w skałach warstwowanych. Jeżeli bowiem zastosujemy rachunek poprzedni do układu n warstw, którym dana jest możność przesuwania się wzdłuż warstwic, otrzymujemy wzory analogiczne, tylko ze spółczynnikiem g w stosunku n zmniejszonym. Tak np. może wystąpić sfałdowanie w układzie jedenastu warstw piaskowcowych, o łącznej grubości 10 km, a długość fałd będzie 23 km; są to wyniki odpowiadające już dość dobrze stosunkom w przyrodzie napotykanym.

Istnienie wielkich obszarów niesfałdowanych łatwo tedy wytłómaczyć, przyjmując, że tam siła P jest mniejsza, lub że warstwy skorupy ziemskiej tak są ze sobą zrośnięte, że przesunięcia styczne wzdłuż warstwic nie mogą tam wystąpić. Zauważyć należy wreszcie, że nawet jednolita płyta skały o strukturze warstwowej (jak łupki, gneisy i t. p.) może rozdzielić się na szereg cieńszych płyt, wskutek równoległych pęknięć poziomych, jeżeli dozna dostatecznie wielkiego przegięcia. Może się zatem zdarzyć, że taka płyta, początkowo tworząc masę zupełnie spojoną, przez ciśnienia poziome nie da się żadnym sposobem sfałdować, natomiast, gdy wskutek jakichbądź sił pionowych zostanie w pewnem miejscu przegięta, wówczas od tego miejsca rozchodzić się będzie coraz dalej postępujące zjawisko poziomego pękania i następnego fałdowania się. W przyrodzie zjawiska te odbywają się niewątpliwie w sposób bardziej zawiły, zwłaszcza wskutek pewnej plastyczności skał, która z czasem przeistacza deformacje sprężyste w odkształcenia trwałe; ale uproszczony, schematyczny obraz może ułatwić nam zrozumienie mechanizmu górotwórczego.

II. ÜBER EIN GEWISSES STABILITÄTSPROBLEM DER ELASTIZITÄTSLEHRE UND DESSEN BEZIEHUNG ZUR ENTSTEHUNG VON FALTENGEBIRGEN.

Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, 1909, II. pp. 3—20.

Obwohl das im folgenden behandelte Problem der Elastizitätslehre auch unabhängig von seiner eventuellen geophysikalischen Nutzanwendung einiges Interesse beanspruchen dürfte, möchte ich es im Zusammenhang mit den Fragen darstellen, welche die Anregung dazu gebildet haben. Es handelt sich darum, auf welche Weise die Faltung eines Gebirgszuges zustande kommt und warum Faltengebirge nur auf gewisse Teile der Erdoberfläche beschränkt sind, während große Gebiete ganz ungefaltet erscheinen, ein Umstand, welcher bekanntlich oft als gewichtiger Einwand gegen die Kontraktionstheorie der Gebirgsbildung geltend gemacht wird.

Ohne hier auf die Fragen nach der Berechtigung der Kontraktionstheorie, nach dem Ursprung der gebirgsbildenden Kräfte, der Existenz von ähnlichen vertikalen Kräften u. s. w. einzugehen, nehmen wir an, daß Faltengebirge ihre Entstehung in erster Linie der Wirkung horizontaler Druckkräfte verdanken, und versuchen, uns den Mechanismus ihres Entstehens näher zu erklären. Offenbar besteht hier eine innige Analogie mit dem schon von Euler behandelten Beispiel des durch longitudinalen Druck beanspruchten Stabes, aber die Sache liegt nicht ganz so einfach, wie man meist anzunehmen scheint.

Wenn ein Stab von der Länge l durch die auf seine Enden wirkende longitudinale Druckkraft P beansprucht wird, behält er bekanntlich die gerade Gestalt solange, bis P den Wert $\frac{E\Theta\pi^2}{l^2}$

erreicht (wo Θ das Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet). Überschreitet P diese Grenze, so bleibt zwar die gerade Linie eine mögliche Gleichgewichtsform, aber sie wird labil; dafür gibt es dann zwei andere stabile Formen: der Stab knickt nach der einen oder anderen Seite aus, indem er die Gestalt einer Elastica annimmt, die im Grenzfall kleiner Ausbiegungen mit einer Sinusoide von einer halben Wellenlänge identisch ist, und bei wachsender Kraft P durchläuft er die Formen (*a*) (*b*) (*c*) Fig. 1.

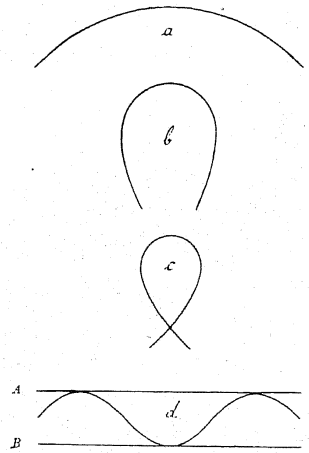

Fig. 1.

Sobald P den Wert $\frac{4E\Theta\pi^2}{l^2}$ erreicht, wird allerdings auch eine Form möglich, welche einer ganzen Wellenlänge entspricht, aber dieselbe ist labil, ebenso wie die bei noch größerem P theoretisch möglichen Formen mit einer größeren Anzahl von Bergen und Tälern, und kann daher ebensowenig wie diese in Wirklichkeit bestehen. Da die Instabilität dieser Formen mittels verschiedener Methoden erwiesen wurde, und das entgegengesetzte Resultat von Saalschütz auf einer mangelhaften Analyse beruht, sind die aus dessen Buch in verschiedene Werke (z. B. Winkelmann,

Handbuch d Physik Bd. I, S. 576, Fig. *c*, *d*) übergegangenen Figuren mit mehrfachen Wendepunkten als unrichtig zu verwerfen [1]).

Auch kann man sich leicht experimentell, z. B. durch Versuche mit Stahlfedern, davon überzeugen, daß in Wirklichkeit nur die Formen mit einer Ausbiegung und nicht jene mit mehreren Falten auftreten. Allerdings können mehrfache Faltungen bei Anwendung spezieller Hilfsmittel stattfinden, z. B. wenn die Geraden A, B, Fig. 1 (*d*), zwei symmetrisch angebrachte feste Wände vorstellen, welche die Möglichkeit größerer seitlicher Ausbiegungen beschränken — es würde dies gewissen Versuchen entsprechen, durch welche z B. Daubrée [2]) die Gebirgsfaltung nachgeahmt hat — doch ist es klar, daß dies höchstens die Faltung einer zwischen härteren Schichten eingeschlossenen weicheren Schichte, aber nicht eine Faltung der Erdkruste als Ganzes erklären könnte.

Es entsteht also die Frage: Durch welchen Umstand könnte in der Natur die Stabilität der Formen mit mehrfachen Falten, nach Art (*d*) Fig. 1., erklärt werden? In erster Linie kommt hier als ein solcher Umstand, welcher einem übermäßigen Anwachsen vertikaler Ausbiegungen entgegenwirkt, die Schwerkraft in Frage. Bekanntlich steht im großen und ganzen die äußere Erdkruste im isostatischen Gleichgewicht, gerade als ob sie auf einer flüssigen Schichte schwimmen würde. Somit wenden wir uns zur Aufgabe, die Form einer von longitudinalen Druckkräften beanspruchten, schwimmenden Platte zu ermitteln und zu untersuchen, ob hiebei stabile Faltenformen auftreten können. Diese Aufgabe hat einige Ähnlichkeit mit dem von Hertz [3]) bearbeiteten Problem einer durch Transversalkräfte beanspruchten schwimmenden Scheibe; es entfällt zwar die Schwierigkeit der Kreisgestalt, da wir den Zustand als von z unabhängig, also die Platte als rechteckig

[1]) Bryan, Cambr. Phil. Soc. Proc. 6, 199, 287, (1889); Kriemler, Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren, Karlsruhe 1902; Born, Stabilität d. elast. Linie, Göttingen 1906; Saalschütz, Der belastete Stab, Leipzig 1880. Love's Instabilitätsbeweis (Elasticity S. 393) halte ich nicht für ausreichend, da derselbe die Möglichkeit relativer Minima der potentiellen Energie nicht ausschließt und nur beweist, daß die Form mit der geringsten Anzahl von Wendepunkten die stabilste ist.

[2]) Daubrée, Géologie expérimentale, Paris 1879, S. 293.

[3]) Hertz, Wiedem. Ann. 22, 449, 1884.

voraussetzen wollen, dafür konzentriert sich unser Interesse auf die Stabilitätsbetrachtungen, welche bei jenem Beispiel keine Rolle spielen.

Wir gehen von der Kirchhoff'schen Grundgleichung dünner Platten aus [1]), welche in unserem Fall die Form annimmt:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{R} = M \tag{1}$$

(wo h die Dicke, E den Young'schen Modul, μ den Poisson'schen Koeffizienten, R den Krümmungsradius bedeutet). Das Drehungsmoment M an der Stelle x, y rührt von folgenden Kräften her: 1) von der horizontalen, längs der X-Achse angreifenden Druckkraft P; 2) von den hydrostatischen Drucken $-\varrho g y$, deren vom Nullpunkt bis zum Punkt x summiertes Moment den Wert hat:

$$-\varrho g \int_{\xi=0}^{x} y_\xi (x-\xi)\, d\xi$$

und 3) von den behufs Kompensation in den Endpunkten eventuell hinzuzufügenden vertikalen Auflagerdrucken F.

Somit erhalten wir, wenn zur Abkürzung $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ durch D und $\frac{1}{R}$ durch den Näherungswert $\frac{d^2y}{dx^2}$ ersetzt wird:

$$Py - Fx + \varrho g \int_0^x y(x-\xi)\, d\xi = -D\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{2}$$

Hieraus folgt durch zweimalige Differentiation:

$$D\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho g y = 0. \tag{3}$$

Zur Lösung setzen wir in bekannter Weise: $y = Ae^{bx}$, wobei b die Gleichung erfüllen muß:

$$Db^4 + Pb^2 + \varrho g = 0; \tag{4}$$

daher:

$$b = \pm\sqrt{\frac{P}{2D}}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varrho g D}{P^2}}\right]^{1/2}.$$

[1]) Siehe z. B. Love, Elasticity S. 443.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I) Ist $P < 2\sqrt{D\varrho g}$, so hat b die Form $b = n + i\nu$, wobei

$$n = \pm\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{P}{2D} + \sqrt{\frac{\varrho g}{D}}\right)\right]^{1/2}; \quad \nu = \pm\left[\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2D} + \sqrt{\frac{\varrho g}{D}}\right)\right]^{1/2} \tag{5}$$

ist, somit wird, wenn man im weiteren Verlauf unter n, ν die Absolutwerte dieser Größen versteht, die Lösung die Form annehmen:

$$y = Ae^{nx}\sin(\nu x + \varepsilon_1) + Be^{-nx}\sin(\nu x + \varepsilon_2). \tag{6}$$

Nehmen wir an, es handle sich um eine in ihren Endpunkten $x = 0$, $x = l$ im Null-Niveau drehbar aufgelagerte Platte; dann gelten für diese Punkte die Bedingungen $y = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; durch Einsetzen der auf den Punkt $x = 0$ bezüglichen Werte geht die allgemeine Lösung über in

$$y = A[e^{nx}\sin(\nu x + \varepsilon) + e^{-nx}\sin(\nu x - \varepsilon)].$$

Werden die für $x = l$ geltenden Werte eingesetzt, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$e^{nl}\sin(\nu l + \varepsilon) + e^{-nl}\sin(\nu l - \varepsilon) = 0$$
$$e^{nl}\cos(\nu l + \varepsilon) - e^{-nl}\cos(\nu l - \varepsilon) = 0$$

welche im allgemeinen inkompatibel sind. Es kann also die Platte zwar im Punkte $x = l$ das Null-Niveau schneiden, aber ihre Krümmung ist dort nicht Null, das heißt, sie muß dort durch ein äußeres Drehungsmoment im Gleichgewichtszustande erhalten werden

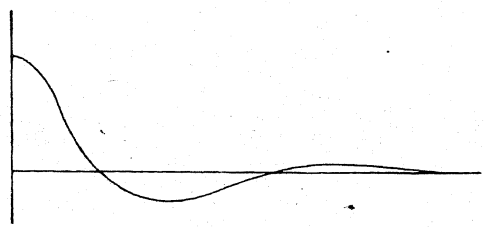

Fig. 2.

Eine übersichtlichere Lösung erhalten wir, falls wir voraussetzen,

es handle sich um eine einseitig unendlich ausgedehnte Platte; dann muß $A=0$ sein und die Konstanten B und ε_2 bestimmen sich aus dem Werte der Anfangsordinate y_0 und des im Nullpunkt wirkenden äußeren Drehungsmoments. Unsere Lösung zeigt somit in diesem Falle den mit wachsender Entfernung stetig abnehmenden Einfluß einer im Nullpunkt lokalisierten Störung des isostatischen Gleichgewichtszustandes (Fig. 2).

Die Wellenzüge werden sich desto rascher verflachen, je kleiner der Horizontaldruck P im Vergleich mit ϱg und D ist

II) Ist dagegen $P > 2\sqrt{D\varrho g}$, so sind die vier paarweise zusammengehörigen Wurzeln b gemäß (4) imaginär, und die Lösung erhält die Gestalt:

$$y = A\sin(\beta_1 x + \varepsilon_1) + B\sin(\beta_2 x + \varepsilon_2) \tag{7}$$

$$\left.\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{P}{2D}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varrho g D}{P^2}}\right]}.$$

Soll die Platte im Nullpunkte ohne äußeres Drehungsmoment aufgelagert sein, so folgt aus den Bedingungen $y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ entweder: $A = \varepsilon_2 = 0$; oder: $B = \varepsilon_1 = 0$.

Somit ist:

$$y = a\sin\beta x \tag{8}$$

eine gewöhnliche Sinusoide, wobei wir zwischen den beiden möglichen Werten von β einstweilen nicht entscheiden. Die Platte kann dann im Punkt $x = l$ das Niveau nur in dem Fall schneiden, falls $\beta l = k\pi$ ist; dann ist aber jener Punkt ein Wendepunkt, und es ist kein äußeres Drehungsmoment zur Erhaltung des Gleichgewichts nötig. Dies entspricht genau dem einfachsten Fall der klassischen Elastica und der Unterschied besteht soweit nur darin, daß an Stelle der bekannten Euler'schen Knickformel der aus (8) und (3) folgende Wert zu setzen ist:

$$P = D\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \varrho g\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2. \tag{9}$$

Um nun zwischen den möglichen Werten von β zu entscheiden, müssen wir zu Stabilitätsbetrachtungen übergehen, wobei wir uns der von Bryan (a. a. O.) in einigen einfacheren Fällen angewandten Methode bedienen wollen. Die potentielle Energie einer gebogenen Platte von der Länge l ist angenähert durch

$$U = \frac{D}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \tag{10}$$

bestimmt; die potentielle Energie der Schwerkraft beträgt:

$$V = \frac{\varrho g}{2}\int_0^l y^2\,dx \tag{11}$$

und die bei Verbiegung von der Kraft P geleistete Arbeit ist angenähert:

$$W = P\int_0^l \left(1 - \frac{dx}{ds}\right)ds = \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \tag{12}$$

Dann sind jene Gestalten stabile Gleichgewichtsformen, für welche $(U+V-W)$ ein Minimum ist. Untersuchen wir diesbezüglich zuerst die einer einzigen Ausbiegung entsprechende Kurve:

$$y = a\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Eine beliebige virtuelle Gestaltsänderung (bei festen Enden) können wir uns durch Superposition einer Fourier'schen Sinusreihe hervorgebracht denken. Wird somit

$$y = a\sin\frac{\pi x}{l} + \sum_1^\infty b_m \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{13}$$

gesetzt, so wird:

$$U = \frac{Dl}{4}\left[(a+b_1)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + \sum_2^\infty b_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\right];$$

$$V = \frac{\varrho g l}{4}\left[(a+b_1)^2 + \sum_2^\infty b_m^2\right];$$

$$W = \frac{Pl}{4}\left[(a+b_1)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \sum_2^\infty b_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right].$$

Es muß also die Ungleichung:

$$(14)\qquad (a+b_1)^2\left[D\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-P\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\varrho g\right]+$$
$$+\sum_2^\infty b_m^2\left[D\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4-P\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\varrho g\right]>a^2\left[D\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-P\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\varrho g\right]$$

für ganz beliebige Werte von b_m bestehen. Somit muß vor allem der erste und der dritte Klammerausdruck verschwinden, was die mit (9) für $k=1$ identische Beziehung

$$(15)\qquad P=D\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\varrho g\left(\frac{l}{\pi}\right)^2$$

liefert, und es bleibt die Bedingung:

$$P<D\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\varrho g\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2$$

für alle ganzen Zahlen m, von 2 angefangen, zu erfüllen.

Daraus folgt, wie leicht ersichtlich:

$$(16)\qquad \left(\frac{l}{\pi}\right)^4<\frac{4D}{\varrho g}.$$

Die Form mit einer halben Faltenlänge kann also nur dann stabil sein, wenn die Länge der Platte kleiner ist als $\pi\sqrt[4]{\frac{4D}{\varrho g}}$; und zwar ist der dazu gehörige Wert von P durch (15) bestimmt.

Gehen wir nun zur Untersuchung der Form mit k halben Falten über:

$$y=a\sin\frac{k\pi x}{l},$$

so werden wir auf die zu (14) analoge Ungleichung:

$$(17)\qquad (a+b_k)^2\left[D\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4-P\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2+\varrho g\right]+$$
$$+\sum b_m^2\left[D\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4-P\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\varrho g\right]>a^2\left[D\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4-P\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2+\varrho g\right]$$

geführt, in welcher die Summe alle ganzzahligen Werte von m

mit Ausnahme von $m=k$ umfaßt. Da nun die Relation (9) besteht, so ergibt sich für alle jene m die Bedingung:

$$\left[Dm^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-\frac{\varrho g}{k^2}\right](m^2-k^2)>0.$$

Also müssen für die Fälle $m\gtrless k$ die entsprechenden Relationen:

$$m^2k^2\gtrless\frac{\varrho g}{D}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4$$

bestehen; mithin muß für jene Werte von m, welche $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ sind als k, der Ausdruck $\frac{\varrho g l^4}{D\pi^4}$, welchen wir zur Abkürzung mit M^4 bezeichnen wollen, $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}\right\}$ sein als $(mk)^2$; M^2 ist somit eingeschlossen zwischen den Grenzen:

$$[k(k+1)]>M^2>[k(k-1)],$$

woraus folgt, daß k jene ganze Zahl ist, welche innerhalb der Grenzen:

$$(18)\qquad -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+M^2}<k<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+M^2}$$

liegt; diese Bestimmung umfaßt auch die oben abgeleitete Bedingung (16) als Spezialfall. Für genügend lange Platten wird somit näherungsweise: $k=M=\frac{l}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\varrho g}{D}}$; die auf eine Falte entfallende Länge, die wir mit λ bezeichnen wollen, wird:

$$(19)\qquad \lambda=\frac{2l}{k}=2\pi\sqrt[4]{\frac{D}{\varrho g}}=2\pi\sqrt[4]{\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)\varrho g}}$$

und der „Faltungsdruck“ P wird nach (9) dem Grenzwert:

$$(20)\qquad P=2\sqrt{D\varrho g}$$

gleich. Hätten wir diesen Wert von vornherein in die Gleichung (3) eingesetzt, so wären wir sofort zu diesen Formeln gelangt, doch hätten wir die Allgemeinheit dieses Resultats nicht erkannt.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, was geschieht, wenn der Horizontaldruck P jenen Grenzwert übersteigt. Dies erklärt sich

am einfachsten nach Analogie mit dem Fall der gewöhnlichen Elastica. Wird die Differentialgleichung derselben ohne Vernachlässigung, mit Hilfe elliptischer Funktionen integriert, so zeigt sich folgendes: wenn P den zum Knicken gehörigen Grenzwert hat, so ist die Amplitude der Ausbiegung klein aber willkürlich, und die Kurve ist mit einer Sinusoide identisch; P kann allerdings über jenen Wert hinaus wachsen, wobei die seitlichen Ausbiegungen wachsen und die Abweichungen von der Sinusoide immer erheblicher werden. Leider stößt die Integration der strengen, eigentlich an Stelle von (2) zu setzenden Gleichung:

$$Py - Fx + \varrho g \int_0^x y(x-\xi)\,d\xi = \frac{-D\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

auf Schwierigkeiten, doch läßt sich die Analyse mittels sukzessiver Näherung leicht um einen Schritt weiter führen, indem man die rechte Seite durch $-D\dfrac{d^2y}{dx^2}\left[1-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]$ ersetzt und in dem Korrektionsglied $\dfrac{3}{2}D\dfrac{d^2y}{dx^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ den ersten Näherungswert $y = a\sin\beta x$ einführt. So wird die genauere Differentialgleichung:

$$(21)\qquad D\left(\frac{d^4y}{dx^4} - \tfrac{3}{8}a^3\beta^6[\sin\beta x + 9\sin 3\beta x]\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho g y = 0$$

deren Integral ist:

$$(22)\qquad y = a\sin\beta x + \frac{3a^3\beta^6 D}{16(2\beta^2 D - P)}x\cos\beta x + \frac{27}{8}\,\frac{a^3\beta^6 D}{81\beta^4 D - 9\beta^2 P + \varrho g}\sin 3\beta x.$$

Nun wird die Niveauebene nicht in der Entfernung $x = l$, sondern im Punkt: $\beta x = \pi + \delta$ geschnitten (wenn wir uns hier auf den Fall $k = 1$ beschränken). In demselben Punkt wird $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$, und die vom Nullpunkt aus gerechnete Bogenlänge wird gleich dem gegebenen Werte l. Führt man diese Bedingungen ein und vernachlässigt hiebei Glieder von kleinerer Größenordnung als $\dfrac{a^2}{l^2}$ gegenüber der

Einheit, so erhält man eine den Zusammenhang zwischen der Amplitude a und dem Drucke P bestimmende Gleichung. Ist nämlich $P = P_0(1+\varepsilon)$, wo P_0 den nach Formel (15) bestimmten „Faltungsdruck" bedeutet, so wird:

$$(23)\qquad a^2 = 4\varepsilon\frac{l^2}{\pi^2}\left[3 + 5\sqrt{1 - \frac{4\varrho g D}{P_0^2}}\right]^{-1}.$$

Für den Fall, daß die Länge der Platte l sich dem Werte $l = \pi\sqrt[4]{\dfrac{D}{\varrho g}}$ nähert, wird diese Formel unbrauchbar, und dann gilt:

$$(24)\qquad a^2 = \frac{8\varepsilon l^2}{3\pi^2}.$$

In jedem Falle zeigt sich somit das für das „Knicken" charakteristische, rasche Anwachsen von a mit Zunahme von ε im Punkte $\varepsilon = 0$.

Der Vorgang der Faltung erscheint hiemit genügend klargestellt. Die an beiden Kanten für $x = 0$ und $x = l$ im Niveau aufgelagerte Platte bleibt eben, solange der Horizontaldruck P kleiner ist als $2\sqrt{D\varrho g}$, da dann eine Lösung nach Fall I unmöglich ist. Zur Faltung ist erforderlich, daß P jenen Grenzwert überschreitet, und zwar um einen Wert, welcher von der Länge der Platte abhängt; ist dieselbe sehr groß, so ist $P = 2\sqrt{D\varrho g}$. Übersteigt der Druck jenen Wert, so wachsen die Amplituden der Falten, angenähert nach der Formel (23). Die Anzahl der Falten $\dfrac{k}{2}$, welche eine Platte bildet, ist von dem angewandten Drucke unabhängig, und zwar ist sie durch die Relation (18) bestimmt; für große Platten ist die Faltenlänge durch (19) gegeben.

Somit ist das eingangs berührte Problem der Elastizitätstheorie insoweit gelöst, daß wir tatsächlich einen einfachen Mechanismus gefunden haben, welcher die Bildung stabiler Faltenzüge in einer Platte hervorruft.

Nun bleibt in Verfolgung des ursprünglichen Gedankenganges noch zu untersuchen, ob die in der Erdrinde beobachteten Faltungen tatsächlich durch diesen Mechanismus erklärt werden können [1]).

[1]) In der Technik pflegt man der elastischen Nachgiebigkeit der äußeren Erdschichten (z. B. bei Bettungen, Eisenbahnschwellen u. s. w.) durch die An-

Vor allem handelt es sich darum, ob die Voraussetzung jener Rechnung zutrifft, d. i. ob die Erdrinde als eine schwimmende Platte angesehen werden kann. Ohne auf eine spezielle Untersuchung der Frage nach der Konstitution des Erdinnern einzugehen, möchte ich nur einige zugunsten jener Ansicht sprechende Gründe anführen. Bekanntlich sieht man heute die Erde auf Grund der Erdbeben-, Flut- und verwandter Phänomene als einen elastisch-festen Körper an, und meist wird eine solche Annahme den geophysikalischen Berechnungen zugrunde gelegt. Doch wird jene Anschauung von einigen Geophysikern, z. B. Wiechert, Láska [1]) u. a., dahin modifiziert, daß unter der festen, zirka 30—40 km dicken Erdkruste eine flüssige Magmaschicht von relativ geringer Mächtigkeit liege, welche jene Kruste von dem festen Erdinnern trennt, und dadurch wird die Länge der in der Hauptphase der Erdbeben meist auftretenden Periode von 18—20 Sek. erklärt.

Allerdings scheint mir, daß diese Theorie noch auf ziemlich schwachen Grundlagen ruht, und daß jene Erdbebenphänomene sich auch in anderer Weise erklären lassen, doch kann man zu einem für unseren Fall praktisch äquivalenten Resultat auch dann gelangen, wenn man die Existenz einer flüssigen Schichte verwirft und nur den Erscheinungen der Gesteinsplastizität Rechnung trägt.

Neuere experimentelle Untersuchungen [2]) haben das enorme Anwachsen der Plastizität fester Körper mit steigender Temperatur erwiesen, so daß z. B. Glas, welches bei gewöhnlicher Temperatur als Typus eines spröden Körpers gilt, über 300° erhitzt, bereits bequem im Laufe von einigen Stunden zu verfolgende Relaxations-

nahme Rechnung zu tragen, daß die Einsenkung proportional dem wirkenden Drucke ist. (Vergl. Föppl, Technische Mechanik, III. Bd., VI. Abschn.). Daher ließen sich unsere Formeln z. B. auf den Fall einer in der Erde vergrabenen Platte anwenden, wobei jedoch der Koeffizient ϱg durch eine empirische, den betreffenden Bodenverhältnissen angepaßte Zahl zu ersetzen wäre. Allerdings dürfte diese Zahl so groß sein, daß eine Faltenbildung nur bei recht dünnen Platten zu erwarten wäre.

[1]) Siehe z. B. Wiechert, Götting. Nachr., 1907, S. 415; Physik. Zeitschr. 9, 36. 1908; Láska, Natur u. Offenbarung 54 (1908). Vereinzelt steht O. Fisher (Physics of the Earth's Crust), der die Erde für eine flüssige, mit einer dünnen festen Kruste bedeckte Masse hält.

[2]) Reiger, Ann. d. Phys. 19, 985. 1906; Tammann, Ann. d. Phys. 7, 198 1902; 10, 647. 1903; Glaser, Ann. d. Phys. 22, 694. 1907; Trouton, Phil. Mag. 7, 347. 1904. Proc. Roy. Soc. 77, 426. 1906.

phänomene aufweist. Leider fehlen noch Messungen an Gesteinen, mit Ausnahme vereinzelter Beobachtungen an Marmor (L. Weber, Adams u. Nicolson), doch ist sicher anzunehmen, daß die Plastizität in einer Tiefe von 10—20 km, wo Temperaturen von 300° bis 600° zu erwarten sind, ganz unvergleichlich größer sein muß, als an der Oberfläche. Dabei mag wohl auch der in solchen Tiefen herrschende allseitige Druck eine erhebliche Rolle spielen, obwohl dieser Umstand trotz aller experimentellen Bemühungen noch nicht ganz klargestellt ist, und die Theorie Heim's vom „latent plastischen" Zustand in ihrer ursprünglichen Form sicher verworfen werden muß [vergl. Näheres in: Kosmos (Lemberg) **34** (1909)].

Gegen kurz dauernde Spannungen, z. B. bei Erdbeben, werden sich somit die tieferen Schichten wie elastisch-feste Substanz verhalten, während sie bei Deformationserscheinungen, die während genügend langer Zeiträume andauern, als ein zähflüssiges Medium angesehen werden können. Dadurch erklären sich in einfacher Weise die Erscheinungen des isostatischen Gleichgewichts.

Es scheinen mir aber die Gebirgsfaltungsphänomene selbst auch teilweise einen Beweis für jene Anschauung zu bilden. Sieht man sie nämlich als Wirkungen von horizontalen Druckkräften an — und andere Erklärungen sind wohl höchst unwahrscheinlich — so bleibt noch zu berücksichtigen, daß statt der gefalteten Form auch eine geradlinige, in horizontaler Richtung komprimierte und vertikal verdickte Form auftreten könnte. Wir haben es hier offenbar mit einem elastischen Problem nach Art des Knickens zu tun, bei welchem mehrere Gleichgewichtsformen möglich sind, aber nur eine davon stabil ist. Nun hat aber Bryan [1]) bewiesen, daß elastische Probleme nur dann mehrere Lösungen zulassen, falls es sich um Körper handelt, deren Punkte bei unendlich kleiner Deformation endliche Verschiebungen erfahren können d. i. im Falle schalen- oder stabförmiger Körper. Daher scheinen mir die Faltengebirge darauf hinzuweisen, daß die äußere Erdkruste, wenigstens falls es sich um derlei langsame Deformationsprozesse handelt, nicht als mit dem Innern zusammenhängend, sondern als eine relativ dünne feste Schale anzusehen ist.

Dabei möchte ich noch bemerken, daß eine geschlossene Schale (a. a. O.) ebenfalls nur Deformationen nach Art der in massiven Kör-

[1]) a. a. O.; siehe auch Love, Elasticity, SS. 392, 515, 528.

pern auftretenden zuläßt. Somit könnte in einer geschlossenen Erdkruste auch keine Faltung infolge horizontaler Spannungen auftreten, solange sich keine Brüche einstellen, und die Existenz von Bruchlinien scheint somit ein wesentliches, die Faltungserscheinungen ermöglichendes Moment zu bilden.

Dies möge als apriorische Begründung der Voraussetzung, daß die Erdkruste als eine auf plastisch-flüssigen Massen schwimmende Schale oder Platte angesehen werden kann, genügen. Was nun die Anwendung der gewonnenen Formeln auf diesen Fall anbelangt, sei hier behufs allgemeiner Orientierung folgendes bemerkt.

Der Horizontaldruck P kann pro Flächeneinheit offenbar die Druckfestigkeit des Gesteins nicht übersteigen, da sonst Zermalmung eintreten müßte. Allerdings dürfte er aber jener Grenze in vielen Fällen recht nahe kommen, wie lokale Brucherscheinungen zeigen. Nehmen wir mithin behufs ungefährer Schätzung den Druck $P = hF$ an, wo F die Druckfestigkeit pro cm² bedeutet, so erhalten wir den „Faltungsdruck" aus Formel (20), aus welcher folgt:

$$h = 3(1-\mu^2)\frac{F^2}{E\varrho g}.$$

Für Sandstein kann man $E = 800$, $F = 8\,\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ annehmen, und diese Zahlen sind im C. G. S. System mit $10^5\,g$ zu multiplizieren; vernachlässigen wir μ^2 und nehmen als mittlere Dichte ϱ der Erdkruste 2·8 an, so erhalten wir als Dicke einer Sandsteinplatte, welche sich durch jenen Druck falten ließe, bloß 80 Meter, und die Faltenlänge würde sich aus (19) zu 2100 Meter ergeben. Auf den ersten Blick scheint dies zu zeigen, daß die Entstehung großer Faltengebirge mit den hier behandelten Erscheinungen nichts zu tun haben könne.

Doch müssen unsere früheren Betrachtungen noch in einem Punkte ergänzt werden, welcher hier von Bedeutung sein kann. Die Anwendung der Bernoulli-Kirchhoff'schen Biegungsformel setzt nämlich voraus, daß die Platte sich als kontinuierliches Ganzes verbiege, nach Fig. 3 (a), während in Wirklichkeit in den Grenzflächen zwischen verschiedenen Gesteinsschichten sich regelmäßig eine Neigung zur Bildung von Spaltungsflächen und Gleitungserscheinungen nach Fig. 3 (b) kundgibt, welche auch mechanisch leicht begreiflich ist, wenn man die Verteilung der Scherungskräfte X_y (in der Figur durch Pfeile bezeichnet) berücksichtigt

(siehe z. B. Love, Elasticity, Chapter XXII). Insbesondere tritt dies bei Einlagerung weicher Schichten zwischen härtere deutlich hervor.

Haben wir es aber mit n voneinander unabhängigen, übereinandergelagerten Schichten von der Dicke h zu tun, welche unter Einwirkung der n Druckkräfte P dieselbe Krümmung erhalten, so wird die potentielle Energie des Systems U, und ebenso die Arbeit der Kräfte P, n-mal so groß sein als bei *einer* Schichte von der-

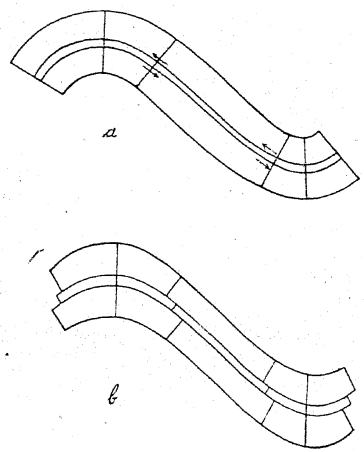

Fig. 3.

selben Krümmung, während die Energie der isostatischen Kräfte V unverändert bleibt. Daher wird sich offenbar eine jede von jenen Schichten so verhalten, als ob nur der n-te Teil der Schwerkraft wirksam wäre, und somit ist in diesem Falle in allen jenen Formeln ϱg durch $\frac{\varrho g}{n}$ zu ersetzen.

Sind allgemein n Schichten von verschiedenen Dicken h und verschiedenen Elastizitätsmoduln E so übereinander gelagert, daß in jeder derselben die Mittellinie bei Biegung ihre Länge nicht ändert, während die benachbarten Grenzflächen übereinander glei-

ten, so ist die Größe D in Formeln (20) und (19) zu ersetzen durch $\frac{1}{12}\sum\frac{Eh^3}{1-\mu^2}$, da das resultierende Drehungsmoment aus der Summe der einzelnen Glieder besteht.

Nehmen wir an, daß die Druckfestigkeit F überall dieselbe ist, so können wir wie vorhin behufs Schätzung $P = F\Sigma h$ setzen und erhalten aus jenen Formeln:

$$\frac{1}{12}\sum\frac{Eh^3}{1-\mu^2} = \frac{F^2(\Sigma h)^2}{4\varrho g} = \varrho g\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^4.$$

Somit:

$$\lambda = \pi\sqrt{\frac{2F\Sigma h}{\varrho g}}. \tag{25}$$

Für Sandstein von einer Gesamtdicke Σh von 10 km würden wir somit eine Faltenlänge $\lambda = 23$ km erhalten und unter Annahme gleich dicker Schichten würde für die Dicke einer jeden von ihnen $h = 930$ Meter folgen. Somit erhalten wir in diesem Falle Werte, welche durchaus nicht unplausibel erscheinen.

Selbstverständlich muß die Sache in Wirklichkeit viel komplizierter sein, da die Gesteine der Erdrinde eigentlich anisotrope, durch mehr als 2 Elastizitätskonstanten charakterisierte Substanzen sind, da ferner die Bruchfestigkeit und ebenso auch die Verteilung des Horizontaldruckes P ungleichförmig sein kann, da überdies an den Gleitflächen Reibungskräfte auftreten, doch dürften diese Einzelheiten keine wesentlichen Änderungen des Gesamtbildes erfordern.

Es bleibt noch ein Einwand zu besprechen, welchen man gegen die geophysikalische Anwendung unseres Beispieles erheben könnte. Die ganze Überlegung betrifft nämlich nur elastische Deformationen, welche somit bei Verschwinden der wirksamen Druckkräfte wieder von selbst rückgängig werden müßten, während die Faltungen der Erdoberfläche wohl permanenterer Natur zu sein scheinen.

Dieser Einwand wäre ganz berechtigt, wenn wir die Amplituden aus den wirkenden Drucken, z. B. nach Formel (24), berechnen würden, doch ist er bei Erklärung des Faltungsmechanismus und Berechnung der Faltenlänge wohl unwesentlich. Denken wir uns die Wirkung eines kontinuierlichen Druckes P in sukzessive Stadien zerlegt. Bei Beginn der Faltung werden die Ausbiegungen klein und von rein elastischer Natur sein, infolge der Plastizität wird

sich die Platte denselben im Laufe der Zeit anpassen, und der von derselben ausgeübte horizontale Reaktionsdruck würde allmählich verschwinden; gelangt dann der Druck P aufs neue zur Wirksamkeit, so wird er eine schon natürlich gekrümmte Platte vorfinden und wird die vorhandenen Faltungen erheblich vergrößern, ohne jedoch die Wellenlänge derselben erheblich zu ändern, und in dieser Art wird eine immer wachsende permanente Deformation entstehen. Allerdings, falls wir das isostatische Gleichgewicht nicht auf die Existenz einer flüssigen Unterlage, sondern auf die mit der Tiefe zunehmende Gesteinsplastizität zurückführen, müssen wir die Dicke der als fest anzusehenden Schichte und damit aller anderen hievon abhängigen Größen als von der Deformationsgeschwindigkeit d. i. von der Raschheit, mit welcher sich die Gebirgsbildung vollzieht, abhängig ansehen.

Wenn auch eine strenge mathematische Behandlung solcher Vorgänge derzeit wegen unserer Unkenntnis der Gesetze der Plastizität nicht durchführbar ist, so scheint mir doch die im obigen skizzierte Theorie der Gebirgsfaltung soviel Berührungspunkte mit der Wirklichkeit zu besitzen, daß eine eingehendere Untersuchung und Vergleichung derselben mit Erfahrungsdaten wohl der Mühe wert sein dürfte. Insbesondere möchte ich noch einmal darauf hinweisen, daß sich von unserem Standpunkt aus die Tatsache, daß es unmittelbar neben Faltungsregionen weite Gebiete der Erde gibt, welche nie gefaltet wurden, ohne weiteres erklären läßt. Man braucht nur anzunehmen, daß der Horizontaldruck P daselbst unter dem Grenzwert (20) bleibt, respektive daß die Schichten daselbst ein so kompaktes Ganzes bilden, daß es nicht zur Ausbildung der Gleitflächen kommen kann.

Falls nämlich keine solchen Gleitflächen bestehen, ist bei größeren Schichtdicken die Faltenbildung dem oben Gesagten zufolge nicht möglich.

Daran knüpft sich die Frage, unter welchen Umständen derartige Gleitflächen entstehen. Diesbezüglich bemerken wir, daß auch eine kompakte, dicke Platte, bei Biegungen nach Art der in Fig. 3 dargestellten, durch Horizontalbrüche in eine Reihe dünnerer Platten zerspalten werden kann, falls die Scheerungsfestigkeit (gegenüber den Spannungen X_y) klein ist im Vergleich mit der Druck- und Zugfestigkeit (für Spannungen X_x), was wohl als eine für

geschichtete und geschieferte Gesteine charakteristische Eigenschaft angesehen werden kann.

Somit kann es vorkommen, daß in einer solchen aus Schichtgestein zusammengesetzten Platte, welche bei bloßem Horizontaldruck gemäß Fall I ungefaltet bliebe, die Bildung von Spaltungs- und Gleitflächen, z. B. infolge Vertikalverschiebung eines Punktes eingeleitet wird und sich dann von demselben aus weiter verbreitet, indem sie gleichzeitig eine sukzessiv fortschreitende Faltung (nach Fall II) hervorruft. In den längs dieser Gleitflächen erfolgenden Spaltungen und damit zusammenhängenden Überschreitungen der Stabilitätsgrenze mag man übrigens wohl auch eine der Entstehungsursachen von tektonischen Erdbeben vermuten.

Auf diese kurzen Bemerkungen wollen wir uns hier beschränken, da die quantitative Untersuchung solcher Vorgänge die Berechnung der Schubspannungen X_y erfordert, wozu die oben zugrunde gelegte einfache Näherungstheorie dünner Platten nicht mehr hinreicht.

III. SOME REMARKS ON THE MECHANICS OF OVERTHRUSTS.

Geological Magazine, Decade V, Vol. VI, N° 539. May 1909, pp. 204—205.

Mr. T. Mellard Reade evidently wished to elicit, by his note on the mechanics of overthrusts in the Geological Magazine, 1908, p. 518, a discussion on these phenomena, as he also tells us in the February Number, 1909, p. 75. May I be allowed, therefore, to contribute some remarks on his paper?

It is easy enough to calculate the force required to put a block of stone in sliding motion on a plane bed, even if its length and breadth be 100 miles, and I do not think Mr. Mellard Reade meant to use the word „incalculable“ in a literal sense. However great this force may be, it certainly will be easy to mention instances of still greater terrestrial or cosmic forces. Still, I think Mr. Mellard Reade might dispute the analogy with the piling up of the Rev. O. Fisher's broken ice-sheets, and he could defend his statement „that no force applied in any of the mechanical ways known to us in Nature would move such a mass“ [1]).

Let us indicate the length, breadth, and height of the block by a, b, c, its weight per unit volume by w, the coefficient of sliding friction by e; then, according to well-known physical laws, a force $abcwe$ will be necessary to overcome the friction and to put the block into motion. Now, the pressure exerted by this force would be distributed over the cross-section ac; hence the pressure on unit area will be equal to the weight of a column of a height be. Putting $e = 0{\cdot}15$ (friction of iron on iron), $b = 100$ miles, we get a height of 15 miles, while the breaking stress of granite corresponds to a height of only about 2 miles. Thus we may press

[1]) T. Mellard Reade, Geol. Mag., November, 1908, p. 518.