XI.	W.	**Sierpiński**, Zasady algebry wyższej, 2-ème éd., 1951, p. VIII+436.
XII.	K.	**Borsuk**, Geometria analityczna w *n* wymiarach, 1950, p. IV+448.
XIII.	W.	**Sierpiński**, Działania nieskończone, 3-ème éd., 1947, p. XI+503.
XIV.	W.	**Sierpiński**, Rachunek różniczkowy, 2-ème éd., 1947, p. VII+262.
XV.	K.	**Kuratowski**, Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego I, 2-ème éd., 1949, p. 236.
XVI.	E.	**Otto**, Geometria wykreślna, 1950, p. VI+272.
XVII.	S.	**Banach**, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, 1951, p. IV+224.
XVIII.	A.	**Mostowski**, Logika matematyczna, 1948, p. VIII+388.
XIX.	W.	**Sierpiński**, Teoria liczb, 3-ème éd., 1950, p. VIII+544.
XX.	C.	**Kuratowski**, Topologie I, 3-ème éd., 1952, p. XI+450.
XXI.	C.	**Kuratowski**, Topologie II, 2-ème éd., 1952, p. VIII+444.

Cena 7 zł

XXII. W. Rubinowicz, Wektory i tensory, 1950, p. IV+170, épuisé.
XXIII. W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles, 1951, p. 202.
XXIV. S. Banach, Mechanics, 1951, p. IV+546.
XXV. W. Nikliborc, Równania różniczkowe I, 1951, p. IV+176.
XXVI. M. Stark, Geometria analityczna, 1951, p. VIII+629.
XXVII. K. Kuratowski i A. Mostowski, Teoria mnogości, 1952, p. IX+311.
XXVIII. S. Saks and A. Zygmund, Analytic Functions, 1953, p. VIII+452.
XXIX. F. Leja, Funkcje analityczne i harmoniczne I, 1952, p. IV+174.

SOUS PRESSE

J. G.-Mikusiński, Rachunek operatorów.
A. Mostowski i M. Stark, Algebra wyższa I.

EN PRÉPARATION

M. Biernacki, Geometria różniczkowa.
K. Borsuk i W. Szmielew, Podstawy geometrii.
M. Krzyżański, Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu.
K. Kuratowski, Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego II.
K. Kuratowski, Topologia mnogościowa.
E. Marczewski, General Theory of Measure.
S. Mazur, Functional Analysis.
S. Mazurkiewicz, Rachunek prawdopodobieństwa.
A. Mostowski i M. Stark, Algebra wyższa II.
W. Nikliborc i Z. Charzyński, Równania różniczkowe II.
W. Sierpiński, Arytmetyka teoretyczna.
W. Sierpiński, Cardinal and Ordinal Numbers.
W. Sierpiński, The Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis.
W. Sierpiński, Elementary Theory of Numbers.
R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste.
H. Steinhaus, Independent Functions.
W. Ślebodziński, Formes extérieures symboliques et leurs applications.
T. Ważewski, Teoria równań różniczkowych.
W. Wrona, Geometria Riemanna.

Słownik statystyczny rosyjsko-polski i angielsko-polski, 1952, p. 1-20.

POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE

WARSZAWA, Śniadeckich 8.