wpływa na rozkład skutków i wydaje się, jak gdyby to były zjawiska niezależne.

Warunek dostateczny dla przybliżonej przypadkowości skutków alternatywnych y_1, y_2 jest następujący. Rozważmy obręb, w którym różne wartości zmiennej x występują z prawdopodobieństwem stosunkowo niewiele różnem. Jeżeli w tym obrębie funkcja, wyrażająca związek przyczyny x oraz skutku y, posiada taki charakter, że wielkiej liczbie przedziałów

$$x \ldots x + \Delta x_1;\ x + \Delta x_2 \ldots x + \Delta x_3;\ x + \Delta x_4 \ldots x + \Delta x_5 \ldots \text{ i t. d.}$$

odpowiada skutek y_1, natomiast naprzemian położonym przedziałom

$$x + \Delta x_1 \ldots .\ x + \Delta x_2;\ x + \Delta x_3 \ldots .\ x + \Delta x_4; \ldots \text{ i t. d.}$$

skutek y_2, wówczas występowanie skutków y_1, y_2 można uważać za przybliżenie przypadkowe. Ściśle przypadkowe będą one wówczas, jeżeli wszystkie przedziały Δx są nieskończenie małe, a liczba ich nieskończenie wielka. Stosunek prawdopodobieństw zjawisk y_1, y_2 jest oznaczony wówczas przez stosunek sumy przedziałów parzystych do sumy przedziałów nieparzystych.

W zjawiskach, do których stosujemy w praktyce rachunek prawdopodobieństwa, występuje przypadek zazwyczaj tylko w owem znaczeniu przybliżonem. Że rachunek prawdopodobieństwa tak dobrze zgadza się z doświadczeniem przy różnych grach hazardowych i t. p., polega tylko na tem, że tam jako właściwy, pierwotny czynnik występuje człowiek, który jest maszyną, posiadającą nadzwyczajnie wielki „obręb przypadkowej zmienności".

Z punktu widzenia fizyki najciekawsze przykłady, należące do zakresu kinetycznej teorji materji, przedstawiają niestety nieprzezwyciężone dotychczas trudności dla zastosowania takich kryterjów przypadkowości. Czujemy intuicyjnie, że Maxwella i Boltzmanna metoda obliczania skutków spotkań molekularnych, opierająca się na założeniu zupełnej przypadkowości zjawisk składowych [1]), jest bardzo przybliżenie ważna. Mechanika statystyczna daje jednak poważne powody do przypuszczania, że metoda ta niezupełnie jest ścisła; niestety nie potrafimy obecnie jeszcze należycie ocenić błędów, wywołanych przez stosowanie założenia Boltzmanna.

[1]) Założenie to wyraża się matematycznie w formie t. zw. *Stoßzahl-Ansatz*. Por. P. u. T. Ehrenfest, Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften, IV. 2 II. Heft 6, Teubner, Leipzig 1912.

VII. ÜBER DEN BEGRIFF DES ZUFALLS UND DEN URSPRUNG DER WAHRSCHEINLICHKEITS-GESETZE IN DER PHYSIK.

Die Naturwissenschaften. Jahrgang 1918. Heft XVII.

I

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche seit Beginn ihrer Entwicklung mit größtem Erfolg, hauptsächlich in dem sonst der mathematischen Behandlung wenig zugänglichen Bereich sozialer und biologischer Vorgänge angewendet wurde, hat sich in den letzten Zeiten ein überaus wichtiges Anwendungsgebiet erobert: die Physik. Und zwar ist damit nicht etwa die seit Gauß' Zeiten als eigene Hilfsdisziplin ausgebildete Theorie der Fehlerausgleichung bei physikalischen Messungen gemeint, sondern gerade das eigentliche Gerüst dieser Wissenschaft, das System der theoretischen Physik.

Zum ersten Male in den Jahren 1857—1860 von Clausius und Maxwell als eigenartiges mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung, nach einer vorübergehenden Periode der Stagnation, infolge des schließlichen Sieges der atomistischen Anschauungsweise eine für die Physik ganz grundlegende Bedeutung gewonnen und bildet heute das wichtigste Werkzeug bei Forschungen auf dem Gebiete der modernen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie. Entspricht doch ihr Wesen durchaus der heute zur Herrschaft gelangten Tendenz, sämtliche Gesetze der Physik [1]) — nach dem Vorbild der kinetischen Gastheorie — auf

[1]) Von dieser Tendenz sind bisher nur die Lorentzschen Gleichungen der Elektronentheorie, das Energiegesetz und das Relativitätsprinzip unberührt geblieben, aber es ist wohl möglich, daß im Laufe der Zeit auch hier exakte Gesetzesformen durch statistische Regelmäßigkeit ersetzt werden dürften.

Statistik verborgener Elementarereignisse zurückzuführen, wobei die „Einfachheit" derselben als sekundäre Folge des Wahrscheinlichkeitsgesetzes der großen Zahlen aufgefaßt wird.

Trotz dieser enormen Ausdehnung des Anwendungsbereiches der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat die exakte Analyse der ihr zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte gemacht; es gilt wohl noch heute der Satz, daß keine zweite mathematische Disziplin auf so unklaren und schwankenden Grundlagen aufgebaut ist. So werden die Grundfragen nach der Subjektivität oder Objektivität des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, nach der Definition der Zufälligkeit usw. von verschiedenen Autoren in diametral entgegengesetzter Weise beantwortet. Insbesondere ist auch eine allgemeine und mathematisch exakte Präzisierung der für die Anwendbarkeit dieser Rechnungsmethode charakteristischen Bedingungen noch immer ausständig, und man pflegt sich in dieser Hinsicht meist auf ein intuitives Wahrscheinlichkeitsgefühl zu verlassen. Als kleiner Beitrag zu derartigen Untersuchungen mögen die nachfolgenden Bemerkungen aufgefaßt sein, welche von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik ausgehen, in der gewisse grundsätzliche Schwierigkeiten in besonders krasser Form auftreten. Ich will eingestehen, daß gerade das Unbefriedigende der diesbezüglichen Ausführungen in gewissen, sonst höchst beachtenswerten neueren Werken die Entstehung dieser Studie veranlaßt hat. Im übrigen bezweckt dieselbe selbstverständlich keineswegs eine allseitige und endgültige Aufklärung des ganzen damit zusammenhängenden Komplexes philosophischer Fragen, sondern will nur eine Anregung zu weiteren Untersuchungen in einer bestimmten Richtung geben, indem einige Leitgedanken hervorgehoben werden, welche die bisher allzusehr vernachlässigte objektive Seite des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ins rechte Licht setzen sollen.

II

Die Frage, welche Ereignisse in den Geltungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung fallen, wird wohl allgemein dahin beantwortet: diejenigen, *deren Eintritt vom Zufall abhängt.* Die Untersuchung dieses letzteren Begriffes ist also jedenfalls das Primäre, und wir werden uns vor allem klar zu machen suchen, wodurch das Wesen des Zufalls gekennzeichnet ist. Damit hängen zwei vielumstrittene Probleme zusammen, deren Schwierigkeit angesichts

der exakten mathematischen Spekulationen der theoretischen Physik sich besonders fühlbar macht, nämlich:

1. Wie ist es möglich, daß sich der Effekt des Zufalls berechnen lasse, daß also *zufällige Ursachen gesetzmäßige Wirkungen* haben?

2. Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf regelmäßige Naturgesetze zurückzuführen ist? oder mit anderen Worten: wie können *gesetzmäßige Ursachen* eine *zufällige Wirkung* haben?

Betrachtet man in populärer Weise den Zufall als die Negation des Gesetzmäßigen, so sind diese Widersprüche gewiß vollständig unüberbrückbar. Ein solcher Zufallsbegriff ist jedoch mit dem in der heutigen Wissenschaft herrschenden Determinismus unvereinbar. Meist pflegt man sich also die Sache durch die Annahme zu erklären, daß zwar zwischen der betreffenden Ursache und Wirkung ein gesetzmäßiger, kausaler Zusammenhang besteht, daß aber die Art des Zusammenhanges für uns wegen der Komplikation der Erscheinung nicht erkennbar ist, wodurch der Schein der Gesetzlosigkeit entsteht. In diesem Sinne wäre der Zufall als eine uns *„unbekannte Teilursache"* zu bezeichnen. Damit dürfte wohl auch Meinongs[1]) Auffassungsweise näher verwandt sein, als es den Anschein hat, welcher zufolge Zufälligkeit die „Tatsächlichkeit" von etwas „Nichtnotwendigem" bedeuten würde; dabei soll nämlich die negierte Notwendigkeit entweder eine innere oder äußere (relativ zu einem gewissen Komplex von Objektivem) sein. Wenn man nun vom deterministischen Standpunkt aus Ursache und Wirkung als stets durch die inneren Notwendigkeitsbeziehungen der Teilereignisse verkettet ansieht, kann von Nichtnotwendigkeit nur in relativem Sinne die Rede sein: insofern die Notwendigkeit äußerlich nicht erkennbar ist, also insofern ein Teil der wirkenden Ursachen unbestimmt ist. Diese herkömmliche Darstellungsweise, welche das Wesen des Zufalls auf unsere Unkenntnis der wirkenden Gesetze oder Ursachen zurückführt, könnte man allenfalls noch als Beantwortung der zweiten der oben angeführten Fragen gelten lassen, aber es bleibt die erste Frage ungelöst, wieso eine Berechnung der Wirkung unerkennbarer Teilursachen möglich ist. Die mannigfaltigen philosophischen Analysen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes geben

[1]) A. Meinong, Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit, Leipzig 1915.

hierüber keinen Aufschluß. Überhaupt handelt es sich dem Philosophen dabei meist um etwas ganz anderes als dem Physiker. Er richtet seine Aufmerksamkeit vor allem auf die subjektiven, psychologischen Momente des Wahrscheinlichkeitsgedankens, analysiert die erkenntnistheoretische Bedeutung desselben, untersucht, in welcher Weise sich wahrscheinliche Aussagen, neben wahren und falschen Aussagen, in das System der formalen Logik einordnen lassen, pflegt aber die Frage nach der Art der denselben zugrunde liegenden objektiven Tatsachen nicht näher zu berühren.

Im Gegensatz hierzu interessiert sich die exakte Naturwissenschaft nicht für Aussagen und nicht für subjektive — berechtigte oder unberechtigte — Vermutungen[1]), sondern für die objektive oder „mathematische“ Wahrscheinlichkeit, d. i. für die relative Häufigkeit des Eintretens bestimmter zufälliger Ereignisse. Sie gebraucht also den — wie Meinong treffend bemerkt — so vieldeutigen Begriff der Wahrscheinlichkeit in einem sehr eingeschränkten Sinne, welchem jener Autor und andere Philosophen allerdings lieber die Bezeichnung Möglichkeitsgrad beilegen dürften, welcher aber eben erst in diesem engeren Sinne einer exakt mathematischen Behandlung zugänglich wird. Es verhält sich damit ähnlich wie mit vielen anderen Ausdrücken, wie z. B. Kraft, Arbeit, Energie, Wärme, welche der Physiker in wesentlich anderem Sinne versteht, als dies im gewöhnlichen Leben üblich ist.

Offenbar sind also, soweit die Anwendung in der theoretischen Physik in Betracht kommt, alle Wahrscheinlichkeitstheorien von vornherein als ungenügend zu betrachten, welche den Zufall als „unbekannte Teilursache“ auffassen. Die physikalische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann nur von den Bedingungen abhängen, welche sein Zustandekommen beeinflussen, aber nicht von dem Grade unseres Wissens.

Ich bin mir wohl bewußt, daß dies im Gegensatz zu der allgemein üblichen Auffassung steht, welche eine teilweise Unkenntnis der Ursachen als das wesentliche, hier in Betracht kommende Moment ansieht, darum sei als Beleg für unsere Behauptung bemerkt: Die Wahrscheinlichkeitsrechnungen der kinetischen Gastheorie würden ihre Berechtigung auch dann behalten, wenn wir die Beschaffenheit der Moleküle, deren Anfangslagen usw. absolut genau kennen würden und imstande wären, deren Bewegungen mathematisch exakt für alle Zeiten zu verfolgen. Sie wären dann noch immer zum wenigsten ein ebenso rationelles mathematisches Hilfsmittel wie die abgekürzte Multiplikation oder die Benutzung der Logarithmentafeln (oder des Rechenschiebers) neben der üblichen exakten Multiplikation.

[1]) Meinong (loc. cit.) führt den Wahrscheinlichkeitsgrad auf die Stärke „berechtigter Vermutungen“ zurück.

Wie pflegen nun die Vertreter der herkömmlichen Auffassung die Tatsache zu erklären, daß eine Berechnung der Wirkung unbekannter Teilursachen möglich ist? Sie berufen sich auf das „Gesetz der großen Zahlen“ als ein zwar nicht beweisbares, aber empirisch unumstößlich erwiesenes Prinzip. So sagt z. B. Timerding[1]): „.... die unverbrüchliche Kausalität in allem Naturgeschehen mag wohl aufrecht erhalten werden, sie reicht aber nicht hin, um die Regelmäßigkeit des Weltgeschehens vollständig zu erklären. Es gehört vielmehr die Tatsache hinzu, die wir als Gesetz der großen Zahlen bezeichnen, und die bewirkt, daß die Unregelmäßigkeiten, die sonst durch die zufälligen Ereignisse in die Welt hineingetragen werden, in dem Gesamtergebnis wieder verschwinden.... Unser Verstand sträubt sich allerdings dagegen, ein solches Prinzip nur deshalb anzunehmen, weil hier und dort seine Richtigkeit bezeugt wird, vielmehr drängt er dahin, auch einen inneren Grund für einen solchen Ausgleich zu finden. Ein solcher innerer Grund läßt sich aber nicht ermitteln....“ Das ist wohl eine wenig erfreuliche Lösung, und man wird trachten, einen anderen Ausweg aus dem Dilemma zu finden. Übrigens bemerkt beispielsweise Poincaré, daß auch in der abstrakten Mathematik von Wahrscheinlichkeitsgesetzen geredet werden kann, daß z. B. die Häufigkeit der Zahlen 1, 2, 3..., an der letzten Stelle der Zahlenkolonnen einer Logarithmentafel dem gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsgesetz gleichmöglicher Fälle folgt. Wird sich der Mathematiker damit begnügen, hierin das Walten eines unbegreiflichen, rein empirischen Gesetzes der großen Zahlen anzuerkennen?

III

Ein Fingerzeig zur Lösung der Frage scheint mir darin zu liegen, daß die oben erwähnten Definitionen des Zufalls als unbekann-

[1]) H. E. Timerding, Die Analyse des Zufalls, S. 162 (Vieweg 1915).

ter Teilursache[1]) und dergl. zweifellos *viel zu weit sind.* Als Leverrier bemerkte, daß die Bewegung des Uranus nicht genau mit der Vorausberechnung übereinstimme, sagte er nicht: das ist Zufall! — Wir haben keine Ahnung, wann eine magnetische Störung stattfinden wird, halten aber das Eintreten derselben doch durchaus nicht für eine Sache des Zufalls.

Es fehlt in diesen Beispielen ein ganz wesentliches Merkmal desjenigen, was man im gewöhnlichen Leben oder in unserer Wissenschaft als Zufall bezeichnet, und zwar läßt sich dieses kurz in die Worte fassen: *kleine Ursache — große Wirkung.* Ein minimaler Unterschied im Ingangsetzen der Roulette — Gewinn oder Verlust einer Unsumme Geldes. Poincaré, welcher hierauf nachdrücklich hingewiesen hat, gibt zwar noch zwei Alternativmerkmale des Zufalls an[2]): Kompliziertheit vieler mitwirkender Ursachen oder gegenseitige Einwirkung zweier für gewöhnlich zu unabhängigen Gebieten gehöriger Vorgänge, doch glaube ich, daß sämtliche dazu gehörigen Fälle sich bei genauer Analyse ebenfalls unter jenen Gesichtspunkt einordnen lassen.

Besonders charakteristisch tritt jenes Merkmal in allen Fällen auf, wo es sich um einen Zustand labilen Gleichgewichts handelt. Denken wir uns einen „idealen" Würfel auf eine Ecke gestellt, so ist die kleinste Verschiebung des Schwerpunktes aus der Vertikalen schon dafür entscheidend, auf welche der drei unten zusammenstoßenden Flächen der Würfel zu liegen kommen wird. Welche Zahl also obenauf erscheinen wird, das, so sagt man, hängt vom Zufall ab. Mathematisch ausgedrückt: die Wirkung y (obenauf erscheinende Zahl) hängt von der Ursache x (Lage des Schwerpunktes) derart ab, daß die Funktion $y = f(x)$ in dem betreffenden Gleichgewichtswerte x_0 eine Unstetigkeit aufweist. Nebstbei bemerkt, setzt sich die Ursache in diesem Falle eigentlich aus zwei Variabeln zusammen: wenn man sich den Schwerpunkt O und die drei in der unteren Ecke E zusammenstoßenden Kanten auf die Horizontalebene projiziert, so sieht man, daß die Entfernung $r = OE$ in der so erhaltenen Projektion für die Geschwindigkeit maßgebend ist, mit welcher das Umfallen erfolgt; die durch einen Winkel θ definierbare Richtung des Vektors OE in bezug auf die drei Kantenlinien für die Zahl, welche obenauf erscheinen wird. Nun entzieht sich aber ein derartiger Zufall jeder apriorischen Berechnung und kann auch niemals die Grundlage zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden. Denn solange man die bestimmenden Ursachen (Richtung und Größe des Vektors OE) nicht mit genügender Genauigkeit kennt, läßt sich bezüglich des Effektes überhaupt gar nichts voraussagen. Kennt man sie aber, so ist die Wirkung mit Gewißheit vorauszusehen, und es bleibt kein Raum für Wahrscheinlichkeit übrig.

[1]) Czuber (Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 8) sagt „unbekannte und wechselnde Umstände". Es ist wohl nicht recht klar, was mit „wechselnd" gemeint ist und wie der Wechsel zu erkennen ist, wenn der Umstand selber unbekannt ist. Vielleicht ist das aber ein instinktives Herausfühlen der Kriterien, die wir später besprechen werden.

[2]) H. Poincaré, Calcul des Probabilités, Paris 1912, Introduction.

Als Beispiel eines unberechenbaren Zufalls sei noch ein anderer Fall angeführt: wenn ein Artillerist mit einem mathematisch exakt schießenden Geschütz nach einem Ziel schießt, dessen Entfernung ihm unbekannt ist. Es fehlt ihm die Kenntnis einer der Variabeln, von denen die richtige Elevation abhängt, und es wäre ein blinder Zufall, wenn er einen Treffer erzielen würde. Von irgend einer Vorausberechnung, von einer Wahrscheinlichkeit in unserem Sinne, kann da gar nicht die Rede sein, solange uns die Psychologie jenes Artilleristen nicht näher bekannt ist. Sobald wir aber wissen, daß derselbe eine gewisse Methode systematischen Einschießens anwendet, oder sobald gewisse mechanische Hilfsmittel von später zu besprechender Art (z. B. Rotation des Geschützrohres um die Lagerachse) mitspielen, wird die Aufgabe eine ganz definierte, und läßt sich (mit Rücksicht auf die Größe des Zieles und seine Entfernung usw.) eine bestimmte Treffwahrscheinlichkeit angeben.

Der einer Wahrscheinlichkeitsberechnung entsprechende — vielleicht darf man sagen: der „geregelte" Zufall zeichnet sich also vor dem Zufall in weiterem Sinne durch ein wesentliches Charakteristikum aus: *eine gewisse Regelmäßigkeit der Wirkung* bei oftmaliger Wiederholung des Vorganges, *unabhängig von der speziellen Art der Ursache.*

Läßt man den vorher besprochenen Würfel aus der Höhe eines Meters auf eine ideal ebene (unvollkommen elastische) Unterlage fallen, so ändert sich jener Vorgang in wesentlicher Weise. Der Würfel prallt ab, steigt empor und wiederholt diese Bewegungen mehrmals mit abnehmender Amplitude und unter Annahme scheinbar unregelmäßiger Rotationsbewegungen, bis er auf irgend einer seiner sechs Seiten liegen bleibt. Auf welche er schließlich zu liegen kommt, muß natürlich von der Art der anfänglichen Abweichung aus der axial-lotrechten Stellung abhängen, aber die Funktion $y = f(r, \theta)$, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, wird so beschaffen sein, daß bei kontinuierlicher Variation der zwei die Anfangslage definierenden Variabeln r, θ in äußerst raschem Wechsel Gebiete durchschritten werden, welche allen möglichen Endlagen entsprechen, derart, daß bereits innerhalb eines äußerst kleinen Variabilitätsbereiches V der Achsenstellung (in bezug auf die Lotrechte) die den Zahlen 1—6 zugehörigen Bereiche ungefähr flächengleich werden. Die Größe V könnte man vielleicht mit dem Namen Ausgleichsgebiet belegen. Würde man nun versuchen, den Würfel vor dem Fallenlassen durch menschliche Hilfsmittel in irgend einer Weise zu orientieren, so ist klar, daß dabei gewisse Einstellungsfehler trotz größter Sorgfalt unvermeidlich sind. Den Bereich dieser unvermeidlichen Fehler wollen wir als Schwankungsbereich Ω bezeichnen, und man darf wohl annehmen, daß die Verteilungsfunktion $\phi(r, \theta)$, welche die relative Häufigkeit jener Fehler bei unzähliger Wiederholung der Versuche darstellt, einen regelmäßigen „analytischen" Charakter besitze. Ist daher das durch die Art der zwangsläufigen Funktion $f(r, \theta)$ bestimmte Ausgleichsgebiet V klein im Vergleich zum individuellen Schwankungsbereich Ω, so ist leicht einzusehen, daß schließlich für alle Zahlen 1—6 eine gleiche Wahrscheinlichkeit resultieren muß, unabhängig von der speziellen Art der beabsichtigten Einstellung und von der individuellen Variationsfunktion $\phi(r, \theta)$. Das *Einzelereignis* ist also nicht vorauszusehen, wohl aber die *Gesamtverteilung* der Ereignisse bei fortgesetzter Wiederholung. In einem solchen Falle waltet der Zufall in gesetzmäßiger Weise.

Einfacher als der obige Fall ist das Beispiel der Roulette, an welchem Poincaré analoge Betrachtungen anstellt, oder das Beispiel der einem Schützen als Ziel dienenden rotierenden Sektorenscheibe. Ob derselbe einen schwarzen oder weißen Sektor treffen wird, hängt vom Zeitpunkt ab, wann das (feststehende) Gewehr abgedrückt wird. Man kann aber immer die Scheibe in so rasche Rotation versetzen, daß die Treffsicherheit des Schützen ausgeschaltet wird. Mag er sich in einem beliebigen Moment entschließen, loszudrücken, jedenfalls vergeht vom Entschluß bis zur Tat noch eine unbestimmte, in gewissen Grenzen variable Zeit, so daß die Wahr-

scheinlichkeit, daß der Schuß gerade zur Zeit t losgeht, durch eine (im Schwankungsbereich von t bis $t + \tau$ von Null merklich verschiedene) Funktion $\phi(t)$ dargestellt wird, von der anzunehmen ist, daß sie keine singulären Eigenschaften, wie Unstetigkeiten, außerordentlich viele Maxima und Minima und dergl., aufweist, deren Form aber sonst gleichgültig ist. Entfallen also auf den Schwankungsbereich τ der Zeit genügend viele Rotationen der Scheibe, so verschwindet der Einfluß der individuellen Form der Verteilungsfunktion $\phi(t)$, die Wahrscheinlichkeit, einen weißen oder schwarzen Sektor zu treffen, hängt dann nur vom relativen Flächeninhalt derselben ab. Man pflegt dann von jener Wahrscheinlichkeit schlechthin zu reden, ohne Rücksicht auf die Funktion ϕ, aber stillschweigend macht man doch betreffs ϕ die vorher erwähnten Annahmen. Jene Wahrscheinlichkeitsüberlegung würde beispielsweise ganz gegenstandslos werden, falls das Gewehr mit der Sektorenscheibe mittels eines elektrischen Kontaktes in passender Weise verbunden wäre.

In letzter Linie basiert die ganze Argumentation offenbar auf der Tatsache, daß jede (differenzierbare) Funktion sich im Bereich genügend kleiner Veränderungen der unabhängigen Variabeln angenähert proportional mit denselben ändert, und sie läßt sich durch eine einfache geometrische Analogie illustrieren: wenn man auf Papier, das in schmale, gleichbreite, alternierend weiße und schwarze Flächenstreifen zerlegt ist, aus freier Hand eine beliebige (aber nicht zu kleine und nicht zu unregelmäßige) geschlossene Kurve zieht, so wird der von derselben ausgeschnittene „weiße" und „schwarze" Flächeninhalt sehr nahe gleich groß sein, ohne Rücksicht auf die Art jener Kurve. Letztere entspricht dem, was wir individuellen Schwankungsbereich genannt haben, während die Zerlegung des Papiers in Flächenstreifen durch die Art der zwangsläufigen Kausalrelation $y = f(x)$ bestimmt ist.

Somit sehen wir, wie für die *Wirkung* des Zufalls ein bestimmtes Gesetz resultieren kann, ohne Rücksicht auf die spezielle Form jener unbekannten, primären Verteilungsfunktion ϕ, womit der erste der im II. Abschnitte hervorgehobenen Widersprüche seine Aufklärung findet. Allerdings muß man zugestehen, daß unsere Überlegungen das eigentliche *Wesen* des Zufalls noch nicht erschöpfend darstellen, denn sie beruhen ja auf der Annahme einer Verteilungsfunktion ϕ für die zufälligen Schwankungen der Ursache, von der überdies eine gewisse Eigenschaft (ein „regelmäßiger Verlauf") vorausgesetzt wird. Dieser Umstand findet seinen Ausdruck in einer übrigens ganz zutreffenden Aussage, mit welcher sich Mathematiker [1]) über diese Fragen hinwegzusetzen lieben: Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nicht *Erklärung* der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, sondern die *Ermittelung* derselben auf Grundlage einer anderen Wahrscheinlichkeit, nämlich der als bekannt angenommenen Wahrscheinlichkeit eines einfacheren, dasselbe verursachenden (oder dadurch bewirkten) Vorganges.

IV

Fassen wir das bisher Gesagte in verallgemeinerter Form zusammen: Man nennt *Zufall* eine spezielle Art von Kausalrelationen. Man sagt nämlich gewöhnlich, daß ein Ereignis y vom Zufall abhängt, wenn es eine solche Funktion einer veränderlichen (eventl. auch ihrem Werte nach unbekannten oder absichtlich ignorierten) Ursache oder Teilbedingung x ist, daß sein Eintreten oder Nichteintreten von einer sehr kleinen Änderung des x abhängt („klein" im Verhältnis zum Schwankungsbereich des x). Dieser populäre *Zufalls*begriff eignet sich jedoch nicht als Grundlage eines exakt definierbaren *Wahrscheinlichkeits*begriffes. Von einem die Größe y betreffenden mathematischen Wahrscheinlichkeitsgesetz $W(y)$ kann man erst dann sprechen, wenn die Kausalrelation $y = f(x)$, außer der erwähnten Eigenschaft noch eine spezielle besitzt: nämlich wenn die Verteilung der y, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, unabhängig ist von der Art der Verteilungsfunktion $\phi(x)$, welche die relative Häufigkeit der x bestimmt (vorausgesetzt, daß die Funktion $\phi(x)$ einen „regelmäßigen" Verlauf habe).

Eine hierzu hinreichende mathematische Bedingung läßt sich für den Fall einer einzigen unabhängigen Variabeln leicht aufstellen, wenn man die früher dargelegten Beispiele ins Auge faßt. Es genügt nämlich, daß die Funktion $y = f(x)$ einen derartigen „oszillierenden" Charakter habe, daß:

1. für jeden x_0-Wert in dem Schwankungsbereich Ω ein solches, im Verhältnis zu Ω äußerst kleines Δx angebbar ist, daß die Funktion $y = f(x) = f(x_0 + \epsilon\,\Delta x)$ sämtliche y-Werte (innerhalb gewisser Grenzen) durchläuft, sobald die Variable ϵ die Werte von 0 bis 1 durchläuft;

2. daß der Bruchteil des ϵ-Gebietes, welcher einem gewissen Gebiet von y-Werten entspricht, für alle innerhalb Ω gelegenen x_0-Punkte (annähernd) gleich groß ist.

[1]) Siehe z. B. E. Borel, Le Hasard, Paris, Alcan, 1914, p. 15.

Für jedes x gibt es also einen kleinsten Bereich Δx, welchem eine Variation über alle Werte y entspricht, und die Größe desselben definiert gewissermaßen die Struktur der Kausalfunktion $f(x)$: je „feinkörniger" dieselbe ist, d. h. je kleiner jene Δx sind, desto geringer sind die Anforderungen, welche man betreffs der „Regelmäßigkeit" der primären Verteilungsfunktion $\phi(x)$ stellen muß, um ein von der Art derselben unabhängiges Resultat für die Verteilung $W(y)$ zu erhalten. Natürlich ist dabei umgekehrt ein jeder y-Wert durch eine Menge verschiedener x realisierbar, d. h. die inverse Funktion ist in hohem Grade *vieldeutig*; die gleiche Wirkung kann durch sehr verschiedene ursächliche Konstellationen hervorgebracht werden — ebenfalls ein sehr charakteristischer Zug jener Kausalrelationen, welche die Entstehung von Wahrscheinlichkeitsgesetzen veranlassen.

Spezielle Beispiele derartiger funktionaler Zusammenhänge sind leicht zu geben, z. B.:

$$y = \sin\left(\frac{x}{a}\right)$$

Setzen wir voraus, daß a äußerst klein ist im Vergleich zum Schwankungsbereich der „Ursache" x, so wird auch $\Delta x = 2\pi a$ sehr klein, und es resultiert für die „Wirkung" y eine von der Wahrscheinlichkeit der x weitgehend unabhängige Häufigkeitsverteilung:

$$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Noch einfacher ist der früher betrachtete Fall der rotierenden Scheibe. Hierbei nehmen wir als x die Zeit t an, zu welcher der Schuß losgeht, als y die Winkeldistanz θ des Treffpunktes in der Scheibenebene (von einem bestimmten Radius derselben ab gerechnet). Es ist also:

$$\theta = ct - 2n\pi,$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit c eine sehr große Zahl sein soll und n immer so gewählt wird, daß θ zwischen 0 und 2π gelegen sei. Der Bereich Δx ist also offenbar in diesem Falle gleich

$\Delta x = 2\pi/c$, und es werden alle Winkel θ gleich wahrscheinlich sein, wenn diese Größe klein ist im Vergleich mit dem Schwankungsbereich der Ursache.

Es gibt jedoch außerdem noch zahlreiche, der mathematischen Analyse nicht so leicht zugängliche Fälle, in denen rein physikalische Vorrichtungen die Unabhängigkeit des resultierenden Wahrscheinlichkeitsgesetzes von der Art und Ursache der primären Schwankungen mit beliebiger Annäherung hervorbringen. Als typische derartige Fälle seien nachstehende Beispiele etwas eingehender besprochen:

I. Das Galtonsche Brett. Es besteht aus einem geneigt aufgestellten Brett, in welches eine große Anzahl von Stiften, in regelmäßigen Horizontalreihen angeordnet, eingeschlagen wurden und zwar ist die Anordnung derselben eine alternierende, so daß die Stifte jeder Reihe den Öffnungen der beiden benachbarten Reihen entsprechen. Werden nun von einem gegebenen Punkt aus Kugeln von passender Größe (so daß ihr Durchmesser wenig kleiner sei als der freie Abstand zwischen zwei benachbarten Stiften) über das Brett rollen gelassen, so werden sie infolge der Zusammenstöße mit jenen Stiften aus ihrer Bahn in unregelmäßiger Weise abgelenkt und sammeln sich schließlich nach Passierung sämtlicher Stiftreihen in den am unteren Brettrande angebrachten Behältern an, so daß die Höhe, zu der sie in denselben reichen, direkt als Maß der Wahrscheinlichkeit der betreffenden Lage dienen kann. Es zeigt sich, daß sie sich daselbst gemäß dem Gaußschen Fehlergesetz:

$$y = A e^{-a x^2}$$

anordnen, so daß die meisten sich in der Fallinie des Ausgangspunktes ansammeln, während ihre Zahl nach beiden Seiten zu nach Maßgabe der bekannten Glockenkurve abnimmt. Dieses Resultat ist mathematisch leicht erklärlich, sobald man annimmt, daß eine jede Kugel nach dem Austritt aus der Öffnung zwischen zwei Stiften gleiche Wahrscheinlichkeit dafür bietet, daß sie die nächste Stiftreihe zur Rechten oder zur Linken des darunterstehenden Stiftes passieren werde. Erfolgt nämlich dieser Vorgang ganz zufällig, mit gleicher Wahrscheinlichkeit für rechts und links, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel beim Passieren der $m$ten Stiftreihe eine dem n-fachen Nagelabstand gleiche seitliche Entfernung aus der Mittellinie besitze, nach dem bekannten Bernoulli'schen Satze zu

$$W(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{m!}{\left(\frac{m}{2} - n\right)!\left(\frac{m}{2} + n\right)!}$$

bestimmen, was für große Werte der Zahl m angenähert in die vorerwähnte Formel übergeht. Es wird also die komplizierte Gesamterscheinung auf einfache Elementarvorgänge zurückgeführt, aber es bleibt noch aufzuklären, wieso letztere als ganz zufällig angesehen werden können, obwohl eigentlich die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit der Kugel die weitere Bewegung derselben eindeutig bestimmen sollte.

Um unkontrollierbare Nebenumstände möglichst auszuschalten, idealisieren wir das Beispiel durch Voraussetzung vollständiger Glattheit der schiefen Ebene, exakter Anordnung der Stifte, exakter Kugelgestalt der Kügelchen und nehmen ferner an, der Kugeldurchmesser sei fast genau gleich dem freien Abstand der Stifte; die Stöße der Kugeln an letzteren mögen unelastisch verlaufen. Offenbar ist dann die nach Austritt der Kugel zwischen zwei Stiften spurenweise übrig bleibende Horizontalkomponente der Geschwindigkeit allein maßgebend dafür, ob der nächste Stift auf der rechten oder linken Seite getroffen wird, ob also die Kugel denselben auf der einen oder anderen Seite passieren wird. Jene Horizontalkomponente ist aber das Resultat vielfacher Reflexionen der Kugel zwischen jenen zwei Stiften und ist durch die Lage der Zentrilinie beim ersten Stoß zu der betreffenden Stiftreihe eindeutig bestimmt. Eine ganz minimale Lagenänderung dieser Zentrilinie genügt, um zu bewirken, daß die Richtung jener Horizontalkomponente umgekehrt wird; bei weiterer äußerst geringer Lagenänderung wird dieselbe wieder umgekehrt usw.

Wir erkennen im Obigen die wesentlichen Züge des „geregelten" Zufalls: 1. „Kleine Ursache, große Wirkung"; 2. den oszillierenden Charakter der Kausalrelation, welcher sich ungenau, aber bezeichnend auch durch die Worte ausdrücken läßt „Verschiedene Ursachen, gleiche Wirkungen"; 3. die annähernd gleichmäßige Verteilung der Chancen der Elementarereignisse. Im Grenzfalle, wenn der Kugeldurchmesser genau gleich dem freien Abstand der Stifte ist, verliert die Funktion, welche den Zusammenhang zwischen Anfangskonstellation und Endlage der Kugel darstellt, den analytischen Charakter. Die Chancen für eine positive und negative Verschiebung werden bei jedem Stoß genau gleich groß, und es wird sich die Gaußsche

Glockenkurve herstellen, ganz unabhängig davon, wie klein auch die Schwankung der Anfangskonstellation der Kugeln sei (vorausgesetzt, sie ist nicht genau gleich Null). Wir erhalten ein Modell eines sozusagen ideal zufälligen Vorganges.

Dieser Vorgang bildet, nebstbei bemerkt, eine treffliche Illustration einer ganzen Klasse physikalischer Erscheinungen, welche wir im allgemeinen als Diffusion und Wärmeleitung zu bezeichnen pflegen. Ohne an dieser Stelle in Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir beispielsweise, daß die seitlichen Verschiebungen, welche die Kugel beim Hindurchrollen durch die aufeinanderfolgenden Stiftreihen erfährt, genau mit den der sogen. Brownschen Molekularbewegung entsprechenden Verschiebungen übereinstimmen. Und würden wir diese Versuche dadurch modifizieren, daß wir ein begrenztes Galtonsches Brett verwenden, dessen Seitenausdehnung durch zwei in der Fallinie verlaufende Leisten begrenzt ist, und daß wir aus allen Öffnungen der obersten Stiftreihe auf der rechten Hälfte des Brettes schwarze, auf der linken Hälfte weiße Kugeln austreten lassen, so würde deren allmähliche Vermischung beim Passieren der Stiftreihen genau der Diffusion zweier Gase in den bekannten Versuchen Loschmidts entsprechen. Besitzt das begrenzte Galton'sche Brett eine hinreichende Länge, so muß eine homogene Endverteilung resultieren.

II. Ein in mathematischer Hinsicht komplizierteres, aber physikalisch noch einfacheres Beispiel ist das folgende: Denken wir uns ein unregelmäßig, aber im übrigen beliebig geformtes Gefäß mit vollkommen reflektierenden Wänden, in welches wir durch ein sehr kleines, in einer Wand angebrachtes Loch ein elastisches Kügelchen (am besten ein Gasmolekül) hineinschleudern, und überlegen wir, wann das Kügelchen wieder durch jenes Loch aus dem Gefäß austreten dürfte. Sofern die Öffnung im Verhältnis zur ganzen Wandfläche genügend klein ist, wird die Kugel im allgemeinen infolge der vielfachen Reflexionen einen äußerst komplizierten Zickzackweg zurücklegen müssen, bis sie die Austrittsstelle erreicht, und es ist klar, daß eine ganz minimale Anderung der Anfangsrichtung noch längere Zeit eine sehr erhebliche Änderung der Bahn und damit auch eine bedeutende Änderung der Austrittszeit hervorrufen muß. Ebenso begreift man, daß dieselbe Austrittszeit mittels sehr verschiedener Anfangskonstellationen zu erreichen ist — man braucht hierzu nur verschiedene Austrittsbahnen rückwärts zu verfolgen. Es scheint also die Möglichkeit einer Wahrscheinlichkeitsberechnung gegeben zu sein. Allerdings ist eine exakte mathematische Analyse wohl noch nicht durchgeführt worden, aber physikalische Überlegungen aus dem Gebiete der kinetischen Gastheorie, wie auch der Strahlungstheorie, wo dasselbe Problem in anderer Form zur Sprache kommt, machen es plausibel, daß bei ganz beliebiger Verteilung der Anfangsrichtungen im Laufe der Zeit eine Ausgleichung der Wahrscheinlichkeit stattfindet, so zwar, daß dann jedes Volumelement jenes Hohlraumes für die Kugel einen gleich wahrscheinlichen Aufenthaltsort bildet, daß sie sich in irgend einer Richtung gleich wahrscheinlich bewegt und daß sie durchschnittlich auf jedes Flächenelement der Gefäßwand gleich häufig auftrifft. Wird die Geschwindigkeit der Kugel mit c, das Volumen des Gefäßes mit V, und der Querschnitt der freien Öffnung mit ω bezeichnet, so läßt sich nach Analogie mit gastheoretischen Rechnungen leicht nachweisen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Austritt der Kugel während des Zeitraumes τ erfolge, beträgt:

$$W = \frac{\omega\, c\, \tau}{4\, V};$$

also ist die durchschnittlich bis zum Austritt der Kugel aus dem Gefäß verfließende Zeit:

$$T = \frac{4\, V}{\omega\, c}.$$

In noch weit höherem Grad kommen übrigens die charakteristischen Züge des (geregelten) Zufalls zur Geltung, wenn es sich um die Bewegung einer Schar von Kugeln handelt, welche in ein geschlossenes Gefäß eingesetzt werden, da dann die gegenseitigen Zusammenstöße derselben vor allem die Wirkung haben, den ursprünglich vorhandenen Bewegungszustand in unregelmäßiger Weise zu stören. Es ist das ein Spezialfall der von Boltzmann als allgemeine Eigenschaft molekularer Systeme erkannten Tendenz zur molekularen Unordnung, auf welcher die kinetische Erklärung des Entropiesatzes beruht.

V

Die Überlegungen, durch die wir im Abschnitt III und IV das Wesen des Zufalls zu charakterisieren und die Gesetzmäßigkeit seiner Wirkungen zu erklären suchten, scheinen mir, wie bereits vorher angedeutet wurde, in zweifacher Hinsicht nicht ganz befriedigend zu sein:

1. Es wurde angenommen, daß die Ursache x ein Wahrscheinlichkeitsgesetz $\phi(x)$ befolgt, also wurde dieser Begriff als etwas Primäres vorausgesetzt. Gegenstand der Erklärung war nur die Unveränderlichkeit des Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die resultierende Wirkung.

2. Es wurden gewisse Eigenschaften der Funktion $\phi(x)$ vorausgesetzt, welche wir als „Regelmäßigkeit" bezeichnet haben.

Diese Bemerkungen machen uns vor allem auf einen mehr formalen Mangel unserer Darstellung aufmerksam. Was bedeutet es nämlich, wenn wir sagen, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des x (Handbewegung beim Ingangsetzen der Roulette, Orientierung des fallengelassenen Würfels, der Kugel auf dem Galtonschen Brett) durch eine regelmäßige Verteilungsfunktion $\phi(x)$ bestimmt ist? Handelt es sich um ein x, welches wir nicht auf noch frühere Ursachen zurückführen können, so wäre das Gesetz $\phi(x)$ nur empirisch erkennbar. Unmittelbar gegeben sind aber nur diskrete Einzelfälle, und erst durch Abstraktion auf Grund unzählig vieler Spezialfälle kommt man dazu, auf deren Grund die Häufigkeitsfunktion $\phi(x)$ zu formulieren, von welcher die Eigenschaft (2) vorausgesetzt wird. Es wäre also weit rationeller, den Umweg über die abstrakte Verteilungsfunktion $\phi(x)$ zu vermeiden und direkt nur eine gewisse Menge von Einzelfällen in Betracht zu ziehen. Versuchen wir also anstatt der hervorgehobenen Stelle des IV. Abschnittes folgenden Satz zu setzen: Von einer mathematischen Wahrscheinlichkeit kann nur dann die Rede sein, falls die den kausalen Zusammenhang zwischen zufälliger[1]) Ursache x und Wirkung y darstellende Funktion $y = f(x)$ derart beschaffen ist, daß einer beliebig verteilten Menge von x-Werten immer annähernd eine und dieselbe Verteilung der zugehörigen y-Werte entspricht. Dabei soll das Wörtchen „annähernd" ausdrücken, daß exakte Identität der y-Verteilungen nur bei unendlich zahlreichen Einzelfällen (Mengen) zu erwarten ist.

Am klarsten übersieht man diese Verhältnisse bei der rotierenden Scheibe: im allgemeinen wird dieselbe von den Treffpunkten ungefähr gleichförmig überdeckt sein, falls eine genügende Anzahl

[1]) „Zufällig" in dem vorher definierten Sinne.

von Schüssen in beliebigen Zeitintervallen abgegeben wird, und die Verteilung der Trefferdichte auf der Scheibe wird verhältnismäßig desto gleichförmiger sein, je größer die Anzahl der Schüsse. Nun sind aber offenbar auch ganz abweichende Ergebnisse möglich. Wären z. B. alle Zeitintervalle gleich und mit der Umlaufszeit der Scheibe kommensurabel, so würden sich alle Treffpunkte auf gewisse Stellen konzentrieren, während der Rest der Scheibe leer bleiben würde. Das wäre ein entscheidender Einwand gegen die Anwendbarkeit der in Rede stehenden Formulierung unseres Satzes, wenn uns nicht die Erwägung zu Hilfe käme, daß derlei abweichende Anordnungen nur gewisse „singuläre" Ausnahmefälle bilden, deren Häufigkeit im Verhältnis zu allen möglichen Anordnungen offenbar verschwindend klein ist. In der Mengenlehre beweist man bekanntlich, daß es — populär ausgedrückt — unendlichmal so viele irrationale Zahlen gibt als ganze Zahlen, und in analoger Weise sieht man ein, daß unter allen möglichen Intervalllängen diejenigen, welche mit der vorgegebenen Umlaufszeit kommensurabel sind, nur einen unendlich kleinen Bruchteil bilden. Werden also aufs Geratewohl verschiedene Intervallängen gewählt, so ist es unendlich wenig wahrscheinlich, daß man gerade solche treffen werde, welche mit der vorgegebenen exakt kommensurabel sind. Somit wird „im allgemeinen" eine annähernd gleichförmige Überdeckung der Scheibe resultieren.

Analoges gilt auch in anderen Fällen. Hat z. B. das im Abschnitt IV (2) erwähnte Gefäß die Gestalt eines „mathematischen Würfels", so ist leicht einzusehen, daß die hineingeschleuderte Kugel sich trotz beliebig vieler Reflexionen nur in einer von acht bestimmten Richtungen bewegen kann. Es genügt aber eine beliebig kleine Abweichung der Neigungswinkel der Wände, um diese Anordnung nach entsprechend langer Zeit zum Verschwinden zu bringen und sämtliche Richtungen des Raumes für die Bewegung der Kugel gleich wahrscheinlich zu machen. Falls also nicht ein speziell „ad hoc" mathematisch genau konstruiertes Gefäß ausgesucht wird, so müssen innerhalb einer Schar derartiger Kugeln die Reflexionen derselben an den Gefäßwänden (außerdem auch die gegenseitigen Zusammenstöße) eine *Gleich*verteilung der Bewegungsrichtungen im Raume hervorbringen.

Bis in alle Einzelheiten lassen sich diese Verhältnisse in einem ähnlichen, aber zweidimensionalen Beispiele übersehen, in welchem die mit den Reflexionen an den Wänden verbundenen Diskontinuitäten vermieden werden sollen. Stellen wir uns einen Punkt vor, welchen wir unter Einfluß willkürlich gewählter, voneinander unabhängiger elastischer Kräfte X, Y eine zusammengesetzte Schwingungsbewegung:

$$x = a \sin \alpha t, \quad y = b \sin \beta t$$

ausführen lassen, wie dies beispielsweise bei der Darstellung der Lissajousschen Figuren in der Akustik geschieht. Würde es gelingen, die betreffenden elastischen Systeme (Stimmgabeln) derart abzugleichen, daß die beiden Schwingungszahlen miteinander kommensurabel werden, so würde der betreffende Punkt nur eine geschlossene Kurve in periodischer Weise zurücklegen, ohne die übrigen Teile der Fläche des Rechteckes $a\,b$ zu durchstreichen. Kommt aber hierbei mathematische Genauigkeit in Betracht, so würde dies offenbar einen ganz ausnahmsweisen Spezialfall bilden, welchen wir mit menschlichen Hilfsmitteln nie zu erreichen hoffen können, da es unendlich wahrscheinlicher ist, daß sich ein irrationales Verhältnis der Schwingungszahlen einstellt. Im allgemeinen entsteht also eine ungeschlossene Kurve, welche jedem innerhalb des Rechteckes $a\,b$ gelegenen Punkte beliebig nahe kommt, und zwar findet man leicht, daß die relative Häufigkeit (gleich der relativen Zeitdauer), mit welcher der schwingende Punkt in einem gewissen, an der Stelle x, y gelegenen Flächenelement angetroffen wird, gegeben ist durch:

$$W(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{b^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$

und zwar ist dieses Wahrscheinlichkeitsgesetz, wie wir sehen, von der Art der Festsetzung der Schwingungszahlen (bzw. der Kräfte X, Y) im allgemeinen ganz unabhängig. Bemerkt sei dazu noch, daß durch die obigen Schwingungsgleichungen zu jedem Punkt der durchlaufenen Fläche eine (bzw. zwei) Fortschreitungsrichtung und eine gewisse Bewegungsgeschwindigkeit zugeordnet ist. Falls nun anstatt eines einzigen, vom Nullpunkt ausgehenden Punktes eine ganze Schar derartiger, aber anfangs willkürlich über jene Fläche verteilter Punkte gemäß jenen Formeln in Bewegung gesetzt wird, so ergeben ganz analoge Überlegungen wie vorher, daß im allgemeinen nach entsprechend langer Zeit die Spuren der ursprünglichen Anordnung der Punkte verschwinden, und eine von der Art derselben unabhängige Verteilung nach Maßgabe des eben angeführten Wahrscheinlichkeitsgesetzes resultiert.

In ähnlicher Weise ist leicht einzusehen, daß andauerndes Durchrühren zweier in einem Gefäß anfänglich gesonderter Farbstofflösungen im allgemeinen eine homogene Mischung bewirkt, daß eine Schar von Gasmolekülen, welche in einem geschlossenen Raume ursprünglich beliebig angeordnet wurden, sich im allgemeinen im Laufe der Zeit über denselben ohne Rücksicht auf die anfängliche Anordnung so verteilt, als ob ihre Lagen ganz zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Volumelemente) wären. Dies rechtfertigt eben die Benützung der üblichen Methoden der kinetischen Gastheorie zur Berechnung solcher Größen, in denen die Durchschnittswirkung einer großen Molekülzahl zum Vorschein kommt.

In allen derartigen Fällen sind singuläre Ausnahmefälle theoretisch möglich, kommen aber wegen ihrer verschwindend geringen Wahrscheinlichkeit praktisch nicht in Betracht. Wenn wir aber, um diesbezüglichen Einwänden zu begegnen, deren Möglichkeit in der Formulierung unseres vorherigen Satzes berücksichtigen, so müssen wir in demselben das Wörtchen „immer“ durch den Ausdruck „im allgemeinen“ — d. h. mit Ausnahme prozentuell verschwindend wenig zahlreicher Ausnahmefälle — ersetzen.

Vielleicht ist aber folgende, etwas präzisere Form vorzuziehen: Für eine Wirkung y, welche von der unvollständig bestimmten Ursache x abhängt, besteht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz, wenn die den betreffenden kausalen Zusammenhang darstellende Funktion $y = f(x)$ gewisse Eigentümlichkeiten besitzt, nämlich wenn: 1. kleine Änderungen von x im allgemeinen große Änderungen von y hervorrufen; 2. die Menge solcher Gruppierungen von x-Werten, welchen annähernd eine und dieselbe Gruppierung von y-Werten entspricht, unermeßlich zahlreicher ist als die Menge der x-Gruppierungen, welchen merklich abweichende y-Verteilungen entsprechen. Vom mathematischen Standpunkt aus wäre dieser Satz gewiß noch schärfer zu fassen, aber die obige Formulierung dürfte den Grundgedanken, auf welchen es hier ankommt, in genügend verständlicher Weise hervorheben. Wir machen auf einen Umstand noch ausdrücklich aufmerksam, welcher in dem eben Gesagten (wie auch in fast allen unseren Beispielen) klar zutage tritt; vollständige Zufälligkeit und dementsprechende Reinheit der Wahrscheinlichkeitsrelation bildet offenbar einen Idealfall, welcher in Wirklichkeit mit größerer oder geringerer Annäherung erreicht wird. In den praktischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist man meist durch eine sehr rohe Annäherung vollkommen befriedigt.

VI

Noch wichtiger als die mehr formale Frage, die uns im vorigen Abschnitt hauptsächlich beschäftigte, scheint mir die Frage nach der eigentlichen Genese des Zufalls zu sein, welche durch den ersten der beiden daselbst erwähnten Einwände nahegelegt wird, teilweise allerdings auch schon in den betreffenden Beispielen ihre Beantwortung findet. Die zufällige Variabilität der Ursachen, auf welche sich unsere ursprüngliche Erklärung des Gesetzes der großen Zahlen stützte, ist ohne weiteres verständlich, wenn es sich um Experimente handelt, welche von menschlicher Hand ausgeführt werden; es wird da der Zufall in letzter Linie auf psychologisch-physiologische primäre Ursachen zurückgeführt. Wenn aber der Mensch, samt seinen unberechenbaren launischen Einfällen, ganz ausgeschaltet wird, wenn man annimmt, daß die einen physikalischen Vorgang bestimmenden Umstände ganz exakt definiert sind, kann da der Begriff der Wahrscheinlichkeit keine Anwendung finden? Meist wird dies behauptet, während uns die Beispiele der beiden vorhergehenden Abschnitte eines Besseren belehren. Wird eine einzige Kugel in ganz bestimmter Weise auf ein „begrenztes“ Galton'sches Brett gesetzt, dessen Stiftreihen außerordentlich zahlreich sind, und entwirft man eine Statistik der Stellen, wo sie die nacheinanderfolgenden Reihen passiert, so wird man finden, daß alle Werte der Abszissen annähernd gleich häufig vorkommen; sie sind gleich wahrscheinlich, und diese Behauptung bezeichnet hier eine objektive, vom Menschen unabhängige Tatsache. Im Beispiele (2) läßt sich der Ort, welchen die in bestimmter Richtung hineingeschleuderte Kugel in einem bestimmten Zeitpunkt einnehmen wird, theoretisch voraus berechnen, falls die Gestalt des Gefäßes mathematisch exakt gegeben ist, aber ohne weiteres ist ersichtlich, daß alle Bewegungsrichtungen im Laufe der Zeit gleich häufig vorkommen, und daß die Kugel alle Teile des Gefäßes annähernd gleich häufig passieren wird. Ebenso ist im Beispiele der zusammengesetzten Schwingung (V. Abschnitt) die Wahrscheinlichkeit ganz klar definiert als relative Häufigkeit, mit welcher der bewegliche Punkt (innerhalb langer Zeiträume) in einem gewissen Flächengebiete anzutreffen ist, obwohl dabei von einer Variation der die Bewegung bestimmenden Anfangsbedingungen gar nicht die Rede ist.

Es läßt sich nämlich der Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit in ganz analoger Weise auf alle solche unvollständig determinierten („zufälligen“ im früher dargelegten Sinne) Erscheinungen anwenden, bei welchen dieselbe Art Elementarvorgang sich (eventuell mit variablem Parameter) im Laufe der Zeit immer wieder wiederholt. Bekanntlich beweist die statistische Mechanik, daß derlei Bewegungsvorgänge durchaus nicht selten sind; im Gegenteil, es gehören dazu, laut einem Satze von Poincaré, die Bewegungen aller „endlichen“ mechanischen Systeme konservativer Art. Sie sind sämtlich „quasiperiodisch“ (in speziellen Fällen exakt periodisch), d. h. daß sich der (beliebige) Anfangszustand im Laufe der Zeit mit beliebiger Annäherung wiederholt. Handelt es sich übrigens um Bewegungen molekularer Systeme, so wird die Häufigkeit gleichartiger Fälle noch durch den Umstand ganz außerordentlich vermehrt, daß die Individualität chemisch identischer Moleküle für physikalische Erscheinungen gleichgültig ist.

Um die Gesetze des physikalischen Zufalls und den Begriff der objektiven, vom Menschen vollständig unabhängigen Wahrscheinlichkeit noch klarer zu verstehen, wollen wir schließlich noch einen Vorgang näher betrachten, den man geradezu als den vollkommensten Typus dessen betrachten kann, was „zufällig“ genannt wird, d. i. den radioaktiven Atomzerfall. Bekanntlich erleiden die Atome des Radiums im Laufe der Zeit eine Umwandlung, indem sie sich durch explosive Abscheidung je eines α-Teilchens in Atome der Emanation transformieren. Dabei läßt sich aber an den Radiumatomen keinerlei progressive Evolution (nach Art des Alterns der Organismen) wahrnehmen. Wann ein beliebiges, gerade ins Auge gefaßtes Atom eine Umwandlung erleidet, das ist absolut zufällig, und es läßt sich das in keiner Weise weder beeinflussen noch voraussehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein solcher Prozeß gerade im Zeitraum dt stattfindet, ist ebenso groß für „junge“ wie für „alte“ Atome und läßt sich somit mathematisch durch die einfache Beziehung:

$$W\,dt = \lambda\,dt$$

ausdrücken, wo λ eine absolute Konstante ist, welche durch keine uns bekannten Agentien verändert werden kann. Auf Grund des vorher Gesagten kann man nun ohne weiteres ein Modell des in dieser Erscheinung zum Vorschein kommenden Zufalls geben: das öfters erwähnte Gefäß des IV. Abschnittes mit der hineingeschleuderten Kugel. Wir bemerkten schon a. a. O., daß für die Kugel eine unveränderliche Austrittswahrscheinlichkeit besteht, und man braucht nur die Größe derselben gleich der radioaktiven Umwandlungskonstante zu setzen:

$$\lambda = \frac{\omega c}{4 V}.$$

Hätten wir eine große Anzahl derartiger Gefäße von gleichem Volumen und würde in jedem derselben eine solche Kugel in anderer Richtung in Bewegung gesetzt, so würden die beiden in Rede stehenden Ereignisse — Heraustritt einer Kugel aus einem der Gefäße und Abschleuderung eines α-Teilchens aus einem der Radiumatome (von gleicher Anzahl) — in vollständig analoger Weise vor sich gehen. Selbstverständlich glaube ich nicht, daß die Radiumatome wirklich einen derartigen Bau besitzen, aber es kommt uns nur auf die prinzipielle Möglichkeit der Konstruktion eines rein physikalischen Modells des „geregelten" Zufalls an. Sie beweist jedenfalls, daß der scheinbare Widerspruch, welchen die im II. Abschnitt aufgeworfene Frage (2) betonte, in Wirklichkeit nicht besteht, und daß der Zufall — in dem in der Physik gebräuchlichen Sinne des Wortes — sehr wohl durch exakt definierte, gesetzmäßige Ursachen hervorgebracht werden kann.

Naturgemäß spielt diese Art Zufall die maßgebende Rolle in der Welt der Moleküle, und es gibt manche hierher gehörige Erscheinungen, wie die Brownsche Molekularbewegung, welche das Wesen desselben in äußerst anschaulicher Weise erkennen lassen. Man könnte vielleicht, um solche Fälle den durch willkürliches Eingreifen eines Organismus verursachten gegenüber zu stellen, von „molekularem" und „physiologischem" Zufall sprechen; diese beiden Arten werden sich auch oft zu komplizierteren Zufallserscheinungen verketten.

Wenn beispielsweise ein Draht durch wachsende Spannung, eine Hohlkugel durch inneren Überdruck beansprucht wird, so sagt man, der Ort, wo ein Bruch stattfindet, die Form der Bruchstücke, hänge vom Zufall ab. Den wirklichen Grund können kleine Ungleichförmigkeiten der Dicke und dergl. bilden, welche indirekt auf den physiologischen Zufall bei Herstellung des betreffenden Objektes zurückzuführen sind. Aber auch wenn diese durch genügend große Sorgfalt, entsprechende maschinelle Vorrichtungen beliebig klein gemacht sind, bleiben zufällige Ungleichförmigkeiten im Gefüge des Materials, welche vom molekularen Zufall herrühren. Wird beim Guß der Hohlkugel auch noch so vorsichtig verfahren, es müssen derartige Ungleichförmigkeiten eintreten. Das Erstarren beruht nämlich auf der Bildung von Kristallisationskernen in der unterkühlten Schmelze; die Zahl und Anordnung derselben werden aber außer von gesetzmäßigen Einflüssen (Geschwindigkeit der Abkühlung und dergl.) in ausschlaggebender Weise vom molekularen Zufall bestimmt; der letztere ist somit für die faktisch entstehende mikrokristallinische Struktur des Stückes verantwortlich, von welcher die Festigkeitseigenschaften abhängen. Daß hier zufällige Molekularkonstellationen so merkbare Folgen nach sich ziehen, beruht, nebstbei bemerkt, wieder darauf, daß es sich dabei in letzter Linie um Überschreitungen labiler Gleichgewichtszustände handelt.

Auf die weiter sich aufdrängenden Fragen, ob sich alle Zufallserscheinungen auf die obigen zwei Typen zurückführen lassen, und inwiefern vielleicht im Grunde genommen auch der „physiologische" im „molekularen" wurzelt, wollen wir nicht weiter eingehen. Überhaupt sei nochmals wiederholt, daß unsere Studie durchaus nicht eine erschöpfende Analyse aller mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zusammenhängenden Probleme geben sollte. Es scheint uns aber ein auch für den Philosophen äußerst wichtiges Ergebnis zu sein, wenn sich auch nur auf einem beschränkten Gebiet — dem der mathematischen Physik — zeigen läßt, daß der Begriff der Wahrscheinlichkeit, in der üblichen Bedeutung eines gesetzmäßigen Häufigkeitswertes zufälliger Ereignisse, eine streng objektive Bedeutung besitzt, daß man den Begriff und die Genese des Zufalls genau präzisieren kann, auch wenn man am Determinismus festhält, und daß sich dabei das Gesetz der großen Zahlen nicht als ein mystisches Prinzip und nicht als rein empirischer Erfahrungssatz, sondern als ganz einfache mathematische Folge der speziellen Form ergibt, welche in derlei Fällen den kausalen Zusammenhang darstellt.

Vielleicht ist es nicht überflüssig, schließlich noch zu bemerken, daß der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Sinne dieser Auffassungsweise natürlich nicht der Wert eines von den sonstigen Naturerkenntnissen unabhängigen, neuen Forschungsprinzipes zukommt, da sie ja nur eine vereinfachende statistische Schematisierung gewisser in der Natur sehr häufig auftretender funktionaler Zusammenhänge bildet, deren exakte Untersuchung infolge großer Kompliziertheit sehr erschwert ist. Bei der charakteristischen Entwicklung der heutigen Physik im Sinne einer Auflösung der physikalischen Erscheinungen in verborgene Teilereignisse spielen Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit eine wichtige Rolle als anschauliche, abklärende Hilfsbegriffe, könnten aber zur Not auch vollständig entbehrt werden, indem sich jene schematisierenden Methoden durch exakt statistische Berechnungen vertreten lassen sollten [1]). Die hier skizzierte Theorie macht uns allerdings auch den Grund begreiflich, warum die Anwendung jener Begriffe unter Verschleierung der Details der funktionellen Zusammenhänge doch hinreichend genaue Endergebnisse zu liefern pflegt, und wir verstehen, daß sie namentlich im Gebiet solcher empirischen Wissenschaften, wo eine exakte mathematische Untersuchung der Teilereignisse ausgeschlossen ist, ein unschätzbares Hilfsmittel bildet.

[1]) Darin besteht wohl der wesentliche Unterschied zwischen der kinetischen Gastheorie (Maxwell, Boltzmann u. a.) und der statistischen Mechanik (Gibbs), daß sich erstere auf gewisse, zwar recht plausible, aber nicht exakt bewiesene Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsideen stützt, während letztere (wenigstens im Programm, wenn auch nicht ganz in der Durchführung) unter Vermeidung derselben auf exakt statistische Methoden aufgebaut ist.

VIII. MAURYCY RUDZKI JAKO GEOFIZYK.

Przemówienie, wygłoszone w dn. 21. listopada 1916 r., na posiedzeniu Krakowskiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika, odbytem ku uczczeniu pamięci M. P. Rudzkiego. Kosmos, tom XLI, 1916, str. 105—119.

Uniwersalny, wszechstronny umysł Rudzkiego obejmował szereg nauk specjalnych i w każdej z nich zdołał zająć miejsce przodujące; najwięcej jednak pociągała go zawsze geofizyka, ją uważał za właściwą swoją specjalność i przez swe badania w tej dziedzinie zdobył sobie sławę europejską.

Zdaje się, że powodem tego nie były przypadkowe okoliczności, jak bieg studjów i wpływ profesorów uniwersyteckich (z pomiędzy których Suess i Stefan w Wiedniu większe na nim wywarli wrażenie); istniała przyczyna głębsza. Geofizyka musiała najwięcej odpowiadać wrodzonym skłonnościom umysłu Rudzkiego. Wszak z jednej strony nauka ta zabarwiona jest całym czarem przyrody, nie tej skarłowaciałej przyrody, jaką obserwujemy w naszych laboratorjach, muzeach i ogródkach, ale tej, która daje nam odczuwać całą swoją wielkość i potęgę w najwspanialszych swych zjawiskach, w górach, na morzu, przy trzęsieniu ziemi, w burzy. Tem geofizyka musiała nęcić Rudzkiego, tak wielkiego, fanatycznego miłośnika przyrody; z drugiej strony, ta właśnie nauka odpowiadała też najwybitniejszej właściwości umysłu Rudzkiego, jego dążeniu do matematycznej ścisłości w rozumowaniu. Ta wrodzona, matematyczna ścisłość umysłu, ta skłonność do skeptycyzmu względem wszelkich spekulacyj nie dających się udowodnić z absolutną pewnością, była powodem, że nie zadowolnił się geografją i geologją, którym to naukom oddawał się początkowo: ona skłoniła go do tego, że zapomocą ciężkiej pracy autodydaktycznej przyswoił sobie metody matematyki wyższej i fizyki teoretycznej i że oddał