IV. RECHERCHES SUR UNE LOI DE CLAUSIUS AU POINT DE VUE D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DE LA RADIATION.

(Journal de Physique t. V, 1896; pp. 488—499).

I. — En appliquant les lois de la thermodynamique aux phénomènes du rayonnement, Clausius est parvenu à la conclusion [1]) que le pouvoir d'émission d'un corps noir dépend du milieu dans lequel le corps est plongé, c'est-à-dire qu'il doit être proportionnel au carré de son indice de réfraction [2]).

Cette loi offre un certain intérêt, d'une part, par la manière purement théorique dont elle a été trouvée, ce qui demande particulièrement une vérification expérimentale; d'autre part, elle paraît bien curieuse, puisqu'elle semble énoncer — en supposant que les rayons ne proviennent pas de la surface mathématique, mais de l'intérieur du corps — que le milieu extérieur exerce une action à distance, en changeant le pouvoir d'émission du corps en question.

Cette réflexion devient encore plus frappante si l'on considère la radiation d'un corps sensiblement transparent, par exemple d'un liquide ou d'un gaz, où les rayons passent à travers des couches épaisses avant d'arriver à la surface; ou doit-on interpréter la loi dans ce cas, en supposant que le rayonnement du corps aurait lieu dans le milieu de sa propre substance?

[1]) [voir p. 36 Ed.].
[2]) *Mech. Wärmeth.*, p. 336.

En ce qui concerne le premier point, je n'ai pu trouver qu'un seul travail expérimental sur la loi de Clausius, de M. Quintus Icilius [1]); ce travail, d'ailleurs, comme je le démontrerai plus loin, est fondé sur des principes incorrects. C'est d'une autre façon que j'ai essayé de faire une vérification de la loi, et j'ai obtenu un résultat affirmatif [2]).

Quant à la seconde remarque, je veux démontrer ici que tout s'éclaircit complètement quand on réduit le rayonnement de la surface d'un corps à celui des éléments de volume à son intérieur.

Jusqu'à présent on a basé la théorie mathématique de la radiation presque exclusivement sur la loi de Lambert qui, en considérant la superficie du corps comme siège du rayonnement, lui attribue un certain pouvoir d'émission qui, multiplié par le cosinus de l'angle d'émanation, devrait exprimer l'intensité de la radiation dans cette direction.

Mais certainement il est beaucoup plus conforme à la nature du phénomène de fonder la théorie sur la supposition que les rayons sont émis par les éléments du corps même, ce qui permet de la déduire d'hypothèses extrêmement simples et d'appliquer les mêmes formules aussi à la radiation de corps comme les liquides, les gaz, etc., tandis que la loi de Lambert n'est plus applicable dans ce cas-ci, et, en général, dans tous les cas où la transparence (diathermansie) des corps devient sensible.

La première idée d'une telle théorie est due à Fourier qui expliquait la loi du cosinus en admettant que la lumière provienne d'une certaine profondeur au-dessous de la surface du corps et, par conséquent, que le volume de cette couche lumineuse décroisse en raison du cosinus de l'angle d'émission.

Une démonstration plus exacte a été donnée par Lommel [3]) qui applique des principes semblables à ceux exposés plus loin à la déduction de la formule (2) et à la théorie de la fluorescence, en démontrant leur supériorité sur la théorie ancienne.

Mais, comme il néglige certains facteurs qui sont importants pour les conclusions suivantes, je me propose de développer ici la

[1]) *Pogg. Ann.*, t. CXXVII.
[2]) Voir plus loin.
[3]) *Wied. Ann.*, X, p. 449; 1880.

théorie avec plus de précision et d'en déduire la loi de Clausius et une modification plus importante encore pour le rayonnement à l'intérieur d'un corps.

II. — Supposons, d'abord, que chaque élément de volume d'un corps, dv, émette par unité de temps la quantité d'énergie rayonnante (calorifique ou lumineuse) ηdv, distribuée également dans toutes les directions; cette quantité serait égale à celle qui traverse une surface sphérique, circonscrite avec un rayon r, s'il n'y avait pas d'absorption; celle ci l'affaiblira jusqu'à la valeur σ.

Ma seconde supposition consiste en ce que chaque élément de volume absorbe une quantité proportionnelle à son volume et à la densité de la radiation $\frac{\sigma}{4\pi r^2}$ (ou, ce qui revient au même, que la radiation σ est diminuée dans l'espace dr de la quantité $\alpha\sigma dr$). Nous avons, par conséquent,

$$-d\sigma = 4\pi r^2 dr\,\alpha\,\frac{\sigma}{4\pi r^2} = \alpha\sigma dr,$$

ce qui donne la loi d'absorption bien connue: $\sigma = \sigma_0 e^{-\alpha r}$.

Imaginons maintenant un élément de surface dF vu, du centre de dv, sous un angle solide do, et dont la normale, que nous choisissons comme axe d'un système de coordonnées sphériques, forme un angle φ avec le rayon vecteur r.

La quantité d'énergie traversant cet élément sera exprimée par $\frac{do}{4\pi}\eta dv e^{-\alpha r}$, et la quantité émise par un corps entier par l'intégrale:

$$(1)\qquad \frac{1}{4\pi}\int do\,\eta e^{-\alpha r} dv$$

étendue aux limites du corps.

On peut remplacer ici do par $\frac{d\mathrm{F}\cos\varphi}{r^2}$ et, si on suppose que le corps rayonnant ait la forme d'un cône, d'angle solide $d\omega$, qui s'étend de dF à l'infini (fig. 1), l'intégrale se réduira, par l'expression $dv = r^2 d\omega dr$, à la formule:

$$(2)\qquad \frac{\eta}{4\pi}\int_0^\infty \frac{d\mathrm{F}\cos\varphi}{r^2} d\omega r^2 e^{-\alpha r} dr = \frac{\eta}{4\pi\alpha} d\mathrm{F} d\omega \cos\varphi$$

Si le milieu (transparent) B (fig. 1), qui se trouve de l'autre côté de la surface, a le même indice de réfraction que le milieu A, les rayons le traverseront sous le même angle φ et, par conséquent, nous pouvons considérer cette formule comme représentant la quantité d'énergie émise par un élément de surface d'un corps d'épaisseur très grande, en comparaison de α, sous l'angle φ.

En effet, (2) n'est autre chose que la loi de Lambert bien connue, dans laquelle $\frac{\eta}{4\pi\alpha} = \varepsilon$ représente le pouvoir d'émission.

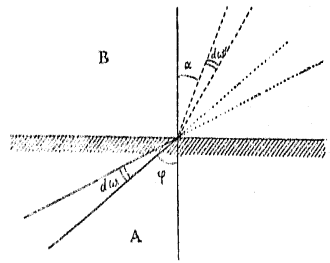

Fig. 1.

La quantité totale émise par un élément de surface sera égale à:

$$(3)\qquad \frac{\eta d\mathrm{F}}{4\pi\alpha}\int\int \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, d0 = \frac{\eta d\mathrm{F}}{2\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{\eta d\mathrm{F}}{4\alpha}.$$

Un corps pareil, comme nous l'avons supposé, paraît noir en couches assez épaisses, à moins que l'absorption α ne soit rigoureusement égale à zéro pour une certaine longueur d'onde; il absorbe tous les rayons calorifiques incidents, et la quantité qu'il émet lui-même est égale à celle qui serait émise par un corps appelé par Kirchhoff «parfaitement noir», c'est-à-dire tel qu'il absorbe déjà tous les rayons dans une couche infiniment mince.

Excepté ce cas-là, la notion du corps parfaitement noir ne peut jouer aucun rôle dans notre théorie, puisqu'il n'est qu'une abstraction mathématique fondée sur la supposition que le rayonnement et l'absorption sont localisés à la superficie.

Abandonnons la supposition que l'indice de réfraction soit égal des deux côtés; dans ce cas, le faisceau des rayons sortants change sa direction (de φ en ψ) et, en outre, il est affaibli, en vertu des lois de Fresnel, dans le rapport:

$$M = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}\left[1+\frac{1}{\cos^2(\varphi-\psi)}\right];$$

l'émission apparente ε' satisfera à l'équation:

$$M\varepsilon d\omega\, dF\cos\varphi = \varepsilon' d\omega' dF\cos\psi,$$

ce qui peut être réduit, ayant égard aux relations:

$$d\omega = \sin\varphi\, d\varphi\, d0,$$
$$d\omega' = \sin\psi\, d\psi\, d0$$

et à la loi de réfraction:

$$n_2\sin\psi = n_1\sin\varphi,$$

à l'expression:

$$\varepsilon' = M\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\varepsilon.$$

La quantité qui sort dans un cône $d\omega$, sous l'angle φ, dans le milieu sera, par conséquent,

$$\varepsilon' d\omega' dF\cos\psi = \varepsilon d\omega' dF\cos\psi M\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \tag{4}$$

Cette formule exprime, abstraction faite du facteur M, la loi de Clausius; elle exprime (I) que le pouvoir d'émission, qui doit être introduit dans la loi de Lambert, est augmenté dans le rapport du carré de l'indice du milieu à celui du corps.

Nous avons donc déduit cette loi d'une manière tout à fait différente, sans faire usage de la thermodynamique, en prouvant en même temps que l'agrandissement apparent du pouvoir d'émission n'est qu'une conséquence de la concentration ou de la dispersion des rayons à la surface.

Cependant nous devons faire quelques réserves quant à son exactitude générale.

D'abord, notre formule contient encore le facteur d'affaiblissement M, qui dépend de l'angle φ; elle nie, à vrai dire, l'existence de la loi de Lambert. Il est bien naturel que Clausius n'arrive pas à ce résultat, puisque sa déduction présume l'exactitude de cette loi.

D'autre part, il faut considérer, qu'en mesurant le pouvoir d'émission extérieur, on observe la valeur $\varepsilon n^2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$, si les rayons sortent perpendiculairement à la surface, et que les changements de facteur M ne sont considérables que pour des angles d'émanation assez grands.

Cela explique qu'on n'ait pas encore observé ce détail, d'autant plus que la loi de Lambert n'est pas encore suffisamment vérifiée pour les corps dont il s'agit ici. Car notre déduction suppose que le corps ait une surface complètement polie, sans réflexion diffuse, et, également, que les rayons ne se dispersent pas à l'intérieur, mais se propagent en ligne droite [1]).

Les corps qui entrent en considération doivent être complètement homogènes et isotropes, comme, par exemple, les liquides, les gaz, diverses sortes de verre, etc., tandis que les corps comme le marbre, le noir de fumée, le papier etc., qu'on a essayés jusqu'à présent presque exclusivement, demanderont des considérations beaucoup plus compliquées; en effet, on n'a pas encore réussi à trouver une formule générale qui donnerait exactement la variation de la radiation en fonction de l'angle φ, ce qui, d'ailleurs, se conçoit, puisqu'on aura dans chaque cas particulier une autre loi, suivant la structure de la substance et de sa surface.

Il est évident que la loi de Clausius exprimant l'influence du milieu ne pourra pas leur être appliquée, et, pour une cause semblable, il en sera de même dans le cas où le corps rayonnant est si mince que sa transparence devient sensible; mais, dans les deux cas, subsistera la modification de la loi que je déduirai pour le rayonnement de volume, et la formule (1) est suffisante pour résoudre chaque problème particulier pour les corps homogènes.

Une autre remarque est à faire, quand l'indice de réfraction du milieu extérieur est plus grand que celui du corps; dans ce cas, le rayonnement extérieur peut avoir lieu seulement jusqu'à l'angle de réflexion totale, et les parties du milieu qui se trouvent au delà ne seront pas atteintes; d'autre part, les rayons qui l'émettent eux-mêmes ne seront pas absorbés par le corps, mais réfléchis totalement à l'intérieur du milieu.

[1]) Les métaux exigeront une recherche spéciale, par suite de la grandeur de $\frac{1}{\alpha}$ en comparaison de λ.

Cette conclusion exige aussi une vérification expérimentale.

Une troisième conséquence, que nous déduisons de notre théorie, est que la lumière émise doit être partiellement polarisée, puisqu'elle a subi une réfraction, et son état de polarisation peut être facilement déterminé d'après nos formules.

En effet, on sait que ce phénomène a été découvert par La Provostaye et Desains, et Magnus a exprimé l'avis qu'il fusse dû à ce que les rayons proviennent de l'intérieur du corps.

Enfin, je détermine l'expression pour la radiation totale traversant un élément de surface; lorsque l'indice du milieu extérieur est plus grand que celui du corps rayonnant, elle sera:

$$\frac{\eta}{2\alpha}\,d\mathrm{F}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{M}d\varphi; \tag{5}$$

elle reste donc approximativement égale à $\frac{\eta d\mathrm{F}}{4\alpha}$, mais elle se concentre dans un cône d'angle $\psi = \arcsin\frac{1}{n}$.

Si l'indice du milieu est plus petit, nous aurons:

$$\frac{\eta}{2\alpha}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 d\mathrm{F}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{M}d\varphi, \tag{6}$$

elle est diminuée dans le rapport $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$, parce que le cône de matière rayonnante dont l'énergie se distribue sur une hémisphère dans le milieu B est devenu plus petit.

III. — Jusqu'à présent, il s'agissait toujours du même corps rayonnant A, qui se trouvait dans des milieux B d'indices n différents tandis que, maintenant, nous voulons comparer la radiation de corps différents ce qui nous obligera à introduire, en dehors de nos suppositions principales, encore le principe de Carnot, sous la forme que lui a donnée Clausius.

Supposons que le milieu adjacent B, ayant un indice de réfraction plus grand, rayonne aussi; dans ce cas, l'énergie totale passant de A à B sera, selon la formule (5):

$\frac{\eta_1}{4\alpha_1}\,\mathrm{N}d\mathrm{F}$ (N désigne une valeur moyenne de M);

celle qui passe de B à A:

$$\frac{\eta_2}{4\alpha_2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\mathrm{N}d\mathrm{F}.$$

Si la température des deux corps est la même, il est impossible, selon le principe mentionné ci-dessus, qu'une différence de température se produise d'elle-même, sans dépense d'un travail mécanique; donc les quantités $\frac{\eta_1}{4\alpha_1 n_1^2}$, $\frac{\eta_2}{4\alpha_2 n_2^2}$ devront être égales pour tous les corps et ne dépendre que de la température.

En écrivant cette égalité sous la forme $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = n_1^2 : n_2^2$ nous remarquons qu'elle a la forme de la loi de Clausius, mais sa signification est différente, puisque ε désigne ici l'émission à l'intérieur, et n l'indice de la substance rayonnante elle-même.

En tirant ces conclusions nous n'avons pas tenu compte de la composition de l'énergie formée de lumières de différentes longueurs d'onde; nous devrions donc remplacer ces expressions par des intégrales.

Mais il est facile de démontrer que les mêmes formules subsistent encore pour chaque couleur, en faisant usage de ce principe que l'équilibre calorifique doit être établi, non seulement entre les deux corps entiers, mais aussi entre leurs différents éléments de volume.

Cette condition est remplie d'elle-même à l'intérieur d'un corps de dimensions indéfinies, puisqu'un élément de volume absorbe la partie αdx de la radiation se produisant dans tous les sens; donc, en somme, ηdv, ce qui est exactement la quantité qu'il émet lui-même.

Mais, lorsqu'un tel élément auquel nous donnons la forme d'un disque d'épaisseur dh et de surface $d\mathrm{F}$ se trouve au voisinage de la surface de séparation (distance $= h$), l'effet produit par l'espace rempli de la substance A doit être le même que si l'espace A était rempli du milieu B, puisque la radiation du reste de l'espace ne change pas.

Un faisceau lumineux, sortant de la surface de séparation sous l'angle φ, arrive en $d\mathrm{F}$ avec l'intensité:

$$\frac{\eta_1}{\alpha_1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 e^{-\frac{ab}{\cos\varphi}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\vartheta\,d\mathrm{F}\,d\varphi,$$

[en supprimant M dans la formule (4), valable pour chaque longueur d'onde, ce qui ne change rien], la partie $\frac{\alpha_2 dh}{\cos\varphi}$ en sera absorbée; donc en somme:

$$\int_{\alpha_1}^{\eta_1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 e^{-\frac{ab}{\cos\varphi}} \sin\varphi\, \alpha_2 dh\, dF\, d\theta\, d\varphi\, d\lambda,$$

ce qui doit être égal à la radiation d'un milieu B dans une position identique:

$$= \int_{\alpha_2}^{\eta_2} e^{-\frac{ab}{\cos\varphi}} \sin\varphi\, \alpha_2 dh\, dF\, d\theta\, d\varphi\, d\lambda.$$

Ces relations doivent être remplies indépendamment de b ce qui, en général, n'est possible que si nous avons, pour une λ quelconque,

$$\frac{\eta_1}{\alpha_1 n_1^2} = \frac{\eta_2}{\alpha_2 n_2^2}.$$

De cette manière nous obtenons la loi suivante, qui est applicable aussi lorsque la loi (I) ne l'est pas:

(II). Le pouvoir d'émission d'un élément de volume d'un corps pour une couleur quelconque est proportionnel au produit de son pouvoir d'absorption par le carré de son indice de réfraction.

Pour démontrer la facilité de l'application des principes ci-dessus exposés, je me propose de discuter encore la théorie des expériences de Quintus Icilius et de calculer dans quelle proportion la conductibilité de la chaleur est due à la radiation intérieure.

IV. — Quintus Icilius observait le rayonnement d'une plaque noircie enfermée dans une boîte qu'on pouvait remplir d'hydrogène ou d'acide carbonique, à l'aide d'une pile thermo-électrique (qui se trouvait à une distance considérable par rapport à l'épaisseur de la boîte).

Il trouvait, en effet, une différence minime de l'ordre de grandeur de n^2 et, ayant éliminé par un dispositif habile la différence d'absorption des gaz, il croyait pouvoir considérer ce résultat comme une vérification de la loi de Clausius.

Pourtant, abstraction faite de ce que les gaz se prêtent très peu à de pareilles expériences, à cause de la petitesse de leur pouvoir de réfraction, il est facile de voir que la base théorique de son raisonnement est erronée.

Dans la figure 2, la face de la pile thermo-électrique atteinte par les rayons est désignée par T, la couche de gaz par G, et le corps rayonnant par C; il est évident que la grandeur de l'angle solide $d\omega$, dont les rayons arrivent à F, n'est changée presqu'en rien par l'interposition de la couche plan parallèle du gaz G et que, par conséquent, la quantité du rayonnement reste aussi sensiblement la même.

On peut obtenir naturellement le même résultat par un calcul

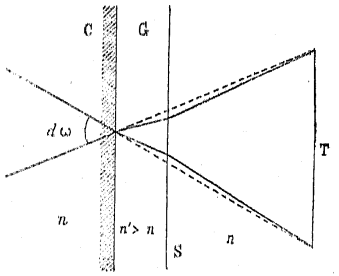

Fig. 2.

simple, si l'on tient compte de la réfraction à la surface de séparation S, qui diminue l'angle solide $d\omega$ d'une quantité presque égale à l'augmentation du pouvoir d'émission par suite de l'agrandissement de l'indice de réfraction extérieur.

Une analyse plus détaillée fournit pour l'augmentation apparente de la radiation d'un faisceau perpendiculaire de rayons qu'on produit en interposant des couches plan parallèles de substances d'indices de réfraction $n_1, n_2, \ldots$, et d'épaisseurs $b_1, b_2, \ldots$, l'expression:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon b^2}{n^2\left(\frac{b_1}{n_1} + \frac{b_2}{n_2} + \frac{b_3}{n_3} + \ldots\right)^2}$$

Il est facile, d'ailleurs, de se convaincre par l'expérience que l'effet reste le même, en observant le rayonnement d'un corps après avoir mouillé sa surface avec un liquide; on ne trouve, en effet, aucun changement d'émission, quoique celui-ci devrait être à peu près le double selon Q. Icilius, à cause de la grandeur de n à moins que la surface ne présente une réflexion diffuse, ce qui

introduirait de grandes complications, d'après ce que nous avons dit plus haut.

V. — Le rayonnement intérieur participe au transport de la chaleur dans un corps inégalement chauffé et produit une augmentation apparente de la conductibilité:

Imaginons un milieu de dimensions indéfinies avec un accroissement linéaire de température $\frac{d\theta}{dx} = c$ dans une direction x, que nous choisissons comme axe d'un système de coordonnées sphériques. Un élément de surface parallèle à l'équateur sera traversé par le flux de chaleur cK dû à la conductibilité et par une certaine quantité d'énergie rayonnante. D'après la formule (1), on trouve facilement pour celle-ci l'expression:

$$\int \frac{\eta}{2} e^{-ar} \sin\varphi \cos\varphi \, d\mathrm{F} dr \, d\varphi.$$

En supposant approximativement que η augmente en raison directe de la température: $\eta = e\theta = ecr\cos\varphi$, nous trouvons:

$$\frac{ecd\mathrm{F}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\infty} re^{-ar} dr = \frac{ecd\mathrm{F}}{2a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^2\varphi d\varphi = \frac{ecd\mathrm{F}}{6a^2}.$$

Donc, l'augmentation apparente du coefficient de conductibilité sera $\frac{e}{6a^2\mathrm{K}}$ ou $\frac{2n^2}{3a\mathrm{K}} \cdot \frac{\eta}{4an^2}$; $\frac{\eta}{4an^2}$ désigne l'émission totale d'une surface contre une autre d'une température supérieure de 1°.

Considérons par exemple le sulfure de carbone avec $a = 0{\cdot}863$, $n = 1{\cdot}52$; en prenant pour $\frac{\eta}{4an^2}$ la valeur 0·000130, on trouve $\frac{e}{6a^2} = 0{\cdot}000231$, tandis qu'on a trouvé pour K des valeurs comprises entre 0·000267 et 0·000595.

Cette quantité est donc du même ordre de grandeur que la conductibilité elle-même. L'effet sera semblable dans les verres, le sel gemme, etc.

Dans le dispositif employé ordinairement à la mesure de la conductibilité d'un liquide, celui-ci se trouve entre deux plaques de températures différentes; lorsque: 1° leur distance x est grande par

rapport à a, on observera la conductibilité apparente que nous venons de calculer; 2° lorsqu'elle est petite, il faut tenir compte, en outre de la conductibilité, de la chaleur transmise directement entre les deux plaques, dont l'influence disparaît avec $x = 0$; 3° en employant des distances moyennes, on observera la superposition des deux effets. En plus, il faut considérer que l'accroissement de la température ne sera plus exactement linéaire, mais qu'il augmentera un peu, par suite de l'échauffement du liquide par la radiation; dans la proximité des deux plaques, l'effet de la chaleur transmise directement, que l'on peut faire varier en changeant le pouvoir d'émission de la surface, sera un maximum pour une distance moyenne.

Sans doute, les grandes différences des coefficients de quelques liquides trouvés par les expérimentateurs sont explicables, au moins en partie, par ce fait qu'on a négligé jusqu'à présent ces effets de la radiation.

Le phénomène 1 pourrait être probablement observé directement en mélangeant un liquide très diathermane avec une petite quantité d'une matière très absorbante, qui changerait à peine la conductibilité, mais diminuerait le transport de la chaleur par la radiation intérieure.

C'est le dispositif 3 dont j'ai fait usage pour comparer le rayonnement d'une plaque couverte d'un vernis noir dans l'air et dans le sulfure de carbone, ce qui m'a fourni des résultats concordants avec la loi de Clausius [1]).

En résumant les résultats de cette recherche, nous pouvons dire:

Notre théorie permet de déduire les lois fondamentales de l'ancienne théorie, celle de Lambert et de Clausius, en démontrant, cependant, qu'elles ne sont applicables qu'avec certaines restrictions, tandis que les principes exposés ici, c'est-à-dire la formule (1) et la loi (II), modification de celle de Clausius, subsistent dans tous les cas et permettent de résoudre chaque problème, à moins que la nature ondulatoire de la lumière ne produise des phénomènes exceptionnels.

[1]) *C. R.*, t. CXXII, 1896.