

## XXV. SUR LA FORMATION DES VEINES D'EFFLUX DANS LES LIQUIDES.

(Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences mathématiques et naturelles 1904; pp. 371—384).

### I.

Un des phénomènes les plus ordinaires et pourtant trop peu étudiés de l'Hydrodynamique est la formation d'une veine d'efflux qui se produit lorsqu'un liquide passe par un petit orifice avec une vitesse suffisante. On peut expliquer ce fait lorsque le liquide, en traversant p. ex. une ouverture dans le fond d'un vase, sort dans l'air ambiant, par l'action de la gravité et de la tension capillaire, qui ont la plus grande influence sur la forme du jet et qui peuvent causer même sa dispersion en une série de gouttelettes. Mais même lorsque l'espace extérieur est rempli du même liquide (rendu visible par une différence de coloration) où ces forces ne peuvent pas opérer, le liquide forme une veine, au lieu de s'épandre dans toutes les directions. Ce phénomène est bien connu en Aéromécanique (colonne de fumée, jet de vapeur).

À première vue, l'interprétation de ces phénomènes dans l'Hydrodynamique des liquides paraît impossible, puisqu'alors la distribution des lignes de flux devrait être analogue à celle des courants électriques qui, au contraire, tendent à remplir toute l'étendue du corps conducteur. Helmholtz<sup>1)</sup> cependant a établi une différence importante entre les deux cas, qui consiste en une condition additionnelle de l'Hydrodynamique, à savoir que la pression absolue ne peut diminuer au-dessous de zéro. En dépassant cette limite, le liquide se déchirerait, et la rupture engendrerait une surface de discontinuité. Or la théorie exige que la vitesse du liquide, qui est liée à la diminution de pression par la formule

$$(1) \quad p = p_0 - \rho \frac{v^2}{2},$$

devienne infinie à chaque arête pointue, d'où résulterait toujours la naissance de surfaces de discontinuité en ces endroits. Dans le cas mentionné il faut imaginer, d'après Helmholtz, que le liquide se fend au bord de l'orifice, et que la surface de discontinuité, où la pression est zéro, produit ce que nous appelons une veine d'efflux, en séparant les parties centrales, animées d'un mouvement rapide, de l'eau dormante à l'extérieur.

Cette théorie qui donne lieu, dans le cas de deux dimensions, à un emploi élégant de fonctions de variables complexes, a été le point de départ d'une foule de recherches<sup>2)</sup> sur des formes spéciales de veines; ces travaux forment un domaine considérable de l'Hydrodynamique classique, très intéressant au point de vue mathématique. Mais il semble qu'on n'a jamais essayé de vérifier par l'expérience les hypothèses sur lesquelles elle repose. Il faut remarquer d'ailleurs que cette théorie n'a pas été acceptée sans contradiction: c'est surtout Lord Kelvin<sup>3)</sup> qui s'est toujours opposé à l'hypothèse des surfaces de discontinuité.

En effet, la supposition d'une telle surface où deux parties du liquide de vitesses permanentement différentes sont en contact, quoique justifiée dans le cas de liquides parfaits, est inadmissible pour les liquides réels doués d'une certaine viscosité, puisque le frottement nivellerait très rapidement une différence de vitesses<sup>4)</sup>. On ne peut la regarder que comme une fiction mathématique dont l'usage peut être quelquefois avantageux.

Nous n'examinerons pas si un mouvement de cette nature, en admettant qu'il soit possible, serait stable; nous serons conduits à élucider cette question par l'expérience à la fin de ce travail; mais il faut insister, au contraire, sur ce fait que l'hypothèse d'un liquide parfait s'écarte de la réalité surtout en ce qui est le plus important pour notre théorie, en admettant un glissement parfait, le long des parois du vaisseau et de l'orifice, tandis que les liquides réels y forment une couche adhérente immobile et par consé-

<sup>1)</sup> Kirchhoff Crelle J. 70 (1869), Abhdlg. p. 416; Rayleigh. Phil. Mag. 5 (1876) p. 430; Mitchell Phil. Trans. 1890; Réthy Beibl. 1895 p. 679 etc.

<sup>2)</sup> Nature 50 p. 524—597 (1894).

<sup>3)</sup> Voir p. ex. Lamb Hydrodynamics p. 541.

<sup>4)</sup> Berl. Ber. 1868 p. 215, Gesam. Abhdlg. I p. 146.

quent, ne donnent pas lieu à une prétendue infinie diminution de la pression aux arêtes pointues.

D'autre part, comme je l'ai exposé en un autre travail <sup>1)</sup>, les équations ordinaires des fluides suffisent, bien entendu si l'on tient compte de la viscosité, pour expliquer le phénomène en question: l'asymétrie des lignes de flux par rapport à la surface de séparation.

Lorsque le mouvement est assez lent pour permettre l'omission des termes du second degré par rapport aux vitesses, les équations du mouvement

$$(2) \quad \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \text{ etc.}$$

ne changent pas par la substitution de  $-u, -v, -w, a-p$  au lieu de  $u, v, w, p$ ; les lignes de flux ne changent donc pas de forme (seulement de direction) par suite d'une inversion des différences de pression; par conséquent, elles doivent être symétriques des deux côtés de l'orifice pourvu que les parois soient symétriques.

À mesure de l'accroissement des vitesses, les termes d'inertie gagnent en importance, la substitution mentionnée cesse d'être applicable et le mouvement devient asymétrique.

Il est facile de reconnaître, en considérant l'effet de ces deux facteurs, que leur résultat sera précisément une tendance au changement du mouvement dans le sens indiqué par le phénomène des veines.

Le but de l'étude expérimentale exposée dans ce travail est de résoudre la question de savoir si c'est bien l'effet de l'inertie et de la viscosité, comme nous le supposons, qui produit le phénomène des veines d'efflux.

## II.

Dans nos expériences nous avons employé la méthode bien connue <sup>2)</sup> qui consiste à faire entrer une matière colorante en un

<sup>1)</sup> Ce Bulletin 1903, p. 149.

<sup>2)</sup> Oberbeck, Wied. Ann. 2 p. 1 (1877); Reynolds, Phil. Trans. 1883: Marey Journ. Phys. 1 p. 192 (1902) et autres expérimentateurs.

certain point du liquide en mouvement, ce qui permet d'observer la ligne de flux qui passe par le point donné et de la copier.

Je choisis, comme exemple le plus simple et le mieux défini, l'efflux par une ouverture dans une paroi mince. Cette paroi était représentée par une feuille de cuivre dur (épaisseur 0.095 mm) séparant les deux parties d'un tube en verre (diamètre 45 mm) dont les bases, aplanies et polies, y étaient attachées avec un peu de cire à cacheter. L'ouverture, au centre de la feuille, qui était traversée par un courant de liquide, était de forme circulaire (diamètre 2.45 mm); ses bords étaient arrondis.

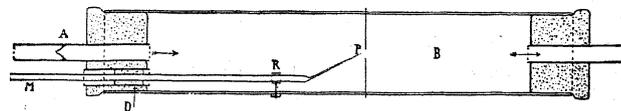


Fig. 1.

Les extrémités opposées des tubes étaient fermées par des bouchons, avec des tubes d'entrée et de décharge, dont l'un était construit d'une façon particulière A, avec une pointe à l'intérieur, percée d'un très petit trou; ceci avait pour but de réduire les vitesses aux valeurs très petites exigées, comme nous le verrons plus loin, dans ces expériences.

On produisait les vitesses désirées en élevant le réservoir qui contenait le liquide à la hauteur convenable au-dessus du tube de décharge. Leurs valeurs résultaient du nombre des gouttes qui s'écoulaient et de leur poids moyen, obtenu par une détermination spéciale.

L'introduction de la matière colorante se faisait au moyen du tube M, terminé par un allongement capillaire extrêmement mince, et guidé par l'anneau R et par la boîte hermétique D, de telle façon que le point P, d'où sortait la matière colorante, pouvait être approché plus ou moins de la paroi de séparation, en adoptant, en outre, une distance latérale quelconque, par suite d'un mouvement rotatoire du tube M. Le liquide colorant sortait en quantités très petites, pour éviter une déformation des lignes de flux, grâce à une pression exercée par un petit réservoir situé convenablement. Je faisais usage de l'encre bleue ordinaire, mais filtrée avec soin; on déterminait la densité de l'encre [1.00085 par rapport à l'eau de

même température (17°) et on l'égalisait à celle de l'eau employée par l'addition d'une petite quantité (0.12%) de sel.

La situation de l'appareil était telle que le point *P* et le milieu de l'ouverture se trouvaient au même niveau; par conséquent la ligne de flux colorée s'étendant de *P* dans le vaisseau *B* était contenue dans un plan horizontal; dans la même position se trouvait son image, produite sur la table au moyen d'un miroir incliné, réfléchissant des rayons incidents perpendiculaires sur un prisme à réflexion totale.

On avait choisi cette disposition puisqu'alors les courants verticaux de convection produisent les moindres perturbations qui, de plus, peuvent être toujours contrôlées en remarquant si la ligne de flux est bien horizontale. Ces courants, engendrés par des variations de température, causent beaucoup d'ennui lorsque la vitesse horizontale du liquide est petite. Pour diminuer leurs effets il fallut envelopper l'appareil d'un large tube en verre, rempli toujours du même liquide que le vaisseau intérieur. Ces difficultés disparaissent d'ailleurs grâce à l'emploi de liquides plus visqueux, d'autant plus qu'il faut employer dans ce cas, comme nous le verrons plus loin, des vitesses plus grandes.

Outre ces précautions il fallait prendre soin de purifier les liquides employés et l'appareil lui-même, puisque la moindre particule de poussière suffisait à boucher la capillaire *P* ou l'ouverture *A*, et dans les expériences à pression diminuée, il fallait assurer le contact hermétique de toutes les parties de l'appareil.

### III.

Voici le résumé des résultats de nos expériences:

1) On observe la formation distincte de veines d'efflux, c'est-à-dire une diminution dans la divergence des lignes d'efflux, avec des vitesses très petites ( $0.5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$  vitesse moyenne dans l'ouverture pour l'eau). De plus, la vitesse <sup>1)</sup> paraissait maxima dans l'axe de la veine et diminuait vers les parois, tandis que d'après Helmholtz l'inverse aurait dû se passer, avec une valeur critique de la vitesse nécessaire pour surmonter la pression atmosphérique et à former la veine de  $14 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ .

<sup>1)</sup> Qui peut être jugée dans divers endroits d'après la ténuité du filament coloré, soit aussi directement, en observant le mouvement d'une série d'agglomérations colorées produites par des secousses périodiques.

2) Les calculs de Helmholtz et de ses successeurs ne s'appliquent qu'au cas le plus simple: de parois infiniment minces et d'arêtes absolument pointues. En réalité on devrait s'attendre, ayant égard à la courbure finie des bords de l'orifice, à trouver une vitesse critique, séparant le cas où l'efflux est normal et analogue au flux d'électricité et celui où la rupture du liquide et la formation de la veine a lieu.

Les expériences n'en ont rien indiqué; au contraire, la modification de la forme des lignes d'efflux avec une augmentation de la vitesse était tout à fait continue. C'est ce qui résulte de la figure 2.

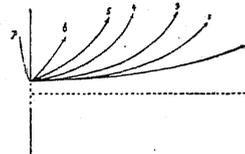


Fig. 2.

Figure 2 où la ligne de flux sortant d'un point latéral *P* est tracée pour les valeurs suivantes de la vitesse:

- 1) 0.90; 2) 0.80; 3) 0.71; 4) 0.55; 5) 0.43; 6)  $0.24 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ;

L'influence de la vitesse sur la partie des lignes située en aval de l'ouverture est évidente; les changements de la partie en amont étaient si petites que le dessin ne les accuse pas. En concordance avec nos remarques sur l'importance relative de l'inertie et de la viscosité, l'asymétrie ressort à mesure de l'accroissement de la vitesse, tandis que la courbe obtenue avec la moindre vitesse est presque symétrique.

Cette disparition de la symétrie et cette concentration graduelle des lignes d'efflux dans la veine ressort d'une façon plus nette encore des figures 3, 4, 5, 6 qui correspondent aux vitesses 0.90, 0.45, 0.23,  $0.14 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ .

Elles sont le résultat d'une série de dessins obtenus par superposition des différentes lignes produites par une vitesse donnée.

Un détail remarquable est la formation de tourbillons annulaires entourant la veine centrale — développée très nettement surtout dans la fig. 3 — qu'on pouvait observer par inversion du courant; le point *P* se trouvait alors du côté de la veine d'efflux.

Elle donne le moyen de définir ce qu'on peut appeler surface de la veine, c'est-à-dire la surface qui, prenant origine aux bords de l'ouverture, sépare les lignes de flux provenant de l'espace en amont et les lignes closes tourbillonnaires de l'espace en aval. Il

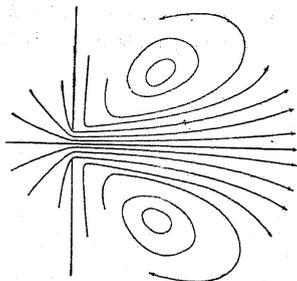


Fig. 3.

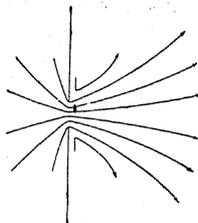


Fig. 4.

est évident par conséquent que le liquide environnant participe au mouvement de la veine, quoique à un degré inférieur, et rien n'indique l'existence d'une discontinuité de vitesse.

Les tourbillons s'évanouissent rapidement à mesure de la diminution de la vitesse; la fig. 5 indique encore la convergence caractéristique des lignes de flux latérales en aval de l'ouverture; dans le cas représenté par la fig. 6, où il n'y a plus qu'une trace d'asymétrie, aucune convergence ne se laissait constater; sans doute les courbes tendent vers une forme tout à fait symétrique pour la limite zéro de vitesse.

3) Puisque, d'après Helmholtz, la naissance d'une discontinuité dépend de la condition qui demande que la pression aux bords de l'orifice s'abaisse à zéro, il en résulte que la vitesse critique devrait satisfaire à la relation

$$v = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$$

où  $p_0$  désigne la pression dans la partie antérieure du vaisseau, en amont de l'orifice, et par conséquent que les phénomènes en question se produisent à des vitesses d'autant plus petites que la pression intérieure  $p_0$  est plus petite.

Pour examiner l'exactitude de cette conclusion, je faisais communiquer le réservoir primaire du liquide, tube de décharge, et le petit réservoir de matière colorante avec un vaisseau d'où l'air pouvait être extrait au moyen d'une trompe aspirante. De cette manière la valeur absolue de la pression pouvait être diminuée à volonté, sans changement des différences relatives <sup>1)</sup>.

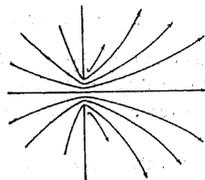


Fig. 5.

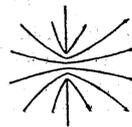


Fig. 6.

Des expériences répétées dans des circonstances diverses, avec abaissement de la pression  $p_0$  de 75 cm à 7 cm de mercure, n'ont indiqué aucun changement dans la forme des lignes de flux, ce qui nous amène à rejeter définitivement l'application de la théorie de Helmholtz aux phénomènes en question.

4) Dans cette théorie, ce n'est que la densité du liquide qui entre dans le calcul d'après (1), ayant une influence sur la pression hydrodynamique; le degré de viscosité est indifférent. D'après notre hypothèse, au contraire, c'est le rapport de la densité à la viscosité, la „fluidité“, qui détermine la forme du mouvement. Si l'on connaît une solution particulière des équations (2) pour un liquide caractérisé par les coefficients  $\mu_1, \rho_1$ , on leur satisfait également pour un autre liquide, de coefficients  $\mu_2, \rho_2$ , en posant

<sup>1)</sup> Pour éviter la formation de bulles d'air, il est avantageux d'employer de l'eau exempte d'air.

$$(4) \quad u_2 = u_1 \frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2} \text{ etc.}, \quad \Delta p_2 = \Delta p_1 \frac{\mu_2^2 \rho_1}{\mu_1^2 \rho_2}, \quad t_2 = t_1 \frac{\mu_1 \rho_2}{\mu_2 \rho_1},$$

ceci n'est qu'un cas particulier de la similitude dynamique <sup>4)</sup>.

Si notre explication du phénomène des veines est exacte, la forme des lignes dépend donc de la viscosité, mais elle est la même dans les différents liquides pour des vitesses choisies en raison inverse de leur fluidité qui exigeront l'emploi de pressions proportionnelles au rapport  $\frac{\mu_2^2 \rho_1}{\mu_1^2 \rho_2}$ . Cette règle a été vérifiée en effet, par

l'emploi de deux solutions de glycérine et de colorants mêlés à cette substance jusqu'à l'égalisation des densités. Voici les valeurs relatives de leurs coefficients de viscosité (pour la température 19.5°), mesurées par la méthode de Poiseuille, et des coefficients de similitude  $\alpha = \frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2}$ , par rapport à l'eau employée, qui en résultent;

Glycérine I; densité 1.094; viscosité relative 3.38;  $\alpha = 2.895$

Glycérine II; densité 1.116; viscosité relative 5.02;  $\alpha = 4.20$ .

Les densités des deux solutions correspondent aux degrés de concentration: 37.5% et 45.8%.

Ces expériences s'accordaient si bien entre elles qu'on pouvait superposer les systèmes de courbes obtenus avec des vitesses correspondantes [d'après (4)]. Ainsi la fig. 3 a été obtenue pour l'eau avec la vitesse  $0.90 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ , pour la glycérine I avec une vitesse de  $2.58 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ,

d'où résulte le rapport de vitesses 2.87, en accord parfait avec le coefficient de similitude 2.895. D'autre part, la vitesse  $0.90 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$  ou plutôt, ayant égard à la différence de densité:  $0.86 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ , qui d'après

la théorie de Helmholtz correspondrait dans la glycérine I à la vitesse 0.90 dans l'eau, produit une image tout-à-fait différente, intermédiaire entre la fig. 4 et la fig 5. De même, par exemple, on a constaté l'identité de la fig. 4 obtenue dans les trois liquides avec des vitesses correspondantes (selon la relation (4)). En traçant la fig. 6, j'ai eu recours au principe de similitude dynamique, en

<sup>4)</sup> Voir: Helmholtz, Wiss. Abh. I. p. 158, 891; Smoluchowski, Bulletin Ac. Sc. de Cracovie 1903, p. 151; Prace mat. fiz. XV. p. 115 (1904); Phil. Mag. 7, p. 667 (1904).

faisant usage de la figure qui résulte de la vitesse correspondante dans la glycérine II; l'effet des courants de convection se faisait sentir dans l'eau ordinaire à un degré tel pour ce mouvement lent qu'on ne pouvait tracer que les parties antérieures et moyennes des lignes.

J'ajouterai, entre parenthèses, que, dans ce travail, on a vérifié pour la première fois l'identité géométrique de mouvements semblables. Les déterminations approximatives des pressions s'accordaient avec la règle (4), mais je n'entrerai pas dans des détails qui n'ont pas de portée directe pour notre sujet principal.

#### IV.

Les faits exposés plus haut prouvent d'une façon évidente que la formation des veines liquides est due à l'inertie et la viscosité; d'autre part, l'idée fondamentale de Helmholtz, la diminution

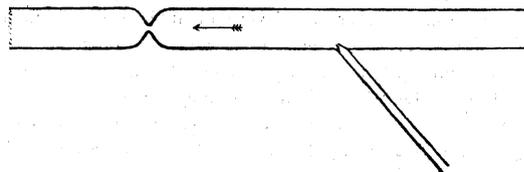


Fig. 7.

de la pression à l'orifice et la possibilité d'une rupture du liquide, semble être juste; c'est de cette façon, en effet, que nous expliquons le fonctionnement des trompes aspirantes. C'est pourquoi j'ai poussé plus loin l'étude expérimentale, vers les grandes vitesses, où de tels phénomènes pourraient se produire.

Comme le dispositif délicat, décrit plus haut, ne se prêtait pas à la réalisation de ce plan, je construisis un appareil très simple et solide (Fig. 7). Un tube en verre (diamètre 8.4 mm), est rétréci dans la moitié de sa longueur de telle façon qu'il n'y reste qu'un canal étroit [dont les dimensions, déterminées sur une coupe transversale du tube aplani par le polissage, étaient de 0.93 et 1.00 mm]. Ce canal est muni dans sa partie supérieure d'un petit tube latéral servant à l'introduction du colorant ou à la communication avec un manomètre.

Pour examiner les effets de petites vitesses, ce tube fut mis en communication avec un diaphragme, construit d'après le modèle du tube A, fig. 1, et avec un réservoir d'eau, à niveau plus élevé, provoquant une petite différence de pression. Les lignes de flux colorées mettaient en évidence les traits caractéristiques des veines à des vitesses de  $6.1 \frac{cm}{sec}$  dans le canal (c'est à dire de  $0.082 \frac{cm}{sec}$  dans le

tube). L'asymétrie a disparu à la vitesse de  $2.4 \frac{cm}{sec}$ ; avec une vi-

tesse de  $8.3 \frac{cm}{sec}$  une veine cylindrique se formait, longue de 3 cm, entourée de tourbillons et sujette à de petits changements oscillatoires. Grâce à la lenteur du mouvement et à la petitesse de la courbure des parois, les phénomènes de Helmholtz ne pouvaient pas se produire et pourtant la veine caractéristique se formait.

Le même tube a été attaché immédiatement à une conduite d'eau (pression 3.5 atm.), pendant que l'extrémité inférieure communiquait avec un vaisseau, servant à mesurer la vitesse d'efflux, où la pression pouvait être réduite au moyen d'une trompe aspirante. Tout d'abord, le tube fut rempli d'eau dans toute sa longueur. Lorsque on ouvrait le robinet pour une certaine vitesse, le phénomène attendu apparaissait: la veine d'eau, en quittant le canal, se déchirait ou se détachait du liquide environnant, ce qui était visible par suite de la formation d'une surface réfléchissante à l'intérieur. Mais le phénomène n'était pas permanent, son caractère intermittent s'accusait par un bruit bourdonnant; aussi observait on souvent des interruptions et, en général, une considérable irrégularité du phénomène.

En réglant l'afflux d'eau d'une façon convenable, on pouvait évaluer approximativement la vitesse critique où ce phénomène apparaissait à  $24 \frac{m}{sec}$  dans le canal, tandis que la relation (3) exi-

gerait une vitesse de 26 ou de  $14.4 \frac{m}{sec}$  si la pression qui règne au-dessus, ou celle qui règne au-dessous du canal étroit, était substituée pour  $p_0$  (qui est la valeur de  $p_0$  dans les parties immobiles du liquide).

Et lorsque la pression au-dessous du canal fut réduite à 3.5 cm, au moyen de la trompe, le phénomène se produisait dès que la

vitesse  $14 \frac{m}{sec}$  était atteinte, pour la pression de 25.5 cm à une vi-

tesse de  $12 \frac{m}{sec}$ , ce qui correspond aux valeurs théoriques 19 ou

$9.7 \frac{m}{sec}$  et  $14$  ou  $8.2 \frac{m}{sec}$ . En même temps l'aspect du phénomène

changeait: à pression atmosphérique l'eau, claire jusqu'au moment où la vitesse critique est atteinte, devient trouble au delà ce qui provient du dégagement d'une quantité de petites bulles d'air. Avec l'emploi de pressions basses il s'y forment de grandes bulles qui apparaissent comme dans de l'eau bouillante.

On pourrait s'attendre à trouver la vitesse d'efflux indépendante de la pression au-dessous du canal, pourvu que la vitesse critique fut atteinte, puisqu'alors la pression à la sortie aurait toujours la même valeur zéro. Cette conclusion n'a pas été vérifiée par l'expérience; on constatait au contraire un accroissement de vitesse par suite de l'augmentation de la pression en amont, ou d'une diminution de la pression en aval.

Les causes de cette divergence et des différences entre les valeurs calculées et observées des vitesses critiques sont sans doute les mêmes: d'une part le caractère instable, oscillatoire du phénomène, d'autre part la viscosité du liquide qui défie tous les calculs basés sur la notion des liquides parfaits.

## V.

Résumons les conclusions qui se dégagent de ces expériences:

Le phénomène de Helmholtz, la rupture de la masse liquide quittant une petite ouverture, peut avoir lieu si la vitesse dépasse une valeur considérable (une vingtaine de mètres)<sup>1)</sup>; c'est un phénomène secondaire qui n'a rien à faire avec la formation de veines d'efflux; celle-ci peut commencer à des vitesses plus de cent fois plus petites.

Nos expériences ne confirment aucunement l'hypothèse des surfaces de discontinuité de vitesse; celle-ci nous paraît inadmissible pour les raisons expliquées plus haut. La théorie de Helmholtz

<sup>1)</sup> Sans doute des vitesses beaucoup plus grandes encore sont nécessaires dans de l'eau purgée d'air.

est très intéressante, sans doute, au point de vue théorique; mais son application aux liquides réels n'est nullement justifiée, même pour des vitesses aussi grandes que celles que l'on a atteintes; c'est ce que démontre le fait de l'intermittence<sup>1)</sup> du phénomène et le désaccord du calcul des vitesses et de l'observation directe.

Notre cas paraît analogue à celui du mouvement des corps plongés dans un liquide, où les calculs basés sur l'hypothèse des liquides parfaits, ne tenant compte ni de la dissipation de l'énergie ni de l'adhésion aux parois, aboutissent à des conclusions tout-à-fait incorrectes.

Quant à la formation des veines d'efflux, les expériences ont prouvé que les lois de la similitude dynamique s'y appliquent parfaitement; ceci est un argument important en faveur de notre explication qui réduit le phénomène aux lois ordinaires des liquides visqueux, notamment aux effets d'inertie s'accroissant à mesure de la rapidité du mouvement par rapport aux effets de la viscosité du liquide.

Le principe de similitude dynamique donne le moyen de prédire la forme des lignes de flux d'après les fig. 3, 4, 5, 6, pour des liquides à densité et viscosité quelconques; il est facile d'en déduire l'influence des dimensions de l'orifice, à savoir: les vitesses correspondantes sont en proportion inverse des dimensions; par conséquent, la veine se forme plutôt avec un orifice grand qu'avec un orifice petit<sup>2)</sup>.

L'explication que nous avons donnée ne peut pas être considérée comme complète. Ce qui reste à faire, c'est le calcul théorique des lignes de flux; c'est là un problème sur lequel j'espère revenir prochainement.

<sup>1)</sup> En connexion, sans doute, avec les „mouvements turbulents“ et la formation du son dans les tuyaux.

<sup>2)</sup> L'épaisseur de la paroi et la forme du vaisseau sont probablement indifférentes, jusqu'à une certaine limite.

## XXVI. ZUR THEORIE DER ELEKTRISCHEN KATAPHORESE.

(Physikalische Zeitschrift, 6. Jahrgang, Nr. 17, 1906; pp. 529—531)

I. In einer unlängst erschienenen<sup>1)</sup> Arbeit hat Herr Cruse recht interessante Versuchsergebnisse mitgeteilt, denenzufolge die bisher bekannten Gesetze der elektrischen Kataphorese in zweierlei Hinsicht zu erweitern resp. zu modifizieren wären: 1) Mit zunehmender Temperatur wächst die durch Tondiaphragmen pro Stromeinheit überführte Wassermenge (die sog. Wiedemannsche Konstante) bis zu einem Maximum (bei ca. 35—40°) und nimmt dann wieder ab; 2) dieselbe ist nur bei geringen Stromdichten wirklich konstant, bei größeren Stromdichten nimmt sie bis zu einem Maximum zu, um dann wieder rapid abzunehmen.

Bezüglich der theoretischen Interpretation dieser Resultate möchte ich nun bemerken, daß dieselben nicht, wie Cruse meint, mit der aus Helmholtz' Theorie folgenden Formel:

$$M = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\sigma J}{4\pi\mu}$$

in Widerspruch stehen, sondern sich sehr wohl mit derselben vereinigen lassen.

Allerdings wurde die Leitfähigkeit des benutzten destillierten Wassers sowie deren Änderung mit Temperatur und event. auch Zeit, von Cruse nicht speziell gemessen, und auch über die Temperatur-Abhängigkeit der Potentialdifferenz der Doppelschicht  $\varphi_1 - \varphi_2$  kann man nichts Bestimmtes voraussagen; wenn aber als

<sup>1)</sup> Diese Zeitschr. 6, 201—204, 1906; ausführlicher in einer Göttinger Dissertation: „Über die elektr. Kataphorese des destillierten Wassers durch poröse Tondiaphragmen (Pukallmasse)“.