I. O PEWNEM ZAGADNIENIU Z TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI I O JEGO ZWIĄZKU Z WYTWORZENIEM SIĘ GÓR FAŁDOWYCH.

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Polskiej Akademji Umiejętności w Krakowie, tom XLIX, Serja A. 1909, str. 223—226.

Punkt wyjścia niniejszej pracy stanowi zapytanie, w jaki sposób powstają góry fałdowe i czemu wielkie obszary ziemi pozostały niesfałdowane, co podnoszą często jako poważny zarzut przeciwko kontrakcyjnej teorji tworzenia się gór. Przyjmuje się powszechnie, że wzniesienie gór fałdowych zostało wywołane przez ściśnięcie skorupy ziemskiej w kierunku poziomym, ale mechanizm tego zjawiska nie został dotychczas wytłómaczony. Nasuwa się oczywiście analogja z wygięciem pręta wskutek działania podłużnych sił ściskających; jak Euler wykazał, pręt taki wygina się, przybierając kształt zbliżony do sinusoidy o połowie długości fali, jeżeli siła przekroczy wartość $P = \pi^2 E\Theta/l^2$ (gdzie E moduł Younga, Θ moment bezwładności przekroju, l długość). Analiza matematyczna wskazuje też możliwość form o dwóch, trzech i t. d. wygięciach, odpowiadających sinusoidzie o dwóch, trzech i t. d. połowach fali; spotykamy często tego rodzaju rysunki w różnych podręcznikach (n. p. Saalschütz, Der belastete Stab, Leipzig 1880; Winkelmann, Handb. d. Physik, I, str 576). Tymczasem wszystkie te formy znajdują się w równowadze nietrwałej, jak tego dowiodły nowsze badania Bryana, Kriemlera, Borna, więc w rzeczywistości pręt nie może przybrać postaci o większej liczbie fałd. Jakiemu zatem czynnikowi należy przypisać trwałość owych form, tak często napotykanych w przyrodzie? Pewną wskazówkę daje nam znany fakt, że skorupa ziemska znajduje się mniej więcej w równowadze izostatycznej, jak gdyby spoczywała na ciekłym podkładzie i przybierała postać równowagi pod wpływem ciężkości i parcia hydrostatycznego. Nasuwa się zatem pytanie, czy płyta, pływająca na ciekłym podkładzie, okazuje zjawiska fałdowania, gdy zostaje ściskana przez siły poziome. W celu rozwiązania tego zagadnienia opieramy się na równaniu Kirchhoffa, tworzącem fundament teorji „cienkich płyt"; przyjmujemy niezależność deformacji od spółrzędnej z i obliczamy moment obrotowy działający w przekroju odległym o długość x od początku spółrzędnych przy uwzględnieniu poziomej (t. j. w kierunku X działającej) siły P oraz pionowych (t j. w kierunku Y działających) sił parcia hydrostatycznego $\varrho g y$. Różniczkując owo równanie dwa razy względem x, otrzymujemy:

$$D\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho g y=0,$$

gdzie D jest skróceniem[1]) dla wyrażenia $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$.

Przy rozwiązaniu trzeba rozróżnić dwa przypadki:

I) Jeżeli ciśnienie $P<2\sqrt{D\varrho g}$, płyta nie dozna żadnego wygięcia ani sfałdowania, z wyjątkiem, jeżeli w jednym z końców działał pewien zewnętrzny moment obrotowy, lub jeżeli koniec wskutek działania zewnętrznych sił pionowych będzie wysunięty ponad poziom normalny. W takim razie powstanie zaburzenie fałdowe, ale tylko w najbliższem otoczeniu końca.

II) Jeżeli ciśnienie $P>2\sqrt{D\varrho g}$, może wystąpić sfałdowanie w postaci sinusoidy. Ażeby rozstrzygnąć między różnemi pozornie wówczas możliwemi formami, trzeba zastosować kryterja trwałości równowagi. Te formy mianowicie odpowiadają równowadze trwałej, dla których potencjalna energja całego mechanicznego systematu jest najmniejszością[2]). Z takich rozważań pokazuje się, że liczba k wygięć (pół-fałd) zależna jest tylko od rozmiarów i jakości płyty, mianowicie jest to liczba całkowita określona przez związek:

$$-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+M^2}<k<\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+M^2}$$

gdzie M oznacza stosunek

$$\frac{l}{\pi}\sqrt[4]{\frac{\varrho g}{D}}.$$

[1]) [por. str. 8 nin. tomu; *przyp. wyd.*].
[2]) Bryan, Cambr. Phil. Soc. Proc. **6**, 199, 287 (1889).

Dla stosunkowo długich płyt długość jednej fałdy będzie zatem przybliżenie:

$$\lambda=\frac{2l}{k}=2\pi\sqrt[4]{\frac{D}{\varrho g}}.$$

Ciśnienie P potrzebne do sfałdowania wynosi:

$$P=D\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2+\varrho g\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2,$$

co w razie długich płyt równa się przybliżenie wartości $P=2\sqrt{D\varrho g}$. W razie większego ciśnienia boczne wygięcia wzrastają, tak że kształt fałd nie daje się już wyrazić przez zwykłą sinusoidę.

Rozwiązawszy tym sposobem powyższe zagadnienie, musimy jeszcze zastanowić się nad tem, czy da się ono zastosować do teorji zjawiska, które tworzyło punkt wyjścia niniejszych rozważań, t. j. do sprawy powstania gór fałdowych. Dla usprawiedliwienia założenia, że skorupę ziemską można porównać do płyty pływającej na podkładzie ciekłym, zauważymy najprzód, że Wiechert i inni geofizycy przypuszczają, na podstawie badań seismicznych, iż ziemia składa się ze stałego jądra, oddzielonego cienką warstwą płynną od zewnętrznej skorupy. Ale nawet jeżeli, zgodnie z zapatrywaniem obecnie najbardziej rozpowszechnionem, uznamy ziemię za ciało stałe, okazujące pewne ślady plastyczności, skutek długotrwających sił górotwórczych musiałby być taki sam, jak gdyby wnętrze było ciekłe. Zewnętrzne warstwy są wprawdzie bardzo mało plastyczne, ale plastyczność musi nadzwyczajnie szybko wzrastać z głębokością wskutek podnoszenia się temperatury, a może też dzięki ciśnieniu. Wskutek tego skały zapewne już w głębokościach kilkunastu kilometrów zachowują się wprawdzie względem krótkotrwałych odkształceń jak ciało sprężyste, ale do działania sił dostatecznie długotrwałych będą się przystosowywały jak ciecz lepka.

Zastosowanie wzorów poprzednio otrzymanych daje nam zrazu wyniki napozór niezgodne z rzeczywistością, gdyż dowodzą one, że „pływająca płyta" piaskowca nie może wogóle doznać sfałdowania wskutek sił poziomych, jeżeli grubość jej przekracza 80 metrów, ponieważ P nie może przejść poza wytrzymałość materjału; ale trudność tę możemy wyjaśnić, jeżeli uwzględnimy dążność do pęknięć i przesunięć wzdłuż powierzchni warstwic, występującą w skałach warstwowanych. Jeżeli bowiem zastosujemy rachunek poprzedni do układu n warstw, którym dana jest możność przesuwania się wzdłuż warstwic, otrzymujemy wzory analogiczne, tylko ze spółczynnikiem g w stosunku n zmniejszonym. Tak np. może wystąpić sfałdowanie w układzie jedenastu warstw piaskowcowych, o łącznej grubości 10 km, a długość fałd będzie 23 km; są to wyniki odpowiadające już dość dobrze stosunkom w przyrodzie napotykanym.

Istnienie wielkich obszarów niesfałdowanych łatwo tedy wytłómaczyć, przyjmując, że tam siła P jest mniejsza, lub że warstwy skorupy ziemskiej tak są ze sobą zrośnięte, że przesunięcia styczne wzdłuż warstwic nie mogą tam wystąpić. Zauważyć należy wreszcie, że nawet jednolita płyta skały o strukturze warstwowej (jak łupki, gneisy i t. p.) może rozdzielić się na szereg cieńszych płyt, wskutek równoległych pęknięć poziomych, jeżeli dozna dostatecznie wielkiego przegięcia. Może się zatem zdarzyć, że taka płyta, początkowo tworząc masę zupełnie spojoną, przez ciśnienia poziome nie da się żadnym sposobem sfałdować, natomiast, gdy wskutek jakichbądź sił pionowych zostanie w pewnem miejscu przegięta, wówczas od tego miejsca rozchodzić się będzie coraz dalej postępujące zjawisko poziomego pękania i następnego fałdowania się. W przyrodzie zjawiska te odbywają się niewątpliwie w sposób bardziej zawiły, zwłaszcza wskutek pewnej plastyczności skał, która z czasem przeistacza deformacje sprężyste w odkształcenia trwałe; ale uproszczony, schematyczny obraz może ułatwić nam zrozumienie mechanizmu górotwórczego.

II. ÜBER EIN GEWISSES STABILITÄTSPROBLEM DER ELASTIZITÄTSLEHRE UND DESSEN BEZIEHUNG ZUR ENTSTEHUNG VON FALTENGEBIRGEN.

Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, 1909, II. pp. 3—20.

Obwohl das im folgenden behandelte Problem der Elastizitätslehre auch unabhängig von seiner eventuellen geophysikalischen Nutzanwendung einiges Interesse beanspruchen dürfte, möchte ich es im Zusammenhang mit den Fragen darstellen, welche die Anregung dazu gebildet haben. Es handelt sich darum, auf welche Weise die Faltung eines Gebirgszuges zustande kommt und warum Faltengebirge nur auf gewisse Teile der Erdoberfläche beschränkt sind, während große Gebiete ganz ungefaltet erscheinen, ein Umstand, welcher bekanntlich oft als gewichtiger Einwand gegen die Kontraktionstheorie der Gebirgsbildung geltend gemacht wird.

Ohne hier auf die Fragen nach der Berechtigung der Kontraktionstheorie, nach dem Ursprung der gebirgsbildenden Kräfte, der Existenz von ähnlichen vertikalen Kräften u. s. w. einzugehen, nehmen wir an, daß Faltengebirge ihre Entstehung in erster Linie der Wirkung horizontaler Druckkräfte verdanken, und versuchen, uns den Mechanismus ihres Entstehens näher zu erklären. Offenbar besteht hier eine innige Analogie mit dem schon von Euler behandelten Beispiel des durch longitudinalen Druck beanspruchten Stabes, aber die Sache liegt nicht ganz so einfach, wie man meist anzunehmen scheint.

Wenn ein Stab von der Länge l durch die auf seine Enden wirkende longitudinale Druckkraft P beansprucht wird, behält er bekanntlich die gerade Gestalt solange, bis P den Wert $\frac{E\Theta\pi^2}{l^2}$