

Dieser Temperatursprung kann natürlich je nach Umständen eine beträchtliche Größe erreichen; er betrug z. B. für Wasserstoff im Apparate I bereits bei 1 mm. Druck ein Viertel der ganzen Temperaturdifferenz, das ist za. 7°. Bei den größten Verdünnungen, wenn die Gefäßdimensionen klein sind gegenüber der mittleren Weglänge, wird schließlich die Temperatur des Gases im ganzen Zwischenraume konstant und zwar gleich einem Mittelwerte der beiderseitigen Begrenzungstemperaturen sein.

Die in dieser Arbeit mitgeteilten Versuche wurden im physikalischen Institute der Universität Berlin ausgeführt; es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle dem Leiter desselben, Herrn Prof. Warburg, für die Anregung zu dieser Untersuchung und für die vielfachen Ratschläge, die er mir im Laufe derselben zu Teil werden ließ, meinen besten Dank auszudrücken.

IX. ÜBER DEN TEMPERATURSPRUNG BEI WÄRMELEITUNG IN GASEN.

(Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CVII. Abt. I a, 1898; pp. 304—329).

I.

Die Grundlage, auf welcher die mathematische Theorie der Wärmeleitung beruht, besteht darin, daß die Temperatur innerhalb eines Körpers überall stetig variiert, und daß der Wärmestrom dem Temperaturgefälle proportional ist.

Schon von Poisson¹⁾ war jedoch die Ansicht ausgesprochen worden, daß an der Oberfläche eines Körpers oder überhaupt an der Grenzfläche zweier Körper, zwischen welchen Wärmeaustausch vor sich geht, ein endlicher — obwohl im Allgemeinen sehr kleiner — Temperaturunterschied $\theta_1 - \theta_2$ besteht, und für diesen Fall nahm er den Wärmestrom $\propto \frac{\partial \theta}{\partial n}$ jenem Temperaturunterschiede proportional an.

Der Proportionalitätsfaktor γ in der diese Annahme ausdrückenden Gleichung:

$$(1) \quad \theta_1 - \theta_2 = \gamma \frac{\partial \theta_1}{\partial n},$$

wo n die ins Innere des Körpers 1 gezogene Normale bedeutet, soll fernerhin als Temperatursprung-Koeffizient bezeichnet werden.

Poisson begründet seine Hypothese durch Betrachtungen über die Strahlungsvorgänge (respektive auch Konvektionsströme) an der Oberfläche der Körper; diese pflegt man aber heutzutage von der

¹⁾ Théorie de la Chaleur, insbesondere Chap. V.

Wärmeleitung ganz gesondert zu behandeln; es läge also kein Grund vor, warum bei bloßer Wärmeleitung ein Temperatursprung auftreten sollte, und deshalb wurde auch dessen Existenz von neueren Physikern sehr bezweifelt, umso mehr, als es nicht gelungen war, einen solchen experimentell einwandfrei nachzuweisen und zu messen.

Nun haben aber schon 1875 Kundt und Warburg¹⁾ die Vermutung ausgesprochen, daß eine solche Erscheinung in stark verdünnten Gasen bemerkbar sein dürfte, bei welchen sie das analoge Phänomen des Gleitens der Gase entdeckt hatten.

Daß dies wirklich der Fall ist, habe ich vor Kurzem durch Versuche nachgewiesen, die an einem anderen Orte ausführlich beschrieben sind²⁾.

Dabei wurde auch das Gesetz, welches nach Analogie mit den Erscheinungen der Gleitung bei der inneren Reibung der Gase von vorneherein vermutet worden war, daß nämlich der Temperatursprung-Koeffizient verkehrt proportional ist dem Gasdrucke, bestätigt; es ergab sich bei Anwendung von Glasapparaten:

für Luft

$$\gamma = 0.0000171 \cdot \frac{760}{p},$$

für Wasserstoff

$$\gamma = 0.000129 \cdot \frac{760}{p}$$

oder in mittleren Weglängen der Gasmoleküle ausgedrückt:

$$\gamma = 1.70 \lambda$$

$$\gamma = 6.96 \lambda$$

Diese Erscheinung ist noch frappanter als die des Gleitens der Gase und widerspricht noch mehr den üblichen Vorstellungen; es handelt sich nun darum, eine passende Erklärung zu finden, nachdem eine Zurückführung des Phänomens auf Strahlungsvorgänge etc. nach Poisson ausgeschlossen ist, umso mehr, als bei meinen Versuchen der Einfluß der Strahlung (und der Strömungen) eigens eliminiert wurde.

Es ist nun der Zweck dieser Arbeit nachzuweisen, daß sich

¹⁾ Pogg. Ann. 156, S. 177, 1875.

²⁾ Wied. Ann. 64, S. 101, 1898.

eine Erklärung der beobachteten Tatsachen in einfachster Weise aus der kinetischen Gastheorie ergibt, ähnlich, wie dies von Kundt und Warburg betreffs der Gleitung der Gase gezeigt worden ist, und sie scheinen mir dadurch geradezu einen neuen Beweis für die Richtigkeit jener Theorie zu bilden.

Der Grundgedanke ist folgender:

Die Wärmeleitung der Gase beruht nach Maxwell, Clausius etc. darauf, daß die Moleküle die lebendige Kraft, welche sie an einer Stelle des Gases besitzen, in Folge ihrer Bewegung an andere Stellen übertragen und dort beim Zusammenstoße mit anderen Molekülen, welche vorher eine verschiedene Bewegungsenergie hatten, an dieselben teilweise abgeben, so daß ein fortwährender Ausgleich der lebendigen Kraft (der Temperatur) unter den Molekülen stattfindet.

In der Nähe eines festen Körpers wird nun dieser Wärmeausgleich zwischen dem Körper und den Gasmolekülen in doppelter Weise behindert:

1. dadurch, daß die Beweglichkeit der letzteren durch die Nähe der Wand beeinträchtigt ist, indem sie daselbst kürzere Wege zurücklegen werden, da ihnen das Eindringen in den festen Körper verwehrt ist;

2. dadurch, daß sie beim Zusammenstoß mit den Teilchen des festen Körpers, insbesondere falls dieselben eine erheblich verschiedene Masse haben, im Allgemeinen doch nicht vollständig die Temperatur desselben annehmen werden, wie ich weiter unten noch ausführlicher nachweisen werde.

Um sich den Einfluß dieser Vorgänge, welche sich bis zu einem gewissen Grade gesondert untersuchen lassen, zu veranschaulichen, denken wir uns (Fig. 1) in eine Gassäule mit linearem Temperaturgefälle BA plötzlich eine dünne, aber undurchdringliche Wand W hineingestellt, welche die Eigenschaft hat, die Temperaturen (respektive lebendigen Kräfte) der an sie anprallenden Moleküle anzunehmen und auszugleichen.

Dann wird in der Nähe von W zufolge des früher als 1) bezeichneten Umstandes die Wärmeleitung verringert, daher das Temperaturgefälle vermehrt werden; anschaulicher wird dies, wenn man bedenkt, daß die Temperatur an jeder Stelle gleich ist dem Mittel der Temperaturen der von rechts nach links und der in umgekehrter Richtung fliegender Moleküle; die von der Wand wegflie-

genden können aber im günstigsten Falle nur die Temperatur der Wand selbst haben, daher muß sich dieser Mittelwert von der Wandtemperatur um eine endliche Größe unterscheiden ¹⁾. Statt als

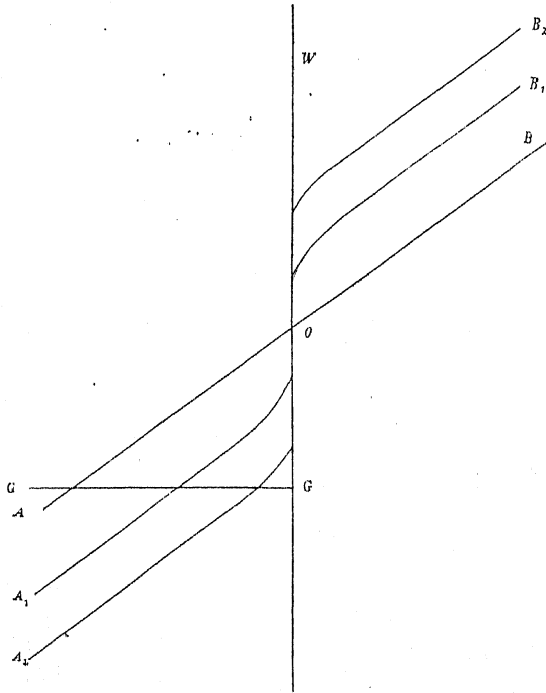


Fig. 1.

Gerade AB wird die Temperatur jetzt in der durch A_1B_1 dargestellten Weise verlaufen.

¹⁾ Eine ähnliche Bemerkung macht auch Stoney in einer mir erst jetzt bekannt gewordenen Abhandlung: On the Penetration of Heat across Layers of Gas Phil. Mag. IV (5), p. 428, welche manches Wertvolle enthält, aber durch irrige Ansichten über die Wärmeleitung der Gase entstellt ist. Siehe auch Phil. Mag. V (5), p. 457 Anm.

Wenn aber noch der Umstand 2) dazukommt, daß nämlich die Moleküle nur einen Teil ihrer Temperaturdifferenz beim Anstoßen an die Wand ausgleichen, so werden die beiden Kurvenzweige sich noch mehr von AB entfernen und die Lage A_2B_2 annehmen.

Bis jetzt waren die Verhältnisse beiderseits symmetrisch angenommen, nun kommt aber noch in Betracht, daß die Temperatur innerhalb des festen Körpers so rasch ausgeglichen wird, daß die Änderung derselben in Folge des Wärmeüberganges unmerklich ist. Man wird somit, wenn man links von W den festen Körper annehmen will, daselbst anstatt der Kurve A_2 eine Gerade G zu substituieren haben, so daß die Entfernung OG gleich ist der Mitteltemperatur (in Bezug auf 0) der an die Wand von rechts her stoßenden Moleküle.

II.

Die Schwierigkeit bei Berechnung der Wärmeleitung und ebenso der inneren Reibung und Diffusion nach der kinetischen Gastheorie liegt hauptsächlich darin, daß, sobald ein Temperatur- (respektive Geschwindigkeits- etc.) Gefälle sich in dem Gase einstellt, auch die Geschwindigkeitsverteilung unter den Molekülen nach verschiedenen Richtungen eine andere wird, so daß das Maxwell'sche Gesetz nicht mehr anwendbar ist.

Der Zustand des Gases ist dann nicht mehr durch Druck oder Volum und Temperatur bestimmt, sondern es kommt noch eine Art Polarisationszustand — bei Wärmeleitung einaxig, bei innerer Reibung zweiaxig — dazu. Streng genommen sind für ein Gas in diesem Zustande die Formeln, welche den Zusammenhang zwischen Druck, Volum und Temperatur darstellen, überhaupt nicht mehr gültig. Die Abweichungen von dem normalen Zustande werden sich hierbei jedoch im Allgemeinen nur auf Glieder zweiter Ordnung der Kleinheit beschränken, dagegen werden, wie Boltzmann ¹⁾ gezeigt hat, die Werte des Wärmeleitungs- etc. Koeffizienten selbst um Glieder von derselben Größenordnung wie die ausschlaggebenden gefälscht werden, falls diese Änderung der Geschwindigkeitsverteilung vernachlässigt wird, wie dies bei der Annahme, daß die Moleküle sich wie elastische Kugeln verhalten, zu geschehen pflegt.

Eine exakte Berechnung ließe sich nun allerdings in der Weise

¹⁾ Boltzmann, Sitzungsber LXXXI, S. 117, 1880; auch Gasth. S. 93.

durchführen, wie es von Boltzmann für die innere Reibung und Diffusion geschehen war, oder man könnte die Maxwell'sche Annahme einführen, daß sich die Moleküle verhalten wie Kraftzentra, zwischen denen eine der fünften Potenz der Entfernung verkehrt proportionale Kraft wirkt, aber es schien mir für den vorliegenden Zweck doch genügend, die Rechnung vorläufig unter den einfachen Annahmen von Clausius, welche die mathematische Behandlung so sehr erleichtern, durchzuführen, da dieselben ja qualitativ übereinstimmende Resultate liefern und da eine ganz exakte Berechnung in unserem Falle schon dadurch unmöglich gemacht wird, daß man den Einfluß des festen Körpers noch nicht in genügend sicherer Weise mathematisch formulieren kann.

Es wird also die Rechnung mit der Vereinfachung durchgeführt, daß die Bewegungsenergie (oder Temperatur) eine Eigenschaft der Molekeln sei, welche die Geschwindigkeitsverteilung nicht alteriert, und daß einem Molekel im Mittel jene Quantität dieser Größe zukommt, welche in der Schichte herrschte, wo dasselbe zum letztendale zusammengestoßen war; auch soll von vorneherein die Geschwindigkeit der Moleküle gleich der mittleren gesetzt werden (siehe Boltzmann, Gastheorie, S. 74).

Mit derselben Berechtigung läßt sich dann unsere Rechnung auch natürlich auf die innere Reibung anwenden — sie stimmt ja im Wesentlichen mit jener von Kundt und Warburg überein — und überhaupt auf jeden ähnlichen Prozeß. Analoge Erscheinungen müßten z. B. auch bei der Elektrizitätsleitung der Gase eintreten, falls nur hiebei überhaupt die Molekularbewegung in Betracht kommt. Diese Bemerkung ist vielleicht im Hinblick auf gewisse Erscheinungen, wie den Übergangswiderstand (respektive elektromotorische Gegenkraft) zwischen Metall und Gas, von Interesse; doch will ich hier nicht näher darauf eingehen.

Betrachten wir nun den Fall des stationären Wärmeüberganges zwischen zwei auf verschiedener Temperatur befindlichen parallelen festen Wänden, die so weit von einander entfernt sind, daß die mittlere Weglänge gegenüber ihrer Distanz zu vernachlässigen ist, und daß somit das Temperaturgefälle in einiger Entfernung von den Wänden jedenfalls ein lineares wird.

In der Nähe der Wand, z. B. jener, welche die niedrigere Temperatur hat und welche zur YZ -Ebene gewählt werden möge, wird dagegen das Temperaturgefälle nicht mehr linear sein. In jedem

Falle muß aber durch jede Isothermenebene (parallel YZ) ebensoviel Wärme von der einen Seite nach der anderen übergehen, wie auch umgekehrt.

Fassen wir z. B. das Volumelement dv , in der Entfernung $(x - \xi)$ von der Wand, ins Auge und untersuchen, wie viel Moleküle von ihm nach rechts durch ein Element δs der Isothermenebene, welche der Abszisse x entspricht, hindurchgehen werden.

In dem Elemente dv sind ndv Moleküle vorhanden, es werden also per Zeiteinheit $\frac{ndv}{\lambda}$ Zusammenstöße vorkommen, und ebensoviel

Moleküle werden aus dem Elemente hinausfliegen, alle mit der Geschwindigkeit c und der Temperatur $\theta(x - \xi)$, welche in jenem Abstände $x - \xi$ von dem festen Körper herrscht; dieselben verbreiten sich gleichmäßig auf den ganzen Raum, also entfällt in die Richtung der Fläche δs , welche von dem Volumelement unter dem Raumwinkel $\sin \varphi \delta \varphi \delta \psi$ gesehen wird, nur der Bruchteil

$$\frac{\sin \varphi \delta \varphi \delta \psi}{4\pi} = \frac{\delta s \cos \varphi}{4\pi r^2}$$

der gesammten Molekülzahl, wenn wir mit r die Entfernung des Elementes δs von dv bezeichnen; hievon gehen aber nur jene durch δs wirklich hindurch, welche einen Weg zurücklegen, der größer ist als r , das ist der Bruchteil $e^{-\frac{r}{\lambda}}$; im Ganzen gehen also von links nach rechts durch die Fläche δs , falls wir dieselbe $= 1$ setzen,

$$N = \iiint \frac{nc}{4\pi\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \cos \varphi \frac{dv}{r^2}$$

Moleküle hindurch, wo das Integral über die Grenzen des betrachteten Raumes zwischen $\xi = 0$ und $\xi = x$ zu erstrecken ist, jedes mit dem θ der betreffenden Schichte versehen. Ist ms die auf ein Molekül entfallende Wärmemenge für die Temperatur 1 (der Wärmewert derselben), so wird im Ganzen die Wärmemenge

$$W_1 = \frac{cm\lambda n}{4\pi\lambda} \iiint \int_0^x \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [x - r \cos \varphi] e^{-\frac{r}{\lambda}} \cos \varphi \frac{dv}{r^2}$$

hindurchtransportiert, was sich durch Einführung von $\xi = r \cos \varphi$ und $dv = r^2 d\xi d\varphi d\psi \sin \varphi$, sowie Ausführung der Integration nach ψ reduziert auf

$$W_1 = \frac{cnms}{2\lambda} \int_0^x \theta(x - \xi) d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda \cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi.$$

In analoger Weise wird von rechts nach links die Quantität

$$W_2 = \frac{cnms}{2\lambda} \int_0^{\infty} \theta(x + \xi) d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda \cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi$$

hindurchgetragen.

Zu W_1 kommt aber noch der Teil W_s , welcher von jenen Molekeln herrührt, die an den festen Körper angeprallt waren, von ihm reflektiert wurden und einen Weg in der x Richtung zurückgelegt haben, der größer als x ist.

Falls bei diesem Vorgange vollständiger Temperatur-Ausgleich stattgefunden hätte, wäre ihre Temperatur gleich der Temperatur θ_0 des festen Körpers. (Die analoge Annahme ist der Rechnung von Kundt und Warburg zu Grunde gelegt).

In Wirklichkeit wird sich nur ein Teil ausgleichen, was hier bei der Wärmeleitung von besonderer Wichtigkeit zu sein scheint. Wir nehmen also an, die Temperatur der von der Wand ausgesendeten Moleküle ϑ genüge der Formel:

$$\vartheta - \theta_0 = \beta (\theta_M - \theta_0),$$

somit

$$(2) \quad \vartheta = \beta \theta_M + (1 - \beta) \theta_0,$$

wo θ_M die mittlere Temperatur der von rechts an die Wand anfallenden Molekeln bedeutet, θ_0 die Temperatur der Wand selbst und β einen Ausgleichsfaktor (zwischen 0 und 1), der später noch näher untersucht werden soll.

Dann wird für W_s analog dem Früheren gefunden:

$$W_s = \frac{cnms}{2\lambda} \vartheta \int_x^{\infty} d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda \cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi,$$

wobei

$$(3) \quad \vartheta = (1 - \beta) \theta_0 + \beta \frac{\int_0^{\infty} \theta(\xi) d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda \cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi}{\int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda \cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi}.$$

Damit die Strömung stationär sei, muß sein:

$$W_2 - W_1 - W_s = \text{const.},$$

also, wenn noch zur Abkürzung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda \cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi = \varphi(\xi)$$

bezeichnet wird:

$$\int_0^{\infty} \theta(x + \xi) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^x \theta(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi - \vartheta \int_x^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = C;$$

hierbei bedeutet C die per Zeiteinheit von rechts nach links durchgehende Wärmemenge, dividiert durch $\frac{cnms}{2\lambda}$.

Setzt man den Temperaturunterschied $\theta - \vartheta$ gleich einer neuen Variablen y , so erhält man für diese die Gleichung:

$$(4) \quad \int_0^{\infty} y(x + \xi) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^x y(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi = C.$$

Bevor wir weitergehen, müssen wir die oben als φ definierte Funktion näher betrachten. Führt man die neue Variable

$$z = \frac{\xi}{\lambda \cos \varphi} \text{ ein, so wird}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi}{\lambda} \int_{\frac{\xi}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z^2} dz,$$

was sich durch partielle Integration verwandelt in:

$$\varphi(\xi) = e^{-\frac{\xi}{\lambda}} - \frac{\xi}{\lambda} \int_{\frac{\xi}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz.$$

Letzteres Integral, welches wir mit $E'\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ bezeichnen wollen, wird Integrallogarithmus genannt; es kann mittels der Reihe berechnet werden, (die sich durch Entwicklung von e ergibt):

$$(6) \quad E'(t) = B + \log t - t + \frac{t^2}{2 \cdot 2!} - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^4}{4 \cdot 4!} - \dots$$

$$B = 0.5772157\dots$$

Durch Differentiation ergibt sich:

$$\varphi'(\xi) = -\frac{1}{\lambda} E'\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

$$\varphi''(\xi) = \frac{1}{\lambda \xi} e^{-\frac{\xi}{\lambda}}$$

u. s. w.

Man sieht also: φ hat für $\xi = 0$ den Wert 1 und berührt selbst die Ordinatenaxe; mit wachsendem Argument nimmt es fortwährend ab und nähert sich für $\xi = \infty$ asymptotisch der Abszissenaxe.

Im Folgenden werden wir öfters noch auf Integrale von der Form $\int_0^x \xi^n \varphi(\xi) d\xi$ (wobei n eine ganze positive Zahl) stoßen, und deshalb mögen die diesbezüglichen Formeln auch gleich an dieser Stelle entwickelt werden.

Durch Vertauschung der Integrationsordnung wird jenes Integral:

$$J = \int_0^1 dy \int_0^x \xi^n e^{-\frac{\xi}{\lambda y}} d\xi.$$

Das Integral nach ξ läßt sich durch sukzessive partielle Integration ausführen in

$$= n! \lambda^{n+1} y^{n+1} - e^{-\frac{x}{\lambda y}} [\lambda y x^n + n \lambda^2 y^2 x^{n-1} + \dots + n! \lambda^{n+1} y^{n+1}]$$

und dadurch wird gefunden:

$$(7) \quad J = \frac{n! \lambda^{n+1}}{n+2} - \frac{\lambda x^n e^{-\frac{x}{\lambda}}}{n+2} \left[1 + n \frac{\lambda}{x} + n(n-1) \left(\frac{\lambda}{x}\right)^2 + \dots + n! \left(\frac{\lambda}{x}\right)^n \right] + \frac{x^{n+1}}{n+2} \varphi(x).$$

Für den Fall $n = 0$ hat man statt dessen:

$$\int_0^x \varphi(\xi) d\xi = \frac{\lambda}{2} \left[1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} \right] + \frac{x}{2} \varphi(x).$$

Kehren wir nun zur Untersuchung der Gleichung (4) zurück; dieselbe wird die Funktion y vollständig bestimmen, falls noch die Bedingung dazukommt, daß der Verlauf von y in hinreichender Entfernung von 0 als linear anzusehen ist.

Differenziert man sie in Bezug auf x , so erhält man:

$$\int_0^{\infty} y'(x + \xi) \varphi(\xi) d\xi - \int_0^x y'(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x) y(0),$$

und wenn man diese Gleichung (in Bezug auf y') partiell integriert:

$$(8) \quad 2y(x) = - \int_0^{\infty} y(x + \xi) \varphi'(\xi) d\xi - \int_0^x y(x - \xi) \varphi'(\xi) d\xi.$$

Zu derselben Gleichung kann man aber auch direkt gelangen; sie drückt nämlich nichts Anderes aus, als daß die Temperatur in einer Schicht gleich ist der mittleren Temperatur der Moleküle, die sich jeweilig darin befinden.

Denn wenn man berücksichtigt, daß die Moleküle in der Schicht während eines Zeitraumes verweilen, welcher proportional ist $\frac{1}{\cos \varphi}$, so erhält man analog dem Früheren die Gleichung:

$$\theta(x) = \frac{\int_0^{(1)} \theta(x + \xi) d\xi \int_0^1 e^{-\frac{\xi}{\lambda y} dy} + \int_0^x \theta(x - \xi) d\xi \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\xi}{\lambda y} dy}}{y} + \vartheta \int_x^{\infty} d\xi \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\xi}{\lambda y} dy}}{y}}{2 \int_0^{\infty} d\xi \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\xi}{\lambda y} dy}}{y}}$$

$\int_0^1 \frac{e^{-\xi/\lambda} dy}{y}$ ist aber $= -\lambda \varphi'(\xi)$; die Ausführung der Integration

im Nenner ergibt sofort die obige Gleichung. Dieselbe ist, falls die Integrationskonstante richtig bestimmt wird, für die Kenntnis der Temperaturverteilung gleichwertig mit Gleichung (4), und man hätte auch auf sie die ganze Berechnung basieren können.

Wird das y aus (4) oder (8) bestimmt, so ergibt sich die Temperatur θ mit Hilfe der Relationen (3):

$$\theta = \vartheta + y$$

wobei

$$\begin{aligned} \vartheta &= (1 - \beta)\theta_0 + \beta \frac{\int_0^\infty \theta(\xi) \varphi(\xi) d\xi}{\int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi} \\ &= (1 - \beta)\theta_0 + \beta \left(\vartheta + \frac{\int_0^\infty y(\xi) \varphi(\xi) d\xi}{\int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi} \right), \end{aligned}$$

also

$$\vartheta - \theta_0 = \frac{\beta}{1 - \beta} \frac{\int_0^\infty y(\xi) \varphi(\xi) d\xi}{\int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi} = \frac{2\beta}{(1 - \beta)\lambda} \int_0^\infty y(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Das Integral hat aber den Wert C , wie aus (4) folgt, wenn $x = 0$ gesetzt wird; somit:

$$\vartheta - \theta_0 = \frac{2\beta C}{(1 - \beta)\lambda}$$

und

$$(9) \quad \theta = \theta_0 + y + \frac{2\beta C}{(1 - \beta)\lambda}.$$

Zur besseren Illustration dieser Verhältnisse diene die Fig. 2. Selbst ist die nahezu konstante Temperatur innerhalb des festen Kör-

pers durch die negative Abszissenaxe OX' dargestellt; die Ordinatenstücke y würden die Gastemperatur vorstellen, falls nur der (früher

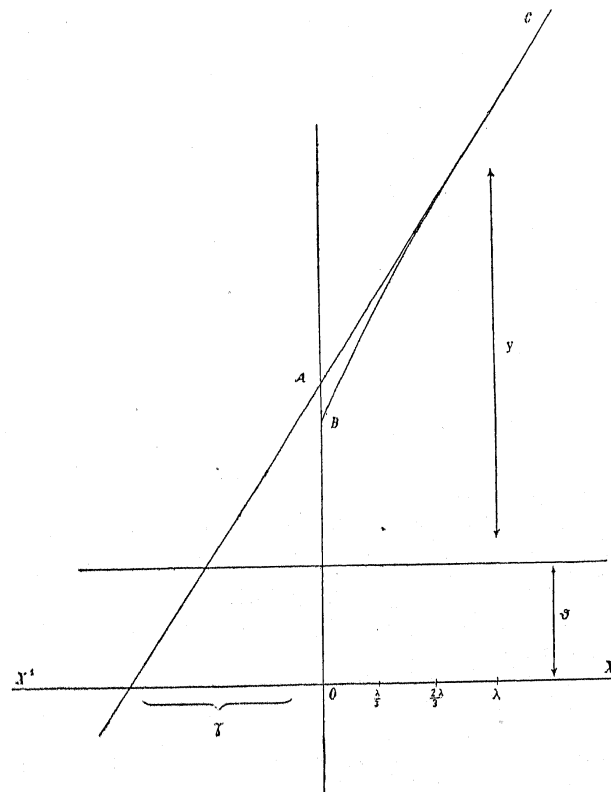


Fig. 2.

als 1 bezeichnete) Ustand zu berücksichtigen wäre, daß die Gasmoleküle in der Nähe der Wand kürzere Wege zurücklegen werden, dessen Berechnung dieses Kapitel hauptsächlich gewidmet ist;

wegen des unvollständigen Ausgleiches der Temperatur beim Stoße an die Wand kommt aber noch das von β abhängige Stück θ hinzu.

In einiger Entfernung von der Wand wird die Temperaturkurve BC nach Voraussetzung merklich geradlinig verlaufen, aber so, als ob die Wand nicht die Temperatur θ_0 , sondern die Temperatur $\theta_0 + OA$ hätte. Der scheinbare Temperatursprung OA , das ist jene Größe, welche in meinen früher erwähnten Versuchen gefunden wurde, ist also:

$$OA = \gamma \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x).$$

Für γ ergibt sich aber aus obiger Figur:

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\theta(x) - \theta_0}{\theta'(x)} - x \right]$$

und mit Einführung von (9):

$$(10) \quad \gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{y(x) - xy'(x)}{y'(x)} + \frac{2\beta}{(1-\beta)\lambda} \frac{C}{y'(x)} \right].$$

Nun sieht man aber aus der Form der Definitionsgleichung (4), daß bei einem gewissen λ das y proportional ist dem C , also $y(C, x, \lambda) = C \cdot f(x, \lambda)$.

Der Wert von γ ist somit von C unabhängig, da es sich im Zähler und Nenner weghebt,

In der Funktion $f(x, \lambda)$ kommt also nur das Verhältnis von x zu λ in Betracht, folglich werden — bei gleichem C — die y -Kurven für verschiedene λ einander ähnlich sein, und die Werte von γ müssen dem betreffenden λ proportional sein.

Somit erscheint das (loc. cit.) empirisch innerhalb weiter Grenzen mit hinreichender Genauigkeit konstatierte Gesetz erklärt, daß der Temperatursprung-Koeffizient γ unabhängig vom Temperaturgefälle (respektive Wärmeflusse), aber proportional der mittleren Weglänge, also verkehrt proportional dem Drucke ist.

Nun wäre es von Interesse, den Wert von γ (als Vielfaches der mittleren Weglänge) und überhaupt den Verlauf der Temperaturkurve kennen zu lernen, und hiezu müssen wir y z. B. mit Hilfe der Gleichung (4) zu bestimmen suchen.

Nach dem vorher Erwähnten genügt es hiebei, wenn für C irgend ein Wert, z. B. der Einfachheit wegen der Wert 1 gesetzt wird. Dann wird die Tangente des Neigungswinkels für $x = \infty$ gleich

$\frac{3}{2}$, wie man leicht findet, wenn man eine lineare Form für θ substituiert. (Behält man C bei, so ergibt sich die bekannte Formel $x = \frac{c \sin s \lambda}{\beta}$).

In geschlossener Form diese Gleichung zu integrieren, ist mir nicht gelungen, ich habe daher zu Näherungsrechnungen Zuflucht genommen.

Nach der sonst in solchen Fällen üblichen Methode würde man das y nach dem Mac Laurin'schen Satz in eine Potenzreihe entwickeln und die Koeffizienten derselben sukzessive bestimmen. Dies ist aber hier nicht möglich, da $y'(x)$ für den Punkt $x = 0$ logarithmisch unendlich wird, wie sich durch zweifache Differentiation von (4) leicht nachweisen läßt.

Man wird aber im Allgemeinen noch immer um den Punkt x herum entwickeln können:

$$y(x + \xi) = y(x) + \xi y'(x) + \frac{\xi^2}{2} y''(x) + \dots$$

Wird in dieser Weise mit Gleichung (4) verfahren, so wandelt sie sich in:

$$y(x)\Phi_0(x) + y'(x)\Phi_1(x) + y''(x)\Phi_2(x) + \dots = 1,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

bei geradem n :

$$\Phi_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \xi^n \varphi(\xi) d\xi,$$

bei ungeradem n :

$$\Phi_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^x + \int_0^\infty \xi^n \varphi(\xi) d\xi \right].$$

Man kann nun, indem man nur die m ersten Glieder berücksichtigt, diese Gleichung $m-1$ mal differenzieren und aus den so erhaltenen m Gleichungen die Werte von y, y', \dots, y^{m-1} für ein bestimmtes x berechnen, da sich die dazugehörigen Koeffizienten Φ etc. mit Hilfe von Gleichung (7) finden lassen. Dies läuft darauf hinaus, daß wir an Stelle der wirklichen y -Kurve eine Kurve m^{ten} Grades substituieren, deren Koeffizienten dadurch bestimmt sind,

daß die Definitionsgleichung an m Punkten in der Umgebung von x genau erfüllt ist.

Dies würde voraussichtlich eine gute Darstellung der Funktion in der Umgebung des Punktes x geben, aber bedeutende Fehler für größere Entfernungen hervorrufen.

Es wäre daher schon rationeller, die Punkte, an welchen die Gleichung (4) genau erfüllt werden soll, auf den ganzen Raum, innerhalb dessen man die Funktion kennen will, zu verteilen. Werden hierzu z. B. die Punkte mit den Abszissen $0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}$ gewählt, so erhalten die Konstanten der Kurve dritten Grades folgende Werte:

$$\begin{aligned} a &= 0.6820. \lambda^{-1} \\ b &= 3.234. \lambda^{-2} \\ c &= -1.423. \lambda^{-3} \\ d &= 0.2439. \lambda^{-4} \end{aligned}$$

Aber auch diese Art der Darstellung ist für unseren Zweck nicht recht geeignet; für genügend große x muß nämlich eine derartige Kurve immer nach oben oder unten umbiegen und kann sich nicht asymptotisch einer Geraden nähern, wie es von vorneherein verlangt wurde. Um bis zu einer genügend großen Entfernung eine annähernd gerade Linie zu erhalten, welche eine Bestimmung des γ ermöglichen würde, müßte man eine Kurve sehr hohen Grades, also eine große Anzahl von Koeffizienten berechnen, und diese Rechnungen werden dann ungemein langwierig.

Besser ist es deshalb, eine andere Methode der Annäherung zu wählen, indem man von vorneherein eine Kurve substituiert welche eine Asymptote hat,

So berechnet ich z. B. die Kurve $y = a + bx + ce^{-mx}$, indem ich zur Bestimmung der willkürlichen Koeffizienten a, b, c, m die vier Bedingungen benützte, daß die Gleichung (4) für die Punkte $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}$ erfüllt sei.

Wird obiger Ausdruck in Gleichung (4) substituiert, so erscheinen daselbst außer den früher berechneten Integralen $\int \varphi(\xi) d\xi$, $\int \xi' \varphi(\xi) d\xi$ noch solche von der Form $\int e^{\pm m\xi} \varphi(\xi) d\xi$, deren Auswer-

tung noch besprochen werden muß. Es möge beispielsweise

$$J = \int_0^x e^{m\xi} \varphi(\xi) d\xi \text{ für den Fall } m > \frac{1}{\lambda} \text{ berechnet werden:}$$

Durch partielle Integration wird dieses gleich.

$$J = \frac{e^{mx} \varphi(x) - 1}{m} - \frac{1}{m} \int_0^x e^{m\xi} \varphi'(\xi) d\xi.$$

Letzteres Integral ist gleich $K = \lim_{a=0} \int_a^x e^{m\xi} \varphi'(\xi) d\xi$, und dies verwandelt sich durch abermalige partielle Integration in

$$K = \frac{e^{mx} \varphi'(x)}{m} - \lim_{a=0} \left[\frac{e^{ma} \varphi'(a)}{m} + \frac{1}{m} \int_a^x \frac{e^{(m-\frac{1}{\lambda})\xi}}{\lambda \xi} d\xi \right].$$

Nennt man zur Abkürzung

$$F(t) = \int_t^1 \frac{e^t dt}{t} = A - \log t - t - \frac{t^2}{2 \cdot 2!} - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} - \dots,$$

wo A den Wert 1.317902 hat, so kann man das letzte Integral auch schreiben:

$$\frac{-F\left[\left(m - \frac{1}{\lambda}\right)x\right] - F\left[\left(m - \frac{1}{\lambda}\right)a\right]}{\lambda}.$$

Durch Ausführung des Grenzüberganges erhält man dann:

$$-K = \frac{1}{m\lambda} \left\{ e^{mx} E\left(\frac{x}{\lambda}\right) + F\left[\left(m - \frac{1}{\lambda}\right)x\right] - B + A - \log(m\lambda - 1) \right\},$$

was, oben eingesetzt, das gesuchte Integral liefert.

In ähnlicher Weise findet man:

$$\int_0^{\infty} e^{-m\xi} \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2 \lambda} \log[1 + \lambda m].$$

Aus den so erhaltenen vier Gleichungen kann man die Koeffizienten a, b, c eliminieren und erhält eine recht komplizierte Gleichung, woeber das m genügen muß; ich habe daraus durch suk-

zessive Näherung den Wert $m = 2.67$ gefunden, und hiemit die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a &= 1.043\lambda^{-1} \\ b &= 1.500\lambda^{-2} \\ c &= -0.1938\lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Diese Temperaturkurve ist auf Fig. 2 dargestellt; das γ ergibt sich darnach:

$$\gamma = \left[0.695 + \frac{4\beta}{3(1-\beta)} \right] \lambda.$$

Nun sieht man aber, daß die Abweichungen von der Geraden, wie ja von vorneherein zu erwarten war, nur in Entfernungen $< \lambda$ merklich sind. Um diesen Teil genauer wiederzugeben, habe ich noch eine Methode versucht, indem ich nämlich die Kurve aus zwei Stücken zusammensetzte: der eben berechneten Kurve zwischen $x = \lambda$ und $x = \infty$ und einer vierkonstantigen Kurve $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ zwischen $x = 0$ und $x = \lambda$, deren Koeffizienten dadurch bestimmt wurden, daß Gleichung (4) für die Punkte $x = 0$, $\frac{\lambda}{3}$, $\frac{2\lambda}{3}$, λ genau giltig sein soll.

Wird jene Exponentialkurve zur Abkürzung mit Y bezeichnet, und ist z die Abszisse, wo die beiden Kurven aneinanderstoßen, so erhält man zur Bestimmung der Koeffizienten vier Gleichungen von der Form

$$aA_{11} + bA_{12} + cA_{13} + dA_{14} = 1 - \int_{x=z}^{\infty} Y(\xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

wobei die A aus gewissen Ausdrücken

$$B_{11} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \varphi(\xi) d\xi$$

$$B_{12} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \xi \varphi(\xi) d\xi$$

$$B_{13} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \xi^2 \varphi(\xi) d\xi$$

$$B_{14} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \xi^3 \varphi(\xi) d\xi$$

in folgender Weise zusammengesetzt sind:

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11} \\ A_{12} &= x_1 B_{11} + B_{12} \\ A_{13} &= x_1^2 B_{11} + 2x_1 B_{12} + B_{13} \\ A_{14} &= x_1^3 B_{11} + 3x_1^2 B_{12} + 3x_1 B_{13} + B_{14}. \end{aligned}$$

Die Werte der daraus bestimmten Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} a &= 0.9033 \cdot \lambda^{-1} \\ b &= 1.9024 \cdot \lambda^{-2} \\ c &= -0.4170 \cdot \lambda^{-3} \\ d &= 0.1593 \cdot \lambda^{-4} \end{aligned}$$

Die Kurve würde in der Umgebung des Nullpunktes etwas höher verlaufen als die Exponentialkurve auf Fig. 2, aber die Unterschiede würden im Maßstab der Zeichnung nicht gut ersichtlich sein.

Der Temperatursprung-Koeffizient γ ergibt sich darnach zu

$$\gamma = \left[0.707 + \frac{4\beta}{3(1-\beta)} \right] \lambda.$$

Etwas ähnlich dieser letztangewendeten Methode ist die von Kundt und Warburg benützte Art der Annäherungsrechnung bei Berechnung der Gleitung; dabei wurde die Geschwindigkeitskurve aus vier geradlinigen Stücken zusammengesetzt, welche von $x = 0$ bis $\frac{\lambda}{3}$, von $\frac{\lambda}{3}$ bis $\frac{2\lambda}{3}$, $\frac{2\lambda}{3}$ bis λ und λ bis ∞ reichten, und deren Lage in ähnlicher Weise bestimmt wurde, wie dies hier geschehen ist. Hierbei wäre keine große Genauigkeit zu erwarten, und die Gestalt der Kurve wird jedenfalls durch die berechnete Zickzacklinie nur unvollkommen wiedergegeben, doch stimmt der daraus gefundene Wert $\gamma = 0.712\lambda$ mit dem hier abgeleiteten wider Erwarten gut überein; β ist von Kundt und Warburg = 0 angenommen.

Natürlich könnte man den Grad der Genauigkeit bei diesen Rechnungen noch beliebig weit treiben (namentlich, indem man Formeln wählt, mit denen in der Umgebung des 0 Punktes ein besseres Anschmiegen erzielt wird), doch glaube ich eine für den vorliegenden Zweck genügende Annäherung zu erreichen, indem ich $\gamma = \left[0.70 + \frac{4\beta}{3(1-\beta)} \right] \lambda$ annehme.

Wenn hierin $\beta = 0$ gesetzt wird, wenn also die an die Wand prallenden Moleküle deren Temperatur vollständig annehmen, würde das Verhältniss $\frac{Y}{\lambda} = 0.70$, und zwar von der Beschaffenheit des Gases unabhängig. Nun hatten sich aber, wie erwähnt, bei der experimentellen Untersuchung für $\frac{Y}{\lambda}$ die Werte ergeben: 1.70 in Luft und 6.96 in Wasserstoff.

Es folgt also, daß, insbesondere bei Wasserstoff, der zweite Teil des Temperatursprunges erheblich den ersten überwiegt; der Temperatursprung rührt also zum größeren Teile davon her, daß die Gasmoleküle, welche an die feste Wand anprallen, dabei ihre Temperatur nur teilweise ausgleichen.

III.

Eine exakte Berechnung der hier in Betracht kommenden Verhältnisse ist aber noch weniger möglich, wie in dem früheren Falle, unsomehr als uns die notwendige Grundlage zu einer solchen fehlt, nämlich die Kenntnis der inneren Konstitution des festen Körpers, der Beschaffenheit seiner Oberfläche, der zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte etc.

Jedenfalls muß man dabei aber die früher gemachte vereinfachende Voraussetzung, daß die Wärme als eine die Bewegung der Moleküle nicht verändernde Eigenschaft aufgefaßt werden könne, fallen lassen und muß auf den Mechanismus der Wärmebewegung und des Stoßes näher eingehen.

Stoßen zwei Kugeln, deren Massen m und M sind, mit den respektiven Geschwindigkeiten c und C unter dem Winkel γ aufeinander und ist die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte im Momente des Stoßes (die Zentrallinie) gegeben, so kann man die Geschwindigkeiten nach dem Stoße durch folgende, von Maxwell herrührende Konstruktion finden.

Man ziehe als dritte Seite des Dreieckes eAC die Verbindungslinie der Endpunkte von e und C , welche die relative Geschwindigkeit g vorstellen wird, und teile dieselbe im Verhältnisse von $m : M$. Von dem so gefundenen Punkte als Mittelpunkt aus ziehe man zwei Kugelflächen durch die Endpunkte von g und errichte in letzteren Gerade, parallel der Zentrallinie, soweit bis sie die er-

wähnten Kugelflächen durchstoßen. Die Verbindungslinien zwischen A und letzteren Punkten geben die Richtungen und Größen der Geschwindigkeiten nach dem Stoße. Die Richtung der Zentrallinie sei durch die geographische Länge β und die Polhöhe α definiert, indem g als Axe des Koordinatensystems genommen wird und die Winkel β von der Ebene des Dreieckes AcC an gezählt werden.

Man findet dann leicht ($\frac{M}{M+m} = \mu$ gesetzt):

$$c'^2 = c^2 + 4 \cos^2 \alpha [\mu(\mu - 1)c^2 + \mu(1 - 2\mu)cC \cos \gamma + \mu^2 C^2] - 4 \sin \alpha \cos \alpha z \cdot \mu c C \sin \gamma \cos \beta.$$

Treffen viele solche Kugeln zusammen, deren Geschwindigkeiten den obigen analog gerichtet sind, bei denen aber die Richtung der Zentrallinie dem Zufalle überlassen bleibt, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß diese Richtung in den Winkel α bis $\alpha + d\alpha$ und β bis $\beta + d\beta$ fällt, proportional sein:

$$\sin \alpha \cos \alpha d\alpha d\beta,$$

also wird das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit nach dem Stoße:

$$[c'^2] = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [c^2 + 4B \cos^2 \alpha - 4\mu c C \cos \alpha \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta] \sin \alpha \cos \alpha d\alpha d\beta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha d\beta}$$

wobei B zur Abkürzung statt des Klammerausdruckes in der früheren Formel gesetzt ist, was durch Ausführung der Integration ergibt:

$$[c'^2] = c^2 + 2B = c^2 + 2[\mu(\mu - 1)c^2 + \mu(1 - 2\mu)cC \cos \gamma + \mu^2 C^2].$$

Nehmen wir schließlich an, daß die stoßenden Kugeln nicht in gegebener Richtung, sondern in allen möglichen Richtungen des Raumes, gleichmäßig verteilt, umherfliegen, so wird dann das mittlere Geschwindigkeitsquadrat nach dem Stoße sein:

$$[[c'^2]] = \frac{\int_0^\pi [c'^2] \sin \gamma d\gamma}{\int_0^\pi \sin \gamma d\gamma} = c^2 + 2[\mu(\mu - 1)c^2 + \mu^2 c'^2].$$

Die lebendige Kraft einer solchen stoßenden Kugel ändert sich also im Mittel um

$$\{[[c'^2]] - c^2\} \frac{m}{2} = m[\mu(\mu - 1)c^2 + \mu^2 c'^2],$$

das ist, wenn wir wieder $\mu = \frac{M}{M + m}$ einführen, um

$$\frac{[MC^2 - mc^2] m M}{(M + m)^2}$$

Der Klammerausdruck ist aber gleich dem doppelten Unterschiede der lebendigen Kräfte der beiden Kugeln vor dem Stoße, somit ist die durch den Stoß verursachte Änderung der Bewegungsenergie einer jeden Kugel gleich der Differenz derselben bei den zwei Kugeln, multipliziert mit dem Faktor $\varepsilon = \frac{2mM}{(m + M)^2}$.

Man sieht also, was schon Maxwell bemerkt hatte, daß die Stöße die Wirkung haben, die mittlere lebendige Kraft immer mehr auszugleichen; der Faktor ist aber, wie leicht einzusehen ist, höchstens gleich $\frac{1}{2}$, welchen Wert er nur für $m = M$ erreicht.

Es wird somit die lebendige Kraft nach einem Stoße im Mittel nur dann gleich werden, wenn die stoßenden Teilchen gleiche Massen haben, z. B. im Inneren des Gases, dagegen findet sonst nur ein teilweiser Ausgleich statt, desto geringer, je verschieden die stoßenden Massen sind.

Die Anwendung dieser mechanischen Sätze auf unseren Fall ist nun leicht ersichtlich; identifizieren wir die lebendige Kraft der translatorischen Bewegung mit der Temperatur, so haben wir sie auszudrücken durch die Formel:

$$\vartheta - \theta_M = \alpha(\theta_0 - \theta_M).$$

Somit: $\vartheta = \alpha\theta_0 + (1 - \alpha)\theta_M$, woraus also die früher (2) als β bezeichnete Größe sich als $\beta = 1 - \alpha$ ergeben würde.

Dabei wäre aber angenommen, daß jedes Gasmolekül nur einmal mit einem Teilchen des festen Körpers zusammenstößt; nimmt man an, daß nach dem ersten Zusammenstoß die Hälfte der Gasmoleküle ins Gas zurückfliegt, die andere Hälfte aber mit anderen Körperteilchen zusammenstößt, hier abermals die Hälfte derselben ins Gas zurückfliegt u. s. w., so erhält man durch leichte Rechnung für obigen Faktor β den Wert: $\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$.

Die Unvollkommenheit einer solchen Berechnungsweise liegt hauptsächlich darin, daß von den zwei bei der früheren Rechnung eingeführten Vereinfachungen bloß eine aufgegeben wurde, indem die Natur der Wärme als lebendige Kraft der Molekularbewegung berücksichtigt wurde, dagegen die Verteilung der Geschwindigkeiten noch immer als gleichförmig angesehen wurde.

Diese ganze Überlegung hat eben nur den Zweck, uns eine Vorstellung über die Ursache zu geben, auf welcher die Verschiedenheit des Temperaturprunges bei verschiedenen Gasen beruht. Daß derselbe speziell bei Wasserstoff so groß ist, ist darnach leicht verständlich, da in diesem Falle jedenfalls die Wasserstoffmoleküle eine bei Weitem geringere Masse haben, als die Teilchen des festen Körpers, somit der Faktor α sehr klein, β relativ groß sein wird.

Das Interessanteste scheint mir dabei insbesondere darin zu liegen, daß hier vielleicht ein Weg vorliegt, auf dem wir aus der bekannten Masse der Gasmoleküle Schlüsse ziehen können auf die Masse der Teilchen des festen Körpers, denen die Wärmebewegung zukommt, zu deren Bestimmung bis jetzt kein anderer Weg bekannt zu sein scheint.

Allerdings werden sich dabei die Verhältnisse noch komplizierter gestalten, wenn man auch die Energie der rotatorischen Bewegung in Betracht zieht, die bisher gar nicht berücksichtigt wurde.

Da aber solche theoretische Spekulationen sich noch auf sehr unsicherem Boden bewegen, bin ich vor Allem damit beschäftigt, weiteres diesbezügliches experimentelles Material herbeizuschaffen.

IV.

Ich möchte hier nur noch auf einen Punkt näher eingehen, worin der Unterschied zwischen den Folgerungen der älteren Theorie

der Wärmeleitung und der kinetischen Wärmeleitungstheorie recht auffallend zu Tage tritt.

Ist nämlich die Entfernung der Oberflächen der festen Körper, zwischen welchen das Gas die Wärmeleitung herstellt, so gering, daß die mittlere Weglänge von derselben Größenordnung oder noch größer ist, so verlieren die Begriffe des Wärmeleitungs-Koeffizienten und des Temperatursprung-Koeffizienten ihre Bedeutung, und die bisherige Theorie der Wärmeleitung wird auch bei Berücksichtigung der Poisson'schen Grenzbedingung nicht mehr anwendbar sein.

Der Vorgang wird aber wieder übersichtlich, obwohl von dem normalen ganz verschieden, wenn die Wände sich so weit nähern (oder λ so groß wird), daß ihre Distanz gegenüber der mittleren Weglänge zu vernachlässigen ist.

Es ist dies ganz analog dem von Kundt und Warburg loc. cit. dargelegten Verhalten des Gases in Bezug auf innere Reibung.

Dann kann man nämlich die Wirkung der Stöße der Gasmoleküle untereinander überhaupt vernachlässigen gegenüber der Wirkung der Stöße an die Wände, da letztere viel häufiger eintreten werden als erstere. Die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle (also auch die Gastemperatur) wird im ganzen Raume gleich und unabhängig von den Gefäßdimensionen.

Hat z. B. die rechte Wand die Temperatur θ_1 , die linke die Temperatur θ_2 , so wird die Temperatur der von rechts nach links fliegenden Molekülen ϑ_2 mit jener der sich in entgegengesetzter Richtung bewegenden ϑ_1 in folgendem Zusammenhange stehen (nach Gleichung 2):

$$\vartheta_1 = \theta_1 + \beta (\vartheta_2 - \theta_1)$$

$$\vartheta_2 = \theta_2 + \beta (\vartheta_1 - \theta_2),$$

woraus folgt:

$$\vartheta_1 = \frac{\theta_1 + \beta \theta_2}{1 + \beta} \quad \vartheta_2 = \frac{\theta_2 + \beta \theta_1}{1 + \beta}.$$

Jedes Molekül überträgt bei einem Stoße im Mittel die Wärmemenge

$$ms(\vartheta_2 - \vartheta_1) = ms[\theta_2 - \theta_1] \frac{1 - \beta}{1 + \beta}.$$

Sind n Moleküle in der Volumeneinheit vorhanden, so üben sie einen Druck aus $p = \frac{nmc^2}{3}$, indem sie $\frac{nc}{6}$ Stöße in der Sekunde gegen die Wände ausführen.

Dabei werden sie aber auch eine Wärmemenge

$$ms[\theta_2 - \theta_1] \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \cdot \frac{nc}{6}$$

übertragen.

Nun ist aber der normale Wärmeleitungs-Koeffizient $\alpha = nmc^2 \frac{\lambda}{3}$, somit wird die per Flächen- und Zeiteinheit übertragene Wärmemenge gleich

$$\frac{\alpha}{2\lambda} [\theta_2 - \theta_1] \frac{1 - \beta}{1 + \beta}.$$

Dies ist somit die Maximalmenge von Wärme, welche ein Gas von gegebenem Druck zwischen zwei Wänden von gegebener Temperaturdifferenz übertragen kann, wenn diese Wände einander auch noch so nahe gebracht werden; sie ist offenbar dem Gasdrucke direkt proportional, und ist gleich einer Wärmemenge, welche zwischen denselben Platten in der Distanz $\Delta = 2\lambda \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$ überströmen würde, falls dabei die Wärmeleitung in der normalen Weise (ohne Temperatursprung) vor sich gehen würde.

Diese Distanz gibt uns ein anschaulicheres Bild als die Zahlengröße für die Wärmemenge selbst; nach den früher erwähnten Versuchen würde sich ergeben z. B. für Luft bei einem Drucke von 1 mm Quecksilber:

$$\Delta = 0.4 \text{ mm}$$

$$\text{Wasserstoff } \Delta = 3.0 \text{ mm}$$

Diese zuletzt entwickelten theoretischen Folgerungen sind bisher experimentell noch nicht bestätigt worden; die Schwierigkeiten, welche hauptsächlich in der Messung der dazu erforderlichen niedrigen Drucke liegen werden, sind aber nicht unüberwindbar; solche Untersuchungen würden direkte Resultate bezüglich des Wertes des Koeffizienten β liefern, dessen Bedeutung vorher erwähnt wurde.

Es scheint mir überhaupt die Untersuchung dieser Vorgänge an der Grenze zwischen Gasen und festen Körpern respektive Flüssigkeiten einen Weg zu bieten, um über die Natur der letzteren näheren Aufschluß zu erlangen; insbesondere dürfte diesbezüglich auch das Phänomen des Gleitens der Gase eine noch größere Beachtung verdienen, als sie ihm bisher zu Teil wurde.

X. ON CONDUCTION OF HEAT BY RAREFIED GASES

(Philosophical Magazine Vol. 46, 1898; pp. 192—206).

1. At the same time when this year's first number of the Philosophical Magazine appeared, containing Mr. C. F. Brush's¹⁾ very interesting paper „On Transmission of Radiant Heat by Gases at Varying Pressures“, I published in Wiedemann's *Annalen* (vol. lxiv. p. 101, 1898) the results of an experimental investigation of mine on quite a similar subject, and conducted in quite a similar way, though quite independently, of course, of Mr. Brush's.

The design of my work was somewhat different, however. His research, which is of a purely experimental character, extends over the general laws of cooling of bodies in gases at various pressures, including the effects, of convection-currents, of radiation, and conduction of heat. I tried, on the contrary, to eliminate the first two effects, considering former researches of Kundt and Warburg, and confined my attention to the conduction of heat, and especially to its modifications arising at very low gas-pressures, in respect of which the kinetic theory of gases gives some remarkable suggestions which had not been examined before.

In order to explain these, I may be allowed to remind the reader of certain points in the mathematical theory of conduction of heat.

2. As is known, Fourier based his theory upon the assumption that the quantity of heat flowing through a body in a given direction is proportional to the corresponding gradient of temper-

¹⁾ Would it not have been preferable to omit the word „radiant“? It can be used only in connexion with the „aether-line“ in Mr Brush's observations, not with convection or conduction of heat.