

XVIII. ÜBER DIE WECHSELWIRKUNG VON KUGELN, DIE SICH IN EINER ZÄHEN FLÜSSIGKEIT BEWEGEN.

Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, série A, 1911. pp. 28—39.

Die nachfolgende Untersuchung bezweckt die Beantwortung der Frage, inwieweit die Bewegung einer in einem zähen Medium befindlichen Kugel durch die Anwesenheit (oder Bewegung) einer oder mehrerer anderer Kugeln modifiziert wird. Die Resultate, welche sich diesbezüglich ergeben haben, sind, abgesehen von ihrem rein theoretischen Interesse für die Hydrodynamik, auch durch ihre Anwendung auf die Bewegung von Nebelteilchen von Wichtigkeit, indem sie die Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes erheblich einschränken und mögen vielleicht unter anderem auch zur Aufklärung der Divergenzen beitragen, welche bei den darauf gestützten, von verschiedenen Beobachtern vorgenommenen Bestimmungen der Elektronenladung auftreten.

I. Strömung bei Gegenwart zweier Kugeln.

Um die Wechselwirkung zweier Kugeln zu studieren, kann man eine Annäherungsmethode anwenden, welche auf sukzessiver Superponierung partikulärer Lösungen beruht, analog den Spiegelungsmethoden, welche zur Lösung verschiedener Probleme der mathematischen Physik, wie elektrostatische Wechselwirkung zweier Kugeln (Murphy), Bewegung zweier Kugeln in einer idealen Flüssigkeit (Lamb, Hydrodynamics 3⁴ Ed., p. 122, 1906), Modifizierung eines Bewegungszustandes einer zähen Flüssigkeit durch eine

unendliche Wand (H. A. Lorentz und eine Arbeit von J. Stock¹⁾), verwendet werden.

Nehmen wir an, daß sich in einer zähen Flüssigkeit, welche im Unendlichen ruht, eine ruhende Kugel (vom Radius b) und in der Entfernung R eine mit der Geschwindigkeit

$$u = -1$$

längs der X' Achse fortschreitende Kugel (vom Radius a) befinden. Dann gehen wir von den bekannten Stokes'schen Gleichungen für den stationären Strömungszustand in der Nähe einer bewegten Kugel aus, deren Mittelpunkt sich gerade momentan im Koordinaten-Anfangspunkt befinden möge²⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} u = -\frac{3}{2}\frac{a}{r} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{ax'^2}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ v = -\frac{3}{2}\frac{ax'y'}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Für die Oberfläche der um den Punkt x, y, z mit dem Radius b gelegten Kugel würden dann hieraus gewisse Strömungsgeschwindigkeiten resultieren, welche durch Entwicklung von (1) nach Potenzen der Größen

$$\xi = x' - x, \quad \eta = y' - y, \quad \zeta = z' - z$$

in der angenäherten Form erhalten werden:

$$(2) \quad \begin{cases} u_1 = -\frac{3}{2}\frac{a}{R} - \frac{3}{2}\frac{ax^2}{R^3} + \frac{3}{2}\frac{ax\xi}{R^3}\left(-1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) + \\ \quad + \frac{3}{2}\frac{ay\eta}{R^3}\left(1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) + \frac{3}{2}\frac{az\zeta}{R^3}\left(1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) \\ v_1 = -\frac{3}{2}\frac{axy}{R^3} + \frac{3}{2}\frac{ay\xi}{R^3}\left(-1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) + \\ \quad + \frac{3}{2}\frac{ax\eta}{R^3}\left(-1 + \frac{3y^2}{R^2}\right) + \frac{3}{2}\frac{axyz\zeta}{R^5} \end{cases}$$

¹⁾ [Jan Stock, Über die Bewegung einer Kugel in einem zähen Medium längs einer ebenen Wand, Bulletin Int. de l'Académie d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., A, 1911, pp. 18—27. Ed.]

²⁾ Dies setzt allerdings das Bestehen eines quasi-stationären Zustandes voraus, was eine im Vergleich zur Dichte große Zähigkeit erfordert. Doch werden wir die Schlußfolgerungen nur auf wirklich stationäre Bewegungen anwenden.

$$(2) \quad \begin{cases} w_1 = -\frac{3}{4} \frac{axz}{R^3} + \frac{3}{4} \frac{az\xi}{R^3} \left(-1 + \frac{3x^2}{R^2}\right) + \\ \quad + \frac{3}{4} \frac{axyz\eta}{R^5} + \frac{3}{4} \frac{ax\xi}{R^3} \left(-1 + \frac{3z^2}{R^2}\right) \\ p_1 = p_0 - \frac{3}{2} \frac{\mu ax}{R^3} \left[1 - \frac{3(x\xi + y\eta + z\xi)}{R^2}\right] - \frac{3}{2} \frac{\mu a\xi}{R^3} \end{cases}$$

Dabei sind die Radien als klein im Verhältnis zur Entfernung der Kugeln (mit R bezeichnet) vorausgesetzt, daher sind hier, wie auch in den folgenden Rechnungen, nur noch Ausdrücke von der Ordnung

$$(a/R)^2, ab/R^2, (b/R)^2$$

im Verhältnis zur Einheit berücksichtigt worden.

Soll aber die Kugel b ein ruhender starrer Körper sein, so müssen die Geschwindigkeiten an deren Oberfläche Null sein, und dies erreichen wir durch Superposition eines solchen Strömungszustandes u_2, v_2, w_2 , welcher (1) den hydrodynamischen Zähigkeitsgleichungen entspricht (2) im Unendlichen die Geschwindigkeit Null, (3) an der Kugeloberfläche die Geschwindigkeiten

$$-u_1, -v_1, -w_1$$

besitzt.

Diesen Strömungszustand u_2, v_2, w_2 (welchen wir „den an der Kugel b reflektierten Bewegungszustand“ nennen wollen) finden wir aus der von Lamb (Hydrodynamics 3^d Ed., p. 550) angegebenen allgemeinen Lösung der hydrodynamischen Gleichungen für zähe Flüssigkeiten:

$$(3) \quad u = \frac{1}{\mu} \sum \left[\frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_n}{r^{2n+1}} \right) \right] + \\ + \sum \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right] \text{ u. s. w.,}$$

wenn wir die darin enthaltenen Kugelfunktionen p_n, φ_n, χ_n aus obigen Bedingungen (2) und (3) bestimmen.

So erhalten wir durch Einsetzen der Kugelfunktionen $\varphi_{-2}, \varphi_{-3}, p_{-2}, p_{-3}, \chi_{-2}$ in (3) und Vergleichung mit (2) nach ziemlich umständlicher Rechnung:

$$(4) \quad \begin{aligned} u_2 = & \frac{3ab}{16Rr} \left(3 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{ab^3}{4R^3r^3} \left(1 + \frac{3b^2x^2}{R^2r^2} \right) (x\xi + y\eta + z\xi) + \\ & + \frac{ab^3x\xi}{8R^3r^3} \left[7 - \frac{3b^2}{r^2} - 15 \frac{x^2\xi^2}{R^2r^2} + \frac{y^2\eta^2}{R^2r^2} + z^2\xi^2 \right] \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{ab^3\xi^2}{16R^3r^3} \left(1 + \frac{b^2}{R^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \\ & + \frac{abx\xi}{16R^3r^3} (\eta y + z\xi) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{45ab^3x\xi}{4R^3r^3} (xy\xi\eta + xz\xi\xi + yz\eta\xi) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ v_2 = & \frac{abxy}{8R^3r} \left(3 + \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{ab^3y\xi}{8R^3r^3} \left(1 - \frac{3b^2x^2}{R^2r^2} \right) - \frac{ab^3xyz\xi}{4R^3r^5} - \\ & - \frac{15ab^3x\eta}{8R^3r^3} \left[2 - \frac{3(x^2 + y^2)}{R^2} \right] + \frac{ab^3x\eta}{8R^3r^3} \left[4 - \frac{5x^2 + 7y^2}{R^2} \right] + \frac{ab^3\xi\eta}{16R^3r^3} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \\ & + \frac{abx\eta}{16R^3r^3} (y\eta + z\xi) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{45ab^3x\xi\eta}{8R^3r^3} \left(1 - \frac{2x^2 + y^2}{R^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \\ & + \frac{45ab^3x\eta^2}{8R^3r^5} \left(1 - \frac{x^2 + 2y^2}{R^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{45ab^3x\eta}{4R^3r^5} (xy\xi\eta + yz\eta\xi + xz\xi\xi) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \end{aligned}$$

worin ξ, η, ζ, r die Koordinaten und die Entfernung des gegebenen Punktes in bezug auf den Mittelpunkt der Kugel b bedeuten. Ein analoger Ausdruck folgt für w_2 durch Vertauschung von y, η mit z, ζ .

Nun erfüllt der Strömungszustand $u + u_2, v + v_2, w + w_2$ zwar die Bedingung des Haftens an der Kugel b , aber dafür bleiben jetzt in der Oberfläche von a gewisse Geschwindigkeiten von u_2, v_2, w_2 übrig (allerdings von kleinerer Größenordnung) welche wir durch Reihenentwicklung von (4) in der Näherungsform erhalten:

$$(5) \quad \begin{cases} u_2 = \frac{9}{16} \frac{ab}{R^2} + \frac{27}{16} \frac{abx^2}{R^4} \\ v_2 = \frac{27}{16} \frac{abxy}{R^4} \\ w_2 = \frac{27}{16} \frac{abxz}{R^4} \end{cases}$$

Diese müssen somit abermals durch Superposition eines Bewegungszustandes u_4, v_4, w_4 neutralisiert werden, welcher im Unendlichen verschwindet und an der Oberfläche $r=a$ die Werte (5) mit negativem Vorzeichen besitzt; man könnte ihn „den an b und a reflektierten Strömungszustand“ nennen.

Dies verursacht nun keinerlei Schwierigkeiten, da ja die Größen (5) Konstanten sind, also unmittelbar die Anwendung der Stokes'schen Gleichungen gestatten. Die u_4, v_4, w_4 werden sich somit aus je drei analog (1) gebauten und mit den Konstanten u_3, v_3, w_3 multiplizierten Gliedern zusammensetzen:

$$(6) \quad u_4 = -\frac{au_3}{4r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{3}{4} \frac{ax'}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) (u_3x' + v_3y' + w_3z')$$

deren explizite Ausrechnung jedoch für das Weitere nicht nötig ist.

Die Summe $u + u_2 + u_4$ etc. stellt somit den resultierenden Bewegungszustand in der Nähe von a vor, während in Entfernungen von der Größenordnung R bereits die Glieder $u + u_2$ genügen, da u_4 daselbst nur mehr die Größenordnung a^2/R^3 besitzt, welche wir vernachlässigen. Wollte man in der Entwicklung (2) auch noch höhere Glieder berücksichtigen, so müßte man

natürlich eine entsprechend größere Anzahl von „vielfachen Reflexionen“ in Rechnung ziehen.

II. Druckkräfte zwischen zwei Kugeln.

Nun handelt es sich um die Bestimmung der resultierenden Druckkräfte und Momente, welche die Kugeln a und b seitens der Flüssigkeit erfahren. Hierzu berechnen wir einzeln die Bestandteile, welche von den übereinander superponierten Bewegungszuständen stammen, und das ergibt bei Benützung der bekannten Formel (Lamb, Hydrodynamics 3^d Ed., p. 552, 1906):

$$(7) \quad p_{rs} = -\frac{x}{r} p + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial x} (ux + vy + wz),$$

daß die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 auf die Kugel b nur Druckkräfte von der Ordnung ab^2/R^2 ausüben, welche im Verhältnis zu den übrigen Größen zu vernachlässigen sind.

Auf die ruhende Kugel b wirken somit nur die aus dem Bewegungszustand u_2, v_2, w_2 abgeleiteten Kräfte, welche am einfachsten mittels der durch Substitution von (3) in (7) leicht abzuleitenden Formel

$$(8) \quad p_{rs} = \sum \frac{n(2n^2 + 5n + 2)}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial p_n}{\partial x} - \frac{2n^2 + 4n + 3}{(n+1)(n+3)} \frac{x}{r} p_n + \frac{2(n-1)}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (n-1) \mu \left(\frac{z}{r} \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - \frac{y}{r} \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right)$$

berechnet werden, nämlich:

$$(9) \quad \begin{cases} X = -\frac{9}{2} \frac{ab\pi\mu}{R} \left[1 + \frac{x^2}{r^2} \right] \\ Y = -\frac{9}{2} \frac{ab\pi\mu xy}{R^3} \\ Z = -\frac{9}{2} \frac{ab\pi\mu xz}{R^3} \end{cases}$$

Dieselben Ausdrücke würden sich auch aus der Stokes'schen Widerstandsformel ergeben, wenn man für den Ort der Kugel b ein gleichförmiges Strömungsfeld (mit der aus (1) für den Mittelpunkt der Kugel b folgenden Geschwindigkeit) annähme.

Die infolge der Anwesenheit der ruhenden Kugel b auf a rückwirkenden Reaktionskräfte folgen dagegen einfach aus dem Stokes'schen Widerstandsgesetz in Verbindung mit (5); somit erfährt die sich bewegende Kugel a die Kräfte:

$$(10) \quad \begin{cases} X = 6a\pi\mu \left[1 + \frac{9}{16} \frac{ab}{R^2} \left(1 + \frac{3x^2}{R^2} \right) \right] \\ Y = \frac{81}{8} \frac{a^2 b \pi \mu x y}{R^4} \\ Z = \frac{81}{8} \frac{a^2 b \pi \mu x z}{R^4} \end{cases}$$

das ist einen vergrößerten Widerstand in der Bewegungsrichtung und außerdem noch transversale Kräfte.

Würde umgekehrt die Kugel a ruhen, dagegen b die Geschwindigkeit $u = -1$ besitzen, so würden auf a Kräfte wirken, die mit (9) identisch sind. Bewegen sich nun beide Kugeln mit derselben Geschwindigkeit $u = -1$, so erhält man die auf a wirkenden Kräfte durch Superposition der von ruhendem b in bezug auf bewegtes a und von bewegtem b in bezug auf ruhendes a ausgeübten Drücke, nämlich:

$$(11) \quad \begin{cases} X = 6\pi a\mu \left[1 - \frac{3}{4} \frac{b}{R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) + \frac{9}{16} \frac{ab}{R^2} \left(1 + \frac{3x^2}{R^2} \right) \right] \\ Y = -\frac{81}{8} \frac{ab\pi\mu xy}{R^4} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a}{R} \right] \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Die auf b wirkenden Kräfte betragen in analoger Weise:

$$(12) \quad \begin{cases} X = 6\pi b\mu \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a}{R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) + \frac{9}{16} \frac{ab}{R^2} \left(1 + \frac{3x^2}{R^2} \right) \right] \\ Y = -\frac{81}{8} \frac{ab\pi\mu xy}{R^4} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{b}{R} \right] \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Hieraus ist folgendes ersichtlich:

1) Bewegen sich zwei Kugeln parallel zueinander mit gleicher Geschwindigkeit c , so ist der Widerstand einer jeden derselben in erster Annäherung um die Größe

$$\frac{81}{8} \frac{ab\pi\mu c}{R}$$

vermindert, also ist die Fallgeschwindigkeit bei gegebener Größe der Kugeln im Vergleich zum Stokes'schen Gesetze vergrößert.

2) Außerdem wirkt längs der Verbindungslinie der Kugeln, und zwar in der Richtung von der rückwärtigen zur voranschreitenden hin, eine Kraft, welche in erster Annäherung durch

$$\frac{81}{8} \frac{ab\pi\mu cx}{R^2}$$

gegeben ist, also für beide Kugeln gleich gerichtet und gleich groß ist.

Interessant ist hierin der auffallende Widerspruch mit dem Satze von Wirkung und Gegenwirkung, der aber insofern selbstverständlich ist, als zwischen den Kugeln keine inneren Kräfte wirken, sondern die Flüssigkeit mitberücksichtigt werden muß.

3) Überdies ergibt die Rechnung auf Grund von (7) und (8), daß die Kugeln von Drehungsmomenten beansprucht werden. Dieselben betragen z. B. für die Kugel b :

$$M = \frac{4ab^2\mu c\pi}{R^3} \left[1 + \frac{3}{8} \frac{x^2}{R^2} \right] \sqrt{y^2 + z^2}$$

und suchen eine Rotation um eine zur X -Achse und zur Verbindungslinie senkrechte Achse in dem Sinne hervorzubringen, als ob sich der Bewegungswiderstand vor allem an der Außenseite des aus den zwei Kugeln bestehenden Systems fühlbar machen würde¹⁾.

III. System von n Kugeln.

Mittels der oben dargelegten Methode kann auch die Bewegung eines Systems von n Kugeln untersucht werden. Bewegen sich z. B. sämtliche Kugeln parallel mit gleicher Geschwindigkeit, so kann man dies auffassen als Superposition von n solchen Bewegungszuständen, in welchen sich je eine der n Kugeln bewegt und alle übrigen in Ruhe sind.

Beschränkt man sich auf Glieder derselben Größenordnung wie vorhin, so ist in jedem dieser Bewegungszustände nicht nur der

¹⁾ Es sei ausdrücklich bemerkt, daß man aus diesen Resultaten nicht auf den Einfluß einer unendlichen ebenen Wand schließen darf (siehe die oben zitierte Arbeit von J. Stock), indem man a und R unendlich macht, da dann die Entwicklung (?) nicht statthaft ist.

direkte, nach (9) zu berechnende Einfluß der bewegten Kugel auf die betrachtete Kugel zu berücksichtigen, sondern auch die einmaligen „Reflexionen“ desselben an den übrigen ruhenden Kugeln.

Der Widerstand der Kugel 1 in der Bewegungsrichtung wird daher gegeben sein durch:

$$(13) \quad X = 6\pi a_1 c \mu \left\{ 1 - \frac{3}{4} \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{R_k} \left(1 + \frac{x_k^2}{R_k^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{9}{16} \sum \sum \frac{a_k a_m}{R_k R_{km}} \left[\left(1 + \frac{x_k^2}{R_k^2} \right) \left(1 + \frac{x_{km}^2}{R_{km}^2} \right) + \frac{x_k y_k x_{km} y_{km}}{R_k R_{km}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x_k z_k x_{km} z_{km}}{R_k R_{km}} \right] \right\}$$

worin die mit dem Index k versehenen Zeichen die Koordinaten der k -ten Kugel in bezug auf die Kugel 1, die mit dem Index km versehenen Zeichen die relativen Koordinaten der m -ten in bezug auf die k -te Kugel bedeuten.

Handelt es sich um eine aus sehr vielen gleichmäßig verteilten Kugeltropfchen gleicher Größe gebildete Nebelwolke, so kann das erste Korrektionsglied der Stokes'schen Formel durch Bildung eines über das Volum der Wolke zu erstreckenden Mittelwertes ersetzt werden:

$$\frac{9}{8} an \frac{\int \int r^2 \sin \varphi (1 + \cos^2 \varphi) d\varphi d\varepsilon}{\int \int r^2 \sin \varphi d\varphi d\varepsilon}$$

welcher offenbar von der Größenordnung an/S ist, wo S eine mit den Lineardimensionen der Wolke vergleichbare Größe bedeutet. Ist dieses Glied klein gegenüber der Einheit, so sind die höheren Glieder der Entwicklung (13), welche abwechselnd ein positives und negatives Zeichen haben werden, zu vernachlässigen, und nur in diesem Falle ist die Stokes'sche Formel angenähert richtig.

Dabei ist zu bemerken, daß diese Korrektion, welche eine Verminderung des Widerstandes (also bei gleicher Schwere eine Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit) bedeutet, nicht nur von der Größe und den mittleren Abständen der Tröpfchen, sondern auch von der Lage derselben innerhalb der Wolke abhängt, und für solche, welche in der Mitte liegen, offenbar mehr ausmacht, als für die an der Außenfläche befindlichen Tröpfchen.

Nennen wir die pro Volumeinheit der Wolke entfallende Anzahl der Tröpfchen ν , so kann man die Bedingung der angenäherten Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes auch so ausdrücken, daß

$$a\nu S^2 < 1$$

sei. Also hängt im Gegensatz zur üblichen Meinung die Gültigkeit jenes Gesetzes offenbar auch von Gestalt und Größe der Nebelwolke ab.

Werden die linearen Dimensionen der Wolke größer als

$$S > \frac{1}{\sqrt{a\nu}},$$

so wird die Reihenentwicklung (13) divergent. Dies würde allerdings von vornherein nur beweisen, daß die oben dargelegte Berechnungsmethode für diesen Fall ihre Anwendbarkeit verliert und daß man über denselben nichts Bestimmtes aussagen kann.

Es kann aber leicht in anderer Weise gezeigt werden, welche Bedeutung jene Bedingung für das ganze Problem besitzt. Denken wir uns nämlich eine kugelförmige Nebelwolke vom Radius S , welche n Nebeltropfchen vom Radius a enthält. Das Stokes'sche Gesetz bestimmt dann die relative Fallgeschwindigkeit eines jeden Tröpfchens in bezug auf die unmittelbar umgebende Gasmasse zu

$$\frac{9}{8} \frac{\sigma g a^2}{\mu},$$

aber ebenso ergibt sich auch für die Nebelkugel als Ganzes eine Geschwindigkeit von

$$\frac{9}{8} \frac{n a^3 \sigma g}{\mu S};$$

somit kann das Stokes'sche Gesetz nicht mehr sogar annähernd richtig sein, wenn

$$\frac{na}{S} > 1$$

ist, was mit der vorhin abgeleiteten Bedingung zusammenfällt. Hieraus wird die physikalische Bedeutung derselben klar. Nur wenn eine genügend kleine Anzahl kleiner Teilchen eine große (aber dünne) Wolke bildet, ist jenes Gesetz gültig, sonst entstehen Strömungen des die Teilchen enthaltenden Mediums, welche die rela-

tive Fallgeschwindigkeit derselben ganz überdecken. Man bemerke noch, daß jene Bedingung eine recht weitgehende Einschränkung bedeutet; so kann offenbar bei einigermaßen undurchsichtigen Nebelwolken von der Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes keine Rede mehr sein. Denn die Verminderung der Durchsichtigkeit bedeutet, daß die gesamte Querschnittsumme $na^2\pi$ von gleicher Größenordnung ist wie der Querschnitt der Wolke S^2 , während obige Bedingung erfordern würde:

$$a^2n < aS.$$

Allerdings beziehen sich alle diese Überlegungen nur auf Wolken, welche im freien Gasraume schweben, nicht auf solche, welche in Gefäßen mit starren Wänden eingeschlossen sind. Durch Kombination der hier dargelegten Methode mit jener von H. A. Lorentz (siehe die obenerwähnte Arbeit von J. Stock) könnte man den Einfluß starrer Wände auf eine Nebelwolke theoretisch verfolgen; doch sieht man auch ohne weitere Rechnung ein, daß derselbe die Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes begünstigen wird¹⁾, da er der Ausbildung von Konvektionsströmungen entgegenwirkt.

Daraus erklärt sich auch, daß z. B. Perrin in seinen Untersuchungen über Emulsionen jenes Gesetz genau bestätigt gefunden hat, da er eben das Fallen der Emulsionsteilchen in Kapillarröhren beobachtete. Er bemerkt ausdrücklich (Ann. Chim. Phys., 18, 1909, p. 46), daß in weiteren Röhren Konvektionsströmungen aufzutreten pflegen, welche die Erscheinungen modifizieren. Solche in geschlossenen Gefäßen auftretende, mitunter ziemlich gewaltsame Wirbelströmungen, welche an gewissen Stellen die Fallbewegung der Teilchen begünstigen, an anderen derselben entgegenwirken, kann man leicht beim Schlämmen von Pulvern beobachten.

Hiebei möchte ich auf eine gelegentlich gemachte Beobachtung hinweisen, daß sich ein aus kleineren und größeren Kugelteilchen bestehendes Pulver (Zinkstaub) mittels Schlämmen in seine Bestandteile nur dann zerlegen läßt, falls die Menge der suspendierten Substanz unter einer gewissen Grenze bleibt. Ist die Menge des

¹⁾ In der Nähe der Wand kommt allerdings auch ein unmittelbarer hemmender Einfluß von der Größenordnung a/d , wo d die Distanz von derselben bedeutet, zur Geltung.

suspendierten Stoffes zu groß, so fällt derselbe als einheitliche Masse heraus, indem die größeren Teilchen die kleineren fast vollständig mitreißen. Es scheint dies mit den hier behandelten Erscheinungen zusammenzuhängen, denn man ersieht schon aus Formel (11) und (12), daß eine kleine Kugel von einer großen viel mehr beeinflusst wird als umgekehrt, und dieser Umstand dürfte bei Überschreitung gewisser Dichtigkeitsgrenzen umso mehr hervortreten.

In großem Maßstabe treten Bewegungen quasi-suspendierter Teilchen auch bei der Elektrolyse auf, doch haben wir es in diesem Fall immer mit zwei gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen vor sich gehenden Wanderungsprozessen zu tun, deren Einfluß sich gerade kompensieren muß, ohne konvektive Strömungen zu veranlassen. Dagegen können solche wohl in den Fällen einseitiger Ionenwanderung in Gasen auftreten, und es ist hier bei Anwendung der Stokes'schen Formel Vorsicht geboten.

Auch drängt sich die Frage auf, ob sich die Abweichungen von jener Formel nicht bei den Bestimmungen der elementaren Ionenladung nach der J. J. Thomson'schen und Wilson'schen Nebelmethode geltend machen. Es ist schwer, sich hierüber ein Urteil zu bilden, denn einerseits ist daselbst die hier abgeleitete Bedingung sicherlich weit überschritten, andererseits spielt sich aber der ganze Vorgang in einem geschlossenen Gefäß, zwischen den Kondensatorplatten ab. Vermutlich werden hier schwer kontrollierbare Nebenumstände (Ungleichförmigkeit der Ionisierung, Verhältnis des vom Nebel eingenommenen Raumes zum ganzen Gasraum) als Fehlerquellen von großer Bedeutung auftreten. Auch ist vorauszusehen, daß selbst bei Ausschluß größerer Konvektionsströmungen Gruppen von zufälligerweise dichter oder dünnerer Konstellation eine größere oder geringere Fallgeschwindigkeit annehmen müssen, daß sich somit die Nebelmasse mit der Zeit in vertikaler Richtung ausbreiten werde und daß deren obere Grenzfläche eine geringere als die mittlere Fallgeschwindigkeit besitzen müsse.

Cunningham¹⁾ hat eine Formel zur Abschätzung des Unterschiedes der Geschwindigkeit einer Wolke und eines einzelnen Teilchens abgeleitet, doch es scheint mir, daß jene Formel über die Anwendbarkeit des Stokes'schen Gesetzes in der Praxis keinen

¹⁾ Cunningham, Proc. Roy. Soc. 83 (A) p. 357 (1910).

Aufschluß gibt. Denn bei der Ableitung derselben wird stillschweigend vorausgesetzt, daß jedes Teilchen nur unter der Einwirkung der unmittelbar benachbarten steht und daß sämtliche Teilchen genau denselben (nur von deren Dimensionen und Abständen, aber weder von deren Lage noch von der Größe und Gestalt der Wolke abhängigen) Bewegungszustand besitzen. Im Falle frei schwebender Wolken haben wir die Unrichtigkeit dieser Annahmen nachgewiesen, und für „eingeschlossene“ Nebel ist eben vor allem die Frage zu entscheiden, inwiefern dieselben erfüllt sind.

Nach alledem scheint mir ein gewisses Mißtrauen gegen die Anwendung der Stokes'schen Formel auf derartige dichte Nebel, auch wenn sie in Gefäßen eingeschlossen sind, sehr geboten und dürften die an einzelnen, getrennten Kügelchen vorgenommenen Fallversuche¹⁾ und die hieraus abgeleiteten Werte der Ionenladung gewiß weitaus vorzuziehen sein.

¹⁾ Zeleny, Phys. Zeitschr. 11, S. 78 (1910); Millikan, Phys. Zeitschr. 11, S. 1097 (1910).

XIX. ON THE PRACTICAL APPLICABILITY OF STOKES' LAW OF RESISTANCE AND ITS MODIFICATIONS REQUIRED IN CERTAIN CASES.

International Congress of Mathematicians, Cambridge: August 1912.

§ 1. Stokes' law for the resistance of a sphere in a viscous liquid rests, as is well known, on the assumptions:

I. Slowness of motion, so that the inertia terms in the hydrodynamical equations may be neglected in comparison with the effects of viscosity.

II. Complete adhesion without slip of the liquid to the sphere, this being considered as a rigid body.

III. Unboundedness of the liquid and immobility at infinity.

In what follows I should like to contribute some remarks on this law with regard to certain cases of practical importance, where the underlying conditions are to some extent changed; such remarks may be of interest to those who are engaged in research work on subjects connected with Stokes' law.

First let us touch briefly the question of slipping, connected with the second of the above assumptions. Stokes' calculation can be generalised by allowing the liquid to slip along the surface of the sphere, with a velocity proportional to the frictional force in a tangential direction [which in the case of a parallel laminar flow implies the surface condition $\beta u = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$]. In this case, as Basset has shown, the simple law of Stokes has to be replaced by

$$(1) \quad F = 6\pi\mu Rc \frac{\beta R + 2\mu}{\beta R + 3\mu}.$$