

(z. B. bei Metallkolloiden  $R = 10^{-6}$  cm) eine wichtigere Rolle spielen könnte.

Ebenso kann, wie ich an anderer Stelle nachgewiesen habe<sup>1)</sup>, ein anderer Faktor, welcher wenigstens eine scheinbare Stabilität verursachen könnte, nämlich die an der Oberfläche der Teilchen ausgebreitete elektrische Doppelschicht (Thomson, Hardy), erst bei Teilchen unterhalb der Größenordnung  $10^{-6}$  cm sich hervorragend bemerkbar machen.

Vermutlich genügt jedoch die Flüssigkeitszähigkeit, als Ursache einer gewissen „scheinbaren“ Stabilität, um einen großen Teil der beobachteten Erscheinungen zu erklären. So folgt aus dem Stokes'schen Gesetze (28) für Mastixteilchen ( $\rho' = 1.0067$ ) vom Durchmesser  $10^{-4}$  cm eine Geschwindigkeit des Niedersinkens unter Einfluß der Schwere  $u = 3.5 \cdot 10^{-6}$ , d. i. 3 mm pro Tag, was bei den gewöhnlichen Beobachtungsmethoden zweifellos durch die unvermeidlichen Konvektionsströme verdeckt würde.

Nach alledem genügt also die bloße Kleinheit der Teilchen, um zu erklären, warum man ein Niedersinken derselben nicht beobachtet<sup>2)</sup>, aber eine weit schwierigere Frage ist die nach dem Mechanismus des unter gewissen Bedingungen eintretenden Zusammenballens der Teilchen, welches dann deren rasches Niedersinken veranlaßt; aber eine Erörterung dieser Frage würde den Rahmen dieser Arbeit weit überschreiten.

<sup>1)</sup> M. v. Smoluchowski, Bull. Acad. de Cracovie p. 182, 1903.

<sup>2)</sup> Es soll aber nicht behauptet werden, daß diese drei Arten Stabilität eine erschöpfende Erklärung des gesamten Beobachtungsmaterials geben.

### XXXI. PRZYCZYNEK DO TEORJI RUCHÓW CIECZY LEPKICH, ZWŁASZCZA ZAGADNIEŃ DWUWYMIAROWYCH.

#### I. Warunki służące do określenia ruchu.

§ 1. Wiadomo, że według badań<sup>1)</sup> Helmholtza, Kortewega i Rayleigha równania określające t. zw. „powolny“ ruch utrwalony cieczy lepkich, mianowicie:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \nabla^2 u \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \nabla^2 v \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \nabla^2 w \end{aligned}$$

nie posiadają więcej nad jedną całkę, zgodną z warunkami ciągłości i spełniającą warunek, ażeby prędkości  $u$ ,  $v$ ,  $w$  przybierały dane wartości na powierzchni badanego zakresu. Jeżeli zatem znaleziono rozwiązanie zadość czyniące owym warunkom, wiemy, że jest to jedyne możliwe rozwiązanie. Chcąc jednak na tej podstawie dobrać takie zadania matematyczne, które odpowiadałyby problemom praktyki, napotykaty pewne trudności.

Przedewszystkiem zauważyć trzeba, że wspomniane dowody jednoznaczności nie są ogólne, albowiem są związane z milcząco przyjętem założeniem, że zakres  $S$ , na którego powierzchni dane są

<sup>1)</sup> Helmholtz. Wissensch. Abh. I, p. 223, Korteweg, Phil. Mag. 16, p. 112 (1888), Rayleigh. Phil. Mag. 36, p. 354 (1893).

prędkości, nie sięga do nieskończoności. Polegają one mianowicie na tem, że całka kształtu  $\int F ds$  zniknąć musi wskutek znikania wielkości  $F$  na powierzchni  $S$ , podczas gdy tego rozmowowania nie można stosować w razie nieskończenie wielkiej powierzchni  $S$ , w której  $\lim F = 0$ . Istotnie poznamy później przykłady ruchów (§ 9, § 11), spełniających warunek  $\lim u = \lim v = \lim w = 0$ , podczas gdy jedyne rozwiązanie zgodne z warunkiem nieruchomości cieczy na ścianach naczynia zamkniętego, o rozmiarach skończonych, odpowiada stanowi zupełnego spoczynku; co dowodzi, że owo twierdzenie w tym razie nie jest prawdziwe.

§ 2. Po drugie zauważymy, że typowy sposób, którym w praktyce doświadczalnej wytwarzamy ruch przybliżenie trwały cieczy lepkiej, polega na tem, że włączamy dany przewod między dwa zbiorniki, w których utrzymujemy różne ciśnienia hydrostatyczne. Doświadczenie uczy, że wówczas przy danym kształcie przewodu ruch jest zupełnie określony, że zależy tylko od różnicy ciśnień wywieranych na powierzchnię cieczy w zbiornikach, nie zaś od ich kształtu i rozmiarów, jeżeli one są dostatecznie wielkie. Nasuwa się zatem pytanie, czy warunkom fizycznej jednoznaczności odpowiada jednoznaczność zadania teoretycznego, to znaczy: czy i kiedy podanie jednej wielkości, t. j. rozkładu ciśnienia, na miejsce trzech prędkości, może wystarczyć do teoretycznego określenia ruchu.

W ogólnym przypadku podanie samego ciśnienia oczywiście nie jest dostateczne, wystarczy zaś podanie trzech natężeń  $p_{zx}$ ,  $p_{yz}$ ,  $p_{xz}$ , działających na powierzchnię  $S$ , jeżeli  $S$  jest skończona, jak łatwo poznać z później przytoczonego wzoru (2).

§ 3. W razie obszaru  $S$  nieskończonego można łatwo dowieść twierdzenia, które objaśnia kwestję wyżej poruszone. Dany układ natężeń (skończonych)  $p_{zx}$ ,  $p_{yz}$ ,  $p_{xz}$ , działających w nieskończonej odległości, powodować może w danym naczyniu tylko jeden ruch „skończony“. „Skończonym“ nazywamy tutaj ruch, który niktąd nigdzie nie jest nieskończenie prędkości, ale dla którego całkowita ilość cieczy, przepływającej przez powierzchnię  $S$ , pozostaje skończoną, gdy  $S$  rozszerza się do nieskończoności. To znaczy:

$$\lim_{\infty} \int (v_n) dS = G,$$

przyczem trzeba wziąć bezwzględną wartość prędkości.

Pewnym specjalnym przypadkiem ruchu skończonego, odpowia-

dającym właśnie przykładom praktycznym, jest ruch, który nazwałby można „diafragmowym“, mianowicie ruch, którego linje prądu sięgać mogą wprawdzie do nieskończoności, ale tak, że żadna z nich nie przebiega całkowicie w nieskończonej odległości. W takim razie każde włókno prądu w tym obszarze, w którym znajduje się w skończonej odległości, może zostać przecięte przez przekrój  $q$ , tak że suma ich  $\sum q$  będzie skończona. Dlatego też ilość przepływająca przez te przekroje:  $\Sigma (v) q = I'$  będzie skończona, a z powodu stałej wartości iloczynu  $vq$  wzdłuż włókna prądu:

$$\lim_{\infty} \int (v_n) dS \leq 2I'.$$

Jeżeli niema linij prądu zamkniętych, jeżeli wszystkie sięgają z  $\infty$  do  $\infty$ , będzie ważny znak równości (u. p. § 7).

§ 4. Przedewszystkiem udowodnić łatwo, że żaden ruch skończony nie może powstać, jeżeli ciśnienia działające w nieskończoności równają się zeru. Wypływa to z równania, wyrażającego równoważność pracy wykonanej przez ciśnienia, działające na powierzchnię cieczy i energii rozproszonej wskutek lepkości:

$$(2) \quad \iint [p_{zx} u + p_{yz} v + p_{xz} w] dS = \mu \iiint \Phi dx dy dz.$$

Równanie to, w którym  $\Phi$  oznacza funkcję dyssypacyjną<sup>1)</sup>:

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

wynika z podstawienia wielkości:

$$(3) \quad p_{zx} = p_{xz} l + p_{yz} m + p_{xy} n = pl - \mu \left[ 2l \frac{\partial u}{\partial x} + m \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

i im podobnych do równania (2) i z całkowania częściowego przy użyciu równań (1). Całka powierzchniowa obejmuje zewnętrzną powierzchnię obszaru  $S$ , oraz ściany ograniczające ruch cieczy i wszystkie powierzchnie, na których  $u$ ,  $v$ ,  $w$  lub ich pochodne doznają nieciągłości. Takich powierzchni jednak we wnętrzu cieczy lepkiej być nie może z oczywistych powodów mechanicznych; jedyne na ścianach naczynia i tam tylko w pewnych punktach lub linjach,

<sup>1)</sup> Zob. n. p. Lamb, Hydrodynamics, p. 541 (1906).

np. na krawędziach matematycznie ostrych, tego rodzaju nieciągłości są dopuszczalne. Wówczas musi być spełniony warunek, że wartość pracy wykonanej przez nateżenia na powierzchnię, otaczającą owe punkty lub linie, redukuje się do wartości zero, gdy ta powierzchnia kurczy się do zera, gdyż krawędź czy ściana nieruchoma nie może wykonywać pracy. Bierzymy w rachubę tylko takie z spośród możliwych całek równań hydrodynamicznych (1), które odpowiadają tym warunkom ciągłości, gdyż tylko one mogą mieć bezpośrednie znaczenie fizyczne.

W równaniu (2) część całki powierzchniowej, która odnosi się do ścian nieruchomych, nie przyczynia się oczywiście do wartości pracy z powodu przylegania cieczy, t. j.  $u = v = w = 0$ . Pozostają składniki pochodzące od części powierzchni  $S$  położonych wewnątrz cieczy. Bezwzględna wartość ich jest oczywiście mniejsza od iloczynu wielkości  $G$  (określonej w § 3) przez największe wartości nateżeń  $p_x, \dots$  i t. d., panujące na  $S$ . Te jednak dążą do zera, gdy odsuwamy  $S$  do nieskończoności, wskutek czego znika całka z lewej strony równania. Zatem funkcja dysypacyjna  $\Phi$  będzie równa zeru, co wymaga, ażeby wszędzie było:  $u = v = w = 0$ .

Ponieważ dla ruchów powolnych (1) ważne jest prawo superpozycji, więc możemy dalej argumentować w znany sposób: gdyby przy danym rozkładzie nateżeń  $p_x, \dots$  dwa różne ruchy skończone  $u, v, w, u', v', w'$  były możliwe, różnice  $u-u', v-v', w-w'$  musiałyby stanowić ruch wytworzony przez znikająco małe ciśnienia, a zatem wogóle znikający, jak właśnie pokazaliśmy.

Twierdzenie o jednoznaczności ruchów skończonych, zadanych przez podanie rozkładu trzech ciśnień w nieskończoności działających, jest zatem udowodnione.

§ 5. Rozważmy jeszcze bliżej rodzaj ruchu cieczy w nieskończoności. Powstanie ruchu skończonego, wskutek skończonych ciśnień działających w nieskończoności, wymaga, ażeby naczynie, w którym ruch odbywa się, posiadało w nieskończoności przekrój nieskończenie wielki.

Ażeby określić pojęcie przekroju, wykreślmy z początku współrzędnych kulę o promieniu  $R$ ; przez „przekrój” rozumiemy będziemy część jej powierzchni, którą wycinają z niej ściany naczynia. Wyobraźmy sobie, że przekrój  $\lim_{\infty} S$  jest skończony. W takim razie mamy dwie możliwości do rozważenia. Albo prędkości w nieskoń-

czoności są nieskończenie małe, wtedy cała praca, wykonywana przez ciśnienia jest znikająco mała, więc według (2)  $\Phi$  musi wszędzie znikać, co pociąga za sobą:  $u = v = w = 0$ . Albo owe prędkości są skończone, a zatem także praca byłaby skończoną; a to jest sprzeczne z tem, że wtedy  $\Phi$  wskutek skończoności pochodnych  $\frac{\partial u}{\partial x}$  i t. d. byłaby różna od zera, zatem  $\iiint \Phi \, dv$  byłaby nieskończenie wielka. Wynika zatem konieczność przekroju  $\lim_{\infty} S$  nieskończenie wielkiego. Wskutek tego „skończoność” ruchu wymaga, ażeby prędkość w nieskończoności była znikająco mała, jak  $\frac{1}{R^2}$

w przypadku trójwymiarowym, jak  $\frac{1}{R}$  w dwuwymiarowym (z możliwym wyjątkiem pewnych punktów osobliwych). W ogólności zatem także pochodne  $\frac{\partial u}{\partial x}$  i t. d. będą tam znikająco małe, co zresztą takżę wynika ze skończoności całki  $\iiint \Phi \, dv$ . Z równań (3) wnioskujemy zatem, że:

$$\lim_{\infty} p_x = \lim_{\infty} p_y = \lim_{\infty} p_z = 0; \quad \lim_{\infty} p_x = \lim_{\infty} p_y = \lim_{\infty} p_z = p.$$

W ogólności zatem do zupełnego określenia ruchów skończonych i sięgających do nieskończoności wystarczy podanie jednej wielkości, t. j. rozkładu ciśnienia hydrostatycznego  $p$ , które działa w nieskończonej odległości; to zaś wyjaśnia kwestję w § 2 poruszone.

## II. Ruchy dwuwymiarowe.

§ 6. W przeciwstawieniu do wielkiej liczby badań nad dwuwymiarowymi ruchami cieczy *idealnych*, mało dotychczas zajmowano się dwuwymiarowymi ruchami cieczy *lepkich*, choć one są ciekawsze z punktu widzenia fizycznego. Zdaje się, że „transpiracja” cieczy między płaszczyznami równoległymi, wirowy ruch cieczy między wałcami współosiowymi i pewne ruchy wewnątrz koła, badane przez Rayleigha<sup>1)</sup> metodą źródeł i wpływów, są to jedyne dotychczas bliżej zbadane przykłady dwuwymiarowych ruchów trwałych cieczy lepkiej. Sądzę, że podane niżej inne przykłady takich ruchów mogą być interesujące, zwłaszcza, że są to najprostsze typy ruchów, sięgających do nieskończoności.

<sup>1)</sup> Phil. Mag. 36, p. 354 (1898).

Podamy przedewszystkiem pewną formę ogólnego rozwiązania równań (1) w razie ruchu dwuwymiarowego. Wskutek nieściśliwości cieczy można je napisać w postaci:

$$(4) \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

gdzie  $\zeta$  oznacza podwójną prędkość wirowania:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

i spełnia równanie:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0.$$

Linje równego ciśnienia i równego wirowania tworzą zatem system ortogonalny:

$$\frac{1}{\mu} p + i\zeta = f(x + iy).$$

Wyznaczywszy tym sposobem ciśnienie  $p$ , możnaby do dalszego całkowania równań (1) użyć metod analogicznych do metod teorii potencjału. Rozwiązanie przyjmuje jednak postać najdogodniejszą przez wprowadzenie funkcji prądu  $\psi$  zapomocą związków:

$$(6) \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

i przez użycie zmiennych niezależnych:

$$\alpha = x + iy; \quad \beta = x - iy.$$

Wynikają stąd związki

$$(7) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = i \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right); \quad \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Funkcja  $\psi$  musi uczynić zadość równaniu różniczkowemu, wynikającemu z (5):

$$(8) \quad \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} = 0,$$

którego ogólne rozwiązanie jest:

$$(9) \quad \psi = \alpha f_1(\beta) + \beta f_2(\alpha) + f_3(\alpha) + f_4(\beta).$$

Ponieważ  $\zeta = 4[f_1'(\beta) + f_2'(\alpha)]$  musi być rzeczywista, musimy

więc, jeżeli przez znak  $f$  odtąd oznaczymy funkcję rzeczywistą, mieć jedno z dwóch rozwiązań typu:

$$(10) \quad \text{A) } \psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) \quad \text{B) } \psi = \frac{1}{i} \left[ \alpha f'(\beta) - \beta f'(\alpha) \right]$$

$$\zeta = 4[f'(\alpha) + f'(\beta)] \quad \zeta = 4 \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{i}$$

$$p = 4\mu \frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{i} \quad p = 4\mu [f'(\alpha) + f'(\beta)]$$

albo też sumę dwóch takich funkcji, a na to nakłada się jeszcze, wskutek składników  $f_3, f_4$ , zwykły ruch potencjalny, wyrażony przez

$$(11) \quad \text{C) } \psi = g(\alpha) + g(\beta) \quad \text{lub} \quad \text{D) } \psi = \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{i}.$$

Ścianami naczynia mogą być powierzchnie, gdzie prędkość  $u = v = 0$ ; ich równanie można wyrazić w postaci

$$(12) \quad u^2 + v^2 = 4 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0.$$

Nie znamy jednak sposobu, jak do danego kształtu ścian dobrać odpowiednie rozwiązanie, a nawet nie wiemy, czy ruch trwały przy ich dowolnym kształcie jest możliwy. Wiemy tylko, że funkcje  $f, g$  nie mogą posiadać w ogólności punktów osobliwych w przestrzeni cieczą wypełnionej, jeżeli ruch ma być skończony; będą one leżały na ścianach lub w przestrzeni poza nimi.

§ 7. Kwestje te bliżej zbadamy w razie najprostszym, t. j. w przypadku ściany płaskiej  $y = 0$ . Przyjmujemy naprzód postać (10 B) z odpowiednim ruchem potencjalnym (11 D), skąd wynikają wyrażenia dla prędkości:

$$(13) \quad u = \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) - f(\alpha) - f(\beta) - g'(\alpha) - g'(\beta)$$

$$v = \frac{1}{i} \left[ \alpha f''(\beta) - \beta f''(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha) + g'(\alpha) - g'(\beta) \right].$$

Podstawiając tutaj  $u = v = 0$  dla argumentów  $\alpha = \beta$  (to znaczy  $y = 0$ ), dochodzimy do związku

$$g'(\alpha) = \alpha f''(\alpha) - f(\alpha).$$

wskutek którego równania (13) zamieniają się na

$$(14) \quad \begin{aligned} u &= (\beta - \alpha) \left[ f'(\alpha) - f'(\beta) \right] \\ v &= \frac{1}{2} \left[ 2(f(\beta) - f(\alpha)) + (\alpha - \beta)(f'(\alpha) + f'(\beta)) \right]. \end{aligned}$$

Biorąc zatem jakąkolwiek funkcję jednowartościową, np.  $f(x) = x^n$  (dla  $n$  całkowitego) otrzymujemy ruch zgodny z warunkiem spoczynku przy ścianie  $y = 0$ ; ale takie ruchy jako nieskończone niewiele zawayczają przedstawiają interesu.

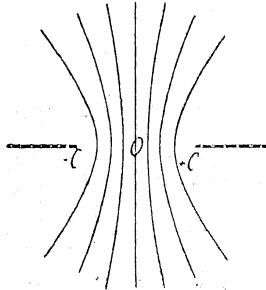


Fig. 1.

Obierzmy:

$$(15) \quad -f(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{2^2 - c^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha + c)(\alpha - c)} = \frac{1}{4}\sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$$

gdzie  $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$  oznaczają promienie wodzące od punktów  $\pm c$  do punktu  $\alpha$  i kąty przez nie utworzone z osią  $X$ , podczas gdy  $r, \theta$  oznaczają analogiczne wielkości względem punktu  $O$ . To wprawdzie nie jest funkcja jednowartościowa, ale, obliczywszy prędkości według (14):

$$(16) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \theta \sin \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \\ v &= \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \theta \sin \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \frac{c^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \end{aligned}$$

przekonywamy się, że one istotnie znikają dla ściany  $y = 0$  w części sięgającej od  $x = +1$  aż do  $x = \infty$  i w części od  $x = -1$

aż do  $x = -\infty$ ; przyjmując tę ścianę za nieprzekraczalną przegrodę, czynimy funkcję  $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  jednowartościową.

Równania (10) dają wartość wirowania:

$$(17) \quad \zeta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}} \right\} = \frac{2r}{r_1 r_2} \sin \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right);$$

ciśnienie otrzymujemy jako funkcję sprzężoną:

$$(18) \quad p = -\mu \frac{2r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right).$$

W nieskończonej odległości będzie  $\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) = 0$  dla dodatnich  $y$ , oraz  $\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) = \pi$  dla ujemnych  $y$ ; wskutek tego:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \zeta = 0$ ;  $\lim_{r \rightarrow \infty} p = \pm 2\mu$ , zależnie od tego, czy chodzi o ciśnienie w punkcie poniżej czy powyżej przegrody. Różnica ciśnienia po obu jej stronach, powodująca ruch, wynosi zatem  $4\mu$  jednostek; dla innej wartości tej różnicy ciśnienia należałoby tylko zmienić wszystkie prędkości w odpowiednim stosunku. Prędkość między punktami  $\pm c$  wynosi  $v = \sqrt{c^2 - x^2}$ , cała przeto ilość cieczy przez ten otwór w sekundzie przepływająca

$$(19) \quad F = 2 \int \sqrt{c^2 - x^2} dx = \frac{c^2 \pi}{2},$$

czyli w zależności od czynnej różnicy  $\Delta p$  ciśnienia:  $F = \frac{c^2 \pi}{8\mu} \Delta p$ .

Jest to jedyny ruch skończony możliwy przy istnieniu różnicy ciśnienia z dwóch stron ściany zaopatrzonej otworem; linje prądu (dla równych przyrostów wielkości  $\psi$ ) wykazujące, w jaki sposób przepływ cieczy odbywa się, są przedstawione na figurze 1. Do obliczenia ich użyto równania, wynikającego z (10, 11) przy wprowadzeniu funkcji  $f$  i  $g$ :

$$\psi = r\sqrt{r_1 r_2} \sin \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + c^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r \sin \theta + \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}{r \cos \theta + \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$$

§ 8. Dyskusję tę trzeba jeszcze uzupełnić rozwiązaniem rozkładu prędkości w nieskończonej odległości i w otoczeniu punktów  $\pm c$ .

Dla punktów w wielkiem oddaleniu  $r$  można przybliżenie przyjąć:

$$(20) \quad \lim \left[ \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] = \lim \left\{ -\frac{c^2}{2} \left( \frac{\theta_1 - \theta}{c} - \frac{\theta - \theta_2}{c} \right) \right\} = \\ = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{c^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}.$$

Zważywszy zaś, że to wyrażenie jest bardzo małą wielkością, można równania (16) uprościć:

$$(21) \quad \lim u = \frac{c^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{r} = \frac{c^2 xy^2}{r^4} \\ \lim v = \frac{c^2 \sin^3 \theta}{r} = \frac{c^2 y^3}{r^4}.$$

W większej odległości od otworu ciecz płynie zatem w kierunku promieni, z prędkością

$$V = \frac{c^2}{r} \sin^3 \theta.$$

Można te równania (21) także uważać za opis wypływu z bardzo małego źródła (o szerokości  $2c$ ) w ścianie  $y=0$ ; są one identyczne z rozwiązaniem otrzymanem przez Rayleigha dla wypływu przez otwór nieskończenie mały na obwodzie koła (wzór 22' loc. cit.), o ile chodzi o najbliższe otoczenie tego źródła.

To samo rozwiązanie możemy otrzymać bezpośrednio z równań (14), podstawiając:  $f(\alpha) = \frac{c^2}{8} \frac{1}{\alpha}$ ; ale ten sposób nie objaśnia zachowania się cieczy w bliskości punktu osobliwego  $r=0$ . Wynikają stąd równocześnie funkcja prądu:

$$\psi = \frac{c^2}{4} (2\theta - \sin 2\theta),$$

ciśnienia i wirowania:

$$(22) \quad \zeta = -c^2 \frac{\sin 2\theta}{r^2}, \\ p = -\mu c^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2},$$

które również można otrzymać z równań (17, 18) zapomocą rozwinięcia

$$(23) \quad \lim \log \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 (\log r)}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{r^2}.$$

Przyjmując pewien rozkład źródeł i wpływów w ścianie  $y=0$ , otrzymalibyśmy wypadkowy ruch, zgodny z warunkiem spoczynku przy pozostałych częściach ściany, przez sumowanie (całkowanie) wyrażań w rodzaju (21), zaopatrzonych odpowiednimi stałymi.

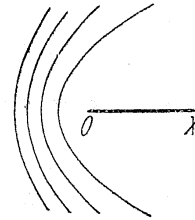


Fig. 2.

§ 9. Ażeby zbadać rodzaj ruchu w otoczeniu bezpośrednim punktu  $+c$ , rozwiniemy funkcję (16) przy użyciu związków

$$r \sin \theta = r_1 \sin \theta_1; \quad r \cos \theta = c + r_1 \cos \theta_1.$$

Powijając wielkości wyższych rzędów, otrzymujemy:

$$(24) \quad u = \sqrt{2c} \sqrt{r_1} \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2}, \\ v = \sqrt{2c} \sqrt{r_1} \sin^3 \frac{\theta_1}{2},$$

co dowodzi, że prędkości przy „matematycznie ostrych“ krawędziach  $\pm c$  nie są nieskończone, jakby na pozór sądzić byłoby można z (16) i jakby istotnie być musiało w cieczy idealnej, lecz że przeciwnie są równe zero. Jest to wynik doniosły dla teorii Helmholtza o powstawaniu strumieni cieczy<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Patrz: Helmholtz, Ges. Abhandl. I, p. 146; Smoluchowski, Rozpr. Akad. Um. 44, str. 144 (1904).



To samo rozwiązanie (24) otrzymujemy z równań ogólnych (14), podstawiając  $f(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2c}\alpha$ ; przedstawia ono przepływ cieczy nieskończonej naokoło krawędzi matematycznie ostrej (fig. 2).

Linje prądu wynikają z funkcji prądu  $\psi$ , oznaczonej według (10, 11)

$$(25) \quad \psi = -\frac{\mu}{2}\sqrt{2c} \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right]^2,$$

jako parabole współogniskowe z punktem  $+c$ ; z tych samych równań wypływa funkcja wirowania i ciśnienia:

$$(26) \quad \zeta = -\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2}; \quad p = -\mu \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

W punkcie  $c$  funkcje te są nieokreślone, znikają zaś w nieskończoności.

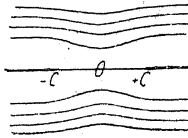


Fig. 3.

§ 10. Na przykładach §§ 7, 8, 9 można łatwo pokazać, że istnieją także inne ruchy czyniące zadość tym samym warunkom granicznym, t. j. danemu kształtowi ścian i danemu rozkładowi ciśnienia w nieskończoności, ale pomiędzy nimi tylko jeden ruch (16) będzie skończony.

Przyjmijmy n. p. formę (10 A) z odpowiednim ruchem (11 C) i postąpimy analogicznie jak w § 7. Znajdujemy rozwiązanie:

$$(27) \quad \begin{aligned} u &= i \{ 2 [f(\alpha) - f(\beta)] + (\alpha - \beta) [f'(\alpha) + f'(\beta)] \} \\ v &= (\beta - \alpha) [f'(\alpha) - f'(\beta)], \end{aligned}$$

które, przynajmniej dla funkcji jednowartościowych, spełnia warunki  $u = v = 0$  przy ścianie  $y = 0$ .

Podstawiając  $f = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - c^2}$ , otrzymujemy:

$$(28) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \theta \cos \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ v &= \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \theta \sin \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \\ p &= 2\mu \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right); \quad \zeta = 2 \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \\ \psi &= r \sqrt{r_1 r_2} \sin \theta \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Jest to ruch spełniający warunek:  $\lim_{\infty} p = 0$ ; można by go zatem nałożyć na ruch (16), nie zmieniając ciśnienia w nieskończoności,

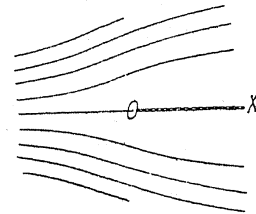


Fig. 4.

ale należy on do klasy ruchów nieskończonych, gdyż  $\lim_{\infty} u = -2y$ . Odpowiada on przepływowi wzdłuż ściany zaopatrzonej otworem (fig. 3).

§ 11. Jeżeli podobnie jak w § 9 zbadamy rodzaj ruchu w otoczeniu punktu  $\alpha = +c$ , otrzymamy wzory:

$$(29) \quad \begin{aligned} u &= -\sqrt{2c}\sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \left( 1 + \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right) & v &= -\sqrt{2c}\sqrt{r} \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \\ p &= -\frac{\mu\sqrt{2c}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta_1}{2} & \zeta &= \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta_1}{2} \\ \psi &= 2\sqrt{2c}\sqrt{r^3} \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2}, \end{aligned}$$

które bezpośrednio z (27) otrzymać można przez podstawienie  $f = \sqrt{\alpha}$ . Otrzymaliśmy przepływ styczny cieczy wzdłuż ostro zakończony krawędzi (fig. 4).

Nakładając to rozwiązanie pomnożone przez odpowiednie stałe na równania (24), otrzymamy wzory opisujące przepływ cieczy koło ostrej krawędzi, z dowolną składową styczną i normalną.

Np. fig. 5 przedstawia ruch określony przez:

$$(30) \quad \psi = 2\sqrt{r^3} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

§ 12. Ażeby przeciwnie zbadać ruch (28) w znacznej odległości, możemy użyć tych samych rozwinięć jak w § 8. Opuszczając

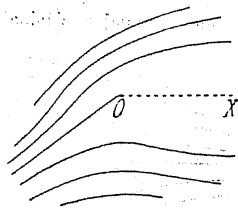


Fig. 5.

składnik:  $u = -2y$ ;  $v = 0$ , jako obojętny dodatek ruchu potencjalnego, otrzymujemy wzory:

$$(31) \quad \begin{aligned} u &= \frac{c^2}{2r} \sin 2\theta \cos \theta & v &= \frac{c^2}{2r} \sin 2\theta \sin \theta \\ p &= \frac{c^2 \mu}{r^3} \sin 2\theta & \zeta &= -\frac{c^2}{r^2} \cos 2\theta, \end{aligned}$$

które wypływają także bezpośrednio z wzoru (27) po podstawieniu  $f(\alpha) = \frac{c^2}{8\alpha}$ . Przedstawiają one ruch w obrębie półprzestrzeni, wywołany przez istnienie prądu stycznego na miejscu jednego elementu ściany w punkcie  $O$ . Z drugiej strony można ten ruch interpretować jako ruch wzbudzony w przestrzeni zawartej między ścianami prostopadłymi  $X, Y$  wskutek obecności źródła o natężeniu  $\frac{c^2}{2}$  w punkcie ich przecięcia.

Nakładając<sup>1)</sup> zaś ten ruch na ruch określony przez równania (21), otrzymujemy wypływ ze źródła do przestrzeni między ścianami, stykającymi się pod dowolnym kątem (mniejszym od  $\frac{\pi}{2}$ )  $\alpha = \arctg a$ :

$$(32) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} [\cos \theta - a \sin \theta] \\ v &= \frac{\sin^2 \theta}{r} [\cos \theta - a \sin \theta] \end{aligned}$$

Prędkość wypadkowa, skierowana wzdłuż promieni wodzących, wynosi:

$$V = \frac{\sin \theta \sin(\alpha - \theta)}{r \sin \alpha}$$

Zauważę jeszcze, że ruch (31), tak samo jak (21), jest zawarty, jako postać graniczna, między ruchami badanymi przez Rayleigha; wynika on z wzoru (33') loc. cit., jeżeli promień koła, w obrębie którego ruch ma się odbywać, stanie się nieskończenie wielki.

Z drugiej strony zajmujące jest porównanie ruchów (16), (24) z odpowiednimi ruchami o symetrii osiowej, zbadanymi przez Sampsona<sup>2)</sup>. Autor ten dowiódł, że, w razie ściany płaskiej zaopatrzonej otworem kołowym, możliwy jest ruch, którego linie prądu (w przekroju osiowym) są hyperbolami współogniskowymi. Funkcja prądu jest określona przez:

$$(33) \quad \psi = \frac{Vc^2 q^2}{3},$$

gdzie  $c$  oznacza promień otworu,  $V$  prędkość w jego środku,  $q$  spółrzedną hyperboliczną punktu  $x, y$ , to znaczy pierwiastek hyperboliczny równania dla  $\lambda$ :

$$(34) \quad \frac{x^2}{1-\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2} = c^2.$$

<sup>1)</sup> Z warunków ciągłości prędkości wynika następująca reguła dla nakładania ruchów składowych. Można nakładać na siebie ruchy, odbywające się wobec ścian stałych o jednakowym kształcie. Ruchy o różnym kształcie ścian można również nakładać na siebie, ale tylko wówczas, jeżeli przestrzeń zajęta przez ciecz dla ruchu wypadkowego nie zawiera części, w których znajdowały się ściany jednego z ruchów składowych.

<sup>2)</sup> Phil. Trans. Vol. 182, p. 449.



W bezpośrednim otoczeniu krawędzi otworu, to jest w odstępach małych w porównaniu z jego średnicą, hyperbole degenerują w parabole i ruch (33) okazuje się istotnie identycznym z ruchem badanym w § 9. Przeciwnie, dla bardzo wielkiej odległości od otworu otrzymujemy z równania Sampsona wzory dla trójwymiarowego wypływu ze źródła w ścianie płaskiej; wynik jest do pewnego stopnia analogiczny do § 8, gdyż ciecz tak samo jak tam wypływa w kierunku promieni wodzących z prędkością proporcjonalną do  $\sin^2 \theta$ , ale odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości  $r$ ; rozkład ciśnienia jest określony przez wzór

$$(35) \quad p = \frac{c\mu}{r^3} \left( \frac{3}{r^2} y^2 - 1 \right).$$

## XXXII. CONTRIBUTION À LA THÉORIE DU MOUVEMENT DES LIQUIDES VISQUEUX; EN PARTICULIER DES PROBLÈMES EN DEUX DIMENSIONS.

### I. Conditions qui suffisent à la détermination du mouvement.

§ 1. D'après les recherches de Helmholtz, de Korteweg et de Lord Rayleigh<sup>1)</sup>, les équations qui définissent le mouvement lent des liquides visqueux au cas du régime permanent, c'est-à-dire:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \nabla^2 u \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \nabla^2 v \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \nabla^2 w \end{aligned}$$

n'ont qu'une seule intégrale satisfaisant aux conditions de la continuité et à la condition d'après laquelle les vitesses  $u$ ,  $v$ ,  $w$  prennent des valeurs données à la surface de l'espace envisagé. Donc, si l'on a trouvé une telle solution, on sait que c'est la seule possible. Mais des difficultés se présentent lorsqu'on essaye, en s'appuyant sur ce théorème, de construire des mouvements qui correspondent aux problèmes fournis par l'expérience.

D'abord, il faut remarquer que les preuves du théorème en question reposent sur la supposition sous-entendue que l'espace  $S$  à la surface duquel les valeurs des vitesses sont données n'est pas in-

<sup>1)</sup> Helmholtz, *Wissensch. Abh.* I, p. 223. Korteweg, *Phil. Mag.* 16, p. 112 (1883), Rayleigh, *Phil. Mag.* 36, p. 354 (1894).