VI. UWAGI O POJĘCIU PRZYPADKU W ZJAWISKACH FIZYCZNYCH.

Księga Pamiątkowa ku czci Bolesława Orzechowicza, wydana nakładem Towarzystwa dla popierania nauki polskiej; tom II; we Lwowie 1916, str. 445—458.

I. Rachunek prawdopodobieństwa, który początkowo w fizyce odgrywał stosunkowo podrzędną rolę (w postaci „teorji błędów", służącej do najkorzystniejszego wyzyskania materjału liczbowego pomiarów doświadczalnych), dzisiaj wysuwa się coraz wyraźniej na pierwszy plan, jako metoda matematyczna najbardziej odpowiednia dla celów tej nauki. Nietylko teorja kinetyczna materji, tak samo elektronika, teorja promieniowania, nauka o promieniotwórczości, posługują się w zasadniczych swych badaniach tą właśnie metodą.

Dziwnem może się to wydawać z dwóch powodów. Przedmiotem fizyki są prawa przyrody, prawidłowość zaś, determinizm zdaje się być antytezą przypadkowości, indeterminizmu, pojęcia podstawowego rozważań z dziedziny prawdopodobieństwa. Jak wogóle może zrodzić się „przypadek" w obrębie zjawisk, przebiegających w myśl niezmiennych praw przyrody? Powtóre: jeżeli istotnie nieobliczalny przypadek odgrywa pewną rolę w zjawiskach fizyki, jak można w takim razie przewidywać przebieg tych zjawisk?

Pytania w tej postaci są może zbyt ogólnikowo sformułowane. Matematyk będzie wolał określić problemat w ściślejszy sposób: w jakich warunkach zjawisko y, wywołane przez prawidłowo działającą przyczynę x, można uważać za przypadkowe? W jakich razach przyczyny x, przypadkowo działające, mogą dać wynik prawidłowy i określony, y? W kwestjach tych, posiadających zasadnicze znaczenie dla stosowania teorji prawdopodobieństwa, kierujemy się dzisiaj tylko pewnego rodzaju intuicją; dalecy jesteśmy od ogólnego i ścisłego sprecyzowania warunków, określających różne przy-

padki, które nadają się do traktowania z punktu widzenia teorji prawdopodobieństwa. Uwagi niniejsze nie są również oczywiście odpowiedzią wyczerpującą, mają być tylko przyczynkiem do ściślejszego sprecyzowania myśli, wygłaszanych przez różnych autorów, a zwłaszcza przez Poincaré'go[1]), co do tego przedmiotu.

II. Jest to twierdzenie bardzo słuszne i często słyszane: że słowo „przypadek" jest tylko wyrazem naszej nieznajomości przyczyn pewnego zjawiska; że istota wszechwiedząca nie posługiwałaby się wcale tem pojęciem. Tak samo i w fizyce zwykle mowa jest o przypadku, jeżeli wprawdzie znamy prawa zasadnicze zjawiska, ale nie znamy wszystkich wielkości, określających stan początkowy danego systematu, tak że nie możemy przyszłości jego przewidzieć z pewnością matematyczną. Sama subjektywna nieznajomość warunków początkowych nie daje jednak dostatecznych podstaw do jakiegokolwiek obliczenia; musimy jeszcze koniecznie mieć pewne dalsze wskazówki, ażeby wogóle mogła być mowa o prawdopodobieństwie i ażeby odnośne nasze spekulacje miały wartość objektywną. Objaśni to najlepiej przykład szczególny.

Wyobraźmy sobie, że artylerzysta z pewnego punktu wyrzuca pocisk z prędkością c, pod takim kątem elewacji α, aby trafić punkt, znajdujący się w odległości x. O ile chodzi o zadanie teoretyczne, w którem wykluczamy opór powietrza, przypadkowe niedokładności ustawienia i t. p., łatwo możemy obliczyć wielkość x jako funkcję danych początkowych $x = f(c, \alpha)$, lub naodwrót $\alpha = F(x, c)$; jesteśmy wówczas pewni, że punkt x zostanie trafiony przy użyciu obliczonej elewacji; jesteśmy również pewni, że, przy zastosowaniu elewacji zawartej między granicami α_1 i α_2, jakiś punkt celu, rozciągającego się od x_1 do x_2, zostanie trafiony. Jeżeli jednak artylerzysta nie posiada danych, wystarczających do przewidzenia wyniku (np. nie zna prędkości początkowej c) i nie potrafi obliczyć właściwego kąta elewacji α, musi wystrzelić „na oślep". Może powiemy w potocznym języku, że zależy to wówczas od przypadku, czy cel (sięgający od x_1 do x_2) zostanie trafiony; ale o prawdopodobieństwie tego zdarzenia nic wogóle powiedzieć nie możemy, dopóki nie posiadamy jakichciś dalszych wskazówek co do sposobu, jak artylerzysta postąpi przy ustawianiu działa. Jest to może pole, nadające

[1]) Poincaré H., Calcul des Probabilités 2de édition, Paris 1912. Wstęp jest nadzwyczaj zajmujący, również i dla niefachowców. Czytelnik zauważy jednak, że nie we wszystkiem podzielam zapatrywania autora.

się do spekulacyj psychologicznych, ale nie do obliczeń fizycznych. Przypadek, w tem znaczeniu, jest zaprzeczeniem racjonalnej prawidłowości i musi być wykluczony z nauki ścisłej.

III. Zadanie nasze otrzymuje natomiast odrazu znaczenie określone, przypadek staje się przystępny metodom rachunkowym, z chwilą, kiedy wprowadzamy np. założenie, że wszystkie możliwe kąty α są równie prawdopodobne. Wtedy prawdopodobieństwo trafienia celu $(x_2 - x_1)$ będzie wynosiło

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi}$$

to znaczy, że przy wielokrotnem powtórzeniu doświadczenia taki okaże się procent wystrzałów celnych. Co prawda, w takim razie prawdopodobieństwo skutku zredukowaliśmy poprostu do prawdopodobieństwa przyczyny, która koniecznie ów skutek za sobą pociąga. Trzeba wówczas zastanowić się nad dalszem pytaniem: jak urzeczywistnić w praktyce założenie jednakowego prawdopodobieństwa wszystkich kątów α? Sposób dający się łatwo pomyśleć (choć trudniej wykonać) polega na tem, żeby rurę działową wprowadzić w niezmiernie szybki ruch obrotowy koło osi poziomej, utwierdzonej w łożyskach lawety i żeby artylerzysta w jakimbądź momencie, np. zapomocą kontaktu elektrycznego, powodował wystrzał.

Wyobraźmy sobie zamiast tego podobny przykład, dający się łatwiej urzeczywistnić: strzelec strzela ku tarczy, zaopatrzonej na obwodzie czarnemi i białemi wycinkami, o jednakowych rozmiarach kątowych. Dopóki tarcza jest nieruchoma, można strzelbę tak starannie ustawić, dobierając równocześnie stosownie małą odległość, że napewno liczyć można na trafienie wycinka czarnego; tak samo rzecz będzie się miała przy bardzo powolnym obrocie tarczy. Przy szybszym obrocie prawdopodobieństwo zależeć będzie od wprawy strzelca; wreszcie, jeżeli prędkość obrotu będzie bardzo wielka, wówczas zależeć to będzie od czystego przypadku, czy trafiony zostanie wycinek czarny czy biały; prawdopodobieństwo każdego z tych przypadków będzie wynosiło $\frac{1}{2}$, bez względu na zręczność strzelca. Rozumiemy to wszystko bez rachunku; przykład jest tak prosty, że wydaje się banalny, lecz właśnie zanalizowanie dokładniejsze takich najprostszych przykładów najlepiej daje nam poznać rysy charakterystyczne.

IV. Dlaczego mówimy, że wynik wystrzału zależy od przypadku w razie niezmiernie szybkiego obrotu? Gdyż warunkiem osiągnięcia korzystnego lub niekorzystnego wyniku jest nadzwyczajnie dokładne uchwycenie odpowiedniego momentu, kiedy należy wypalić, bezporównania dokładniejsze, niż tego dokonać potrafi zręczność ludzka. Jeżeli np. tarcza posiada 24 wycinki i wykonywa 100 obrotów na sekundę, zależy to od różnicy czasu $\Delta t = 1/2400$ sekundy w chwili wystrzału, czy wynik będzie korzystny czy nie. Trudno ocenić szybkość decyzji i wprowadzenia jej w czyn ze strony człowieka, ale to chyba jest pewne, że nawet przy wystrzale „na komendę“ u najzręczniejszego osobnika panować będą nie dające się opanować przypadkowe zboczenia $\tau = 1/20$ sekundy. Na taki czas przypada już nadzwyczaj znaczna liczba przypadków korzystnych oraz taka sama liczba przypadków niekorzystnych.

Jako cechy charakterystyczne, które napotkamy następnie również i w innych tego rodzaju przykładach, podkreślić trzeba zatem następujące okoliczności:

1. Nadzwyczajnie mała różnica warunków początkowych (zmiennej t) rozstrzyga o tem, czy wynik będzie korzystny czy niekorzystny. Mała przyczyna, wielki skutek, oto co przedewszystkiem charakteryzuje „przypadek“ w zjawiskach fizycznych. Cóż znaczy jednak słowo „mała“ różnica? Mały lub duży, są to pojęcia względne. Otóż rozumiemy to słowo w znaczeniu: mały w porównaniu do obrębu „nie dającej się opanować zmienności“ warunków początkowych. O przypadku tylko wówczas może być mowa, jeżeli warunki początkowe (czas t) mogą wahać się w sposób nieokreślony, w obrębie pewnych, zazwyczaj niewielkich różnic.

2. Wynik korzystny (tak samo wynik niekorzystny) da się osiągnąć przez wielką liczbę różnych możliwych konstelacyj warunków początkowych, w obrębie ich przypadkowej zmienności. Można też powiedzieć, że ten sam skutek zostaje wywołany przez jakąkolwiekbądź z pomiędzy wielkiej liczby różnych przyczyn. Wycinek czarny zostanie trafiony, jeżeli wystrzał nastąpił albo w obrębie czasu od t do $t + \Delta t$, albo od $t + 2\,\Delta t$ do $t + 3\,\Delta t$, albo od $t + 4\,\Delta t$ do $t + 5\,\Delta t$ i t. d.

Wprowadzamy wreszcie, po części nieświadomie, jeszcze jedno założenie do powyższego przykładu, a mianowicie, że: 3. w obrębie przypadkowej zmienności warunków początkowych prawdopodobieństwo pewnej ich wartości jest określone przez funkcję regularną, nie posiadającą wielu największości i najmniejszości. Jeżeli pobudka pierwotna zjawiska wychodzi od człowieka, jak w powyższym przy-

kładzie, można to łatwo zrozumieć, że prawdopodobieństwo pociągnięcia za cyngiel w chwili $t + n\Delta t$ będzie prawie to samo jak w chwili $t + (n + 1)\Delta t$ i t. d., ale leży w tem pewna hypoteza. Gdyby np. tarcza wirująca połączona była z kontaktem elektrycznym lub z jakiemś urządzeniem mechanicznem, łatwo możnaby rzecz tak urządzić, ażeby prawdopodobieństwo wystrzelenia w „korzystnych“ odstępach czasu było większe niż w niekorzystnych, pomimo krótkości tych odstępów. Właśnie ten szczegół zadowolnić nas jednak w tym przykładzie nie może, że prawdopodobieństwo przyczyny pierwotnej, główną rolę w tym przypadku odgrywające, zależy w tak znacznym stopniu od psychologicznego lub fizjologicznego ustroju człowieka.

V. Dlatego może warto rozważyć jeszcze inny przykład, w którym ten rys występuje mniej wyraźnie i który dotyczy przyrządu, dającego prawdopodobieństwo ciągle niezmienne dla wydarzenia się pewnego skutku, w jakimkolwiekbądź momencie czasu. Wyobraźmy sobie naczynie o kształcie mniej więcej kulistym, z małym otworkiem i o sztywnych, chropowatych ścianach, do którego wrzucamy bardzo drobną, idealnie sprężystą kuleczkę (najlepiej molekułę gazową) z pewną prędkością początkową c, w kierunku dowolnym i do pewnego stopnia przypadkowym. Rozważmy, jakie będzie prawdopodobieństwo, ażeby owa molekuła po pewnym czasie, wskutek odbić od ścian, znów wybiegła przez otwór nazewnątrz, przyczem dla uproszczenia pominiemy zupełnie wpływ ciężkości. Cząsteczka poruszać się będzie prostolinijnie ze stałą prędkością i tylko kierunek jej ruchu będzie się zmieniał przy uderzeniach o ściany. Jeżeli kształt tych ścian wraz ze wszystkiemi drobnemi wypukłościami (które tworzą ich chropowatość) jest dany, można wykreślić drogę molekuły; droga ta będzie składała się naogół z wielkiej liczby prostolinijnych odcinków o najrozmaitszych kierunkach; można obliczyć czas, który upłynie aż do chwili, kiedy cząsteczka wyjdzie przez otwór nazewnątrz, jako funkcję jej początkowego położenia i kierunku jej ruchu początkowego. Długość tego czasu będzie w najwyższym stopniu zmienna, zależnie od owych dwóch warunków początkowych. Wszak już przy minimalnej zmianie pierwotnego kierunku cząsteczka uderzy o część ściany inaczej pochyloną (z powodu drobnych „chropowatości“), co pociąga za sobą znaczną zmianę kierunku drogi po odbiciu. Każde odbicie działa zatem w myśl poprzednio wymienionej zasady (1): mała

różnica warunków początkowych, duża różnica skutków. Jeżeli kierunek początkowy był w pewnych granicach przypadkowo dobrany, kierunki i położenia cząsteczki po kilkakrotnem odbiciu podlegają przypadkowi w sposób wielokrotnie powiększony. Cechę (2) odnajdujemy również w tym przykładzie, gdyż oczywiście najrozmaitsze kombinacje dróg początkowych będą dawały ten sam skutek końcowy (wyjście molekuły przez otwór w danym czasie). Zdaje się, że warunek (3) ma tutaj mniejsze znaczenie, jeżeli otwór jest tak mały, że zjawisko trwa dostatecznie długo [1]). Nie udało się wogóle jeszcze dokonać szczegółowej analizy matematycznej tego przykładu; ale teorja kinetyczna gazów daje poważne powody do przypuszczenia, że w tego rodzaju przykładach prawdopodobieństwo kierunku i miejsca cząsteczek staje się przybliżenie jednostajnem po upływie dostatecznie długiego czasu. To znaczy, że cząsteczka, z wyjątkiem pewnych przypadków osobliwych, porusza się z jednakowem prawdopodobieństwem w jakimbądź kierunku przestrzeni i przeciętnie równie często uderza o wszystkie elementy ścian naczynia, jeżeli tylko, od chwili nadania jej impulsu pierwotnego, upłynął pewien czas, zależny od rozkładu prawdopodobieństwa kierunku pierwotnego.

Jeżeli przyjmiemy ten wniosek za ważny, łatwo dojdziemy do wyniku następującego: prawdopodobieństwo, ażeby cząsteczka w przeciągu czasu dt wybiegła przez otwór, wynosi

$$\frac{w\,c}{\frac{16}{3}\pi a^3}\,dt$$

jeżeli w oznacza powierzchnię otworu, a promień kuli.

VI. Poznaliśmy w fizyce zjawisko, które przebiega w myśl takiej zasady: rozkład atomów substancyj promieniotwórczych. Naczynie w rodzaju właśnie omawianego, z wpuszczoną do środka cząstką α, daje obraz zachowania się atomu emanacji radowej. Z pomiędzy n takich atomów rozkłada się w czasie dt:

$$\frac{w\,c}{\frac{16}{3}\pi a^3}\,n\,dt = -\,dn$$

[1]) W pewnych przypadkach, np. jeżeli ściany naczynia są idealnie gładkie i naczynie ma kształt dokładnie kulisty albo kształt prostopadłościanu, twierdzenie o ustalaniu się równomiernego przypadkowego rozkładu prawdopodobieństwa nie będzie ważne. Zdaje się, że założenie „chropowatości“ ścian wyklucza możliwość takich przypadków osobliwych. Stopień chropowatości, oraz kształt naczynia muszą wpływać na długość czasu potrzebnego do ustalenia się rozkładu równomiernego.

icm©

wyrzucając równocześnie po jednej cząstce a; rozkład odbywa się zatem w myśl charakterystycznego prawa wykładniczego:

$$n = n_0 e^{-ht}$$

przyczem spółczynnik h wynosi:

$$h = \frac{w\ c}{\frac{16}{3}\pi a^3}$$

Porównanie to ma oczywiście tylko znaczenie schematycznej ilustracji zjawiska, ale daje ono pewne wskazówki co do jego przyczyn wewnętrznych. W każdym razie (jak już Rutherford i Soddy zauważyli) niepodobna tłumaczyć rozkładu w myśl porównania atomu z jakimś systemem planetarnym, postępującym drogą ciągłej wewnętrznej ewolucji; niemożliwa jest również hypoteza J. J. Thomsona, oparta na przypuszczeniu, że atom promieniotwórczy wypromieniowywa energję swoją w przestrzeń i wskutek tego, po przekroczeniu granic statecznej równowagi, doznaje przemiany promieniotwórczej. Wówczas bowiem atomy musiałyby starzeć się stopniowo i prawdopodobieństwo rozkładu w pewnym czasie musiałoby być większe dla starszego niż młodszego atomu, co sprzeciwia się faktom obserwowanym. Musimy przypuścić, że w atomach ciał promieniotwórczych odbywają się wciąż jakieś nieregularne zmiany, o tyle przypadkowe, że przebiegają po krótkim czasie zupełnie różnie w atomach, których stan początkowy był bardzo podobny; że pewne konstelacje wewnętrzne, które tworzą liczbowo tylko bardzo drobny procent wszystkich możliwych, pociągają za sobą proces rozkładowy. Czy zaś źródło tego rozkładowego procesu leży w samym atomie, czy też właściwym czynnikiem jest tu jakieś promieniowanie zewnętrzne[1]), które działa rozkładowo na pewne konstelacje, to jest dla rzeczy samej obojętne, dopóki nie potrafimy wpłynąć na zmianę tych czynników.

VII. Przykład poprzedni jest w swej istocie zbyt skomplikowany, ażeby na nim można było dokładnie, matematycznie, zanalizować genezę przypadkowości. Dlatego rozważmy jeszcze jeden przykład, w którym łatwiej daje się rozpoznać właściwe źródło „przypadku“ i sposób jego działania. Jest to t. zw. deska Galtona, przyrząd, który uważam za najlepszy model zjawisk prawdopodobieństwa. Składa się on z deski, nachylonej pod pewnym

[1]) Za tem ostatniem przypuszczeniem przemawiałaby analogja z rozkładem fotoelektrycznym, który zdaje się również podlegać prawom przypadku. Por. nowsze badania Joffe'go i E. Meyera.

kątem, do której wbito wielką liczbę sztyfcików, w jednakowych odstępach, rzędami poziomemi, w taki sposób, że sztyfciki jednego rzędu są umieszczone naprzemian poniżej otworów poprzedniego rzędu. Kuleczki o jednakowej wielkości, odpowiadającej ściśle odległościom sztyfcików, wypuszcza się z pewnego miejsca górnej krawędzi tej deski, tak że, tocząc się po niej, napotykają sztyfciki i przeciskając się między niemi, dochodzą do dolnej krawędzi, gdzie wpadają w odpowiednie przegrody. Pokazuje się, że układają się tam w myśl „prawa błędów“ Gaussa:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} e^{-\frac{x^2}{a}}$$

tak że najwięcej nagromadzi się ich w środku, poniżej punktu, skąd je wypuszczano, a coraz mniej ku bokom; wysokości, do których sięgają w przegrodach, odpowiadają wprost wartościom y owego wzoru. Zrozumiemy łatwo działanie przyrządu, jeżeli założymy, że kuleczka, wpadając na jakibądź sztyfcik, odchyla się całkiem przypadkowo, tak że z jednakowem prawdopodobieństwem przeciska się koło niego po jednej lub po drugiej stronie. W takim razie wynikiem każdego takiego zdarzenia elementarnego jest równie prawdopodobnie przyrost odciętej x o połowę odstępu między sztyfcikami, jak zmniejszenie się jej o ową wielkość. Jeżeli zatem przez m oznaczymy liczbę rzędów sztyfcików, a odstęp między sztyfcikami tego samego rzędu oznaczymy przez b, wówczas kula osięgnie po przejściu przez wszystkie rzędy odstęp $x = n\,b$, jeżeli $\frac{1}{2}(m+n)$ razy doznała odchylenia dodatniego, zaś $\frac{1}{2}(m-n)$ razy odchylenia ujemnego. Prawdopodobieństwo takiej kombinacji zdarzeń elementarnych, w myśl znanego twierdzenia Bernoulliego, wynosi:

$$P(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi m}}\, e^{-n^2/2m}$$

Procentowa liczba, przypadająca na przegrody w odstępie od x do $x + \Delta x$, będzie zatem:

$$P(n)\frac{\Delta x}{2b} = \frac{1}{\sqrt{2\, b^2 m \pi}}\, e^{-x^2/2m\, b^2}\, \Delta x$$

to znaczy, że rozkład kulek będzie dany przez znaną „dzwonowatą“ krzywą Laplace'a i Gaussa. Tak tłumaczy się prawidłowy wynik ostateczny, jeżeli przyjmiemy zasadnicze założenie zupełnej przypadkowości zjawisk elementarnych.

VIII. Słusznie jednak można powiedzieć, że nie wyjaśniliśmy

icm©

jeszcze rzeczy, odsunęliśmy tylko trudność; pozostaje do wytłumaczenia, dlaczego skutek każdego uderzenia kuli o sztyfcik uważać można za zjawisko zupełnie przypadkowe. Zdawałoby się, że początkowe położenie i początkowa prędkość kuleczki jednoznacznie już określają dalsze jej zachowanie się; gdybyśmy znali dostatecznie dokładnie te wielkości, jak i położenie wszystkich sztyfcików, moglibyśmy obliczyć miejsce, które ona w końcu musi osiągnąć. Co prawda, w praktyce, różne nie dające się skontrolować czynniki uboczne, jak ruchy obrotowe kuleczki, drobne nierówności deski, minimalne wypukłości i wklęsłości powierzchni kuleczki i t. d., wielce przyczyniają się do wytworzenia „przypadkowości"; sądzę jednak, że, nawet pomijając te czynniki i rozważając przykład idealnie uproszczony, można zrozumieć, do pewnego stopnia, skąd pochodzi tutaj pozorna przypadkowość. Wyobraźmy sobie ową deskę, tak samo jak kuleczkę i sztyfciki, idealnie gładką, tak że rozważać potrzeba tylko postępowy ruch, pod wpływem prędkości początkowej, ciężkości oraz spotkań ze sztyfcikami. Załóżmy, że spotkania te odbywają się zupełnie niesprężyście, tak że składowa prędkość kuleczki, normalna do płaszczyzny styczności, zostaje zniesiona, a składowa styczna pozostaje niezmieniona. Wówczas łatwo można rzecz tak urządzić, obierając nachylenie deski stosownie małe, że kuleczka, uderzywszy o sztyfcik B_1, zostanie zawsze odbita ku sąsiedniemu sztyfcikowi C_1 po prawej lub A_1 po lewej stronie, od niego znów odbije się ku B_1 i t. d., aż po wielokrotnem odbiciu wreszcie prześliznie się przez otwór między temi dwoma sztyfcikami. Czy przejdzie ona przez otwór A_1 B_1 czy B_1 C_1, to zależy od tego, po której stronie sztyfcika B_1 pierwsze nastąpiło uderzenie. Po której zaś stronie sztyfcik B_2 (lub C_2) drugiego rzędu uderzony zostanie, to zależy wyłącznie od kierunku minimalnej prędkości, pozostałej po wielokrotnem odbiciu między A_1 B_1 (lub B_1 C_1). To zaś zależy znów od punktu na powierzchni B_1, w którym nastąpiło pierwsze uderzenie. Nadzwyczajnie mała różnica w położeniu tego punktu pociąga za sobą, jako skutek, nabycie drobnej pozostałej prędkości w kierunku ku prawej lub lewej ręce, C_2 lub B_2, zatem przesunięcie kulki w następnym rzędzie o $+b$ lub $-b$. Rozpoznajemy więc znów cechę charakterystyczną (1): „mała różnica przyczyny, duża różnica skutków"; odnajdujemy również cechę (2), gdyż, zależnie od położenia punktu uderzenia na powierzchni sztyfcika B_1, przechodzić będziemy od jego wierzchołka

ku dołowi w ogromnie częstej zmianie przez położenia, które naprzemian wywołują albo skutek $+b$, albo $-b$. Ten sam zatem skutek $+b$ odpowiada wielkiej liczbie konstelacyj początkowych, czyli: „rozmaite przyczyny, ten sam skutek". Właściwości te występują tu nawet w postaci szczególnie jaskrawej, w razie, jeżeli odstępy wolne między sztyfcikami równają się dokładnie średnicy kulki, gdyż wówczas liczba owych odbić będzie nieskończenie wielka, a składowa prędkość, pozostająca po przejściu przez otwór, będzie nieskończenie mała. Z symetrji warunków tych odbić wnioskujemy dalej, że prawdopodobieństwo skutków dodatnich i ujemnych jest jednakowo wielkie. Teoretycznie zatem sposób każdego odbicia zależy wprawdzie od skutku odbicia poprzedniego, ale zależność ta nie da się wcale przedstawić w postaci zwykłej funkcji analitycznej. Już każda nieskończenie mała zmiana warunków wywołuje skończoną zmianę skutków $+b$ na $-b$, lub naodwrót, a prawdopodobieństwa tych wydarzeń są jednakowo wielkie przy każdorazowem przejściu kuli przez otwór w szeregu sztyfcików; rozumiemy zatem, że zjawisko przedstawia się tak, jak gdyby wynik każdego spotkania z szeregiem sztyfcików był przypadkowy i nie zależał od poprzedzających je wypadków. W rzeczywistości przypadkowość takiego zdarzenia elementarnego nie będzie zupełna, gdyż odstęp między sztyfcikami musi być nieco większy niż średnica kuli, zatem liczba odbić nie będzie nieskończenie wielka; naogół pozostanie pewien ślad zależności między przejściami kulki przez kolejne rzędy, ale zależność ta bardzo szybko zanika w ciągu dalszych przejść i wywiera mały naogół wpływ na całe zjawisko.

Charakterystyczny znów jest rys, że wprawdzie pojęcia przypadku i prawdopodobieństwa tylko wówczas dają się stosować, gdy warunki początkowe są do pewnego stopnia zmienne, że jednak wynik ostateczny, rozkład końcowy, wcale nie zależy od obrębu i rodzaju tej zmienności (jeżeli tylko zmienność przyczyny pierwszej określona jest przez funkcję analityczną). Czy będziemy się więcej lub mniej o to starali, żeby wszystkie kuleczki puszczać w drogę dokładnie tak samo, to wcale nie wpływa na ich rozkład ostateczny; ułożą się one w każdym razie według krzywej Laplace'a i Gaussa.

IX. Przyrząd Galtona tworzy doskonałą ilustrację wielkiej klasy zjawisk fizycznych: zjawisk dyfuzyjnych. Gdybyśmy z różnych punktów pierwszego szeregu sztyfcików wypuszczali różno-

barwne kuleczki w określonej proporcji, te różne kategorje kuleczek musiałyby mieszać się między sobą stopniowo, w miarę jak postępują przez kolejne szeregi sztyfcików. Łatwo można istotnie wykazać, że do tego zjawiska stosuje się dokładnie dobrze znane równanie, które wyraża stopniowo, w miarę upływania czasu, postępującą dyfuzję. Rachunek[1]) jest zupełnie identyczny z obliczeniem dyfuzji cząsteczek gazowych lub cząstek emulsji, które początkowo były rozmieszczone z gęstością zależną od odciętej x, a z czasem mieszają się wskutek swych ruchów molekularnych. Różnica występuje tylko w prawie, określającem wynik zdarzenia „elementarnego". W powyższym przykładzie musi nastąpić określone przesunięcie $+b$ albo $-b$, podczas gdy w owych przypadkach istnieje przy każdem zjawisku elementarnem (zderzenie z inną cząsteczką i t. d.) możliwość, że cząsteczka osiągnie większe lub mniejsze przesunięcie w kierunku x. Można udowodnić, że w razie dostatecznie długiego trwania zjawiska wynikiem będzie zawsze częściowa dyfuzja, jeżeli tylko funkcja, określająca prawdopodobieństwo przesunięć w pojedynczem zjawisku elementarnem, jest funkcją parzystą, dającą się rozwinąć na szereg Mac Laurina:

$$f(x) = a + b x^2 + c x^4 + \ldots$$

Ten sam zresztą przyrząd jest równocześnie modelem przewodnictwa cieplnego, w razie rozkładu temperatury wyłącznie zależnego od x, gdyż zasadnicze równanie przewodnictwa cieplnego jest identyczne z równaniem dyfuzji.

Przypuszczaliśmy dotychczas, że deska Galtona jest nieograniczona w kierunku x. Jeżeli ma ona ściany boczne, zmuszające kuleczki do pozostawania w obrębie odciętych od $-l$ do $+l$, wówczas przyrząd ten przedstawia obraz dyfuzji w naczyniu zamkniętem. Wówczas, w razie dostatecznie długiego czasu (t. j. dostatecznie dużej liczby rzędów sztyfcików), wystąpi zupełne wyrównanie prawdopodobieństwa pobytu kulki w jakiejkolwiekbądź odciętej, czyli zupełne zmieszanie kulek początkowo rozdzielonych.

Przyrząd Galtona możnaby jeszcze zmienić, tak żeby mógł posłużyć do ilustracji różnych innych zjawisk fizycznych. Układając np. sztyfciki symetrycznie i nadając desce odpowiednie nachylenie boczne, tak żeby kuleczki stosunkowo większych przesunięć

[1]) Por. Smoluchowski, O średniej swobodnej drodze cząsteczek gazu i o jej związku z teorją dyfuzji. Rozpr. W. M. P. Akad. Umiej. w Krak., tom XLVI, str. 129, 1906 [tom I niniejszych *Pism*, str. 468; *przyp. wyd.*].

nabywały w kierunku dodatnim niż ujemnym i umieszczając równocześnie listwę pionową boczną, dla powstrzymania kuleczek od przekroczenia pewnej odciętej x, otrzymałoby się rozkład analogiczny do rozkładu gęstości atmosfery ziemskiej, lub do rozkładu cząstek gumiguty, w bliskości dna naczynia, jaki ustala się pod wpływem ciężkości.

Zresztą przykłady te pod pewnym względem są najprostsze możliwe, gdyż prawdopodobieństwo wyniku każdego zjawiska elementarnego jest to samo, niezależnie od odległości x, już osiągniętej przez kuleczkę. Istnieją inne przykłady w fizyce, gdzie sprawa jest bardziej skomplikowana. Tak np. cząsteczka, posiadająca pewną prędkość postępową ξ w kierunku osi X, doznaje przypadkowej zmiany tej prędkości przy spotkaniu z inną cząsteczką. Naogół jednak prawdopodobieństwo przyrostu prędkości ξ jest mniejsze niż prawdopodobieństwo zmniejszenia się; różnica jest tem wybitniejsza, im większa jest wartość ξ. Skutek wielokrotnych spotkań jest w tym przypadku analogiczny do wzoru, omawianego w rozdziale VII, gdyż w tym razie ważne będzie słynne prawo rozkładu prędkości Maxwella, identyczne w ogólnym swym kształcie z prawem Gaussa; różnica polega na tem, że parametr krzywej dzwonowatej nie wzrasta w miarę upływu czasu, jak w owym przykładzie, lecz pozostaje niezmienny (w związku z temperaturą gazu).

X. Starajmy się streścić w formie nieco ściślejszej myśli zasadnicze, występujące w omówionych przykładach specjalnych. Pytanie, przytoczone w rozdz. I: jak przyczyny, przypadkowo działające, mogą dać określony, prawidłowy wynik, wyjaśnia się samo przez się. Zrozumiałe jest ze wszystkiego, co mówiliśmy, że wyrazu „przypadek" w fizyce nie rozumiemy w znaczeniu potocznem, które jest równoważne z nieobliczalnym i zupełnie dowolnym kaprysem, lecz raczej jako pewnego rodzaju prawidłowość, która daje się sprawdzić doświadczalnie, ze stosunkowo coraz większą dokładnością, w miarę wielokrotnego powtarzania się zjawiska. Prawidłowość tę, z którą w fizyce łączymy nazwę przypadku, możemy określić mniej więcej w następujący sposób. Powiadamy, że zjawisko y, powstające wskutek przyczyny x, jest przypadkowe, jeżeli kształt funkcji, określającej prawdopodobieństwo różnych wartości y, nie zależy od kształtu funkcji, która określa prawdopodobieństwo rozmaitych wartości x. Wówczas bowiem rozkład przyczyny nie

icm©

wpływa na rozkład skutków i wydaje się, jak gdyby to były zjawiska niezależne.

Warunek dostateczny dla przybliżonej przypadkowości skutków alternatywnych y_1, y_2 jest następujący. Rozważmy obręb, w którym różne wartości zmiennej x występują z prawdopodobieństwem stosunkowo niewiele różnem. Jeżeli w tym obrębie funkcja, wyrażająca związek przyczyny x oraz skutku y, posiada taki charakter, że wielkiej liczbie przedziałów

$$x \ldots x + \Delta x_1;\ x + \Delta x_2 \ldots x + \Delta x_3;\ x + \Delta x_4 \ldots x + \Delta x_5 \ldots \text{ i t. d.}$$

odpowiada skutek y_1, natomiast naprzemian położonym przedziałom

$$x + \Delta x_1 \ldots .\ x + \Delta x_2;\ x + \Delta x_3 \ldots .\ x + \Delta x_4; \ldots \text{ i t. d.}$$

skutek y_2, wówczas występowanie skutków y_1, y_2 można uważać za przybliżenie przypadkowe. Ściśle przypadkowe będą one wówczas, jeżeli wszystkie przedziały Δx są nieskończenie małe, a liczba ich nieskończenie wielka. Stosunek prawdopodobieństw zjawisk y_1, y_2 jest oznaczony wówczas przez stosunek sumy przedziałów parzystych do sumy przedziałów nieparzystych.

W zjawiskach, do których stosujemy w praktyce rachunek prawdopodobieństwa, występuje przypadek zazwyczaj tylko w owem znaczeniu przybliżonem. Że rachunek prawdopodobieństwa tak dobrze zgadza się z doświadczeniem przy różnych grach hazardowych i t. p., polega tylko na tem, że tam jako właściwy, pierwotny czynnik występuje człowiek, który jest maszyną, posiadającą nadzwyczajnie wielki „obręb przypadkowej zmienności".

Z punktu widzenia fizyki najciekawsze przykłady, należące do zakresu kinetycznej teorji materji, przedstawiają niestety nieprzezwyciężone dotychczas trudności dla zastosowania takich kryterjów przypadkowości. Czujemy intuicyjnie, że Maxwella i Boltzmanna metoda obliczania skutków spotkań molekularnych, opierająca się na założeniu zupełnej przypadkowości zjawisk składowych [1]), jest bardzo przybliżenie ważna. Mechanika statystyczna daje jednak poważne powody do przypuszczania, że metoda ta niezupełnie jest ścisła; niestety nie potrafimy obecnie jeszcze należycie ocenić błędów, wywołanych przez stosowanie założenia Boltzmanna.

[1]) Założenie to wyraża się matematycznie w formie t. zw. *Stoßzahl-Ansatz*. Por. P. u. T. Ehrenfest, Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik, Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften, IV. 2 II. Heft 6, Teubner, Leipzig 1912.

VII. ÜBER DEN BEGRIFF DES ZUFALLS UND DEN URSPRUNG DER WAHRSCHEINLICHKEITSGESETZE IN DER PHYSIK.

Die Naturwissenschaften. Jahrgang 1918. Heft XVII.

I

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche seit Beginn ihrer Entwicklung mit größtem Erfolg, hauptsächlich in dem sonst der mathematischen Behandlung wenig zugänglichen Bereich sozialer und biologischer Vorgänge angewendet wurde, hat sich in den letzten Zeiten ein überaus wichtiges Anwendungsgebiet erobert: die Physik. Und zwar ist damit nicht etwa die seit Gauß' Zeiten als eigene Hilfsdisziplin ausgebildete Theorie der Fehlerausgleichung bei physikalischen Messungen gemeint, sondern gerade das eigentliche Gerüst dieser Wissenschaft, das System der theoretischen Physik.

Zum ersten Male in den Jahren 1857—1860 von Clausius und Maxwell als eigenartiges mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung, nach einer vorübergehenden Periode der Stagnation, infolge des schließlichen Sieges der atomistischen Anschauungsweise eine für die Physik ganz grundlegende Bedeutung gewonnen und bildet heute das wichtigste Werkzeug bei Forschungen auf dem Gebiete der modernen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie. Entspricht doch ihr Wesen durchaus der heute zur Herrschaft gelangten Tendenz, sämtliche Gesetze der Physik [1]) — nach dem Vorbild der kinetischen Gastheorie — auf

[1]) Von dieser Tendenz sind bisher nur die Lorentzschen Gleichungen der Elektronentheorie, das Energiegesetz und das Relativitätsprinzip unberührt geblieben, aber es ist wohl möglich, daß im Laufe der Zeit auch hier exakte Gesetzesformen durch statistische Regelmäßigkeit ersetzt werden dürften.