

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY

KAROL BORSUK REDAKTOR

ANDRZEJ MOSTOWSKI MARCELI STARK

STANISŁAW TURSKI

I

JERZY NOWIŃSKI

Z teorii dźwigarów cienkościennych
o przekroju otwartym, obciążonych równomiernie

COPYRIGHT 1952
by
POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE
WARSZAWA (Poland) Śniadeckich 8

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.

SPIS RZECZY

1. Wstęp	5
2. Uwagi ogólne	6
3. Równania równowagi	11
4. Rozwiązanie zagadnienia na wartości brzegowe	13
5. Układy samozrównoważone naprężeń	16
6. Skręcanie	20
7. Zginanie	27
7.1. Działanie obciążenia poprzecznego o momencie równym $M_x(z)$	27
7.2. Działanie obciążenia poprzecznego o momencie równym $M_y(z)$	32
8. Zginanie połączone ze skręcaniem	34
9. Naprężenia według teorii przybliżonej	38
10. Bibliografia	42
11. Резюме	43
12. Summary	46

PRINTED IN POLAND

Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa, Śniadeckich 8.
Nakład 1000. Papier druk. satyn., kł V, 70×100, 80 g. Arkuszy 3
Oddano do druku w czerwcu 1952 r. Druk ukończono w listopadzie 1952 r.
Zam. 295 Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8. 3-B-52297

1. Wstęp.

Praca niniejsza przedstawia rozwinięcie ogólnej teorii dźwigarów cienkościennych ¹⁾ w zastosowaniu do dźwigarów (prętów) o przekroju otwartym, obciążonych równomiernie. Tego rodzaju elementy spotyka się powszechnie w konstrukcjach inżynierskich jako różnej postaci kształtowniki (ceowniki, kątowniki itp.); oprócz tego, np. w lotnictwie i budownictwie okrętowym, jako powierzchnie skorupowe otwarte o kształcie wydłużonym. Ściśle rzecz biorąc, u podstaw rozwiniętej teorii spoczywa założenie, że w przekrojach poprzecznych — przyjętych jako nieodkształcalne w swej płaszczyźnie — umieszczone są sztywne przepły (wręgi), które całkowicie zapewniają założoną nieodkształcalność przekrojów. Jednakże otrzymane wyniki można z pewnym przybliżeniem stosować również do dźwigarów niezaopatrzonych we wręgi, o ile grubość ścianek nie jest zbyt mała (w porównaniu z wymiarami przekrojów poprzecznych). W ten sposób obliczenie naprężeń i odkształceń obu na pozór różnych rodzajów elementów konstrukcyjnych daje się ująć jedną, wspólną teorią dźwigarów cienkościennych o przekroju otwartym.

Oprócz założenia nieodkształcalności przekrojów przyjmujemy następujące dodatkowe założenia:

1^o w ściankach dźwigara panuje pseudopłaski stan odkształcenia i naprężenia;

2^o wielkość liczby Poissona ν jest nader mała i w przybliżeniu traktowana jest jako równa zero;

3^o sztywność własna ścianek dźwigara zostaje pominięta.

¹⁾ Por. [7] i [6]. (Nawiasem prostokątnym oznaczono kolejny numer prac podanych w piśmiennictwie).

Scisłość ostatniego założenia, pozostającego w określonym związku z założeniem pierwszym, może być kwestionowana w odniesieniu do kształtowników stosowanych w konstrukcjach inżynierskich, gdyż posiadają one ścianki o niezbyt małej grubości. W tym przypadku można uwzględnić dodatkowo sztywność własną ścianek, stosując odpowiednie poprawki według teorii skręcania Saint-Venanta. Tak właśnie postąpił W. Własow w swojej fundamentalnej teorii prętów cienkościennych²⁾.

W dalszych rozważaniach, opierając się na założeniu, że grubość δ ścianek jest nader mała, pominiemy wpływ ich własnej sztywności skrętnej, zależnej od trzeciej potęgi grubości.

2. Uwagi ogólne.

Rozpatrzmy dźwigar cienkościenny w kształcie walca (grania-stosłupa) o przekroju poprzecznym otwartym stałym (jednospójnym). Dźwigar traktowany jest jako utwierdzony prosto jednym końcem w podłożu sztywnym. Co do sposobu osadzenia przekroju podporowego nie przyjmuje się na razie żadnych założeń, tzn. nie określa się czy utwierdzenie jest swobodne, czy też przekrój podporowy jest (i jak) zamocowany.

Początek O układu nieruchomego prawoskrętnego współrzędnych prostokątnych x, y, z umieszczony zostaje w środku ciężkości przekroju podporowego. Oś podłużna dźwigara obrona zostaje za oś z , a środkowe główne osie bezwładności przekroju podporowego za osie x i y (rys. 1). Stosowana jest ponadto współrzędna s , mierzona wzdłuż konturu przekroju poprzecznego od krawędzi otworu (w kierunku od $+x$ do $+y$). Współrzędna ta określa położenie cząstki ścianki w danym przekroju poprzecznym z .

Jak wiadomo³⁾, przy założonej nieodkształcalności przekrojów, przemieszczenia całkowite $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ cząstek dźwigara odpowiednio w kierunku osi x, y, z układu określone są przez następujące wyrażenia:

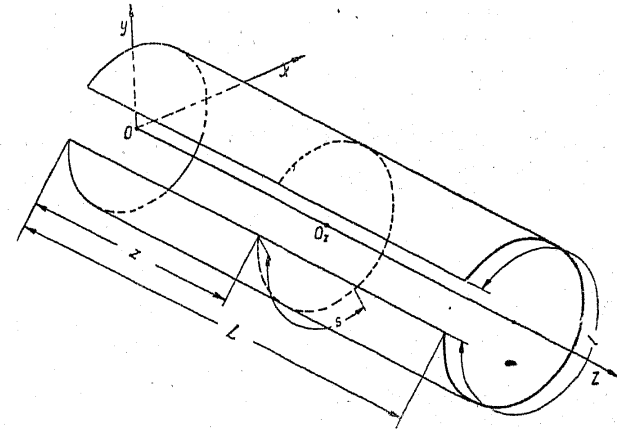
$$(2.1) \quad \bar{\xi} = \xi(z) - \vartheta(z)y,$$

$$(2.2) \quad \bar{\eta} = \eta(z) + \vartheta(z)x,$$

$$(2.3) \quad \bar{\zeta} = -\frac{d\xi}{dz}x - \frac{d\eta}{dz}y + \zeta(s, z).$$

²⁾ Por. [1] i odsyłacz¹⁰⁾ oraz [3].

³⁾ Por. [5]. Prace [5], [6] i [7] traktowane są jako znane czytelnikowi. Dla ułatwienia, ważniejsze rozumowania powtórzone zostały w tekście w skróceniu.



Rys. 1.

W powyższych wzorach $\xi(z)$ i $\eta(z)$ oznaczają przesunięcia (postępowe) przekroju jako całości odpowiednio w kierunku x i y , a $\vartheta(z)$ kąt obrotu przekroju w swej płaszczyźnie. Funkcja $\zeta(s, z)$ przedstawia zakrzywienie przekroju pierwotnie płaskiego (zwane również *spaczeniem* lub *deplanacją*). Wydłużenie jednostkowe ε ścianek dźwigara w kierunku osi z oraz odkształcenie postaciowe γ w płaszczyźnie stycznej do powierzchni dźwigara w funkcji przemieszczeń całkowitych i kąta obrotu przedstawiają następujące wzory:

$$(2.4) \quad \varepsilon = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z},$$

$$(2.5) \quad \gamma = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial z} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s}.$$

Tutaj

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

stanowią równania konturu przekroju w formie parametrycznej.

Jeżeli przyjąć liczbę Poissona ν za równą zero, wówczas między składowymi ε i γ odkształcenia oraz naprężeniami normalnym σ i stycznym τ zachodzą następujące związki:

$$(2.6) \quad \sigma = E \varepsilon,$$

$$(2.7) \quad \tau = G \gamma,$$

gdzie E jest modułem Younga, a G współczynnikiem sprężystości postaciowej.

Rozważmy nader małe odkształcenie powłoki walcowej, którą przedstawia powierzchnia dźwigara, w założeniu, że chodzi o odkształcenie izometryczne, w którym składowe ε i γ są tożsamościowo równe zeru.

Na mocy wzorów (2.1)-(2.3), przy uwzględnieniu (2.4) i (2.5), otrzymuje się wówczas

$$(2.8) \quad -\frac{d^2 \xi}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta}{dz^2} y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

$$(2.9) \quad \frac{d \vartheta}{dz} r + \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 0,$$

gdzie r jest długością prostopadłej opuszczonej ze środka ciężkości przekroju na styczną do konturu.

Powyższe dwa równania opisują w postaci różniczkowej nader mały (chwilowy) ruch izometryczny rozpatrywanej powłoki.

Całkując równanie (2.9) względem zmiennej s , otrzymuje się

$$(2.10) \quad \zeta(s, z) = -\frac{d \vartheta}{dz} \int_0^s r ds + \zeta(0, z).$$

Jeżeli przyjąć, że rozpatrywana powłoka przedstawia powierzchnię zamkniętą, wówczas z warunku, że funkcja $\zeta(s, z)$ nie ma skoków (równoważnych fizycznie niedopuszczalnym rozwarstwieniom materiału dźwigara) wynika dla każdego z

$$\zeta(0, z) = \zeta(l, z),$$

gdzie przez l oznaczono długość konturu przekroju, i w dalszym ciągu ze wzoru (2.10)

$$(2.11) \quad \frac{d \vartheta}{dz} = 0.$$

Stąd za pomocą wzoru (2.9) otrzymuje się

$$\zeta = \zeta(z)$$

i wobec tego ze wzoru (2.8), po uprzednim pomnożeniu go przez grubość $\delta = \delta(s)$ ścianek i wykonaniu całkowania względem zmiennej s w przedziale $(0, l)$, otrzymujemy

$$(2.12) \quad \zeta = \text{const.}$$

Z równania (2.8) otrzymuje się równocześnie

$$(2.13) \quad \frac{d^2 \xi}{dz^2} = \frac{d^2 \eta}{dz^2} = 0,$$

co łącznie z poprzednio uzyskanymi zależnościami (2.11) i (2.12) świadczy, że powłoka ulega co najwyżej ruchowi bryły sztywnej.

Inaczej jest, gdy rozważana powłoka przedstawia powierzchnię otwartą. Wówczas, przy zachowaniu słuszności wzoru (2.10), otrzymuje się z tego wzoru

$$(2.14) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \int_0^s r ds + \frac{d \zeta(0, z)}{dz}$$

i w dalszym ciągu ze wzoru (2.8)

$$(2.15) \quad \frac{d^2 \xi}{dz^2} x + \frac{d^2 \eta}{dz^2} y + \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} 2F_s - \frac{d \zeta(0, z)}{dz} = 0,$$

gdzie

$$(2.16) \quad F_s = \frac{1}{2} \int_0^s r ds.$$

Widoczne jest, że wielkość F_s przedstawia pole wycinka przekroju, określone przez promień wodzący r podczas przebiegu jego końca od punktu $s=0$ do s . Mnożymy lewą stronę wzoru (2.15) kolejno przez δ , δx , δy i wykonujemy całkowanie względem zmiennej s wzdłuż całkowitego (otwartego) konturu przekroju (o długości l). Biorąc pod uwagę, że osie równoległe do osi x , y i przechodzące przez środek ciężkości przekroju są głównymi osiami bezwładności, otrzymuje się kolejno

$$(2.17) \quad \frac{d^2 \xi}{dz^2} = -\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \frac{2}{I_y} \int_0^l F_s \delta x ds,$$

$$(2.18) \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} = -\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \frac{2}{I_x} \int_0^l F_s \delta y ds,$$

$$(2.19) \quad \frac{d \zeta(0, z)}{dz} = \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \frac{2}{f} \int_0^l F_s \delta ds.$$

Symbol f , użyty w ostatnim wzorze, oznacza całkowite pole przekroju ścianek dźwigara. Ze wzorów dopiero co wypisanych wynika, że powłoka walcowa otwarta, zaopatrzona w sztywne przepony, ulega nader małemu ruchowi izometrycznemu, jeżeli przekrojom poprzecznym udzielony zostaje nader mały obrót $\vartheta(z)$. Oczywiście, funkcja $\vartheta(z)$ powinna spełniać warunek ciągłości. Pomijając na tym miejscu dalsze rozważanie właściwości ruchu izometrycznego, wypada stwierdzić, że w przypadku, gdy przekrój dźwigara jest otwarty, zachodzi potrzeba wyodrębnienia z funkcji $\zeta(s, z)$ — wzór (2.3) — składnika obrazującego przemieszczenie izometryczne. Ostatecznie zatem wzór (2.3) można zapisać w następującej postaci:

$$(2.20) \quad \bar{\zeta} = -\frac{d\xi}{dz}x - \frac{d\eta}{dz}y - \frac{d\vartheta}{dz}2F_s + \zeta_1(z) + \zeta(s, z),$$

gdzie symbol $\zeta_1(z)$ przedstawia funkcję poprzednio oznaczoną przez $\zeta(0, z)$, a $\zeta(s, z)$ określa teraz spaczenie przekroju, wywołane istnieniem samych tylko naprężeń.

Ze wzorów (2.4)–(2.7) i (2.19) otrzymuje się po prostych przekształceniach następujące wyrażenia dla naprężeń:

$$(2.21) \quad \sigma = E \left[-\frac{d^2\xi}{dz^2}x - \frac{d^2\eta}{dz^2}y + \frac{d^2\vartheta}{dz^2}2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right],$$

$$(2.22) \quad \tau = G \frac{\partial \zeta}{\partial s}.$$

Całkowanie wzoru (2.19) względem zmiennej z daje ponadto

$$(2.23) \quad \zeta_1(z) = \frac{d\vartheta}{dz} \frac{2}{f} \int_0^l F_s \delta ds + N,$$

gdzie N oznacza stałą całkowania.

W związku z powyższym wzór (2.20) można również przedstawić w następującej postaci:

$$(2.24) \quad \bar{\zeta} = -\frac{d\xi}{dz}x - \frac{d\eta}{dz}y + \frac{d\vartheta}{dz}2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta(s, z) + N,$$

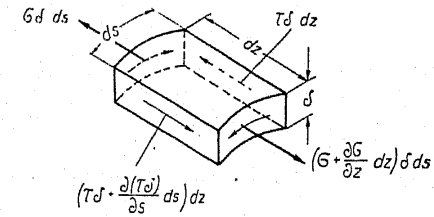
przy uwzględnieniu oczywistej zależności

$$(2.25) \quad \frac{d\vartheta}{dz} = - \int_z^L \frac{d^2\vartheta}{dz^2} dz + C.$$

3. Równania równowagi.

Jak wykazano na innym miejscu ⁴⁾, dla zapewnienia równowagi napieć działających na element ścianki (rys. 2) istotne jest, aby naprężenia σ i τ spełniały następujące równanie różniczkowe:

$$(3.1) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial (\tau \delta)}{\partial s} = 0.$$



Rys. 2.

Poza tym układ napieć, panujący w dowolnym przekroju, powinien być statycznie równoważny obciążeniu zewnętrznemu (siłom czynnym i ew. reakcjom), działającemu na każdą z części, na jakie pomyślany przekrój dzieli dany dźwigar.

Układ odpowiednich równań, zwanych *równaniami całkowymi równowagi*, przybiera w ogólnym przypadku następującą postać:

$$(3.2) \quad \int_0^l \sigma \delta ds = 0,$$

$$(3.3) \quad \int_0^l \tau \delta dx = Q_x(z),$$

$$(3.4) \quad \int_0^l \tau \delta dy = Q_y(z),$$

⁴⁾ Por. [7], p. 5.

$$(3.5) \quad \int_0^l \sigma \delta y ds = M_x(z),$$

$$(3.6) \quad \int_0^l \sigma \delta x ds = -M_y(z),$$

$$(3.7) \quad \int_0^l \tau \delta r ds = M_z(z).$$

We wzorach powyższych $Q_x(z)$ i $Q_y(z)$ oznaczają składowe siły poprzecznej działającej w rozpatrywanym przekroju, a $M_x(z)$, $M_y(z)$, $M_z(z)$ — składowe momentu obciążenia zewnętrznego sprowadzone do środka ciężkości przekroju. Umawiamy się sprowadzać wszystkie te wielkości w kierunku od końca wolnego do końca utwierdzonego dźwigara.

Jak wynika ze wzoru (3.2) przyjęto (raz na zawsze), że dźwigar nie jest poddany działaniu sił podłużnych (skierowanych wzdłuż osi z). Przyjmujemy również, że na wolnym końcu dźwigara nie istnieją napięcia normalne

$$(3.8) \quad \sigma(s, L) \equiv 0.$$

Z twierdzenia o wzajemnej równości naprężeń stycznych w przekrojach prostopadłych wynika, że na krawędziach wycięcia, gdzie nie ma naprężeń zewnętrznych skierowanych wzdłuż krawędzi, naprężenia τ znikają. Zatem

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \tau(0, z) &\equiv 0, \\ \tau(l, z) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Łatwo stwierdzić, że o ile jest spełnione równanie równowagi (3.1) oraz dopiero co ustalone warunki (3.8) i (3.9), wówczas równanie całkowe (3.2) przedstawia tożsamość. Istotnie, w wyniku całkowania lewej strony równania (3.1) względem zmiennej s przy uwzględnieniu warunków (3.9) otrzymuje się

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^l \sigma \delta ds \right) = 0.$$

Z uwagi na warunek (3.8) wzór powyższy jest identyczny ze wzorem (3.2). Podobnie można wykazać⁵⁾, że dla odcinków dźwigara, w których nie występuje nieciągłość obciążenia (na takie odcinki można zawsze podzielić długość pręta), równości (3.3) i (3.4) nie przedstawiają warunków niezależnych, lecz wynikają wprost z równości (3.5) i (3.6).

Podstawiamy z kolei wartość σ i τ według wzorów (2.21) i (2.22) do równania równowagi (3.1). Wówczas równanie to przechodzi w następujące równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu względem funkcji $\xi(s, z)$:

$$(3.10) \quad \frac{G}{E \delta} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \delta \right) + \\ + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{d^3 \vartheta}{dz^3} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) - \frac{d^3 \xi}{dz^3} x - \frac{d^3 \eta}{dz^3} y = 0.$$

Tym samym zagadnienie sprowadzone zostało do odszukania czterech nieznanych funkcji $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\vartheta(z)$ i $\xi(s, z)$, spełniających dane równanie różniczkowe (3.10) oraz określone warunki dodatkowe (3.5)–(3.9) i ew. inne⁵⁾. Zagadnienie takie przedstawia, jak wiadomo, zagadnienie na wartości brzegowe, w danym razie stosunkowo złożone.

4. Rozwiązanie zagadnienia na wartości brzegowe.

Rozwiązanie sformułowanego poprzednio zagadnienia na wartości brzegowe daje się uzyskać w następujący sposób.

Przedstawmy funkcje ξ , η , ζ i ϑ , które spełniają równanie (3.10) oraz wszystkie warunki przepisane zadaniem, w postaci

$$(4.1) \quad \xi = \xi^0 + \sum_i \xi^i,$$

$$(4.2) \quad \eta = \eta^0 + \sum_i \eta^i,$$

$$(4.3) \quad \zeta = \zeta^0 + \sum_i \zeta^i,$$

$$(4.4) \quad \vartheta = \vartheta^0 + \sum_i \vartheta^i.$$

⁵⁾ Bliższe uwagi na ten temat por. [7].

We wzorach powyższych wielkości oznaczone wskaźnikiem 0 lub i przedstawiają na razie bliżej nie określone funkcje zmiennych s i z lub samego z . Znak $\sum_i$ oznacza sumę, w ogólnym przypadku nieskończonej ilości składników.

W wyniku przyjętych założeń:

1^o wyrażenia, figurujące po prawej stronie równości (4.1)-(4.4), powinny spełniać równanie różniczkowe (3.10),

2^o między składowymi przemieszczenia, przedstawionymi wzorami (4.1)-(4.4), oraz naprężeniami σ i τ powinny zachodzić związki (2.21) i (2.22), a mianowicie:

$$(4.5) \quad \sigma = E \left[-\frac{d^2 \xi^0}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta^0}{dz^2} y + \frac{d^2 \vartheta^0}{dz^2} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \frac{\partial \zeta^0}{\partial z} \right] +$$

$$+ E \sum_i \left[-\frac{d^2 \xi^i}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta^i}{dz^2} y + \frac{d^2 \vartheta^i}{dz^2} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \frac{\partial \zeta^i}{\partial z} \right],$$

$$(4.6) \quad \tau = G \frac{\partial \zeta^0}{\partial s} + G \sum_i \frac{\partial \zeta^i}{\partial s},$$

3^o naprężenia σ i τ oraz składowe przemieszczeń ξ , η , ζ i ϑ , przedstawione wzorami (4.1)-(4.4), powinny spełniać równania równowagi (3.5)-(3.7) oraz wszystkie warunki (geometryczne i dynamiczne) przepisane zadaniem.

Co do funkcji ξ^0 , η^0 , ζ^0 i ϑ^0 czynimy następujące założenia:

1^o związki, łączące te funkcje z odpowiednimi naprężeniami σ^0 i τ^0 , a mianowicie:

$$(4.7) \quad \sigma^0 = E \left[-\frac{d^2 \xi^0}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta^0}{dz^2} y + \frac{d^2 \vartheta^0}{dz^2} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \frac{\partial \zeta^0}{\partial s} \right],$$

$$(4.8) \quad \tau^0 = G \frac{\partial \zeta^0}{\partial s},$$

należy w ogólnym przypadku traktować jako związki formalne. Oznacza to, że układ wielkości ξ^0 , η^0 , ζ^0 i ϑ^0 nie jest na ogół uważany za układ składowych przemieszczeń ze sobą zgodnych i wielkości te nie spełniają równania równowagi (3.10);

2^o naprężenia σ^0 i τ^0 powinny spełniać niejednorodne warunki całkowe równowagi

$$(4.9) \quad \int_0^l \sigma^0 \delta y ds = M_x(z),$$

$$(4.10) \quad \int_0^l \sigma^0 \delta x ds = -M_y(z),$$

$$(4.11) \quad \int_0^l \tau^0 \delta r ds = M_z(z);$$

3^o wielkości oznaczone wskaźnikiem 0 (zarówno naprężenia jak przemieszczenia) mogą spełniać jedynie niektóre warunki dodatkowe zadania.

Co do wielkości ξ^i , η^i , ζ^i i ϑ^i czynimy następujące założenia:

1^o między tymi wielkościami i odpowiednimi naprężeniami σ^i i τ^i zachodzą związki

$$(4.12) \quad \sigma^i = E \left[-\frac{d^2 \xi^i}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta^i}{dz^2} y + \frac{d^2 \vartheta^i}{dz^2} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \frac{\partial \zeta^i}{\partial s} \right],$$

$$(4.13) \quad \tau^i = G \frac{\partial \zeta^i}{\partial s},$$

które w ogólnym przypadku należy uważać za formalne, w sensie podanym wyżej dla wielkości oznaczonych wskaźnikiem 0;

2^o naprężenia σ^i i τ^i spełniają jednorodne warunki całkowe równowagi, a mianowicie:

$$(4.14) \quad \int_0^l \sigma^i \delta y ds = 0,$$

$$(4.15) \quad \int_0^l \sigma^i \delta x ds = 0,$$

$$(4.16) \quad \int_0^l \tau^i \delta r ds = 0;$$

3^o wielkości oznaczone wskaźnikiem i mogą spełniać jedynie niektóre dodatkowe warunki zadania.

Z wyżej powiedzianego wynika co następuje:

1^o naprężenia σ^0 i τ^0 równoważą (są statycznie równoważne) obciążenie zewnętrzne pręta. Są one (ewentualnie ich zasadnicze składniki) nazywane dalej *naprężeniami inżynierskimi*, gdyż postać wzorów, które je przedstawiają, zostaje dobrana w ten sposób, aby odpowiadała postaci wzorów stosowanych w praktyce obliczeniowej (według elementarnej teorii wytrzymałości materiałów);

2^o naprężenia σ^i i τ^i tworzą *samoźrównoważone*, czyli tzw. *zerowe układy naprężeń*, których wektor główny i moment główny są równe zero;

3^o naprężenia, istotnie występujące w ściankach dźwigara, rozłożone zostały na dwie grupy, a mianowicie na naprężenia inżynierskie i na naprężenia, tworzące — w ogólnym przypadku nieskończony — zbiór układów zerowych.

Zapisujemy ten wniosek w postaci następującej:

$$(4.17) \quad \sigma = \sigma^0 + \sum_i \sigma^i,$$

$$(4.18) \quad \tau = \tau^0 + \sum_i \tau^i.$$

5. Układy samoźrównoważone naprężeń.

Układy samoźrównoważone naprężeń, które teraz rozpatrujemy, traktowane są jako układy samodzielne, które spełniają równania całkowe równowagi (4.14)-(4.16) i równanie różniczkowe (3.10). Nie są to zatem, ściśle biorąc, układy naprężeń rozpatrzone poprzednio w p. 4, przedstawiające układy uzupełniające układ naprężeń inżynierskich. Mimo to oba rodzaje układów samoźrównoważonych oznaczone zostają tym samym wskaźnikiem i . Pojedynczy (i -ty) układ zerowy traktujemy na razie w ten sposób, jak gdyby istniał niezależnie.

Zakładamy, że naprężenie układów zerowych dla dowolnej (lecz ustalonej) wielkości współrzędne s zmieniają się w kierunku osi pręta w sposób podobny. Matematycznie oznacza to, że naprężenia można przedstawić jako iloczyny dwóch funkcji, każda jednej zmiennej

$$(5.1) \quad \sigma^i = \sigma_s^i(s) \cdot \sigma_z^i(z),$$

$$(5.2) \quad \tau^i = \tau_s^i(s) \cdot \tau_z^i(z).$$

Założenie powyższe jest stosunkowo ogólne i znajduje uzasadnienie w stronie fizycznej rozpatrywanego zagadnienia.

Niech naprężenia σ^i i τ^i przedstawione będą wzorami (4.12) i (4.13). Wówczas warunki (5.1) i (5.2) są spełnione, o ile założyć, że

$$(5.3) \quad \zeta^i(s, z) = \zeta_s^i \cdot \zeta_z^i,$$

$$(5.4) \quad \frac{d^2 \xi^i}{dz^2} = A^i \frac{d \zeta_z^i}{dz},$$

$$(5.5) \quad \frac{d^2 \eta^i}{dz^2} = B^i \frac{d \zeta_z^i}{dz},$$

$$(5.6) \quad \frac{d^2 \vartheta^i}{dz^2} = C^i \frac{d \zeta_z^i}{dz},$$

gdzie A^i , B^i i C^i oznaczają wielkości stałe, przyporządkowane i -temu układowi zerowemu. Znaczenie funkcji $\zeta_s^i = \zeta_s^i(s)$ i $\zeta_z^i = \zeta_z^i(z)$ jest zrozumiałe.

W związku z powyższym otrzymuje się

$$(5.7) \quad \sigma^i = E \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \frac{d \zeta_z^i}{dz},$$

$$(5.8) \quad \tau^i = G \frac{d \zeta_z^i}{ds} \zeta_z^i.$$

Jeżeli prawe strony równości (5.7) i (5.8) wstawimy do równania różniczkowego (3.1), to otrzymamy następujące równanie różniczkowe zwykłe:

$$(5.9) \quad \frac{G}{E \delta} \frac{d}{ds} \left(\delta \frac{d \zeta_z^i}{ds} \right) \zeta_z^i + \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \frac{d^2 \zeta_z^i}{dz^2} = 0.$$

Równanie to można zastąpić następującym układem równań, z których każde zawiera jedną nieznaną funkcję:

$$(5.10) \quad \frac{G}{E \delta} \frac{d}{ds} \left(\delta \frac{d \zeta_z^i}{ds} \right) + k_i^2 \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] = 0,$$

$$(5.11) \quad \frac{d^3 \zeta_z^i}{dz^3} - k_i^2 \zeta_z^i = 0,$$

gdzie przez k_i^2 oznaczono pewien parametr dodatni.

Oczywiście, funkcja ζ_s^i powinna spełniać również następujące równania warunkowe, które otrzymuje się z równań (4.14)-(4.16) i warunków (3.9):

$$(5.12) \quad \int_0^l \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \delta y ds = 0,$$

$$(5.13) \quad \int_0^l \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \delta x ds = 0,$$

$$(5.14) \quad \int_0^l \frac{d\zeta_s^i}{ds} \delta r ds = 0,$$

$$(5.15) \quad \left| \delta \frac{d\zeta_s^i}{ds} \right|_{s=0} = 0,$$

$$(5.16) \quad \left| \delta \frac{d\zeta_s^i}{ds} \right|_{s=l} = 0.$$

Łatwo wykazać⁶⁾, że w przedziale $(0, l)$ funkcje $\delta \frac{d\zeta_s^i}{ds}$ są ortogonalne względem wagi $1/\delta$ i wobec tego spełniają warunek

$$(5.17) \quad \int_0^l \frac{1}{\delta} \left(\delta \frac{d\zeta_s^i}{ds} \right) \left(\delta \frac{d\zeta_s^j}{ds} \right) ds = 0 \quad \text{dla } i \neq j.$$

Podobnie

$$(5.18) \quad \int_0^l \frac{1}{\delta} \left[\frac{d}{ds} \left(\delta \frac{d\zeta_s^i}{ds} \right) \right] \left[\frac{d}{ds} \left(\delta \frac{d\zeta_s^j}{ds} \right) \right] ds = 0 \quad \text{dla } i \neq j$$

lub, jak wynika z (5.10), również

⁶⁾ W sposób analogiczny do przytoczonego w p. 7 pracy [7].

$$(5.19) \quad \int_0^l \delta \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \times \\ \times \left[-A^j x - B^j y + C^j 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^j \right] ds = 0 \quad \text{dla } i \neq j.$$

Jeżeli dla uproszczenia funkcje $\delta \frac{d\zeta_s^i}{ds}$ poddać normalizacji równoznacznej warunkowi

$$(5.20) \quad \int_0^l \frac{1}{\delta} \left(\delta \frac{d\zeta_s^i}{ds} \right)^2 ds = 1,$$

to równocześnie

$$(5.21) \quad \int_0^l \frac{1}{\delta} \left[\frac{d}{ds} \left(\delta \frac{d\zeta_s^i}{ds} \right) \right]^2 ds = \frac{E}{G} k_i^2$$

oraz

$$(5.22) \quad \int_0^l \delta \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right]^2 ds = \frac{G}{E k_i^2}.$$

Ze wzorów (5.4)-(5.6) otrzymuje się po wykonaniu całkowania względem zmiennej z

$$(5.23) \quad \frac{d\zeta^i}{dz} = A^i \zeta_z^i + K^i,$$

$$(5.24) \quad \frac{d\eta^i}{dz} = B^i \zeta_z^i + L^i,$$

$$(5.25) \quad \frac{d\vartheta^i}{dz} = C^i \zeta_z^i + D^i,$$

gdzie K^i , L^i i D^i oznaczają stałe całkowania.

Stąd za pomocą wzoru (2.24) wynika następujące wyrażenie dla przemieszczenia całkowitego w kierunku osi z pod działaniem naprężeń pojedynczego układu zerowego:

$$(5.26) \quad \bar{\zeta}^i = \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \zeta_z^i + \\ + D^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) - K^i x - L^i y + N^i.$$

Przechodząc teraz do rozpatrzenia naprężeń statycznie równoważnych danemu obciążeniu zewnętrznemu, zakładamy raz na zawsze, że obciążenie jest rozłożone równomiernie wzdłuż rozpiętości dźwigara, co oznacza, że

$$(5.27) \quad \begin{aligned} Q_x &= q_x (L - z), \\ Q_y &= q_y (L - z), \\ M_z &= m_z (L - z), \end{aligned}$$

gdzie q_x, q_y, m_z przedstawiają wielkości stałe (obciążenie jednostkowe).

Dla zachowania większej ogólności wzorów, nie korzystano w dalszym ciągu z uproszczeń, na które zezwala istnienie związków (5.27).

6. Skręcanie.

Pod pojęciem *skręcania* rozumiany jest tutaj taki przypadek obciążenia dźwigara, w którym układ sił zewnętrznych sprowadza się do pary sił o momencie $M_z(z)$.

W tym przypadku jest równocześnie

$$(6.1) \quad Q_x = Q_y = M_x = M_y = 0,$$

w związku z czym równania całkowite równowagi przybierają postać następującą:

$$(6.2) \quad \int_0^l \sigma^B \delta y ds = 0,$$

$$(6.3) \quad \int_0^l \sigma^B \delta x ds = 0,$$

$$(6.4) \quad \int_0^l \tau^B \delta r ds = M_z(z),$$

gdzie σ^B i τ^B oznaczają naprężenia wywołane istnieniem samego tylko momentu skręcającego M_z .

Niech naprężenia σ^B i τ^B dają się przedstawić w formie zamkniętej za pomocą wzorów analogicznych do (2.21) i (2.22). Niech będzie ponadto

$$(6.5) \quad \zeta^B(s, z) = \zeta_s^B \cdot \zeta_z^B,$$

gdzie znaczenie użytych symboli jest zrozumiałe.

Wówczas można napisać

$$(6.6) \quad \sigma^B = E \left[-\frac{d^2 \xi^B}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta^B}{dz^2} y + \frac{d^2 \vartheta^B}{dz^2} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^B \frac{d \zeta_z^B}{dz} \right],$$

$$(6.7) \quad \tau^B = G \frac{d \zeta_s^B}{ds} \zeta_z^B.$$

Jak wiadomo ⁷⁾, naprężenia w dźwigarze walcowym o przekroju otwartym, jednym końcem utwierdzonym swobodnie i na drugim obciążonym parą sił $M_z = M_c$, przedstawiają następujące wzory:

$$(6.8) \quad \sigma^c = \frac{d^2 \vartheta^c}{dz^2} 2 E D(s),$$

$$(6.9) \quad \tau^c = -\frac{d^3 \vartheta^c}{dz^3} 2 E \frac{B(s)}{\delta},$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$(6.10) \quad D(s) = \frac{\int_0^l F_s \delta x ds}{I_y} x + \frac{\int_0^l F_s \delta y ds}{I_x} y + \frac{\int_0^l F_s \delta ds}{f} - F_s,$$

oraz

$$(6.11) \quad B(s) = \int_0^s D(s) \delta ds.$$

W danym przypadku dla $M_z = M_c$ jest

$$(6.12) \quad \frac{d^3 \vartheta^c}{dz^3} = \frac{M_c}{2 E A},$$

gdzie

$$(6.13) \quad A = \frac{2 \left(\int_0^l F_s \delta x ds \right)^2}{I_y} + \frac{2 \left(\int_0^l F_s \delta y ds \right)^2}{I_x} - \frac{\int_0^l F_s \delta ds \int_0^l f_s r ds}{f} + \int_0^l \left(\int_0^s F_s \delta ds \right) r ds,$$

⁷⁾ Por. [6].

$$(6.14) \quad f_s = \int_0^s \delta ds.$$

Wzór (6.9), który przedstawia naprężenia styczne w dźwigarze o przekroju otwartym poddanym skręceniu, stanowi analogię znanego wzoru Bredta-Batho dla naprężeń stycznych w dźwigarze o przekroju zamkniętym (dla utwierdzenia swobodnego jest w tym ostatnim przypadku $\sigma \equiv 0$). Wzory (6.8) i (6.9), w których wartości pochodnych kąta skręcenia przy uwzględnieniu warunku (3.8) można zastąpić wyrażeniami zależnymi od M_z (por. (6.12)), nazwiemy *rozorami Kappusa*⁸⁾.

Można łatwo stwierdzić⁷⁾, że w rozpatrywanym przypadku ($M_z = \text{const}$) jest

$$(6.15) \quad \frac{d \zeta_s^c}{ds} \zeta_z^c = - \frac{d^3 \vartheta^c}{dz^3} \frac{2E B(s)}{G \delta},$$

gdzie na mocy (6.12) z dokładnością do stałego czynnika

$$(6.16) \quad \zeta_z^c = M_z.$$

W tym samym przypadku jest również

$$(6.17) \quad \frac{d^2 \xi^c}{dz^2} = - \frac{d^2 \vartheta^c}{dz^2} \frac{2 \int_0^l F_s \delta x ds}{I_y}$$

oraz

$$(6.18) \quad \frac{d^2 \eta^c}{dz^2} = - \frac{d^2 \vartheta^c}{dz^2} \frac{2 \int_0^l F_s \delta y ds}{I_x}.$$

Przyjmujemy, że dla założonego typu obciążenia (tzn. $M_z = m_z(L-z)$) wyrażenie dla trzeciej pochodnej kąta skręcenia przyjmuje postać analogiczną do przedstawionej poprzednio wzorem (6.12), a mianowicie

$$(6.19) \quad \frac{d^3 \vartheta^B}{dz^3} = \frac{M_z(z)}{2EA}.$$

⁸⁾ Por. [4].

Łatwo sprawdzić, że założenie to jest w danym przypadku słuszne. W tym celu należy scałkować równanie równowagi (3.1) względem zmiennej s uwzględniając warunki (3.9). Otrzymuje się wówczas

$$\tau \delta = - \int_0^s \delta \frac{\partial \sigma}{\partial z} ds.$$

Wystarczy teraz na miejsce σ podstawić wartość z podanego dalej wzoru (6.34) i otrzymane wyrażenie dla $\tau \delta$ podstawić z kolei do równania równowagi (6.4), aby uzyskać tożsamość, c. b. d. d.

Zgodnie z założeniami przedstawionymi przez wzory (6.16) i (6.19) oraz zależnością (6.15) można teraz przyjąć

$$(6.20) \quad \zeta_z^B = M_z(z),$$

a wartość ζ_s^B uczynić równą poprzednio wprowadzonej wielkości ζ_s^c według wzoru (6.15).

W ten sposób otrzymuje się

$$(6.21) \quad \frac{d \zeta_s^B}{ds} = - \frac{1}{GA \delta} B(s)$$

oraz

$$(6.22) \quad \zeta_s^B = - \frac{1}{GA} \int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds + \zeta_0,$$

gdzie ζ_0 oznacza, na razie nieznaną, stałą całkowania.

Ze wzoru (6.19) otrzymuje się ponadto

$$(6.23) \quad \frac{d^2 \vartheta^B}{dz^2} = - \frac{1}{2EA} \int_z^L M_z(z) dz,$$

gdzie pominięto stałą całkowania, gdyż zgodnie z warunkiem (3.8) żądamy, aby pierwszy składnik prawej strony (6.34) znikał samodzielnie przy wartości z równej L dla każdej wartości zmiennej s .

Ostatecznie zatem wzory dla naprężeń (6.6) i (6.7) w wypadku $M_z \neq \text{const}$ można przedstawić w następującej postaci:

$$(6.24) \quad \sigma^B = E \left[- \frac{d^2 \xi^B}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta^B}{dz^2} y - \frac{1}{EA} \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) \int_z^L M_z dz + \zeta_s^B \frac{dM_z}{dz} \right],$$

$$(6.25) \quad \tau^B = -\frac{B(s)}{A \delta} M_z.$$

Wzory te dla $M_z = M_c$ przechodzą oczywiście we wzory Kappusa.

Żądamy obecnie, aby naprężenia przedstawione wzorami (6.24) i (6.25) odpowiadały naprężeniom oznaczonym poprzednio w p. 4 wskaźnikami 0.

W tym celu spełniamy kolejno równania całkowe równowagi (3.2) i (6.2)-(6.4). Z pierwszego z wymienionych równań otrzymuje się wartość stałej całkowania ζ_0 :

$$(6.26) \quad \zeta_0 = \frac{\int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta ds}{GAf},$$

z następnych zaś dwóch równań

$$(6.27) \quad \frac{d^2 \xi^B}{dz^2} = \frac{\int_0^l F_s \delta x ds}{EA I_y} \int_0^L M_z dz + A^B \frac{dM_z}{dz},$$

$$(6.28) \quad \frac{d^2 \eta^B}{dz^2} = \frac{\int_0^l F_s \delta y ds}{EA I_x} \int_0^L M_z dz + B^B \frac{dM_z}{dz},$$

gdzie

$$(6.29) \quad A^B = -\frac{\int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta x ds}{GA I_y},$$

$$(6.30) \quad B^B = -\frac{\int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta y ds}{GA I_x}.$$

Łatwo stwierdzić, że pozostałe jeszcze równanie równowagi (6.4) jest spełnione tożsamościowo.

Przy uwzględnieniu wzorów (6.27) i (6.28) wyrażenie dla naprężeń normalnych według wzoru (6.24) przybiera postać

$$(6.31) \quad \sigma^B = -\frac{D(s)}{A} \int_z^L M_z dz + E \left(-A^B x - B^B y + \zeta_s^B \right) \frac{dM_z}{dz}.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie tego wzoru odpowiada kształtem wzorowi Kappusa dla naprężeń normalnych (por. (6.8) i (6.23)).

Wzór (6.31) można również przedstawić w innej, bardziej wyrażnej postaci. W tym celu rozwija się trójmian występujący w nawiasie okrągłym w następujący szereg funkcji ortogonalnych:

$$(6.32) \quad \begin{aligned} & (-A^B x - B^B y + \zeta_s^B) = \\ & = \sum_i c^i \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right]. \end{aligned}$$

Współczynniki c^i tego rozwinięcia można wyznaczyć bez trudności przez pomnożenie obu stron równości (6.32) przez grubość δ i odpowiednią i -tą funkcję ortogonalną, a następnie przez całkowanie wzdłuż całego konturu przekroju.

Przy uwzględnieniu (3.2), (5.10), (5.12)-(5.16) i (5.22) otrzymuje się po dłuższym przekształceniu

$$(6.33) \quad c^i = \frac{C^i}{G}.$$

Ostatecznie zatem wzór dla naprężeń normalnych σ^B przybiera postać następującą:

$$(6.34) \quad \begin{aligned} \sigma^B = & -\frac{D(s)}{A} \int_z^L M_z dz + \\ & + \frac{E}{G} \sum_i C^i \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \frac{dM_z}{dz}. \end{aligned}$$

Całkując teraz przez części dochodzimy do następujących związków:

$$(6.35.1) \quad \frac{2}{I_y} \int_0^l F_s \delta x ds = -\frac{1}{I_y} \int_0^l S_y r ds = -y_{sp},$$

$$(6.35.2) \quad \frac{2}{I_x} \int_0^l F_s \delta y ds = -\frac{1}{I_x} \int_0^l S_x r ds = x_{SP},$$

gdzie

$$(6.36.1) \quad S_x = \int_0^s \delta y ds,$$

$$(6.36.2) \quad S_y = \int_0^s \delta x ds.$$

Znaczenie użytych tutaj symboli x_{SP} i y_{SP} stanie się zrozumiałe z dalszych wywodów, podanych w p. 9 (por. wzory (9.7.1) i (9.7.2)). W nowej symbolice wzory (6.27) i (6.28) po wykonaniu całkowania względem zmiennej z przybierają następującą postać:

$$(6.37) \quad \frac{d\xi^B}{dz} = \frac{y_{SP}}{2EA} \int_z^L \left(\int_z^L M_z dz \right) dz + A^B M_z + K^B,$$

$$(6.38) \quad \frac{d\eta^B}{dz} = -\frac{x_{SP}}{2EA} \int_z^L \left(\int_z^L M_z dz \right) dz + B^B M_z + L^B,$$

gdzie K^B i L^B oznaczają stałe całkowania.

Podobnie ze wzoru (6.23) otrzymujemy

$$(6.39) \quad \frac{d\vartheta^B}{dz} = \frac{1}{2EA} \int_z^L \left(\int_z^L M_z dz \right) dz + C^B,$$

(C^B — stała całkowania).

Biorąc pod uwagę dopiero co wyprowadzone związki, otrzymujemy w przypadku skręcania momentem M_z następującą wartość przemieszczenia całkowitego $\bar{\zeta}^B$ w kierunku osi z (por. wzór (2.24)):

$$(6.40) \quad \begin{aligned} \bar{\zeta}^B = & \frac{1}{2EA} \left[-y_{SP} x + x_{SP} y + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) \right] \int_z^L \left(\int_z^L M_z dz \right) dz + \\ & + (-A^B x - B^B y + \zeta_s^B) M_z + C^B 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) - K^B x - L^B y + N^B. \end{aligned}$$

7. Zginanie.

7.1. Zginanie pod działaniem obciążenia poprzecznego o momencie równym $M_x(z)$.

W tym przypadku jest $Q_x = M_y = M_z = 0$ oraz $Q_y \neq 0$. Warunki całkowite równowagi przybierają wówczas następującą postać:

$$(7.1.1) \quad \int_0^l \sigma^{Ey} \delta y ds = M_x(z),$$

$$(7.1.2) \quad \int_0^l \sigma^{Ey} \delta x ds = 0,$$

$$(7.1.3) \quad \int_0^l \tau^{Ey} \delta r ds = 0,$$

gdzie wskaźnik Ey oznacza naprężenia wywołane działaniem sił poprzecznych położonych w płaszczyźnie yz układu.

Niech naprężenia σ^{Ey} i τ^{Ey} dają się przedstawić w postaci wyrażień skończonych za pomocą wzorów (2.21) i (2.22). Jeżeli założyć

$$(7.1.4) \quad \zeta^{Ey} = \zeta_s^{Ey} \cdot \zeta_z^{Ey},$$

to wyrażenia dla naprężeń przyjmują postać

$$(7.1.5) \quad \begin{aligned} \sigma^{Ey} = E \left[-\frac{d^2 \xi^{Ey}}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta^{Ey}}{dz^2} y + \right. \\ \left. + \frac{d^2 \vartheta^{Ey}}{dz^2} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^{Ey} \frac{d \zeta_z^{Ey}}{dz} \right], \end{aligned}$$

$$(7.1.6) \quad \tau^{Ey} = G \frac{d \zeta_s^{Ey}}{ds} \zeta_z^{Ey}.$$

Sprawdźmy, kiedy powyższe wzory odpowiadają wzorom praktycznym, znanym z elementarnej teorii zginania, w połączeniu ze wzorami Kappusa (6.8) i (6.9) dla skręcania.

W danym przypadku, gdy zginaniu momentem M_x towarzyszy skręcanie dźwigara (przejawiające się jako obroty przekrojów), wzorom praktycznym można nadać następującą postać:

$$(7.1.7) \quad \sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} 2ED(s),$$

$$(7.1.8) \quad \tau = -\frac{1}{I_x \delta} S_x \frac{dM_x}{dz} - \frac{d^3 \vartheta}{dz^3} 2E \frac{B(s)}{\delta}.$$

Wyrażenia dla naprężeń według powyższych wzorów spełniają tożsamościowo równanie różniczkowe równowagi (3.1) oraz równania całkowe (3.2), (7.1.1) i (7.1.2). Natomiast z równania (7.1.3) otrzymuje się

$$(7.1.9) \quad \frac{d^3 \vartheta}{dz^3} = \left(\frac{1}{2 E A I_x} \int_0^l S_x r ds \right) \frac{dM_x}{dz}.$$

Uwzględniając warunek (3.8) oraz zrozumiały związek $M_x(L) = 0$, otrzymuje się w dalszym ciągu przy wzięciu pod uwagę (7.1.7)

$$(7.1.10) \quad \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} = \left(\frac{1}{2 E A I_x} \int_0^l S_x r ds \right) M_x(z).$$

Wobec tego wzór (7.1.8) dla naprężeń stycznych przedstawić można również w postaci następującej:

$$(7.1.11) \quad \tau = -\frac{1}{I_x \delta} \left(S_x + \frac{\int_0^l S_x r ds}{A} B(s) \right) \frac{dM_x}{dz}.$$

Zauważmy, że wzory (7.1.7) i (7.1.11) stają się równoważne wzorom (7.1.5) i (7.1.6), jeżeli spełniony jest warunek

$$(7.1.12) \quad \zeta_z = \frac{dM_x}{dz} = \text{const.}$$

Zachodzi to wtedy, gdy obciążenie dźwigara stanowi siła P_y działająca na jego wolny koniec. Wówczas bowiem

$$(7.1.13) \quad M_x = -P_y(L-z).$$

Założymy również w przypadku ogólnym, gdy $Q_y = dM_x/dz \neq \text{const}$, słuszność wzoru (7.1.12), a mianowicie

$$(7.1.14) \quad \zeta_z^{Ey} = \frac{dM_x}{dz}$$

i zgodnie ze wzorami (7.1.5) i (7.1.6) zapiszemy formalnie

$$(7.1.15) \quad \sigma^{Ey} = E \left[-\frac{d^2 \xi^{Ey}}{dz^2} x - \frac{d^2 \eta^{Ey}}{dz^2} y + \frac{d^2 \vartheta^{Ey}}{dz^2} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_z^{Ey} \frac{d^2 M_x}{dz^2} \right],$$

$$(7.1.16) \quad \tau^{Ey} = G \frac{d \zeta_s^{Ey}}{ds} \frac{dM_x}{dz}.$$

Niech wartość ζ_s^{Ey} w przypadku ogólnym będzie równa wartości ζ_z^{Ey} w przypadku szczególnym, określonym warunkiem (7.1.12). Wówczas z porównania prawych stron wzorów (7.1.11) i (7.1.16) przy uwzględnieniu (7.1.14) otrzymuje się następującą zależność:

$$(7.1.17) \quad \frac{d \zeta_s^{Ey}}{ds} = -\frac{1}{G I_x \delta} \left(S_x + \frac{\int_0^l S_x r ds}{A} B(s) \right)$$

i w dalszym ciągu

$$(7.1.18) \quad \zeta_s^{Ey} = -\frac{1}{G I_x} \left(\int_0^s \frac{S_x}{\delta} ds + \frac{\int_0^l S_x r ds}{A} \int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) + \zeta_0^{Ey},$$

gdzie symbol ζ_0^{Ey} oznacza stałą całkowania.

Podstawiając wyrażenia dla σ^{Ey} i τ^{Ey} ze wzorów (7.1.15) i (7.1.16) do równań całkowych równowagi (3.2), (7.1.1) i (7.1.2), otrzymuje się kolejno:

$$(7.1.19) \quad \zeta_0^{Ey} = \frac{1}{G f I_x} \left[\int_0^l \left(\int_0^s \frac{S_x}{\delta} ds \right) \delta ds + \frac{\int_0^l S_x r ds}{A} \int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta ds \right],$$

$$(7.1.20) \quad \frac{d^2 \xi_{Ey}}{dz^2} = - \frac{d^2 \eta_{Ey}}{dz^2} - \frac{2 \int_0^l F_s \delta x ds}{I_y} + A^{Ey} \frac{d^2 M_x}{dz^2},$$

$$(7.1.21) \quad \frac{d^2 \eta_{Ey}}{dz^2} = - \frac{M_x}{EI_x} - \frac{d^2 \eta_{Ey}}{dz^2} - \frac{2 \int_0^l F_s \delta y ds}{I_x} + B^{Ey} \frac{d^2 M_x}{dz^2},$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$(7.1.22) \quad A^{Ey} = - \frac{1}{GI_x I_y} \left[\int_0^l \left(\int_0^s \frac{S_x}{\delta} ds \right) \delta x ds + \frac{\int_0^l S_x r ds}{A} \int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta x ds \right],$$

$$(7.1.23) \quad B^{Ey} = - \frac{1}{GI_x^2} \left[\int_0^l \left(\int_0^s \frac{S_x}{\delta} ds \right) \delta y ds + \frac{\int_0^l S_x r ds}{A} \int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta y ds \right].$$

Przyjmując również w przypadku obciążenia równomiernego słuszność wzoru (7.1.10), który zapisać można w postaci

$$(7.1.24) \quad \frac{d^2 \eta_{Ey}}{dz^2} = \frac{1}{2EA I_x} \int_0^l S_x r ds \cdot M_x(z),$$

otrzymuje się wzory dla naprężeń w postaci następującej:

$$(7.1.25) \quad \sigma^{Ey} = \left(\frac{1}{I_x} y + \frac{D(s)}{A I_x} \int_0^l S_x r ds \right) M_x + E (-A^{Ey} x - B^{Ey} y + \zeta_s^{Ey}) \frac{d^2 M_x}{dz^2},$$

$$(7.1.26) \quad \tau^{Ey} = - \frac{1}{I_x \delta} \left(S_x + \frac{\int_0^l S_x r ds}{A} B(s) \right) \frac{dM_x}{dz}.$$

Powyższy układ naprężeń przedstawia układ statycznie równoważny przyjętemu obciążeniu dźwigara i odpowiada układowi oznaczonemu poprzednio wskaźnikiem 0 w p. 4.

Podobnie jak to uczyniono w p. 6, można rozwinąć drugi składnik prawej strony wzoru (7.1.25) w szereg funkcji ortogonalnych, a mianowicie

$$(7.1.27) \quad (-A^{Ey} x - B^{Ey} y + \zeta_s^{Ey}) = \sum_i b_i \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right].$$

Dłuższe przekształcenia doprowadzają do wyznaczenia wartości współczynników b_i w postaci następującej:

$$(7.1.28) \quad b_i = \frac{B^i}{G}.$$

Ostatecznie więc wzór dla naprężeń normalnych σ^{Ey} daje się przedstawić w postaci

$$(7.1.29) \quad \sigma^{Ey} = \left(\frac{1}{I_x} y + \frac{D(s)}{A I_x} \int_0^l S_x r ds \right) M_x + \frac{E}{G} \sum_i B^i \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \frac{d^2 M_x}{dz^2}.$$

Postępując podobnie jak w p. 6, otrzymuje się na podstawie wzorów (7.1.20), (7.1.21) i (7.1.24):

$$(7.1.30) \quad \frac{d \xi_{Ey}}{dz} = \frac{x_{SP} y_{SP}}{2EA} \int_z^L M_x dz + A^{Ey} \frac{dM_x}{dz} + K^{Ey},$$

$$(7.1.31) \quad \frac{d \eta_{Ey}}{dz} = \frac{1}{EI_x} \int_z^L M_x dz - \frac{(x_{SP})^2}{2EA} \int_z^L M_x dz + B^{Ey} \frac{dM_x}{dz} + L^{Ey},$$

$$(7.1.32) \quad \frac{d \eta_{Ey}}{dz} = \frac{x_{SP}}{2EA} \int_z^L M_x dz + C^{Ey},$$

gdzie K^{Ey} , L^{Ey} i C^{Ey} są stałymi całkowania.

Stąd na mocy wzoru (2.24) wynika następująca wartość przemieszczenia całkowitego w kierunku osi z :

$$(7.1.33) \quad \bar{\zeta}^{Ey} = \left[-y_{SP} x + x_{SP} y + 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) \right] \frac{x_{SP}}{2EA} \int_z^L M_x dz - \\ - \frac{1}{EI_x} \int_z^L M_x dz \cdot y + (-A^{Ey} x - B^{Ey} y + \zeta_s^{Ey}) \frac{dM_x}{dz} + \\ + C^{Ey} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) - K^{Ey} x - L^{Ey} y + N^{Ey}.$$

7.2. Zginanie pod działaniem obciążenia poprzecznego o momencie równym $M_y(z)$.

W tym przypadku jest $Q_y = M_x = M_z = 0$ oraz $Q_x \neq 0$. Równania całkowite równowagi przybierają wówczas postać następującą:

$$(7.2.1) \quad \int_0^l \sigma^{Ex} \delta y ds = 0,$$

$$(7.2.2) \quad \int_0^l \sigma^{Ex} \delta x ds = -M_y(z),$$

$$(7.2.3) \quad \int_0^l \tau^{Ex} \delta r ds = 0,$$

gdzie znaczenie wskaźnika Ex jest zrozumiałe.

Postępując analogicznie jak w p. 7.1 otrzymuje się kolejno:

$$(7.2.4) \quad \zeta_s^{Ex} = \frac{1}{GI_y} \left(\int_0^s \frac{S_y}{\delta} ds + \frac{\int_0^s S_y r ds}{A} \int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) + \zeta_0^{Ex},$$

$$(7.2.5) \quad \zeta_0^{Ex} = -\frac{1}{GI_y} \left[\int_0^l \left(\int_0^s \frac{S_x}{\delta} ds \right) \delta ds + \frac{\int_0^l S_y r ds}{A} \int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta ds \right],$$

$$(7.2.6) \quad \frac{d^2 \xi^{Ex}}{dz^2} = \frac{M_y}{EI_y} - \frac{d^2 \vartheta^{Ex}}{dz^2} \frac{2 \int_0^l F_s \delta x ds}{I_y} + A^{Ex} \frac{d^2 M_y}{dz^2},$$

$$(7.2.7) \quad \frac{d \eta^{Ex}}{dz^2} = -\frac{d^2 \vartheta^{Ex}}{dz^2} \frac{2 \int_0^l F_s \delta y ds}{I_x} + B^{Ex} \frac{d^2 M_y}{dz^2},$$

gdzie

$$(7.2.8) \quad A^{Ex} = \frac{1}{GI_y^2} \left[\int_0^l \left(\int_0^s \frac{S_y}{\delta} ds \right) \delta x ds + \frac{\int_0^l S_y r ds}{A} \int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta x ds \right],$$

$$(7.2.9) \quad B^{Ex} = \frac{1}{GI_x I_y} \left[\int_0^l \left(\int_0^s \frac{S_y}{\delta} ds \right) \delta y ds + \frac{\int_0^l S_y r ds}{A} \int_0^l \left(\int_0^s \frac{B(s)}{\delta} ds \right) \delta y ds \right],$$

$$(7.2.10) \quad \frac{d^2 \vartheta^{Ex}}{dz^2} = -\frac{1}{2EA I_y} \int_0^l S_y r ds \cdot M_y(z).$$

Współczynniki w rozwinięciu wyrażenia $(-A^{Ex} x - B^{Ex} y + \zeta_s^{Ex})$ w szereg funkcji ortogonalnych podobny do (7.1.27) są równe

$$(7.2.11) \quad a_i = \frac{A^i}{G}.$$

Ostatecznie zatem wzory dla naprężeń σ^{Ex} i τ^{Ex} przybierają w rozpatrywanym przypadku następującą postać:

$$(7.2.12) \quad \sigma^{Ex} = -\left(\frac{1}{I_y} x + \frac{D(s)}{A I_y} \int_0^l S_y r ds \right) M_y - \\ - \frac{E}{G} \sum_i A^i \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \frac{d^2 M_y}{dz^2},$$

$$(7.2.13) \quad \tau^{Ex} = \frac{1}{I_y \delta} \left(S_y + \frac{\int_0^l S_y r ds}{A} B(s) \right) \frac{dM_y}{dz}.$$

Podobnie jak to czyniliśmy poprzednio, obliczamy ze wzorów (7.2.6), (7.2.7) i (7.2.10)

$$(7.2.14) \quad \frac{d\xi^{Ex}}{dz} = -\frac{1}{EI_y} \int_z^L M_y dz + \frac{(y_{SP})^2}{2EA} \int_z^L M_y dz + A^{Ex} \frac{dM_y}{dz} + K^{Ex},$$

$$(7.2.15) \quad \frac{d\eta^{Ex}}{dz} = -\frac{x_{SP} y_{SP}}{2EA} \int_z^L M_y dz + B^{Ex} \frac{dM_y}{dz} + L^{Ex},$$

$$(7.2.16) \quad \frac{d\vartheta^{Ex}}{dz} = \frac{y_{SP}}{2EA} \int_z^L M_y dz + C^{Ex},$$

gdzie K^{Ex} , L^{Ex} i C^{Ex} oznaczają odpowiednie stałe całkowania.

Na zasadzie uzyskanych związków otrzymuje się ze wzoru (2.24) wartość całkowitego przemieszczenia w kierunku osi z

$$(7.2.17) \quad \begin{aligned} \zeta^{Ex} = & \left[-y_{SP} x + x_{SP} y + 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) \right] \frac{y_{SP}}{2EA} \int_z^L M_y dz + \\ & + \frac{1}{EI_y} \int_z^L M_y dz \cdot x + (-A^{Ex} x - B^{Ex} y + \zeta_s^{Ex}) \frac{dM_y}{dz} + \\ & + C^{Ex} 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) - K^{Ex} x - L^{Ex} y + N^{Ex}. \end{aligned}$$

8. Zginanie połączone ze skręcaniem

W ogólnym przypadku, gdy obciążenie poprzeczne jest przyłożone i skierowane dowolnie w płaszczyznach przekrojów poprzecznych dźwigara, w przekrojach tych występuje siła poprzeczna o składowych $Q_x(z)$ i $Q_y(z)$ oraz moment o składowych $M_x(z)$, $M_y(z)$ i $M_z(z)$; obciążenie zostało tutaj sprowadzone do środka ciężkości rozpatrywanego przekroju. Naprężenia panujące w ściankach dźwigara można

wówczas wyznaczyć wprost z odpowiednich wzorów (p. 6 i 7), opierając się na zasadzie superpozycji. Jeżeli wziąć pod uwagę znane związki

$$(8.1) \quad Q_x(z) = -\frac{dM_y(z)}{dz},$$

$$(8.2) \quad Q_y(z) = \frac{dM_x(z)}{dz},$$

to na podstawie wzorów (6.25), (6.31), (7.1.26), (7.1.29), (7.2.12) i (7.2.13) otrzymuje się następujące wyrażenia dla naprężeń oznaczonych wskaźnikiem 0 w p. 4:

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \sigma^0 = & \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x - \frac{D(s)}{A} \int_z^L M_{SP} dz + \\ & + \frac{E}{G} \sum_i \left[-A^i x - B^i y + C_i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \times \\ & \times \frac{d}{dz} (A^i Q_x + B^i Q_y + C^i M_z), \end{aligned}$$

$$(8.4) \quad \tau^0 = -\frac{Q_x}{I_y \delta} S_y - \frac{Q_y}{I_x \delta} S_x - \frac{B(s)}{A \delta} M_{SP},$$

gdzie

$$(8.5) \quad M_{SP} = \frac{\int_0^l S_y r ds}{I_y} Q_x + \frac{\int_0^l S_x r ds}{I_x} Q_y + M_z.$$

Podobnie, na podstawie wzorów (6.23), (7.1.24) i (7.2.10), otrzymuje się

$$(8.6) \quad \frac{d^2 \vartheta^0}{dz^2} = -\frac{1}{2EA} \int_z^L M_{SP} dz.$$

Jak wspomnieliśmy w p. 4, naprężenia oznaczone wskaźnikiem 0 i przynależne do nich odkształcenia, oznaczone tym samym wskaźnikiem, nie spełniają w ogólności równania różniczkowego równowagi (3.1) i wszystkich warunków dodatkowych. (W przypadku obciążenia równomiernego równanie (3.1) jest spełnione). Można zatem wzory (8.3) i (8.4) traktować jako przedstawiające przybliżoną wartość naprężeń istotnych.

Dla określenia naprężeń istotnych wypada, zgodnie z rozważaniami w p. 4, uzupełnić naprężenia oznaczone wskaźnikiem 0 zbiorem układów zerowych. Te ostatnie nie przedstawiają atoli w przypadku ogólnym układów samodzielnych, jakie rozpatrzono w p. 5, lecz układy uzupełniające.

W tym celu dokonać trzeba „deformacji” naprężeń przedstawionych wzorami (5.7) i (5.8) drogą zachowania bez zmiany wyrazów zależnych od geometrii przekroju (tzn. zależnych od zmiennych x, y i s) i zastąpienia funkcji ζ_z^i przez inną, na razie nie określoną funkcję Z_z^i (również zmiennej z). Odpowiednie wzory przybierają wówczas następującą postać:

$$(8.7) \quad \sigma^i = E \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \frac{dZ_z^i}{dz},$$

$$(8.8) \quad \tau^i = G \frac{d\zeta_s^i}{ds} Z_z^i.$$

Funkcja ζ_z^i spełnia oczywiście w dalszym ciągu równanie różniczkowe (5.10), natomiast funkcja Z_z^i nie musi (w ogólności) spełniać równania (5.11). Ostatecznie więc (por. wzory (4.17) i (4.18)) naprężenia, panujące istotnie w ściankach dźwigara, można przedstawić w następującej postaci:

$$(8.9) \quad \sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x - \frac{D(s)}{A} \int_z^L M_{SP} dz + \\ + \frac{E}{G} \sum_i \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] \times \\ \times \frac{d}{dz} (A^i Q_x + B^i Q_y + C^i M_z + G Z_z^i),$$

$$(8.10) \quad \tau = -\frac{Q_x}{I_y \delta} S_y - \frac{Q_y}{I_y \delta} S_x - \frac{B(s)}{A \delta} M_{SP} + G \sum_i \frac{d\zeta_s^i}{ds} Z_z^i.$$

W podobny sposób na podstawie wzorów (5.6) i (8.6) przedstawić można drugą pochodną istotnego kąta skręcenia:

$$(8.11) \quad \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} = -\frac{1}{2EA} \int_z^L M_{SP} dz + \sum_i C^i \frac{dZ_z^i}{dz}.$$

Żądamy teraz, aby, zgodnie z założeniami poczynionymi w p. 4, naprężenia istotne spełniały przede wszystkim równanie równowagi (3.1). Dla przyjętego obciążenia równomiernego otrzymuje się

$$(8.12) \quad -\frac{d^3 Z_z^i}{dz^3} - k_i^2 Z_z^i = 0.$$

Jak widać, pomocnicza funkcja Z_z^i staje się w danym przypadku identyczna z funkcją poprzednio oznaczoną przez ζ_z^i .

Obliczamy z kolei przemieszczenie całkowite w kierunku osi z

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^{BE} + \sum_i \bar{\zeta}^i.$$

Ze wzorów (5.26), (6.40), (7.1.33) i (7.2.17) otrzymuje się po prostych przekształceniach

$$(8.13) \quad \bar{\zeta} = \left[-y_{SP} x + x_{SP} y + 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) \right] \frac{1}{2EA} \int_z^L \left(\int_z^L M_z dz \right) dz + \\ + \frac{x}{EI_y} \int_z^L M_y dz - \frac{y}{EI_x} \int_z^L M_x dz + \frac{1}{G} \sum_i \left[-A^i x - B^i y + \right. \\ \left. + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right] (A^i Q_x + B^i Q_y + C^i M_z + G Z_z^i) + \\ + 2 C \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) - \bar{K} x - \bar{L} y + \bar{N},$$

gdzie znaczenie stałych, przedstawionych explicite, jest następujące:

$$(8.14) \quad \begin{aligned} C &= C^B + C^{Ex} + C^{Ey} + \sum_i D^i, \\ \bar{K} &= K^B + K^{Ex} + K^{Ey} + \sum_i K^i, \\ \bar{L} &= L^B + L^{Ex} + L^{Ey} + \sum_i L^i, \\ \bar{N} &= N^B + N^{Ex} + N^{Ey} + \sum_i N^i. \end{aligned}$$

Jeżeli rozpatrywany dźwigar wspornikowy ulega utwierdzeniu całkowitemu w podłożu absolutnie sztywnym, to w przekroju podporowym powinien być spełniony warunek

$$(8.15) \quad \bar{\zeta}(s, 0) \equiv 0.$$

Przyjmijmy we wzorze (8.13) wartość z równą zero. Mnożymy ten wzór przez funkcję ortogonalną

$$\delta \left[-A^i x - B^i y + C^i 2 \left(\frac{1}{f} \int_0^l F_s \delta ds - F_s \right) + \zeta_s^i \right]$$

i całkujemy wzdłuż konturu przekroju. Po prostych przekształceniach przy uwzględnieniu zależności (3.2), (5.10) i (5.12)-(5.16) otrzymuje się następujący warunek brzegowy, który spełnia funkcja Z_z^i :

$$(8.16) \quad Z_z^i(0) = -\frac{1}{G} [A^i Q_x(0) + B^i Q_y(0) + C^i M_z(0)].$$

Na wolnym końcu dźwigara powinien być spełniony warunek (3.8). Przyjmując zatem we wzorze (8.9) wartość z równą L i postępując jak poprzednio przy przekształcaniu warunku (8.15), otrzymujemy następujący warunek brzegowy:

$$(8.17) \quad \left. \frac{dZ_z^i}{dz} \right|_{z=L} = -\frac{1}{G} \left. \frac{d}{dz} (A^i Q_x + B^i Q_y + C^i M_z) \right|_{z=L}.$$

9. Naprężenia według teorii przybliżonej.

Niech pominięty będzie całkowicie wpływ układów zerowych. Wówczas ze wzorów (8.9)-(8.11) otrzymuje się następujące przybliżone wartości naprężeń σ^* i τ^* oraz kąta skręcenia ϑ^* :

$$(9.1) \quad \sigma^* = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x - \frac{D(s)}{A} \int_z^L M_{SP} dz,$$

$$(9.2) \quad \tau^* = -\frac{Q_x}{I_y \delta} S_y - \frac{Q_y}{I_x \delta} S_x - \frac{B(s)}{A \delta} M_{SP},$$

$$(9.3) \quad \frac{d^2 \vartheta^*}{dz^2} = -\frac{1}{2EA} \int_0^L M_{SP} dz.$$

Łatwo zauważyć, że

$$\tau^* = \tau^0$$

oraz

$$\frac{d^2 \vartheta^*}{dz^2} = \frac{d^2 \vartheta^0}{dz^2},$$

natomiast naprężenie σ^* otrzymuje się ze wzoru dla σ^0 , jeżeli pominąć w nim wpływ uzupełniający układów samozrównoważonych.

Można więc w pewnym sensie uważać naprężenia oznaczone gwiazdką za naprężenia oznaczone wskaźnikiem 0 i traktować je jako naprężenia według teorii inżynierskiej. Układ nowych naprężeń inżynierskich jest oczywiście statycznie równoważny danemu obciążeniu dźwigara i spełnia równanie równowagi (3.1). Natomiast w ogólnym przypadku może to być układ zniekształcony, w którym odpowiednie przemieszczenia nie są ze sobą zgodne i nie spełniają ponadto wszystkich przepisanych zadaniem warunków dodatkowych.

Załóżmy, że pod działaniem siły poprzecznej $P(P_x, P_y)$, przechodzącej przez punkt x_p, y_p określonego przekroju poprzecznego $z=z_p$, dźwigar nie ulega skręceniu (na całej swej długości). Ze wzoru (9.3) wynika wówczas

$$(9.4) \quad M_{SP} = 0.$$

Uwzględniając zrozumiały związek

$$(9.5) \quad M_z = P_y x_p - P_x y_p,$$

ze wzorów (8.5) i (9.4) otrzymuje się

$$(9.6) \quad P_x \left(y_p - \frac{\int_0^l S_y r ds}{I_y} \right) - P_y \left(x_p + \frac{\int_0^l S_x r ds}{I_x} \right) = 0.$$

Warunek powyższy jest spełniony, i to niezależnie od wielkości obciążenia, jeżeli

$$(9.7.1) \quad x_p = x_{SP} = -\frac{\int_0^l S_x r ds}{I_x},$$

$$(9.7.2) \quad y_p = y_{SP} = \frac{\int_0^l S_y r ds}{I_y}.$$

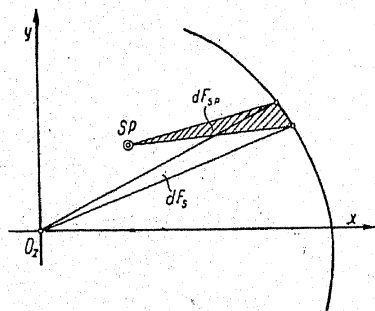
Wynika stąd, że jeżeli dźwigar nie ulega skróceniu, to siła obciążająca przechodzi przez określony punkt przekroju o współrzędnych x_{SP}, y_{SP} . Punkt ten przedstawia tzw. *środek ścinania* (środek sił poprzecznych). Położenie środka ścinania okazuje się w danym przypadku niezależne od wartości współrzędnej z_p punktu przyłożenia siły, wobec czego miejscem geometrycznym środków ścinania jest prosta równoległa do osi dźwigara (*oś ścinania*). Moment zastępczy M_{SP} przedstawia tutaj moment siły obciążającej względem środka ścinania w płaszczyźnie działania siły:

$$(9.8) \quad M_{SP} = P_y(x_p - x_{SP}) - P_x(y_p - y_{SP}).$$

W ogólnym przypadku, gdy odcinek pręta, ograniczony przekrojem rozpatrywanym i przekrojem końcowym $z = L$, poddany jest działaniu dowolnego obciążenia, które można sprowadzić do siły wypadkowej $Q(Q_x, Q_y)$ przyłożonej w punkcie x_p, y_p, z_p oraz do pary sił o momencie M_p działającej w płaszczyźnie przekroju $z = z_p$, wielkość M_{SP} przedstawia sumę momentu pary oraz siły wypadkowej Q względem odpowiedniego środka ścinania.

Łatwo zauważyć (rys. 3), że element dF_{SP} pola, zakreślonego przez promień wodzący z punktu SP o współrzędnych x_{SP}, y_{SP} , z elementem pola dF_s (biegun w O_z) łączy następujący związek:

$$(9.9) \quad 2 dF_{SP} = y_{SP} dx - x_{SP} dy + 2 dF_s.$$



Rys. 3.

Po scałkowaniu względem zmiennej s otrzymuje się

$$(9.10) \quad 2 F_{SP} = y_{SP} x - x_{SP} y + 2 F_s + C,$$

gdzie C jest stałą całkowania.

Przyjmijmy, że początek liczenia wycinków pól F_{SP} obrany zostaje w ten sposób, aby był spełniony warunek ⁹⁾

$$(9.11) \quad \int_0^l F_{SP} \delta ds = 0.$$

Wówczas

$$(9.12) \quad C = - \frac{2 \int_0^l F_s \delta ds}{f}$$

i po podstawieniu wartości x_{SP} i y_{SP} ze wzorów (9.7.1) i (9.7.2) do wzoru (9.10) otrzymuje się

$$(9.13) \quad F_{SP} = -D(s),$$

gdzie wartość wyrażenia $D(s)$ przedstawia wzór (6.10).

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$(9.14) \quad I_w = 4 \int_0^l (F_{SP})^2 \delta ds.$$

Proste przekształcenia pozwalają wówczas uzyskać następujący związek:

$$(9.15) \quad I_w = -2A,$$

gdzie wartość wyrażenia A przedstawiona jest wzorem (6.13).

Podobnie, jeżeli oznaczyć

$$(9.16) \quad S_w = 2 \int_0^s F_{SP} \delta ds,$$

to

$$(9.17) \quad S_w = -2B(s),$$

gdzie symbol $B(s)$ wprowadzono zgodnie ze wzorem (6.11).

Wprowadźmy ponadto następujące oznaczenia:

$$(9.18) \quad M_w = M_{SP},$$

$$(9.19) \quad \frac{dB}{dz} = M_w.$$

⁹⁾ Por. ¹⁰⁾.

Wówczas, pomijając stałą całkowania (z uwagi na istnienie warunku (3.8) i przyjęty rodzaj obciążenia dźwigara), otrzymuje się

$$(9.20) \quad B = - \int_z^L M_{SP} dz.$$

Zapisujemy wzory (9.1) i (9.2) dla naprężeń oznaczonych gwiazdką, stosując dopiero co wprowadzone symbole. Otrzymuje się wówczas wzory identyczne z wprowadzonymi na drodze bezpośrednich rozumowań przez W. Własowa¹⁰⁾:

$$(9.21) \quad \sigma^* = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{2 F_{SP}}{I_w} B,$$

$$(9.22) \quad \tau^* = - \frac{Q_x}{I_y \delta} S_y - \frac{Q_y}{I_x \delta} S_x - \frac{S_w}{I_w \delta} M_w.$$

Bibliografia

- [1] W. Z. Własow, *Tonkostiennyje uprugije stierżni*, Moskwa 1940.
- [2] M. M. Fiłonienko-Borodicz i inni, *Kurs soprotivlenia matieriałow*, Moskwa-Leningrad 1950, t. II.
- [3] J. Hadji-Argyris i P. C. Dunne, *The general theory of cylindrical and conical tubes under torsion and bending loads*, The J. of the R. Ae. S. 461 i 462 (1949).
- [4] R. Kappus, *Drillknicken von Stäben mit offenem Profil*, Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung, I str. 409-413.
- [5] J. Nowiński, *O pewnej metodzie obliczenia cienkościennych dźwigarów wspornikowych osadzonych swobodnie*, Biuletyn Inst. Techn. Lotn. 4 (1947).
- [6] — *Skrećanie dźwigarów o przekroju otwartym*, Biuletyn Inst. Techn. Lotn. 6 (1947).
- [7] — *Teoria dźwigarów cienkościennych zbieżnych*, Prace Głównego Inst. Lotn. 1 (1951).
- [8] A. Grzędzielski i J. Nowiński, *Wzory na obliczanie naprężeń w konstrukcjach skorupowych*, Warszawa 1938.
- [9] — *Środek sił poprzecznych i środek skrećenia przekrojów belek cienkościennych osadzonych swobodnie*, Technika Lotnicza 1 (1939).

¹⁰⁾ Cyt. według [2]. W. Własow uwzględnia ponadto nierównomierność rozkładu naprężeń ścinających w kierunku grubości ścianek, która tutaj zostaje pominięta. Por. również [3] i [4].

Резюме

К ТЕОРИИ РАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Ю. Новинский

Исследования по теории тонкостенных стержней проводились, начиная с 20-тых годов текущего века, в нескольких странах независимо друг от друга. Достаточно общие и точные решения получили в Советском Союзе В. З. Власов, А. А. Уманский и другие, и в Англии Д. Вильямс, Дж. Хаджи-Аргирис и другие. В Польше исследования по этой теории проводили в тот период А. Гржендзельский, В. Билевич и автор настоящей работы. В результате этих исследований получен метод анализа перемещений ([8] и [9]), обобщенный автором в послевоенный период ([5], [7] и [6]).

Настоящая работа содержит развитие разработанной автором общей теории тонкостенных стержней, в применении к стержням открытого профиля, и является в некоторой степени дополнением ранее опубликованной работы автора по аналогичному вопросу [6]. Примененный здесь метод не отличается по существу от метода примененного автором ранее и состоит в том, что определяется для отдельных точек стержня упругие перемещения (формулы 2.1-2.3), совместимые с принятыми гипотезами о строении самого стержня. Делаются именно следующие гипотезы, связанные между собой определенными соотношениями:

- 1⁰ Поперечные сечения не деформируются в своих плоскостях.
- 2⁰ Стенки стержня лишены собственной жесткости.
- 3⁰ Напряженное и деформированное состояние в стенках плоские.
- 4⁰ Число Пуассона ν равно нулю.

Считается, что стержень прикреплен прямо к жесткому основанию и равномерно нагружен. Это последнее предположение сделано для упрощения вычислений, но нет никаких принципиальных затруднений обобщить все рассуждения на случай произвольной нагрузки. О способе закрепления краевого сечения не делается никаких гипотез. Значит, краевое сечение может свободно искривляться, быть жестко (чтобы оставалось плоским), или упруго закреплено.

Проведенный анализ изометрического движения показывает, что полные перемещения в продольном направлении стержня (формула (2.3)) можно представить в виде (2.24), где функция $\xi(s, z)$ определяет теперь деформацию сечений происходящую от одних только напряжений.

Отсюда следует, что напряжения в оболочке (формулы (2.6) и (2.7)) можно представить, с учетом соотношений (2.4) и (2.5), в виде (2.21) и (2.22). Эти напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия элемента оболочки, определенным динамическим условиям (3.2)-(3.7) и другим, как на пример (3.8) и (3.9). Таким образом вопрос сведен к краевой задаче (3.10) на определение четырех неизвестных функций $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\vartheta(z)$ и $\zeta(z)$, удовлетворяющих указанным динамическим и геометрическим условиям (например, в случае жесткого укрепления, условию (8.15)).

Чтобы получить решение краевой задачи, разворачиваются искомые функции в ряды, в общем случае бесконечные. Первые члены этих рядов, обозначенные индексом 0, соответствуют напряжениям („инженерным”), уравнивающим внешнюю нагрузку. Остальные члены, обозначенные индексом i , соответствуют напряжениям самоуравновешенных систем. Всякая отдельная совокупность искомых функций, или соответствующих им напряжений, может не удовлетворять условиям равновесия, или одного из добавочных условий. Но все члены вместе удовлетворяют всем требованиям теории.

В работе доказывается, что функции переменного s , фигурирующие в выражениях (5.7) и (5.8) для напряжений самоуравновешенных систем, образуют системы ортогональных функций в интервале $(0, l)$.

Инженерные напряжения рассматриваются в случае чистого кручения (п. 6) и в случае изгиба в двух главных плоскостях инерции (п. 7). Доказывается, что при равномерной нагрузке для выполнения постулатов теории необходимо, чтобы инженер-

ные нормальные напряжения выражались в случае чистого кручения формулой (6.31), а в случае, например, изгиба от моментов в плоскости yz — формулой (7.1.25). Если развернуть соответствующие члены в ортогональные ряды, о которых сказано выше (ср. напр. формулу (6.32)), то эти формулы получают окончательный вид (6.34), (7.1.29) и (7.2.12).

Соответствующие формулы для касательных напряжений обозначены номерами (6.25), (7.1.26) и (7.2.13).

В общем случае произвольной равномерной нагрузки можно полученные составляющие инженерных напряжений накладывать. Таким образом результирующие инженерные напряжения выражаются формулами (8.3) и (8.4). К этим напряжениям прибавляются, как обычно, напряжения самоуравновешенных систем и тогда, окончательно, полные напряжения (8.9) и (8.10) и соответствующие им перемещения удовлетворяют всем условиям задачи (напр. условиям: геометрическому (8.15) и динамическому (3.8), или соответствующим им условиям для функции Z_z^i — согласно уравнениям (8.16) и (8.17)).

Если не учитывается влияние самоуравновешенных систем, то полученные формулы (8.3) и (8.4) для напряжений переходят в известные формулы В. З. Власова (9.21) и (9.22), который их получил непосредственными рассуждениями при помощи так называемой гипотезы деформаций (секториальных площадей). В этом случае не только нельзя выполнить вообще всех добавочных условий задачи, но кроме того нарушается согласие между напряжениями и соответствующими им перемещениями.

Summary

ON THE THEORY OF THIN-WALLED BEAMS WITH OPEN CROSS-SECTION UNDER UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

The studies of thin-walled beams, which started in the third decade of the present century, have developed independently in several scientific centres, bringing sufficiently general and exact solutions, obtained chiefly by Soviet (V. Z. Vlasov, A. A. Umanski and others) and British scientists (D. Williams, J. Hadji-Argyris and others).

In Poland the investigations in question have been carried out in the same period by A. Grzędzielski, W. Billéwicz and the author.

The result was a method of analysis of elastic displacements ([8] and [9]), presented in more general form after the war ([5], [7] and [6]).

This paper presents an application of the author's general theory of thin-walled beams to beams with open cross-sections and is in a certain measure a complement to a formerly published paper on a similar subject, [6].

The method adopted here does not essentially differ from that formerly used and consists in determining the displacements of beam points (formulae (2.1)-(2.3)) in accordance with certain assumptions concerning its structure.

These are as follows:

- 1^o the maintenance of the shape of cross-sections by a system of diaphragms rigid in their own planes,
- 2^o the lack of stiffness of beam walls,
- 3^o the "pseudoplane" state of strain and stress in the walls,
- 4^o Poisson's ratio $\nu = 0$.

The beam is assumed to be fixed at one end and uniformly loaded. The latter assumption is made in order to simplify the calculations but there is no essential difficulty in making generalizations for any load.

There is no assumption concerning the way of fixing the root cross-section, which means that the fixing can be either free (permitting free warping of root cross-section) or rigid (the root cross-section remains fully constrained axially) or elastic.

The analysis of isometric movement shows that total longitudinal displacements (formula (2.3)) can be represented by (2.24) where function $\zeta(s, z)$ represents the warping of cross section, provoked by the stresses alone.

In consequence and taking account of the relations (2.4) and (2.5) the wall stresses (formulae (2.6) and (2.7)) can be written as (2.21) and (2.22). They should satisfy the differential equation of equilibrium of a wall element as well as dynamic conditions given by (3.2)-(3.7) and others like (3.8) and (3.9).

In this way the task is reduced to a boundary value problem (3.10) with four unknown functions $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\vartheta(z)$ and $\zeta(s, z)$, satisfying the dynamic (mentioned above) and geometric conditions (e. g. condition (8.15) in case of rigid fixing).

To obtain a solution, the unknown functions are represented as sums which in the general case are of infinite number of terms. First of them, with subscript 0, represent the so-called engineers' theory stresses, equilibrating the external load.

The remaining terms, with subscript i , represent the stresses of self-equilibrating systems. It is not required that any system of functions in question or any system of corresponding stresses should satisfy the equation of equilibrium or any additional condition, but all the terms taken as a whole should satisfy all the requirements of the theory.

It is shown that the functions of the variable s in the expressions for stresses of self-equilibrating systems (5.7) and (5.8) constitute systems of orthogonal functions in the interval $(0, l)$.

The engineers' theory stresses are studied in the cases of pure torsion (paragraph 6) and bending in both principal planes of inertia (paragraph 7). It is shown that if uniform load is assumed, the satisfaction of the exigencies of the theory requires representation of direct engineers' theory stresses in the form of (6.31) for pure torsion.

For bending with a moment acting in the plane yz for instance, they should be represented in the form of (7.1.25).

After developping suitable elements in series of orthogonal functions mentionned above (see for instance formula (6.32)) the formulae take their final shape of (6.34), (7.1.29) and (7.2.12).

The corresponding formulae for shear stresses are (6.25), (7.1.26) and (7.2.13).

In the general case of a uniform load the obtained component engineers' theory stresses can be superposed. It follows that the resultant engineers' theory stresses can be expressed in the form of (8.3) and (8.4). According to the procedure adopted the stresses in question are completed with those of self-equilibrating systems. In consequence the resultant stresses (8.9) and (8.10) and the corresponding displacements (4.1)-(4.4) should satisfy all conditions of the problem (for instance geometric (8.15) and dynamic (3.8) or the corresponding conditions concerning the function Z_z^t — according to the equations (8.16) and (8.17).

If the influence of self-equilibrating systems is entirely neglected the formulae obtained (8.3) and (8.4) become the well known formulae of V. Vlasov (9.21) and (9.22), obtained by that scientist directly on the basis of the so-called warping hypothesis (or hypothesis of sectorial areas). In this case it is not only impossible to satisfy all the additional conditions but the compatibility of stresses with corresponding displacements is equally affected.

WYDAWNICTWA

INSTYTUTU MATEMATYCZNEGO POLSKIEJ AKADEMII NAUK

i

POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

CZASOPISMA

FUNDAMENTA MATHEMATICAE, I-XXXVIII (tom XXXIX w druku).

STUDIA MATHEMATICA, I-XII (tom XIII w druku).

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE, I-XXIII
(tom XXIV i XXV w druku).

COLLOQUIUM MATHEMATICUM, I-II (tom III w przygotowaniu).

ZASTOSOWANIA MATEMATYKI (tom I w przygotowaniu).

ROZPRAWY MATEMATYCZNE I, (zeszyt II w przygotowaniu).

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

- I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932, str. VIII+256.
- II. S. Saks, Théorie de l'intégrale, 1933, str. X+292, wyczerpane.
- III. C. Kuratowski, Topologie I, 1933, str. X+288.
- IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, 1934, str. VI+194.
- V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, str. IV+332.
- VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, 1935, str. VI+300.
- VII. S. Saks, Theory of the Integral, 1937, str. VIII+348.
- VIII. S. Banach, Mechanika I, wydanie trzecie, 1950, str. VI+234.
- IX. S. Banach, Mechanika II, wydanie trzecie, 1950, str. 235-556.
- X. S. Saks i A. Zygmund, Funkcje Analityczne, wydanie drugie, 1938, str. VIII+432.
- XI. W. Sierpiński, Zasady algebry wyższej, wydanie drugie, 1951, str. VIII+436.
- XII. K. Borsuk, Geometria analityczna w n wymiarach, 1950, str. IV+448.
- XIII. W. Sierpiński, Działania nieskończone, wydanie trzecie, 1947, str. XI+503.
- XIV. W. Sierpiński, Rachunek różniczkowy, wydanie drugie, 1947, str. VII+262.
- XV. K. Kuratowski, Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego I, wydanie drugie, 1949, str. 236.
- XVI. E. Otto, Geometria wykreślna, 1950, str. VI+272.
- XVII. S. Banach, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, 1951, str. IV+224.
- XVIII. A. Mostowski, Logika matematyczna, 1948, str. VIII+388.
- XIX. W. Sierpiński, Teoria liczb, wydanie trzecie, 1950, str. VIII+544.
- XX. C. Kuratowski, Topologie I, wydanie trzecie, 1952, str. XII+452.
- XXI. C. Kuratowski, Topologie II, wydanie drugie, 1952, str. VIII+444.
- XXII. W. Rubinowicz, Wektory i tensory, 1950, str. IV+170.

Cena 5 zł.

- XXIII. W. Sierpiński, *Algèbre des Ensembles*, 1951, str. 202.
XXIV. S. Banach, *Mechanics*, przekład angielski, 1951, str. IV+546.
XXV. W. Nikliborc, *Równania różniczkowe I*, 1951, str. IV+176.
XXVI. M. Stark, *Geometria analityczna*, 1951, str. VIII+629.
XXVII. K. Kuratowski i A. Mostowski, *Kurs teorii mnogości*, 1952, str. X 312.
XXVIII. S. Saks and A. Zygmund, *Analytic Functions* (w druku).
XXIX. F. Leja, *Funkcje analityczne i harmoniczne I*, 1952, str. IV+174.

W DRUKU

- J. G. Mikusiński, *Rachunek operatorów*.
A. Mostowski i M. Stark, *Algebra wyższa I*.

W PRZYGOTOWANIU

- M. Biernacki, *Geometria różniczkowa*.
K. Borsuk i W. Szmielew, *Geometria wyższa*.
M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu*.
K. Kuratowski, *Topologia teorii mnogości*.
K. Kuratowski, *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego II*.
F. Leja, *Funkcje analityczne i harmoniczne II*.
E. Marczewski, *General Theory of Measure*.
S. Mazur, *Functional Analysis*.
S. Mazurkiewicz, *Rachunek prawdopodobieństwa*.
A. Mostowski, *Mathematical Logic*.
A. Mostowski i M. Stark, *Algebra wyższa II*.
W. Nikliborc i Z. Charzyński, *Równania różniczkowe II*.
W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*.
W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*.
W. Sierpiński, *The axiom of Choice and the Continuum Hypothesis*.
R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*.
H. Steinhaus, *Independent Functions*.
W. Ślebodziński, *Formes différentielles symboliques et leurs applications*.
T. Ważewski, *Teoria równań różniczkowych*.
W. Wrona, *Geometria Riemanna*.

PRZEKŁADY

- I. Pietrowski, *Wykłady o równaniach całkowych*, 1951, str. III+95.
I. Pietrowski, *Wykłady o równaniach różniczkowych zwyczajnych* (w druku).
W. Gliwienko, *Rachunek prawdopodobieństwa* (w druku).
M. Ławrentiew i L. Lusternik, *Rachunek wariacyjny* (w druku).

P O L S K I Ę T O W A R Z Y S T W O M A T E M A T Y C Z N E
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8.