These experiments show that two polished metallic surfaces connected to the sheath and the insulated electrode of an electrometer, when the air between them is influenced by the uranium rays, give a deflection from the metallic zero, the same in direction, and of about the same amount, as when the two metals are connected by a drop of water.

VIII. ÜBER WÄRMELEITUNG IN VERDÜNNTEN GASEN.

(Annalen der Physik und Chemie, Band 64, 1898; pp. 101–130).

I. Einleitung.

Strömt eine Flüssigkeit längs einer festen Wand, so ist die an der Wand geltende Grenzbedingung:

$$\zeta \frac{\partial v}{\partial n} = v - v',$$

worin v und v' die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit und der Wand, n die von der Grenzfläche ins Innere der Flüssigkeit gezogene Normale bedeuten, und ζ eine Konstante ist, nämlich eine Länge, die nach Helmholtz[1]) als Gleitungskoëffizient bezeichnet wird.

Ist derselbe Null, so ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich jener der Wand, es findet keine Gleitung statt. Dies ist das Verhalten, welches bei früheren Versuchen immer[2]) beobachtet wurde, bis Kundt und Warburg[3]) zeigten, daß in Gasen bei größerer Verdünnung eine meßbare Gleitung stattfindet.

Aus ihren Versuchen sowie aus der späteren Arbeit Prof. Warburg's[4]) ergab sich für den Gleitungskoëffizienten die Beziehung

$$\zeta = k\lambda,$$

wo λ die mittlere Weglänge der Gasmoleküle und k eine Konstante bezeichnet, die nach den Versuchen zwischen den Werten

[1]) Helmholtz, Sitzungsber. d. k. k. Gesellsch. der Wissensch. zu Wien, **40**, p. 607, 1860.

[2]) Mit Ausnahme von Helmholtz und Piotrowski l. c.

[3]) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. **155**, p. 337, 1875.

[4]) Warburg, Pogg. Ann. **159**, p. 399, 1876.

icm©

1·3 und 1·0 schwankt, und dieses Resultat ist auch in Übereinstimmung mit der kinetischen Gastheorie, welche ebenfalls Proportionalität des Gleitungskoëffizienten und der mittleren Weglänge fordert.

Vielfache Analogien mit der Theorie der inneren Reibung, insbesondere in Gasen, treffen wir bei der Theorie der Wärmeleitung wieder. So wurde hier als Bedingung, welche den Verlauf der Temperatur θ an der Grenze zwischen zwei Körpern bestimmt, deren Wärmeleitungskoëffizienten $\varkappa$ und $\varkappa'$ sind, von Poisson die Gleichung aufgestellt:

$$\varkappa \frac{\partial \theta}{\partial n} = \varkappa' \frac{\partial \theta'}{\partial n'} = q(\theta - \theta'), \tag{1}$$

wo n die nach dem Inneren des ersten Körpers gezogene Normale bedeutet, und der Quotient $\varkappa/q$ dem obigen ζ entspricht.

Ist dieser Quotient, welchen wir der Analogie wegen Temperatursprungkoëffizient γ nennen wollen, gleich Null, also $q = \infty$, so ist das Temperaturgefälle in den Grenzschichten zwischen den beiden Körpern ein stetiges; wenn derselbe von Null verschieden ist, so muß dagegen an der Grenzfläche ein endlicher Temperatursprung stattfinden.

Bisher ist kein Fall bekannt, wo ein von Null verschiedener Koëffizient gefunden worden, oder wo dieser Temperatursprung tatsächlich gemessen worden wäre, doch machten Kundt und Warburg darauf aufmerksam, daß der kinetischen Gastheorie zufolge solche der Gleitung der Gase analoge Phänomene an der Grenzfläche von Gasen und festen Körpern bei niedrigen Drucken zu bemerken sein müßten.

Auf eine gütige Anregung Hrn. Prof. Warburg's hin habe ich, um dies näher zu untersuchen, die Arbeit unternommen, deren Resultate im Folgenden mitgeteilt werden sollen. Wie ich gleich jetzt bemerken will, wird sich zeigen, daß hierbei tatsächlich ein solcher Temperatursprung auftritt, sowie, daß der Koëffizient γ von derselben Größenordnung wie die mittlere Weglänge und derselben proportional ist.

Daß dies so sein müßte, läßt sich übrigens auch leicht vom Standpunkte der kinetischen Gastheorie aus einsehen. Allerdings wird dabei die Existenz des Temperatursprunges auf eine etwas abweichende Art erklärt, als es von Poisson geschah, indem man denselben auf eine Änderung der molekularen Bewegungsvorgänge in den äußersten Gasschichten infolge der Reflexion der Moleküle von dem festen Körper zurückführt, während Poisson zur Begründung der Grenzbedingung hauptsächlich die Strahlungs- (und auch Strömungs-) Vorgänge heranzieht, deren Einfluß bei den vorliegenden Versuchen eliminiert ist. Doch will ich diese gastheoretischen Untersuchungen einer späteren Arbeit vorbehalten und werde mich hier darauf beschränken, den experimentellen Teil darzulegen.

Die Methode, welche ich anwendete, ist im wesentlichen mit derjenigen identisch, welche von Kundt und Warburg (l. c.) zur Bestimmung des Wärmeleitungskoëffizienten in Gasen benutzt worden war. Hierbei wird ein Glasgefäß, in welches ein Thermometer, luftdicht eingeschliffen, hineinragt, zuerst solange erwärmt, bis auch das Thermometer eine gewisse höhere Temperatur erlangt hat, dann plötzlich in Eis eingesenkt, und hierbei wird die Abkühlung des Thermometers beobachtet.

Diese wird verursacht durch Wärmeleitung und Strömung in dem Gase und durch Strahlung. Die Wirkung der Konvektionsströme nimmt nun sehr rasch ab, wenn das Gas verdünnt wird, wie (l. c.) auch theoretisch nachgewiesen wird; bei Verminderung des Druckes wird also die Abkühlungszeit wachsen, von einem gewissen Drucke an aber, wo der Einfluß der Strömungen unmerklich wird, konstant bleiben, da der Wärmeleitungskoëffizient ebenso wie der Koëffizient der inneren Reibung vom Drucke unabhängig ist.

Übrigens waren die Strömungen in den von mir benutzten engen Apparaten sehr gering, und nur in einem Falle (Luft im Gefäße II) war überhaupt eine Verlängerung der Abkühlungszeit zwischen Atmosphärendruck und 40 mm. bemerkbar.

Dann geschieht also die Abkühlung nur mehr durch Leitung und Strahlung. Letztere hängt nur von der Gestalt und Oberflächenbeschaffenheit des Thermometers ab, ist also eine Konstante, welche, wie im Folgenden dargelegt wird, bestimmt und eliminiert werden kann.

Bei niedrigen Drucken findet nun, wie schon Kundt und Warburg bemerkt hatten, eine Verlängerung der Abkühlungszeit statt, und diese war es, welche ich vor allem zu untersuchen hatte. Wenn sie sich durch den erwähnten, aus der Gastheorie folgenden Temperatursprung erklären ließ, so mußte sich der Koëffizient γ, wenn

aus den Differenzen berechnet, umgekehrt proportional dem Druck ergeben und mußte bei Apparaten verschiedener Dimensionen gleich sein.

Zur Berechnung ist nun aber die Kenntnis der Strahlung nötig. Wenn es gelingen würde, ein vollkommenes Vakuum herzustellen, würde die Abkühlung nur noch durch Strahlung stattfinden. Die von Kundt und Warburg und auch hier benutzte Methode besteht demgemäß darin, daß ein möglichst gutes Vakuum unter Erhitzen des Apparates hergestellt wird, und daß dann die Abkühlungszeit als bloß durch Strahlung bedingt angesehen wird.

Dabei liegt aber eine Schwierigkeit darin, nachzuweisen, daß man tatsächlich ein genügend gutes Vakuum erhalten habe. Deshalb suchte ich vor allem einen oberen Grenzwert für die Wärmeleitung zu finden, welche bei diesem Vakuum etwa noch vorhanden sein könnte, indem ich Thermometer und Innenseite der Glashülle chemisch versilberte. Hierdurch wurde die Abkühlungszeit im Vakuum auf das Achtfache vermehrt, und somit der gesammte Wärmefluß auf $^1/_8$ verringert, und hiervon mußte noch sehr viel, ich glaube fast alles, auf Rechnung der übrigbleibenden Strahlung gehen, da es mir nicht gelang, auf naßem Wege eine schön glänzende Versilberung zu erhalten, sondern die Oberfläche immer ein mattes graues Aussehen hatte.

Die Beobachtung mit Apparaten verschiedener Dimension liefert auch noch eine zweite Methode zur Elimination der Strahlung, welche von Winkelmann angewendet worden war, und welche hier gut übereinstimmende Werte lieferte, sodaß auch dadurch die Berechtigung jener Art der Bestimmung der Strahlung erwiesen wird.

II. Apparate und Versuchsanordnung.

Die Wirkung des Temperatursprunges wird natürlich desto größer sein, je kleiner der Zwischenraum zwischen dem Thermometer und der Hülle ist. Um denselben verändern und insbesondere möglichst enge machen zu können, verwendete ich nicht, wie bisher meist üblich, kugelförmige, sondern zylindrische Glashüllen, eine weitere und eine engere, und ein zylindrisches, in beide passendes Thermometer. Letzteres hatte, soweit es in das Glasgefäß

reichte, einen bloß 2 mm. dicken Stiel, um die infolge der Wärmeleitung desselben erforderliche Korrektion möglichst klein zu machen.

Der obere aus dem Gefäße herausragende Teil des Stieles war dicker und trug eine willkürliche Teilung in 100°. Am oberen Ende war die Kapillare etwas ausgebaucht, um eine Erwärmung des Thermometers auf eine höhere Temperatur zu gestatten.

Zwischen dem oberen dicken und dem unteren dünnen Teile des Stieles befand sich eine Verdickung, der Glasstöpsel, welcher in die Öffnungen beider Gefäße genau eingeschliffen war.

Beim Gebrauche wurde dieser Teil, schwach eingefettet, in das Gefäß eingesetzt, und darüber wurde Quecksilber in die napfförmige Ausweitung der Öffnung eingegossen, sodaß ein vollkommen dichter Verschluß gebildet wurde.

Das Gefäß, welches durch einen Kahlbaum'schen Hahn luftdicht abgesperrt werden konnte, wurde an eine Glasfeder [1]) angeschmolzen, welche die Verbindung mit der Quecksilberluftpumpe (Töpler-Hagen'scher Konstruktion) herstellte, sowie mit einer Röhre, durch welche das sorgfältig gereinigte und getrocknete Gas eingelassen werden konnte.

Thermometer und Hülle bestanden aus Jenaer Glas XVI_{III}; sie waren vor dem Gebrauche längere Zeit ausgekocht worden, um die oberflächlichen hygroskopischen Alkalischichten [2]) loszulösen, und waren dann ebenso wie alle Teile der Luftpumpe durch Erhitzen und Hindurchleiten trockener Luft aufs Sorgfältigste getrocknet worden.

Die Dimensionen der Apparate, welche teils durch direkte Messung mittels eines Schraubenmikrometers oder Kathetometers, teils durch Berechnung aus dem mittels Kathetometer gemessenen Niveauunterschiede ermittelt sind, welcher durch Eingießen einer gewogenen Menge von Quecksilber erzeugt wurde, waren:

	Thermometer:	
Mittlerer Radius des zylindrischen Gefäßes r:	0·4566	cm.
Länge des zylindrischen Teiles l:	5·66	„
Radius der halbkugelförmigen Enden:	0·453	„
Länge des dünnen Stieles:	6	„

[1]) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 155, p. 364, 1886.
[2]) Warburg u. Ihmori, Wied. Ann. 27, p. 481, 1875.

	Glasgefäß: I	II
Länge vom Schliff bis zum unteren Ende	17·6 cm.	17·7 cm.
Innerer Radius R	0·653	1·573
Äußerer Radius	0·71	1·74

Das Thermometer wurde vor und nach jeder Versuchsreihe mit einem Normalthermometer verglichen. Sein Nullpunkt entsprach — falls das äußere Gefäß evakuiert war — der Temperatur 20·04°, der Teilstrich 100 der Temperatur 47·99°. Wenn das Gefäß mit Luft von Atmosphärendruck erfüllt war, so waren die entsprechenden Temperaturen um 0·22° niedriger.

Im Laufe der Zeit hoben sich die Fixpunkte allmählich; die späteren sind somit auf die früheren mittels einer leicht zu berechnenden Korrektion reduziert, die an den weiter unten gegebenen Versuchsresultaten schon angebracht ist.

Die Messung der Abkühlungszeit geschah mittels einer Uhr, die so hinter einer halb durchsichtigen platinierten Glasplatte gehalten wurde, daß ich gleichzeitig ihr Zifferblatt wie auch das reflektierte Bild der Thermometerskala über- oder knapp nebeneinander beobachten konnte. Dies ermöglichte eine sehr bequeme gleichzeitige Beobachtung und zugleich Vermeidung von Parallaxenfehlern.

Bei sehr kurzen Abkühlungszeiten, solchen nämlich, welche weniger als 1 Minute betrugen, wurde die Zeit außerdem auch noch nach dem Schlage eines Metronoms gemessen.

Während der ganzen Dauer der Abkühlung wurde der Eisbrei, in welchen das Gefäß getaucht wurde, fortwährend umgerührt, um stagnierende Wasserschichten zu vermeiden.

Den Druck des Gases las ich, wenn er 1 mm. überstieg, direkt an einem Quecksilbermanometer ab; wenn er niedriger war, wurde nach dem Vorgange Bessel-Hagen's[1]) die absteigende Röhre der Luftpumpe als Macleod'sches Manometer benutzt.

Wenn man bei der Evakuierung des Apparates zu Drucken unter 0·0001 mm. gelangt ist, gelingt es von einer gewissen Grenze an nicht mehr, die Luftblasen durch die absteigende Röhre hindurchzutreiben; sie bleiben darin haften und gehen beim Sinken des Quecksilberniveaus im Gefäße L wieder in dasselbe zurück. Man kann aber noch eine erheblich bessere Verdünnung erreichen, indem man folgendermaßen vorgeht: man verdünnt z. B. mit Hilfe

[1]) Bessel-Hagen, Wied. Ann. 12, p. 434, 1881.

einer Wasserstrahlpumpe die Luft in dem Gefäß C, sodaß das Quecksilber in der Röhre R einen tieferen Stand h einnimmt. Beim Übergehen des Quecksilbers aus L nach R wird die Luftblase an der Stelle h festhaften; dann stellt man in C wieder den Atmosphärendruck her, sodaß beim Senken des Quecksilberreservoirs das Quecksilber in R nur bis a sinkt, also die Luftblase in h unschädlich bleibt. So kann man beliebig lange die Luftblasen in h ansammeln, sodaß sie schließlich auch nach C hinausgetrieben werden.

Hierbei ist allerdings ein Faktor unberücksichtigt gelassen, welcher bei Drucken von 0·001 mm. von erheblichem Einfluß ist, nämlich der Eigendruck des Quecksilberdampfes.

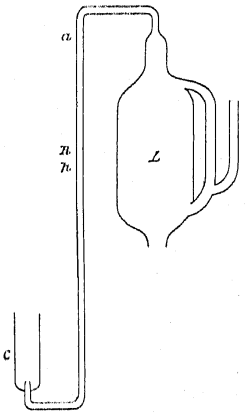

Fig. 1.

Da dieser für die Abschätzung der Grenze der Evakuierung von Wichtigkeit ist, müssen wir dessen Wirkung einer näheren Betrachtung unterziehen.

Wenn ziemlich rasch gepumpt würde, sodaß die Luft aus den Rezipienten und den Röhrenleitungen rascher ausströmt, als der Quecksilberdampf durch Diffusion von der Pumpe zurückströmen könnte, so könnte die Verdünnung der Luft nur soweit getrieben werden, bis ihr Druck gleich dem Quecksilberdampfdrucke würde, denn dann würde kein Überdruck mehr vorhanden sein, um sie in das nach dem Zurückströmen des Quecksilbers mit dessen Dämpfen erfüllte Gefäß L hineinzutreiben. In der Tat werden auch bei raschem Pumpen die Luftbläschen, welche in R übertreten, bald sehr klein, wozu allerdings auch die Reibung der Luft in der Röhrenleitung beitragen mag.

Nun diffundiert aber der Quecksilberdampf von L aus in die Luft der Gefäße (und vice versa) und zwar bei diesen niedrigen Drucken mit ziemlicher Geschwindigkeit; der Gesammtdruck wird somit wieder erhöht und Gleichgewicht wird erst bestehen, wenn sowohl L, als auch die übrigen Gefäße mit einer Mischung von Luft und gesättigtem Quecksilberdampf erfüllt sind. Da bei der Druckmessung nur der Partialdruck der Luft erhalten wird, so soll-

ten daher die direkt erhaltenen Werte um den Quecksilberdampfdruck vermehrt werden, der nach Hertz bei der Temperatur 22° za. 0·0015 mm. beträgt.

Wenn das Quecksilberreservoir wieder gehoben wird, wird jetzt wieder eine Quantität Luft herausgeschafft werden; tatsächlich wird das Luftbläschen, wenn man eine Zeit lang das Pumpen eingestellt hat, wieder erheblich größer, was den Eindruck einer — in Wirklichkeit nicht bestehenden — Undichtigkeit macht.

Bei genügend langsamem und andauerndem Pumpen wird also die Luft vollständig herausgeschafft und durch Quecksilberdampf ersetzt werden; ich setzte das Pumpen meist 1 bis 2 Stunden lang fort, während das auszupumpende Gefäß in siedendem Wasser gehalten wurde. Dann wurde der Hahn geschlossen, und das Gefäß, welches also fast nur Quecksilberdampf enthalten haben dürfte, in Eis gesteckt.

Der Quecksilberdampf müßte sich dabei wieder teilweise kondensieren, sodaß in diesem „besten Vakuum" fast nur Quecksilberdampf von einem 0° entsprechenden Drucke vorhanden gewesen sein dürfte, d. i. nach Hertz za. 0·00019 mm., und die Wärmeleitung desselben muß, wie aus dem Gesetze der Abnahme bei Verdünnung geschlossen werden kann, sehr gering sein.

Bei den Versuchen zeigte sich, daß die Abkühlungszeiten bei großer Verdünnung etwas verschieden waren, je nachdem das Gefäß durch den Hahn abgesperrt war oder nicht.

In der Regel wurde in letzterer Weise verfahren, um das Drehen des Hahnes zu vermeiden, wobei leicht kleine Luftmengen eindringen können.

III. Berechnung der Versuche.

Bei der Berechnung der Versuche handelt es sich darum, aus den gemessenen Abkühlungszeiten den Temperatursprungkoëffizienten zu finden, welcher unter Voraussetzung eines konstanten Wärmeleitungskoëffizienten die beobachtete Vermehrung der Abkühlungszeit bei Verdünnung des Gases bewirkt. Die Rechnung würde sich sehr leicht gestalten, wenn es gestattet wäre, gewisse vereinfachende Annahmen einzuführen; diese will ich vorerst behufs einer angenäherten Berechnung machen und später die erforderlichen Abänderungen besprechen.

Die genannten Vereinfachungen bestehen darin, daß

1. der Wärmeleitungs- und der Strahlungskoëffizient als von der Temperatur unabhängig angesehen werden;

2. das Thermometergefäß, ebenso wie die Hülle, als unendlich lange Zylinder behandelt werden, sodaß also die Wärmemenge, welche von den Thermometerenden ausgeht, unberücksichtigt bleibt;

3. die Temperaturdifferenzen innerhalb des Glases, der Hülle und der Thermometersubstanz in Anbetracht des relativ großen Wärmeleitungsvermögens derselben vernachlässigt werden.

Eine weitere Vereinfachung, welche hier aber in jedem Falle gestattet ist, liegt darin, daß mit Rücksicht auf die geringe Wärmekapazität und infolgedessen große Temperaturleitungsfähigkeit des verdünnten Gases die Temperaturverteilung innerhalb desselben in jedem Augenblicke so berechnet werden darf, als ob der Zustand ein stationärer wäre [1]).

Bezeichnen wir mit $\varkappa$ den Wärmeleitungskoëffizienten des Gases, mit σ den Strahlungskoëffizienten, so mögen $\varkappa L$ und σS die Wärmemengen bedeuten, welche in der Zeiteinheit pro 1° Temperaturunterschied vom Thermometer zur Hülle übergeleitet, bez. übergestrahlt werden. Ist C der Wasserwert des Thermometers, so haben wir dann für die Temperatur θ desselben die Gleichung:

$$-C\frac{\partial\theta}{\partial t} = (\varkappa L + \sigma S)\,\theta. \tag{2}$$

Setzt man die Temperatur zur Zeit $t = 0$ gleich θ_1, so folgt daraus durch Integration und einfache Umformung.

$$\varkappa L + \sigma S = \frac{1}{t}\, C \log\frac{\theta_1}{\theta}. \tag{3}$$

Im besten Vakuum können wir $\varkappa L = 0$ setzen; wird das zugehörige t mit dem Index S versehen, so haben wir

$$\sigma S = \frac{1}{t_s}\, C \log\frac{\theta_1}{\theta}.$$

Somit:

$$\varkappa L = \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t_s}\right] C \log\frac{\theta_1}{\theta}. \tag{4}$$

[1]) Vgl. Kundt u. Warburg l. c.

Andererseits ist L durch den Ausdruck gegeben

$$(\theta - \theta_0)\, L = -2\pi l \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho},$$

wobei mit ϑ die Temperatur der Luft, mit θ_0 die der Hülle bezeichnet wird. Da dies vom Radius ρ unabhängig sein muß, folgt

$$\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} = \text{konst.} = a.$$

Dazu kommen nach Formel (1) die beiden Grenzbedingungen für $\rho = r$ und $\rho = R$:

$$\gamma \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}\right)_R = \theta_0 - \vartheta_R, \qquad \gamma \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}\right)_r = \vartheta_r - \theta.$$

Daraus ergibt sich:

$$a = \frac{\theta_0 - \theta}{\log \frac{R}{r} + \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}.$$

Somit

(5) $$L = \frac{2\pi l}{\log \frac{R}{r} + \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}.$$

Der Strom L_0 bei höherem Drucke, wo $\gamma = 0$ ist, welchem also die normale Abkühlungszeit entspricht, ist:

(5 a) $$L_0 = \frac{2\pi l}{\log \frac{R}{r}},$$

woraus durch einfache Rechnung folgt:

(6) $$\gamma = \frac{\log \frac{R}{r}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r}} \left[\frac{L_0}{L} - 1\right].$$

Das Verhältnis L/L_0 kann man den relativen scheinbaren Wärmeleitungskoëffizienten nennen, das ist derjenige Wert von $\varkappa$ (bezogen auf das normale $\varkappa = 1$), welcher durch die beobachtete Abkühlungszeit erfordert würde, falls der Temperatursprung nicht

vorhanden wäre. Zu seiner Berechnung dient Formel (4) und hieraus folgt mittels obiger Formel der Wert von γ.

Aus einer solchen vereinfachten Berechnungsweise würden sich betreffs der Abhängigkeit des Temperatursprungkoëffizienten vom Drucke nur unbeträchtliche Abweichungen ergeben, aber die aus den zwei verschieden großen Apparaten abgeleiteten Werte würden weniger gut übereinstimmen, was die Notwendigkeit der genaueren Berechnung beweist.

Um vorerst die Berechtigung der Vereinfachung (1) zu untersuchen, müssen wir sehen, inwieweit sich die Resultate ändern, wenn das Wachsen des Leitungsvermögens und der Strahlung mit steigender Temperatur berücksichtigt wird.

Zu diesem Zwecke vergleichen wir den Wert der variabeln $\varkappa$ und σ mit den konstanten Werten k und s, welche diese Koëffizienten hätten, wenn das Thermometer auf einer bestimmten Vergleichstemperatur Θ und die Hülle auf $\theta_0 = 0^0$ erhalten würde.

Für das Leitungsvermögen des Gases zwischen Thermometer und Hülle ist ein Wert zu setzen, welcher einem gewissen Mittel aus den beiderseitigen Temperaturen entspricht; der Einfachheit wegen nehme ich hierfür das arithmetische Mittel.

Dann ist $\varkappa$ durch die Gleichung gegeben

$$\frac{\varkappa}{k} = \frac{1 + \frac{\alpha}{2}\theta}{1 + \frac{\alpha}{2}\Theta},$$

wo α nach Winkelmann den Wert 0·0019 hat, oder angenähert:

$$\varkappa = k\left[1 - \frac{\alpha}{2}\Theta\right] + k\frac{\alpha}{2}\theta.$$

Der Wert von σ wird unter Voraussetzung des Stefan'schen Gesetzes durch die Relation bestimmt:

$$\sigma\theta : s\Theta = (\theta + 273)^4 - 273^4 : (\Theta + 273)^4 - 273^4,$$

welche sich mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung auf

$$\sigma : s = 1 + \frac{3}{2}\frac{\theta}{273} : 1 + \frac{3}{2}\frac{\Theta}{273}$$

reduziert. Man erhält also an Stelle von (2) die genauere Gleichung

$$-C\frac{\partial\theta}{\partial t}=\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\Theta\right)kL+\frac{sS}{1+\frac{3}{2}\frac{\Theta}{273}}\right]\theta+$$

$$+\left[\frac{\alpha}{2}kL+\frac{3}{2}\frac{1}{273}\frac{sS}{1+\frac{3}{2}\frac{\Theta}{273}}\right]\theta^2.$$

Zur Abkürzung möge der in der ersten Parenthese stehende Ausdruck mit A, der in der zweiten stehende mit B bezeichnet werden. Man erhält dann durch Integration:

$$t=\frac{C}{A}\left[\log\frac{\theta_1}{\theta}-\log\frac{1+\frac{B}{A}\theta_1}{1+\frac{B}{A}\theta}\right]. \tag{7}$$

Zur Berechnung von B und A aus L und S genügt offenbar die angenäherte Rechnung.

Um zunächst zu zeigen, inwieweit diese Formel geeignet ist, den Verlauf der Abkühlung darzustellen, führe ich hier eine Tabelle an, welche für zwei Beispiele: 1. Gefäß I mit Luft von Atmosphärendruck und 2. bestes Vakuum, die vom Teilstriche 100 der Thermometerskala bis zu den Teilstrichen 80, 60, 40, 20, 0 gemessenen Abkühlungszeiten, sowie die nach der angenäherten und der strengeren Formel berechneten Werte derselben und die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung ersichtlich macht.

Luft bei Atmosphärendruck.

Skala	t beob.	t ber. I	Δ_{I}	t ber. II	Δ_{II}
80	25·3	26·1	+ 0·8	25·4	+ 0·1
60	54·4	55·9	+ 1·5	54·8	+ 0·4
40	89·2	90·7	+ 1·5	89·4	+ 0·2
20	131·3	132·1	+ 0·8	131·3	0
0	184·0	184·0	0	184·0	0

Vakuum.

Skala	t beob.	t ber. I	Δ_{I}	t ber. II	Δ_{II}
80	105·1	111·9	+ 6·8	105·4	+ 0·3
60	228·4	239·6	+ 11·2	228·5	+ 0·1
40	376·4	387·3	+ 10·9	375·9	− 0·5
20	557·9	566·7	+ 8·8	557·2	− 0·7
0	789·0	789·0	0	789·0	0

Man sieht, daß die Differenzen gegen das einfache Abkühlungsgesetz (3) nicht unerheblich sind; und zwar sind sie desto größer, je mehr die Leitung gegen die Strahlung zurücktritt, was ja selbstverständlich ist, da der Temperaturkoëffizient bei der Strahlung größer ist als jener bei der Wärmeleitung.

Dagegen stimmt die mit Hinzuziehung des quadratischen Gliedes abgeleitete Formel in befriedigender Weise mit den Resultaten überein.

Bei obiger Rechnung war die Vergleichstemperatur Θ, der entsprechend k und s gewählt werden, so angenommen, daß die beobachtete Gesammtabkühlungszeit erhalten wurde. Wenn aber Θ beliebig festgesetzt ist, so kann, wie aus Formel (3) und (7) erhellt, die nach der einfacheren Formel berechnete Gesammtabkühlungszeit auf die genauere Formel reduziert werden mittels Division durch den Ausdruck

$$\frac{\varkappa L+\sigma S}{A}\left[1-\log\frac{\theta}{\theta_1}\log\frac{1+\frac{B}{A}\theta_1}{1+\frac{B}{A}\theta}\right].$$

Wenn nun hierin für Θ das arithmetische Mittel zwischen Anfangs- und Endtemperatur genommen wird, d. i. 34°, so ergibt die Rechnung, daß die durch die Reduktion bewirkte Korrektur nur Bruchteile eines Prozentes beträgt. Da überdies für diese Untersuchung nicht die absoluten, sondern die relativen Werte der Gesammtabkühlungszeiten in Betracht kommen, bei denen die Kor-

rektur noch geringer wird, so kann man dieselbe ganz vernachlässigen.

Dagegen würden größere Fehler verursacht werden, wenn man die zweite Vereinfachung beibehalten würde, welche bei Berechnung der Formel (2) eingeführt wurde und welche darin bestand, daß nur derjenige Teil des Wärmeleitungsstromes berücksichtigt wurde, welcher von dem zylindrischen Teile des Thermometers ausgeht.

In Wirklichkeit wird der Gesammtstrom L nahe gleich sein der Summe von L_r und dem Strome $L_\varkappa$, welcher zwischen den abgerundeten Thermometerenden, die man angenähert als Halbkugeln ansehen kann, und der zylindrischen Hülle stattfindet, wenn man vorerst von den durch den Stiel verursachten Unregelmäßigkeiten absieht.

Denkt man sich die beiden Enden zusammengefaßt, so kann man $L_\varkappa$ als nahezu identisch ansehen mit der Strömung zwischen einer Kugelfläche und einem dieselbe umgebenden Zylinder, welchen wir der Einfachheit wegen als unendlich lang ansehen, was in Anbetracht der Länge der benutzten Gefäße wohl gestattet ist. Die genaue Berechnung dieser Strömung, die für den Fall $\gamma = 0$ identisch ist mit der Bestimmung der Kapazität einer Kugel innerhalb eines Zylinders, würde eine schwierige und langwierige Untersuchung erfordern; in unserem Falle aber genügt ein Näherungswert, da $L_\varkappa$ überhaupt nur höchstens 20% des gesammten L ausmacht; zu diesem Zwecke suche ich einen oberen und einen unteren Grenzwert zu bestimmen, indem ich Rayleigh's Methode benutze [1]).

Eine untere Grenze wird erhalten, wenn man sich das leitende Medium — hier das Gas — durch unendlich dünne Schichten isolierenden Materials zerteilt denkt, sodaß die Stromfäden vorgeschriebene Bahnen erhalten, und den Gesammtstrom aus diesen Teilströmen zusammensetzt. Als solche Schichten wähle ich die Ebenen und Kegel, deren Scheitel im Mittelpunkte der Kugel liegt und durch deren Schnitt mit einer Kugelfläche die Meridiane und Parallelkreise gebildet werden, lasse den Strom also radial verlaufen, wie bei Strömung zwischen Kugelschalen.

[1]) Maxwell's Lehrbuch d. Elektrizität, p. 442.

Dann ist, wenn φ den Polabstand bezeichnet:

$$(\theta - \theta_0)\, L_\varkappa = -4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} \sin\varphi \, d\varphi$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck muß für ein bestimmtes φ unabhängig vom Radius sein, also:

$$\rho^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} = \text{const.} = -a,$$

und durch Integration:

$$\vartheta = \frac{a}{\rho} + b,$$

wobei a und b noch Funktionen von φ sein werden. Zur Bestimmung derselben dienen nach Formel (1) die Grenzbedingungen:

$$\vartheta_{\rho = \frac{R}{\sin\varphi}} - \theta_0 = -\gamma \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}\right)_{\rho = \frac{R}{\sin\varphi}} \sin\varphi = \gamma \frac{a \sin^3\varphi}{R^2}$$

$$\theta - \vartheta_r = -\gamma \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}\right)_{\rho = r} = \gamma \frac{a}{r^2}.$$

Aus diesen Formeln folgt:

$$L_\varkappa = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\frac{1}{r} - \frac{\sin\varphi}{R} + \frac{\gamma}{r^2} + \gamma \frac{\sin^3\varphi}{R^2}}$$

Die Integration wird vereinfacht und der Wert des Integrals nur wenig verändert, wenn man $\sin^3\varphi$ durch $\sin\varphi$ ersetzt, was erlaubt ist, da $L_\varkappa$ dadurch noch verkleinert wird; dann wird

$$L_\varkappa = \frac{4\pi r}{1 + \gamma/r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{1 - B \sin\varphi},$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{r(1 - \gamma/R)}{R(1 + \gamma/r)} = B$$

gesetzt wird.

Das Integral kann zerlegt werden in

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1 - B\sin\varphi} = \frac{1}{B}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1 - B\sin\varphi} - 1\right] d\varphi =$$

$$= -\frac{\pi}{2B} + \frac{1}{B}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - B\sin\varphi}.$$

Das letzte Integral ist identisch mit:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - B\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{1 - B^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+B}{1-B}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}},$$

also nach Einsetzen der Grenzen:

$$L_\varkappa = \frac{2\pi R}{1 - \gamma/R}\left[\frac{4}{\sqrt{1 - B^2}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+B}{1-B}} - \pi\right]. \tag{8}$$

Schwieriger ist die Bestimmung eines oberen Grenzwertes, welcher nicht gar zu groß wäre.

Offenbar wird die wirkliche Strömung zwischen Kugel und Zylinder geringer sein, als zwischen der Kugel und einer konzentrischen Hohlkugel vom Radius des Zylinders; für diesen oberen Grenzwert ergibt sich analog dem Vorhergehenden der Wert:

$$L_\varkappa = \frac{4\pi}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R} + \gamma\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}\right)}. \tag{9}$$

Die Grenzen (8) und (9) genügen zur Bestimmung der Strömung im weiteren Gefäße, da ihre Differenz za. 8% ihres Wertes oder einem Maximalfehler von za. ± 1% in der Größe von L entspricht, aber nicht für das kleinere Gefäß, wo der Maximalfehler fast 5% betragen könnte.

Rayleigh's Methode, die darin besteht, den Raum zwischen Kugel und Zylinder durch unendlich dünne Schichten von leitendem Material in schalenförmige Körper zu zerlegen und den Widerstand dieses Systems zu berechnen, welcher natürlich kleiner sein muß als der wirkliche, läßt sich schwer auf unseren Fall übertragen, wo an der Oberfläche noch ein variabler Temperatursprung besteht.

Für diesen Fall finde ich nun eine etwas bessere Näherung als Formel (9) durch folgende Überlegung: Die Stromlinien werden in der oberen Hälfte jedenfalls nach oben zu konvex sein (siehe linke Seite der Fig. 2); man wird deshalb sämtliche Strombahnen auffangen und in jeder den Strom vermehren, wenn man an Stelle des Zylinders zwei Kugelkalotten setzt, die in der Art sich überdecken, wie es die rechte Seite der Fig 2 zeigt. Die innere, mit dem Radius R gezogene, reicht von R bis zu einem beliebigen Punkte P, dem der Polwinkel φ entspricht, die äußere beginnt an dem Punkte R_1, wo die Zylinderoberfläche von dem vom Punkte P aus gezogenen Perpendikel geschnitten wird, und reicht bis zum Pole N.

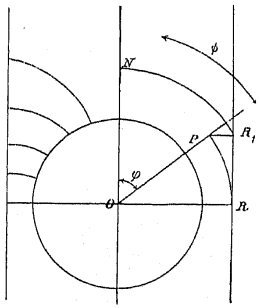

Fig. 2.

Die Summe der — teilweise sich überdeckenden — Strömung in NOR_1 und POR ergibt den gesuchten oberen Grenzwert, welcher bei dem obwaltenden Radienverhältnis für gewisse φ kleiner ist als der Wert (9). Eine günstige Größe des Winkels φ ist z. B. $\varphi = 60^0$.

Dies gibt also als obere Grenze gemäß Formel (9):

$$L_\varkappa = 4\pi\left[\frac{\cos\varphi}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R} + \gamma\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}\right)} + \frac{1 - \cos\psi}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \gamma\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)}\right], \tag{10}$$

wobei

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\cos\varphi}$$

und

$$R_1 = R\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}.$$

Ich verwendete die noch etwas günstigere Zerlegung in vier Stücke, und zwar mit den Winkeln $\varphi_1 = 80^0$, $\varphi_2 = 70^0$, $\varphi_3 = 60^0$, $\varphi_4 = 0^0$, und nahm dann für $L_\varkappa$ das arithmetische Mittel zwischen dem so erhaltenen oberen Grenzwerte (10) und dem unteren Werte (8). Dann beträgt die Unsicherheit in L für $\gamma = 0$ noch ± 1.6%,

sie wird aber mit wachsendem γ viel kleiner, da sich dann die beiden Werte einander rasch nähern.

Zu $\varkappa L_\varkappa$ ist aber ferner noch eine Korrektionsgröße $\varkappa'\Lambda$ hinzuzufügen, um dem Umstande Rechnung zu tragen, daß auch durch den Stiel eine Wärmemenge entweicht, welche trotz seines geringen Querschnittes wegen des relativ großen Leitungsvermögens des Glases nicht unerheblich ist. Eine angenäherte Schätzung derselben erhält man, wenn man den Stiel als Stab auffaßt, dessen Temperatur in jedem Querschnitt konstant ist, und der an einem Ende auf konstanter Temperatur erhalten wird, aber von der Oberfläche weg durch Leitung und Strahlung Wärme verliert.

Dann muß der Überschuß des Wärmestromes in x über jenen in $x+dx$ (die Stielaxe als X-Axe genommen) gleich sein der auf der Strecke dx der Oberfläche abgeleiteten und ausgestrahlten Wärme, also mit Zuhilfenahme von (5):

$$\varkappa'\rho^2\pi\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}=\frac{2\pi\varkappa\vartheta}{\log\frac{R}{\rho}+\gamma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho}\right)}+2\pi\rho\sigma\vartheta,$$

wo $\varkappa'$ den Wärmeleitungskoëffizienten des Glases, σ die Strahlungskonstante und ρ den Stielradius bedeutet.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{2}{\varkappa'\rho^2}\left[\frac{\varkappa}{\log\frac{R}{\rho}+\gamma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho}\right)}+\rho\sigma\right]=a^2,$$

so wird die Lösung:

$$\vartheta=Ae^{ax}+Be^{-ax}.$$

Der im Punkte $x=0$, wo der Stiel an das Thermometergefäß ansetzt, durchgehende Wärmefluß ist

$$(\theta-\theta_s)\,\varkappa'\Lambda=\varkappa'\rho^2\pi\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=0}=a\varkappa'\pi\rho^2(A-B).$$

Wird die Temperatur des Thermometers $=\theta$, jene des Stöpsels, welche übrigens, wie sich leicht berechnen läßt, bei meinem Apparate ganz ohne Einfluß war, gleich θ_s gesetzt, so erhält man $A-B=\theta-\theta_s$ und

$$(11)\qquad \varkappa'\Lambda=\pi\rho\sqrt{2\varkappa'}\sqrt{\frac{\varkappa}{\log\frac{R}{\rho}+\gamma\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{R}\right)}+\sigma\rho}.$$

Für $\varkappa'$ nahm ich einen Mittelwert aus dem Leitungskoëffizienten für Glas und Quecksilber mit Berücksichtigung des Querschnittverhältnisses des Stieles und der Kapillare ($\varkappa'=0{\cdot}00294$), für σ den von einer Bestimmung von Grätz herrührenden Wert $\sigma=0{\cdot}000104$.

Diese Stielleitung ist offenbar von desto größerem Einflusse, je geringer $\varkappa$ und je größer γ ist; für das Vakuum, wo die Formel sich auf $\pi\rho\sqrt{2\varkappa'\sigma\rho}$ reduziert, und wo sie auch am genauesten zutreffen wird, beträgt sie fast 5% des Gesamtwärmeverlustes.

Wenn endlich auch die dritte der früher gemachten vereinfachenden Annahmen fallen gelassen wird, daß nämlich die Glashülle einerseits und das Thermometergefäß andererseits als isotherme Massen betrachtet werden, so werden noch zwei Korrektionen nötig, die erste, um dem Umstande Rechnung zu tragen, daß die Innenfläche der Glashülle nicht die Temperatur 0, sondern eine etwas höhere besitzen wird, und die zweite, um zu berücksichtigen, daß die Temperatur der Oberflächenschichten des Thermometers etwas geringer sein wird, als die durch den Stand des Quecksilberfadens angezeigte Mitteltemperatur.

Zur Ableitung der ersteren Korrektion genügt die Betrachtung des stationären Zustandes, welcher für den Temperaturunterschied $\Delta\theta$ zwischen Innen- und Außenfläche der Glashülle die angenäherte Beziehung ergibt:

$$2\pi\varkappa' Rl\frac{\Delta\theta}{\Delta R}=(\varkappa L+\sigma S)\,\theta.$$

Der wahre Temperaturunterschied zwischen Thermometer und Innenseite des Glasgefäßes wird also sein:

$$\theta-\Delta\theta=\theta\left[1-\frac{(\varkappa L+\sigma S)\Delta R}{2\pi\varkappa' lR}\right].$$

Aus (2) und (3) folgt, daß man die Korrektur schon an t vornehmen kann, indem man die beobachtete Abkühlungszeit um den von $\varkappa$ und γ unabhängigen Wert

$$\frac{1}{2\pi\varkappa' l}\,\frac{\Delta R}{R}\,C\log\frac{\theta_1}{\theta}$$

vermindert; hierzu kommt eine analoge Korrektionsgröße, durch welche der Temperaturunterschied zwischen Innen- und Außenfläche des gläsernen Thermometergefäßes berücksichtigt wird.

Zur Berechnung der zweiten Korrektion muß man auf die ursprüngliche Differentialgleichung für Wärmebewegung in einem Zylinder mit äußerer Wärmeleitung zurückgehen.

Dieselbe lautet:

$$\frac{cs}{\varkappa''}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}$$

und wird erfüllt durch:

$$\theta = C_1 J_0(\alpha_1\rho)\, e^{-a_1 t} + C_2 J_0(\alpha_2\rho)\, e^{-a_2 t} + \ldots, \tag{12}$$

wo J_0 die Bessel'sche Funktion nullter Ordnung und a_n den Wert $\alpha_n\varkappa''/cs$ bezeichnet.

Die Koëffizienten C ergeben sich aus den Bedingungen, daß

I. der Wärmestrom für $\rho = r$ im Gase und in der Thermometersubstanz gleich sei, also

$$-2\pi\varkappa'' r l \left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)_r = (\varkappa L + \sigma S)\theta;$$

II. zur Zeit $t = 0$ die Temperatur im ganzen Querschnitt gleich einer Konstanten $= M$ sei (in den Versuchen za. 90°).

Aus (I) folgt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\varkappa L + \sigma S}{2\pi\varkappa'' r l} = b$$

gesetzt wird, für jedes a:

$$\alpha_n J_0'(\alpha_n r) + b J_0(\alpha_n r) = 0. \tag{13}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung geben die Werte der α_n und daraus folgen die entsprechenden a_n.

Aus (II) bestimmen sich die C mittels der Formel [1])

$$C_n = \frac{M}{B}\int_0^r J_0(\alpha_n\rho)\,\rho\, d\rho, \qquad \text{wo } B = \frac{(\alpha_n^2 + b^2) r^2}{2\alpha_n^2}\left[J_0(\alpha_n r)\right]^2$$

ist.

[1]) Heine, Kugelf. II, p. 213.

Durch Einführung der Differentialgleichung für die J und partielle Integration reduziert sich das bestimmte Integral auf:

$$\int_0^r J_0(\alpha_n\rho)\, d\rho = -\frac{r}{\alpha_n} J_0'(\alpha_n r)$$

und C_n wird gleich

$$C_n = \frac{2Mb}{(\alpha_n^2 + b^2) J_0(\alpha_n r)\, r}.$$

Die Temperatur $[\theta]$, welche das Thermometer angibt, ist eine Mitteltemperatur über den ganzen Querschnitt

$$[\theta] = \frac{4b^2 M}{r^2}\left[\frac{e^{-a_1 t}}{\alpha_1^2(\alpha_1^2 + b^2)} + \frac{e^{-a_2 t}}{\alpha_2^2(\alpha_2^2 + b^2)} + \ldots\right].$$

Davon wird nach sehr kurzer Zeit nur mehr das erste Glied übrig bleiben; dementsprechend wird die Temperatur an der äußeren Oberfläche (für $\rho = r$)

$$\theta = \frac{2Mb}{r(\alpha_1^2 + b^2)}\, e^{-a_1 t}$$

und der Unterschied zwischen diesen beiden:

$$\Delta\theta = [\theta]\left[1 - \frac{\alpha_1^2 r}{2b}\right]. \tag{14}$$

Setzt man in die Gleichung (13) die Reihenentwickelung

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2.4^2} - \frac{z^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots,$$

so erhält man mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung der Kleinheit:

$$1 - \frac{\alpha_1^2 r}{2b} = \frac{rb}{2} = \frac{\varkappa L + \sigma S}{4\pi\varkappa'' l}.$$

Ebenso wie oben erwähnt wurde, kann auch diese Korrektur an t vorgenommen werden, indem man den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi\varkappa'' l}\, C \log\frac{\theta_1}{\theta}$$

von dem beobachteten t subtrahiert [1]).

[1]) Bei dieser Ableitung ist allerdings der Einfluß der Konvektionsströme im Quecksilber, welche dazu beitragen werden, die Temperaturdifferenzen auszugleichen, vernachlässigt.

Die drei zuletzt berechneten, an t anzubringenden Korrektionsgrößen sind natürlich von desto größerem Einflusse, je kürzer die Abkühlungszeit ist; während sie im Vakuum nur 0·5% betragen, bilden sie beim Wasserstoff im Gefäß I za. 13% des Wertes von t. Für eine absolute Bestimmung von $\varkappa$ wäre dies ein bedenklicher Umstand, hier aber, wo die relativen Werte in Betracht kommen, kann dadurch nur eine geringe Unsicherheit hervorgerufen werden.

Mit Rücksicht auf die im Vorhergehenden entwickelten Formeln wurde die Berechnung in folgender Weise vorgenommen: von dem beobachteten t wurde zuerst die konstante Größe

$$\frac{1}{2\pi l} C \log \frac{\theta_1}{\theta} \left[\frac{1}{\varkappa'}\left(\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta R}{R}\right) + \frac{1}{2\varkappa''}\right]$$

subtrahiert; dann wurde aus dem so gewonnenen t der Wert (4):

$$\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t_s}\right] C \log \frac{\theta_1}{\theta}$$

berechnet — wobei natürlich auch für t_s der vollständig korrigierte Wert genommen wurde — dann davon die Stielleitung (11):

$$\varkappa' \Lambda = \pi\rho \sqrt{2\varkappa'} \sqrt{\frac{\varkappa}{\log \frac{R}{\rho} + \gamma\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R}\right)}} + \sigma\rho$$

und die Kugelendenleitung (8), (10):

$$\varkappa L_\varkappa = 2\pi\varkappa \left\{ \frac{R}{1 - \frac{\gamma}{R}} \left[\frac{2}{\sqrt{1 - B^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+B}{1-B}} - \frac{\pi}{2}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{n=4} \frac{\cos\varphi_n - \cos\psi_{n-1}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{n-1}} + \gamma\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_{n-1}^2}\right)} \right\}$$

subtrahiert, und das auf diese Weise erhaltene korrigierte $\varkappa L$ in die Formel (6):

$$\gamma = \frac{\log \frac{R}{r}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r}} \left[\frac{\varkappa L_0}{\varkappa L} - 1\right]$$

eingesetzt, woraus sich der gesuchte Temperatursprungkoëffizient γ ergab.

IV. Resultate.

Die im Folgenden mitgeteilen Abkühlungszeiten sind Mittel aus 2—7 Versuchen, welche zu verschiedenen Malen bei fast gleichen Drucken ausgeführt wurden und sehr gut miteinander übereinstimmten; die mittlere Größe der Beobachtungsfehler war fast immer kleiner als $^1/_2$% des Wertes, und es ergaben sich auch keine größeren Differenzen, wenn frisches Gas eingelassen war, oder wenn der Apparat stundenlang ruhig gestanden hatte. Nur bei den ganz niedrigen Drucken von der Größenordnung 0·001 *mm* waren die Beobachtungen schwankender, was wohl darauf beruht, daß die Druckmessung dabei schon unsicher ist, und daß der Einfluß des Quecksilberdampfes bemerklich wird. Letzterer ist in den vorliegenden Druckangaben nicht berücksichtigt, da ich die unter 0·01 mm Druck liegenden Werte hier nur der Vollständigkeit halber anführe, aus ihnen aber keine Konsequenzen ziehe, denn die theoretische Betrachtungsweise läßt sich überhaupt auf dieselben nicht mehr anwenden, da die mittlere Weglänge der Gasmoleküle dabei größer ist als die Dicke der Gasschicht. Eine eingehendere Untersuchung dieses Teiles der Phänomene muß einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Folgende Tabelle pp. 106 u. 107 enthält in der obersten Zeile die mit der früher erwähnten kleinen Korrektion wegen des Thermometerfehlers versehenen Abkühlungszeiten (vom Teilstrich 100 auf 0 der Thermometerskala), in der zweiten den dabei beobachteten Druck, in der dritten die nach O. E. Meyer berechneten mittleren Weglängen. Die bei höherem Drucke beobachteten, normalen Abkühlungszeiten, bei welchen Konvektionsströme und Temperatursprung keinen Einfluß haben, sind mit einem Sternchen bezeichnet.

In der vierten Zeile folgen die darauf bezogenen relativen scheinbaren Wärmeleitungskoëffizienten (vgl. Bemerkung zu Formel (6)), in der fünften die daraus berechneten Temperatursprungkoëffizienten γ, und in der sechsten das Verhältnis derselben zu den mittleren Weglängen.

Um auch eine Übersicht der numerischen Korrektionsrechnungen zu ermöglichen, habe ich die dabei hauptsächlich in Betracht kommenden Größen im Folgenden zusammengestellt.

Die wegen der Temperaturdifferenzen innerhalb der Glashülle

Luft im Gefäß I.

t	184·0	184·05*	187·8	190·6	202·4	227·5	255·8	320·0	411·1	552·8	644·1	716·2	763·5	sek.
p	710	41·0	4·74	2·57	0·90	0·371	0·213	0·095	0·0466	0·0173	0·0086	0·0039	0·0013	mm.
λ			0·00161	0·00297	0·00847	0·0205	0·0358	0·0802	0·164	0·441	0·886	1·93	5·86	cm.
$\frac{L}{L_0}$		1·00	0·973	0·954	0·876	0·741	0·621	0·431	0·267	0·122	0·0641	0·0290	0·00945	
γ			0·00371	0·00469	0·0136	0·0337	0·0587	0·127	0·264	0·690	1·41	3·23	10·1	cm.
$\frac{\gamma}{\lambda}$			1·69	1·58	1·61	1·64	1·64	1·58	(1·61)	(1·57)	(1·59)	(1·67)	(1·72)	

Luft im Gefäß II.

t	311	380	380·2*	383·7	388·4	398·5	416·5	443·9	509·8	545·8	628·2	698·7	sek.
p	770	211	37·9	1·72	0·80	0·34	0·163	0·086	0·023	0·024	0·010	0·0043	mm.
λ				0·00443	0·0953	0·0224	0·0468	0·0886	0·231	0·522	0·726	1·76	cm.
$\frac{L}{L_0}$		1·00		0·983	0·962	0·917	0·841	0·736	0·524	0·428	0·249	0·126	
γ				0·00734	0·0175	0·0398	0·0832	0·158	0·398	0·586	1·33	3·04	cm.
$\frac{\gamma}{\lambda}$				1·66	1·84	1·78	1·78	1·78	1·72	1·82	1·83	(1·73)	

Wasserstoff im Gefäß I.

t	36·8	36·82*	40·0	43·85	50·65	74·59	136·0	237·2	380·8	568·4	679·0	sek.
p	758	70	10·0	4·39	2·20	0·821	0·243	0·0988	0·0387	0·0137	0·00583	mm.
λ			0·00141	0·00321	0·00641	0·0172	0·0580	0·144	0·364	1·03	2·42	cm.
$\frac{L}{L_0}$		1·00	0·903	0·807	0·679	0·428	0·205	0·071	0·039	0·0157	0·00656	
γ			0·0103	0·0230	0·0456	0·129	0·374	0·896	2·10	6·03	14·6	cm.
$\frac{\gamma}{\lambda}$			7·30	7·16	7·12	7·48	6·45	6·22	(5·78)	(5·86)	(6·04)	

Wasserstoff im Gefäß II.

t	94·6	94·47*	98·28	105·8	120·3	162·0	244·2	273·3	384·6	421·4	546·4	633·9	658·1	sek.
p	760	37·9	5·25	1·67	0·676	0·26	0·10	0·078	0·0367	0·0288	0·0139	0·00687	0·00447	mm.
λ			0·0268	0·00844	0·0209	0·0548	0·140	0·180	0·384	0·489	1·01	2·05	3·15	cm.
$\frac{L}{L_0}$		1·00	0·957	0·881	0·760	0·530	0·306	0·259	0·144	0·120	0·0606	0·0332	0·0210	
γ			0·0197	0·0594	0·139	0·388	0·997	1·26	2·61	3·23	6·80	12·7	21·5	cm.
$\frac{\gamma}{\lambda}$			7·34	7·04	6·67	7·07	7·14	7·01	6·80	6·60	(6·70)	(6·19)	(6·82)	

$10^7 \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_S}\right) C \log \frac{\theta_1}{\theta}$	70075*	68234	66955	61738	52559	44413	31957	19914	9676	5485	2935	1526
$10^7 \cdot \varkappa' \Lambda$	16766*	1664	1658	1626	1563	1500	1375	1224	1052	957	889	855
$10^7 \cdot \varkappa L_\varkappa$	9325*	9119	8968	8352	7239	6210	4503	2896	1388	740	335	113
Luft im Gefäß II.												
$10^7 \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_S}\right) C \log \frac{\theta_1}{\theta}$	23172*	22777	22256	211·0	19393	16957	12176	10·57	6127	3506		
$10^7 \cdot \varkappa' \Lambda$	1286*	1278	1272	1246	1219	1174	1082	1042	967	901		
$10^7 \cdot \varkappa L_\varkappa$	4695*	4589	4449	4170	3723	3137	2079	1653	894	439		
Wasserstoff im Gefäß I.												
$10^6 \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_S}\right) C \log \frac{\theta_1}{\theta}$	48384*	438·8	39286	33158	21164	10296	4464·3	2310·5	886·4	418·2		
$10^6 \cdot \varkappa' \Lambda$	392*	383	371	351	301	228	172·5	122·8	80·7	38·7		
$10^6 \cdot \varkappa L_\varkappa$	6580*	6000	5165	4689	3120	1580	757·6	358·3	129·8	54·2		
Wasserstoff im Gefäß II.												
$10^6 \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_S}\right) C \log \frac{\theta_1}{\theta}$	15480*	15348	13965	119·8	8266·7	4751·8	40·3·5	2267·7	1893·5	1002·3	589·4	386·9
$10^6 \cdot \varkappa' \Lambda$	271*	265	255	237	201·2	161·1	151·1	126·8	118·2	108·1	94·9	90·4
$10^6 \cdot \varkappa L_\varkappa$	3387*	3095	2770	2289	1757·7	795·3	656·4	353·9	289·3	146·7	81·1	48·2

sowie des Thermometergefäßes an t anzubringende Korrektur war zufällig für beide Gefäße, somit für sämmtliche Beobachtungen gleich groß, nämlich 4·87 sek Der korrigierte Wert von $1/t_s$ betrug 0·0012233. Daraus ergaben sich folgende Werte p. 108 für die nach p. 104 berechneten Ausdrücke

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_S}\right) C \log \frac{\theta_1}{\theta}, \quad \varkappa' \Lambda \text{ und } \varkappa L_\varkappa.$$

Zuerst möge noch untersucht werden, mit welcher Genauigkeit sich die Bestimmung und Elimination der Strahlung bewerkstelligen läßt. Für die Abkühlungszeiten, welche bei höheren Drucken ungefähr im Verhältnis von 1 : 3 : 6 : 10 standen, fand ich im besten Vakuum:

Wasserstoff	im	Gefäße	I: 790·1 sek.
"	"	"	II: 789·1 sek.
Luft	"	"	I: 790 8, 790·1 sek.
"	"	"	II: 787·7, 788 2 sek.

Somit läßt sich ein Einfluß des Gases oder der Dimensionen des Gefäßes kaum nachweisen, was dafür spricht, daß hier fast nur mehr Strahlung vorhanden war; allerdings könnte man ersteren Umstand darauf zurückführen, daß dabei, wie früher auseinandergesetzt wurde, das Gas durch Quecksilberdampf ersetzt war, und letzteren darauf, daß bei den allergrößten Verdünnungen, wo die mittlere Weglänge sehr groß ist gegenüber den Dimensionen der Gefäße, die Wärmeleitung, wie die Gastheorie ergibt, von denselben unabhängig sein müße.

Nun erhöhte sich aber bei Versilberung des Gefäßes I und des Thermometers die Abkühlungszeit mit Luft als Füllung bei 40·4 mm Druck auf 229·0 sek. und im Vakuum auf 6807 sek. Dabei konnte also Wärmeleitung und Strahlung zusammen nur za. 12% des früheren Wertes, also nur 2·7% der ursprünglichen Größe (bei höherem Druck) betragen, und auch hiervon mußte, wie früher erwähnt, bei weitem das Meiste der Strahlung zuzuschreiben sein, sodaß tatsächlich die Wärmeleitung in diesem Vakuum zu vernachlässigen ist.

Eine zweite Probe für diese Berechnungsart ist die Vergleichung des Verhältnisses des beobachteten normalen Wärmestromes L_0 in den beiden Gefäßen mit dem Verhältnisse, wie es sich aus den Dimensionen nach Formel (5 a) berechnen läßt. Ersteres ist

bei Luft 3·44, letzteres 3·46, was angesichts der Schwierigkeit der genauen Messung der Dimensionen des Thermometers und der Berechnung der Korrektionen wegen der zugerundeten Termometerenden und des Stieles als sehr befriedigende Übereinstimmung angesehen werden kann. Größer ist die Abweichung bei den aus den Versuchen mit Wasserstoff abgeleiteten Werten 3·34, diese sind eben wegen der gar zu kurzen Dauer der Abkühlungszeit für die Bestimmung des $\varkappa$ nicht günstig, bezüglich der Größe von γ ist dies jedoch nur von geringem Einfluß.

Wenden wir uns nun zur Prüfung der früher auseinandergesetzten Hypothese bezüglich des Temperatursprunges.

Die Vergleichung der Werte des scheinbaren Leitungskoëffizienten in den beiden Gefäßen lehrt sofort, daß die Vermehrung der Abkühlungszeit bei diesen niedrigen Drucken sich nicht durch eine Verminderung des Leitungsvermögens $\varkappa$ der Gase erklären läßt — für welches übrigens nach der kinetischen Gastheorie gar kein Grund vorläge [1]) — denn dieses müßte ja bei gleichen Drucken in den beiden Gefäßen denselben Wert haben, während tatsächlich der Koëffizient z. B. für Luft bei 0·04 mm Druck in dem kleinen Gefäße za. 3 mal so groß ist als in dem größeren Gefäße.

Noch auffallender ist dies bei Wasserstoff.

Dagegen zeigt sich, daß die für γ/λ abgeleiteten Werte tatsächlich — wenigstens sehr annähernd — vom Drucke unabhängig sind und in den beiden Gefäßen nahezu denselben Wert haben:

Mittelwert [2]) für

	Luft	Wasserstoff
Gefäß I	1·62	6·96
Gefäß II	1·78	6·96

[1]) Vorausgesetzt, daß die spezifische Wärme konstant bleibt.

[2]) Hätte man die Rechnung nach den Formeln (4) und (6) ohne Berücksichtigung der Korrektionsglieder durchgeführt, so hätte man folgende Mittelwerte erhalten:

	Luft	Wasserstoff
Gefäß I	1·53	6·57
Gefäß II	1·90	7·06

Die Abweichungen erfolgen unregelmäßig und dürften größtenteils auf Fehler bei der Druckbestimmung zurückzuführen sein, welche überhaupt schwieriger ist als die Zeitmessung.

Die in Klammern eingeschlossenen Zahlen gehören Drucken an, bei welchen die mittlere Weglänge schon so groß ist, daß man für diesen Fall die Theorie nicht mehr strenge anwenden kann; sie scheinen — wenigstens beim Wasserstoff — eine Abnahme mit wachsender Verdünnung zu zeigen, wie ja auch der Gastheorie zufolge zu erwarten ist.

Immerhin muß die Übereinstimmung dieser Zahlen sehr bemerkenswert erscheinen, wenn man bedenkt, daß durch Berücksichtigung dieses einfachen Gesetzes für den Temperatursprung sich Beobachtungen an zwei Apparaten erklären lassen, bei denen die Dicke der ins Spiel kommenden Gasschichten wie 1 : 5 variierte, und bei welchen der Druck bis unter 0·001 mm sank, wo dann der scheinbare Wärmeleitungskoëffizient in einem Falle nur mehr den 150ten Bruchteil des normalen beträgt.

Auffallend ist der große Wert des Temperatursprungkoëffizienten für Wasserstoff. Während Kundt und Warburg bezüglich der inneren Reibung fanden, daß der Gleitungskoëffizient für Wasserstoff und Luft annähernd dasselbe Vielfache der mittleren Weglänge beträgt, ist er hier für ersteren fast das 7fache, für Luft nur das 1·7fache.

Ich vermute, daß der Grund darin liegt, daß die Wasserstoffmoleküle wegen ihrer geringen Masse auch einen geringen Teil ihrer lebendigen Kraft beim Zusammenstoß mit den Molekülen des festen Körpers austauschen.

Die Resultate nochmals kurz zusammenfassend, kann man also sagen: Während der Wärmeleitungskoëffizient im Inneren eines Gases bis zu sehr großer Verdünnung konstant ist, wird bei niedrigen Drucken der durch die Poisson'sche Grenzbedingung verlangte Temperatursprung von Einfluß, welcher — analog der Gleitung der Gase — gleich ist dem Produkt aus der mittleren Weglänge des Gases und dem konstanten Temperatursprungkoëffizienten. Als Wert des letzteren ergeben die Versuche

für Luft: $\gamma = 1{\cdot}70\,\lambda$ oder $\gamma = 0{\cdot}0000171$ cm. $\dfrac{760}{p}$

für Wasserstoff: $\gamma = 6{\cdot}96\,\lambda$ oder $\gamma = 0{\cdot}000129$ cm. $\dfrac{760}{p}$.

Dieser Temperatursprung kann natürlich je nach Umständen eine beträchtliche Größe erreichen; er betrug z. B. für Wasserstoff im Apparate I bereits bei 1 mm. Druck ein Viertel der ganzen Temperaturdifferenz, das ist za. 7°. Bei den größten Verdünnungen, wenn die Gefäßdimensionen klein sind gegenüber der mittleren Weglänge, wird schließlich die Temperatur des Gases im ganzen Zwischenraume konstant und zwar gleich einem Mittelwerte der beiderseitigen Begrenzungstemperaturen sein.

Die in dieser Arbeit mitgeteilen Versuche wurden im physikalischen Institute der Universität Berlin ausgeführt; es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle dem Leiter desselben, Herrn Prof. Warburg, für die Anregung zu dieser Untersuchung und für die vielfachen Ratschläge, die er mir im Laufe derselben zu Teil werden ließ, meinen besten Dank auszudrücken.

IX. ÜBER DEN TEMPERATURSPRUNG BEI WÄRMELEITUNG IN GASEN.

(Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CVII. Abt. I a, 1898; pp. 304—329).

I.

Die Grundlage, auf welcher die mathematische Theorie der Wärmeleitung beruht, besteht darin, daß die Temperatur innerhalb eines Körpers überall stetig variiert, und daß der Wärmestrom dem Temperaturgefälle proportional ist.

Schon von Poisson[1]) war jedoch die Ansicht ausgesprochen worden, daß an der Oberfläche eines Körpers oder überhaupt an der Grenzfläche zweier Körper, zwischen welchen Wärmeaustausch vor sich geht, ein endlicher — obwohl im Allgemeinen sehr kleiner — Temperaturunterschied $\theta_1 - \theta_2$ besteht, und für diesen Fall nahm er den Wärmestrom $\varkappa \frac{\partial \theta}{\partial n}$ jenem Temperaturunterschiede proportional an.

Der Proportionalitätsfaktor γ in der diese Anahme ausdrückenden Gleichung:

$$\theta_1 - \theta_2 = \gamma \frac{\partial \theta_1}{\partial n}, \tag{1}$$

wo n die ins Innere des Körpers 1 gezogene Normale bedeutet, soll fernerhin als Temperatursprung-Koëffizient bezeichnet werden.

Poisson begründet seine Hypothese durch Betrachtungen über die Strahlungsvorgänge (respektive auch Konvektionsströme) an der Oberfläche der Körper; diese pflegt man aber heutzutage von der

[1]) Théorie de la Chaleur, insbesondere Chap. V.