

4·1 proc. Lösung von salpetersaurem Ammon					
A	B	C	D	E	
14	20·03	97·67	78·73	[10°	99·01] ¹⁾
14	30·02	81·12	64·45	30	68·31
11	39·68	69·20	54·14	50	48·18
12	49·80	59·78	45·99		
$\eta' = 112\ 266 - 1\ 9576\ \theta + 0\ 01253\ \theta^2$					
$\eta = 118\ 32 - 2\ 063\ \theta + 0\ 0132\ \theta^2$					

Es ergibt sich also auch bei diesen Lösungen eine Vermehrung der Reibung, welche bis zu 25% steigt.

Der bei obigen Berechnungen verwendete Reduktionskoeffizient $\frac{\eta}{\eta'} = 1.0538$ folgte aus dem Werte der spezifischen Zähigkeit des Wassers bei 20° = 56.15 (Mittelwert der von Poiseuille, Graham, Rellstab, Sprung, Slotte und Wagner ermittelten Zahlen) und dem beobachteten Werte = 53.284.

Schließlich wurden die gebrauchten Lösungen in Bezug auf ihre elektrische Leitungsfähigkeit untersucht; der spezifische Widerstand (Quecksilber = 1) war bei der Jodlösung = 62.10¹¹, Jodkalium 10⁸, Ammoniumnitrat 6.10⁷, also ist die Leitungsfähigkeit verschwindend klein gegenüber jener der wässrigen Lösungen.

Das Resultat der Versuche läßt sich also kurz in Folgendem zusammenfassen: Insoweit sich die gewonnenen Ergebnisse verallgemeinern lassen, zeigt sich, daß die innere Reibung von nicht wässrigen Lösungsmitteln nicht nur durch Zusatz von Salzen erhöht wird, welche die Zähigkeit des Wassers bei ähnlicher Konzentration vermehren, z. B. CaCl₂, sondern auch von solchen, welche sie vermindern, z. B. KJ, NH₄NO₃; ebenso bei Jod. In Gemäßheit mit den Anschauungen von Arrhenius hätte man in diesen Lösungen eine sehr geringe Zahl von dissoziierten Molekeln anzunehmen, was auch mit dem geringen Leitungsvermögen übereinstimmt. Umfangreichere Untersuchungen müßten feststellen, ob dieses Verhalten auch Ausnahmen aufweist.

¹⁾ Bei Temperaturen von 10° und darunter konnten keine Versuche gemacht werden, da sich hiebei das Salz in kristallinen Flocken ausschied.

II. AKUSTISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE ELASTIZITÄT WEICHER KÖRPER.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität Wien.

(Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematurw. Klasse; Bd. CIII; Abth. II a, 1894; pp. 739—772).

Weiche Körper, z. B. Wachs, Paraffin, Kautschuk etc., sind für die Elastizitätstheorie hauptsächlich in zweifacher Hinsicht von Interesse. Erstens nimmt der Elastizitätsmodul derselben mit steigender Temperatur in unverhältnismäßig stärkerem Maße ab, als dies bei anderen Körpern, z. B. Metallen, der Fall ist; zweitens finden sich bei ihnen die größten Werte der Elastizitätszahl μ (Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation).

Bezüglich des ersten Punktes liegt bisher nur eine Beobachtung von Stefan ¹⁾ vor, welcher, anlässlich einer Untersuchung über die Schallgeschwindigkeit in Stäben von Wachs und Unschlitt, die er nach der im Folgenden beschriebenen Methode ausführte, die große Veränderlichkeit derselben — also auch des Elastizitätsmoduls — bemerkte.

Für Wachs ergeben seine Versuche:

Temperatur $\theta = 17^\circ$,	Schallgeschwindigkeit $c' = 880$ m/sek,
" 25	" 630 "
" 28	" 451 "

Für Unschlitt machte er keine näheren Angaben.

Demnach würde sich bei Erhöhung der Temperatur von 17° auf 28° die Schallgeschwindigkeit $\left[= \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right]$ fast auf die Hälfte,

¹⁾ Diese Sitzungsberichte, LVII, 1868.

also der Elastizitätsmodul fast auf ein Viertel verringern, während bei den meisten Metallen die Abnahme des letzteren zwischen 0° und 100° nur zirka 2–4% beträgt. Somit scheint hier wegen der Größe der in Betracht kommenden Änderungen Aussicht vorhanden, jene Erscheinung genauer studieren zu können, als bei den Metallen und eher eine Beziehung zu den übrigen Eigenschaften der Körper finden zu können.

In dieser Hinsicht ist namentlich der Zusammenhang mit der Wärmeausdehnung bemerkenswert; stellt man den Elastizitätsmodul als eine lineare Funktion der Temperatur dar

$$(1) \quad E = E_0 [1 - \gamma t],$$

so erweist sich nämlich — nach den Beobachtungen von Katzenelsohn¹⁾ und Miller²⁾ — die Reihenfolge der Metalle nach γ als identisch mit derjenigen nach den Werten des Wärmeausdehnungs-Koeffizienten und verkehrt jener der Schmelzpunkte. Auch die eben besprochene Beobachtung bezüglich des Wachses stimmt damit überein, da ja auch der Ausdehnungskoeffizient desselben bei mittlerer Temperatur zirka 50 bis 100mal größer ist als jener Metalle. Dieser Punkt mußte also bei einer Untersuchung der Elastizität solcher Stoffe besonders berücksichtigt werden.

Der zweite Punkt, die Größe der Elastizitätszahl μ , ist namentlich im Hinblick auf die Theorien der Elastizität von Interesse. Bekanntlich fordert die Poisson'sche Molekulartheorie, daß $\mu = 0.25$ sei; dies ist durch zahlreiche Versuche wohl genügend widerlegt worden, so z. B. schon durch die Untersuchungen von Wertheim.

Dieser zog aber aus denselben den Schluß, daß $\mu = \frac{1}{3}$ sei; in der Tat sind seine Zahlen für Messing, Eisen, Glas u. A. nicht weit von diesem Werte entfernt. Durch neuere genaue Beobachtungen scheint auch diese Hypothese, welche übrigens auch durch keine theoretischen Erwägungen gestützt wird, widerlegt zu sein; so fand z. B. Voigt für Glas 0.208–0.213, Kirchhoff für Stahl 0.293–0.295; nach Katzenelsohn wären einige Zahlen noch kleiner, z. B. Aluminium 0.13, Platin 0.16, Gold 0.17.

¹⁾ Berl. In.-Diss., 1887, Winkelmann, Handb. I. S. 242.

²⁾ Münch. Ber., 1886, S. 707.

Die größten Abweichungen¹⁾ aber im entgegengesetzten Sinne, scheinen eben bei solchen weichen Körpern vorzukommen, allerdings sind die Angaben hierüber ziemlich schwankend, z. B. Kautschuk: Röntgen 0.37–0.64, Pulfrich 0.458, Amagat 0.500, Gallerte aus Leim 0.500 (Maurer), Ebonit 0.389 (Mallock), Paraffin 0.50 (Mallock). Auch hierüber waren also weitere Versuche wünschenswert, umso mehr als, wie weiter unten erwähnt werden wird, diese letzteren Bestimmungen nicht ganz einwandfrei sind. Um nun zur Aufklärung dieser beiden Punkte beizutragen, unternahm ich die Versuche, welche im Folgenden beschrieben sind.

II.

Die Methoden zur Bestimmung der Elastizitätsmoduln sind entweder statische oder dynamische. Für weiche Körper ist die Anwendung der statischen nicht empfehlenswert, denn gerade bei ihnen ist die elastische Nachwirkung sehr groß, so daß sich je nach der Dauer der Einwirkung sehr verschiedene Moduln ergeben würden; zudem ist der Bereich der elastischen Vollkommenheit so klein, daß es kaum möglich sein dürfte, denselben bei statischen Messungen nicht zu überschreiten. Namentlich bei höherer Temperatur beginnen diese Körper schon unter Einwirkung der Schwerkraft langsam kontinuierlich zu fließen, was dann eine direkte Bestimmung des E ganz fehlerhaft machen würde, für das μ aber den Wert 0.5 wie bei Flüssigkeiten ergeben müßte.

Dies ist auch der Einwand, welchen die Anhänger der Poisson'schen Theorie gegen die früher erwähnten Messungen, welche auf statischen Methoden beruhen, erheben können.

Demgemäß sind hier die akustischen Methoden am Platze, welche die Schallgeschwindigkeit und hieraus den von der Nachwirkung unabhängigen Modul ergeben; allerdings ist dies nicht der isotherme, sondern der adiabatische Modul, doch ist nach den bisherigen Versuchen der Unterschied beider bei festen Körpern nur gering, und werden sich die Zahlen sehr angenähert auch auf jenen anwenden lassen.

Zur Messung der Schallgeschwindigkeiten stehen uns nur zwei

¹⁾ Nur bei manchen Legierungen kommen auch so große Werte vor, z. B. Messing 0.42 (Katzenelsohn). (Siehe auch den auf S. 18 angeführten Versuch). Vielleicht teilweise auf Äolotropie zurückzuführen.

Methoden zu Gebote: die Stefan'sche (l. c.) und jene von Warburg¹⁾. Erstere bildet eine Erweiterung des von Chladni eingeführten Verfahrens, nach welchem aus der Tonhöhe eines longitudinal schwingenden Stabes die Schallgeschwindigkeit berechnet wird; da nämlich Stäbe aus den besprochenen Materialien durch Reiben nicht zum Tönen gebracht werden können, befestigte Stefan ein Stück eines solchen an einen Holz- oder Glasstab; dieses System gab einen Longitudinalton, der von den Schallgeschwindigkeiten beider Stücke abhängt und daher die Berechnung einer derselben ermöglicht, wenn die andere gegeben ist.

Warburg hingegen beobachtete die durch aufgestreuten Sand sichtbar gemachten Knoten bei einem auf einen Glasstreifen in der Mitte aufgesetzten, zusammen mit diesem transversal schwingenden Wachstreifen; dann gilt die Gleichung

$$\frac{c}{c'} = \frac{l^2}{l'^2} \frac{h'}{h},$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit, l die Abstände der Knoten, h die Dicke des einen Streifens und die gestrichenen Buchstaben die analogen Größen für den anderen bedeuten.

Obwohl letztere Methode insoweit bequemer ist, als sie bloß Längenmessungen erfordert, zog ich hier die Stefan'sche vor, da diese sich, wie weiter unten erläutert wird, sofort auch auf Torsionsschwingungen anwenden läßt; dies gestattet dann die Berechnung der Geschwindigkeit der Torsionswellen, somit auch des Torsionsmoduls T , woraus sich dann auch die zweite gewünschte Größe μ ergibt:

$$(2) \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{E}{T} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_L}{c_T} \right)^2 - 1.$$

Offenbar hat diese Art der Bestimmung des μ auch den Vorteil, daß die Versuche zur Messung des E und des T an demselben Stück und unter denselben Bedingungen stattfinden, was namentlich in Bezug auf die Konstanterhaltung der Temperatur von Wichtigkeit ist. Diese Vorteile teilt sie mit der analogen Methode der Bestimmung des μ aus Longitudinal- und Torsionston bei homogenen Glas- und Metallstäben, welche namentlich von Wert-

heim und Schneebeli angewendet wurde; ihr Nachteil ist, allen E und T benützenden Methoden gemeinsam: die Berechnung des μ als Differenz zweier Zahlen — wodurch die Genauigkeit verringert wird; dazu kommt noch, daß schon c_L und c_T aus der Abweichung des Tones des Systems von jenem des einen Stabes für sich, also aus einer ziemlich kleinen Größe, bestimmt werden. Ob nun die Messungen von c_L und c_T sich mit solcher Genauigkeit erzielen lassen, daß eine Berechnung des μ möglich ist, konnten nur genaue Versuche entscheiden.

III.

Zur Erläuterung der Theorie der Longitudinalschwingungen von Stäben, die aus zwei Stücken bestehen, möge kurz Folgendes erwähnt werden.

Die Fortpflanzung fortschreitender longitudinaler Wellen in einem aus zwei verschiedenartigen Stücken bestehenden, unendlich langen Stab läßt sich leicht analytisch darstellen, da man sofort die D'Alembert'sche Form der Lösung der Differentialgleichungen für die beiden Stücke anwenden kann. Bedeutet u die Verschiebung, c die Geschwindigkeit in dem von $-\infty$ bis 0 reichenden Stücke, die gestrichenen Buchstaben die analogen Größen im anderen Stücke, so lauten die Gleichungen

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = c'^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$$

wobei

$$c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad c'^2 = \frac{E'}{\rho'}.$$

Diese werden durch die Lösungen

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= f(x + ct) + \varphi(x - ct) & \text{für } -\infty < x < 0 \\ u' &= g(x + c't) + \chi(x - c't) & \text{für } 0 < x < +\infty \end{aligned}$$

befriedigt, wobei die willkürlichen Funktionen f und φ für negative Argumente, g und χ für positive, durch Einführung der Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} x < 0 \quad u &= U(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= V(x) \end{aligned} \right| \quad \left. \begin{aligned} x > 0 \quad u' &= U'(x) \\ \frac{\partial u'}{\partial t} &= V'(x) \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Pogg. Ann., CXXXVI.

in folgender Weise bestimmt werden:

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{U(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int V(x) dx \\ \varphi(x) &= \frac{U(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int V(x) dx \end{aligned} \right\} \text{für } x < 0,$$

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \frac{U'(x)}{2} + \frac{1}{2c'} \int V'(x) dx \\ \chi(x) &= \frac{U'(x)}{2} - \frac{1}{2c'} \int V'(x) dx \end{aligned} \right\} \text{für } x > 0.$$

Die Werte der Funktionen für andere Werte des Argumentes ergeben sich aus den Bedingungen, welche aus dem Prinzip der Kontinuität der Verschiebungen und Spannungen folgen:

für die Trennungsstelle $x = 0$: $u = u'$

$$(7) \quad [q = \text{Querschnitt}] \quad E q \frac{\partial u}{\partial x} = E' q' \frac{\partial u'}{\partial x}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (4) in diese Gleichungen und Integration erhält man

$$(8) \quad \begin{aligned} f(ct) &= \frac{2 E' q' c}{E q c' + E' q' c} g(c't) + \frac{E q c' - E' q' c}{E q c' + E' q' c} \varphi(-c't) \\ \chi(-c't) &= \frac{E' q' c - E q c'}{E q c' + E' q' c} g(c't) + \frac{2 E q c'}{E q c' + E' q' c} \varphi(-c't) \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Formeln sieht man leicht in dem Falle, daß zur Zeit $t = 0$ der ganze Stab in Ruhe und in der Ruhelage sei, mit Ausnahme des Punktes $-b$, welcher eine Elongation U habe.

Die Durchführung der Rechnung zeigt dann, daß diese Ver- rückung zwei Wellen mit der Elongation $\frac{U}{2}$ erzeugt, von denen die eine in der Richtung $-\infty$ sich bewegt, während die andere gleich große bis zur Trennungsstelle geht und sich hier in eine gebrochene Welle von der Größe

$$(9) \quad \frac{E q c'}{E q c' + E' q' c'}$$

welche sich in der Richtung der $+\infty$ mit der Geschwindigkeit c weiterbewegt und in eine reflektierte spaltet, welche mit der Amplitude

$$(10) \quad \frac{1}{2} \frac{E q c' - E' q' c}{E q c' + E' q' c}$$

nach $-\infty$ zurückkehrt.

Komplizierter wird die Erscheinung, wenn der zusammengesetzte Körper eine endliche Ausdehnung von 0 bis λ und von hier bis $\lambda + \lambda'$ hat; man kann diesen Umstand durch die Annahme ersetzen, daß er an beiden Enden wieder an Stäbe mit unendlich kleinen q (oder E oder ρ) anstößt; dann werden an diesen nach (10) totale (positive) Reflexionen stattfinden, an der Trennungsstelle spalten sich wieder die Wellen u. s. w., es entsteht im Allgemeinen eine immer wachsende Zahl von Einzelwellen.

Zur Kenntnis der Schwingungszahl des Grundtons der so erzeugten stehenden Schwingungen gelangen wir jedoch auf diese Weise nicht. Diese ergibt sich am einfachsten aus der Betrachtung der partikulären Lösungen (deren unendliche Anzahl die allgemeine Lösung gibt), wie sie von Stefan¹⁾ durchgeführt wurde.

Den Differentialgleichungen (3) und den Bedingungen für die freien Enden genügen die Lösungen

$$(11) \quad \begin{cases} u = A \cos \alpha t \cos \beta x \\ u' = A' \cos \alpha' t \cos \beta' [\lambda + \lambda' - x], \end{cases}$$

wobei

$$\alpha^2 = c^2 \beta^2 = \frac{E}{\rho} \beta^2$$

$$\alpha'^2 = c'^2 \beta'^2 = \frac{E'}{\rho'} \beta'^2$$

Aus dem Principe der Kontinuität der Verschiebungen und Spannungen²⁾ folgen für die Trennungsstelle $x = \lambda$ die Gleichungen (7). Diese erfordern

¹⁾ Diese Stützungsber., LV, 1867, LVII, 1868.

²⁾ Es ist bemerkenswert, daß sich die zweite der Gleichungen (7), welche ausspricht, daß an der Trennungsstelle die Druckkräfte beiderseits gleich sein müssen, auch durch die Forderung, die bei unserem Stabe selbstverständlich erfüllt sein muß, daß nämlich der Schwerpunkt an derselben Stelle bleibe,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha' \\ A \cos \beta \lambda = A' \cos \beta' \lambda' \\ E q \beta A \sin \beta \lambda = - E' q' \beta' A' \sin \beta' \lambda' \end{array} \right.$$

und daraus folgt durch Elimination von A die Gleichung

$$E q \beta \sin \beta \lambda \cos \beta' \lambda' + E' q' \beta' \cos \beta \lambda \sin \beta' \lambda' = 0,$$

welche im Allgemeinen auch durch

$$(13) \quad q E \beta \operatorname{tg} \beta \lambda + q' E' \beta' \operatorname{tg} \beta' \lambda' = 0$$

ersetzt werden kann.

Durch einige Transformationen erhält man, wenn statt $q \lambda \rho$ und $q' \lambda' \rho'$ die Gewichte p, p' gesetzt werden:

$$(14) \quad p \frac{\operatorname{tg} \beta \lambda}{\beta \lambda} + p' \frac{\operatorname{tg} \beta' \lambda'}{\beta' \lambda'} = 0.$$

Behufs Berechnung der Geschwindigkeit kann man diese Formel noch umgestalten, indem man die dem Tone des Systems entsprechende Monochord-Saitenlänge l und die dem Tone des Stabes λ allein (wenn er ohne das zweite Stück schwingt) entsprechende l_0 einführt.

Stimmt die Saitenlänge L mit einer Stimmgabel, die N Schwin-

ersetzen läßt. Es muß dann die Summe der Massen \times Geschwindigkeiten $= 0$ sein, also

$$\int_0^{\lambda} q \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{\lambda}^{\lambda+\lambda'} q' \rho' \frac{\partial u'}{\partial t} dx = 0;$$

werden darin die Werte aus (11) eingesetzt, so ist

$$p q A \sin \alpha t \int_0^{\lambda} \cos \beta x dx + p' q' A' \alpha' \sin \alpha' t \int_{\lambda}^{\lambda+\lambda'} \cos \beta' (\lambda + \lambda' - x) dx = 0;$$

da diese Gleichung von der Zeit unabhängig ist, muß $\alpha = \alpha'$ sein; durch Ausführung der Integrationen folgt dann

$$p q A \frac{\sin \beta \lambda}{\beta} + p' q' A' \frac{\sin \beta' \lambda'}{\beta'} = 0.$$

Mit Hilfe der aus der ersten Bedingung (7) folgenden zweiten der Gleichungen (12) erhält man dann direkt die Formel (14).

gungen in der Sekunde macht, überein, so hat man schließlich die Formel für die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwellen

$$(15) \quad c_z = 2\pi N L \frac{\lambda'}{l_z},$$

wobei die Hilfsgröße $z (= \beta' \lambda')$ aus der Gleichung

$$(16) \quad \frac{\operatorname{tg} z}{z} = - \frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}}$$

bestimmt werden muß.

Zur numerischen Ausrechnung des z ist es am bequemsten, sich für $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$ eine Tafel von halben zu halben Graden zu entwerfen und dann dazwischen zu interpolieren.

Die Lage der Knotenpunkte der Schwingung erhält man nach Formel (11) durch Nullsetzen von $\cos \beta x$ und $\cos \beta' (\lambda + \lambda' - x)$; im ersten Stücke sind ihre Abstände vom Nullpunkt

$$(17) \quad x_k = \frac{\pi}{2\beta}, \frac{3\pi}{2\beta}, \dots = \frac{l_0}{l} \frac{1}{2\lambda}, \frac{l_0}{l} \frac{3}{2\lambda}, \dots$$

im zweiten Stücke die Abstände vom anderen Ende des zusammengesetzten Stabes

$$(18) \quad x'_k = \frac{\pi}{2\beta'}, \frac{3\pi}{2\beta'}, \dots = \frac{c'}{c} x_k.$$

Eine anschauliche Vorstellung von dem Zusammenhange zwischen c' und der Tonhöhe gewinnt man mittelst einer graphischen Methode.

Werden z. B. wie auf Fig. 1 die Kurven $y = \operatorname{tg} x$ gezeichnet, und schneidet man diese durch eine Gerade

$$y = - \frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} x,$$

so geben die Abszissen der Schnittpunkte die Werte von z , welche, in Formel (15) eingesetzt, die Wurzeln der Geschwindigkeiten

bestimmen, welche dem durch die Neigung der Geraden definierten Tone entsprechen. Der Schnittpunkt mit der durch 0 hindurchgehenden Tangentenkurve gibt den kleinsten Wert von z , also die

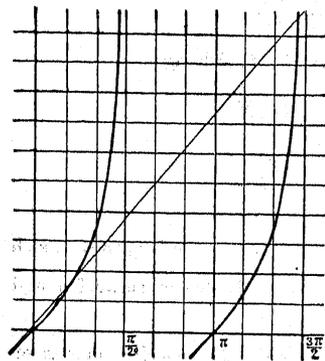


Fig. 1.

sprechend die Tonhöhe ändern, ergibt sich Folgendes:

Der höchste Wert, welchen der Grundton erreichen kann, also die geringste Neigung der Geraden, entspricht der Lösung $z = 0$, somit $c' = \infty$; da diese Neigung der Geraden gleich ist der Tangente im 0-Punkte, so hat man mithin

$$(19) \quad 1 = - \frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}}$$

zur Bestimmung des Tones, welchen das System in dem Falle gibt, wenn die Schallgeschwindigkeit in dem angesetzten Stücke unendlich ist; weil $\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l} < 0$, also $l > l_0$, so ist dieser immer tiefer als jener, welchen der Stab ohne das angefügte Stück schwingt. (Die übrigen Wurzeln der Gleichung entsprechen den Obertönen). Für jede endliche Geschwindigkeit ist der Ton aber noch tiefer, denn ein je kleineres c' , also größeres z man erhalten will, desto größer muß man die Neigung der Geraden machen.

größte Geschwindigkeit, welche bei der betreffenden Tonhöhe noch möglich ist; diese entspricht also dem Grundton des Stabes.

Dieselbe Tonhöhe kann auch durch eine geringere Geschwindigkeit erzeugt werden, wenn sie nämlich dem ersten Obertone eines Systemes entspricht; diese Geschwindigkeit ist dann gegeben durch den Schnittpunkt mit der zweiten Tangentenkurve. Analog für die höheren Obertöne.

Wenn wir nun — bei konstanten λ' und p' — die Geschwindigkeit c' und dement-

(Wenn $z > \frac{\pi}{2}$, also $c' < \frac{4NL\lambda'}{l}$ wird, so muß die Gerade entgegen dem Sinne des Uhrzeigers noch weiter gedreht werden, so daß sie die zweite Tangentenlinie, welche nun dem tiefsten Tone entspricht, schneidet u. s. w.)

Ähnliche Überlegungen gelten für die Obertöne; diese sind im Allgemeinen unharmonisch.

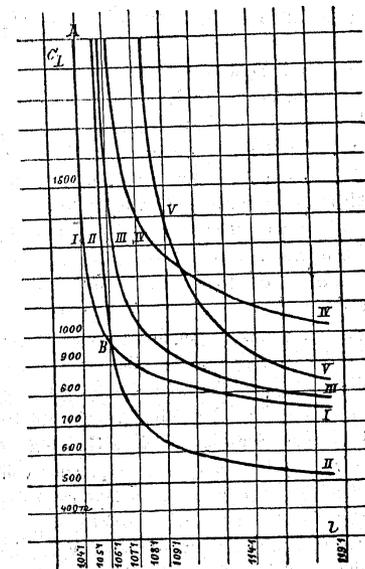


Fig. 2.

Um die günstigsten Versuchsbedingungen zu finden, muß man sich über den Einfluß von p' und λ' , die man ja beliebig variieren kann, klar werden. Dazu dient die Figur 2. Hier sind (immer bei konstanten p und λ) für einige bestimmten Verhältnisse der Gewichte und Längen des angesetzten Stückes die Kurven gezeichnet, welche die Abhängigkeit der berechneten Geschwindigkeit c_L (Ordinate) von der zugehörigen Länge der Monochordsaite (Abszisse) darstellen.

Für I	ist $p' = 8.92 g$,	$\lambda' = 120 mm$
II	17.83	80
III	17.83	120
IV	17.83	160
V	35.66	120

Dabei ist

$$p = 765.5 g, \quad \lambda = 1495.5, \quad l_0 = 104.1, \quad L = 417, \quad N = 435.$$

Daraus ergibt sich Folgendes:

Der Einfluß, welchen ein Fehler der Tonbestimmung auf die Zahl für die Geschwindigkeit hat, ist desto größer, je größer die Neigung der Kurve in dem betreffenden Punkte ist; solange also z. B. der Punkt auf dem Stücke zwischen *A* und *B* der Linie liegt, wird die Messung sehr ungenau werden, dagegen ist in einiger Entfernung rechts von *B* eine ziemliche Genauigkeit erreichbar; man wird also trachten, die Dimensionen der Stäbe so zu wählen, daß die durch die Töne bestimmten Punkte auf diesen Teilen der Kurven liegen.

Die Genauigkeit bei einer gegebenen Geschwindigkeit, z. B. 1000 m/sek, ist durch die Neigung der Kurven in den Punkten bestimmt, wo sie durch eine in der betreffenden Höhe gezogene Horizontale geschnitten werden. Aus dem Vergleiche von I, III, V ersieht man, daß es vorteilhaft ist, größere Gewichte der zu messenden Stücke zu verwenden, aus dem Vergleiche von II, III und IV aber, daß insbesondere die Länge möglichst groß zu machen ist. Wie später ausgeführt werden wird, erfordert dies, damit überhaupt eine Tonerzeugung möglich werde, eine Vermehrung des Gewichtes. Andererseits aber ist bei großen Tonvertiefungen, wie sich zeigte, der Klang merklich unreiner, so daß eine mittlere Lage die beste sein dürfte.

Die Gleichungen für die Torsionsstöne ergeben sich nun aus dem Vorstehenden ganz leicht; die Differentialgleichung für drehende Schwingungen

($\delta =$ Winkelverschiebung)

$$(20) \quad \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{E}{2(\mu + 1)\rho} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}$$

ist vollständig der Gleichung (3) analog, und die Gleichungen (7) sind durch die ähnlichen

$$\delta = \delta'$$

$$D \frac{\partial \delta}{\partial x} = D' \frac{\partial \delta'}{\partial x}$$

zu ersetzen, welche aussprechen, daß die Drehungswinkel δ und die Drehungsmomente *D* an der Trennungsstelle kontinuierlich in einander übergehen.

D haben wir gleichzusetzen

$$D = \frac{E\theta}{2(\mu + 1)} = T\theta,$$

wobei θ das Trägheitsmoment des Querschnittes mit der Flächendichte 1 bedeutet.

Mithin gelten auch für diesen Fall die früher abgeleiteten Formeln, wenn man *E* durch *T* und *q* durch θ ersetzt. Gleichung (14) wird demnach

$$\theta \lambda \rho \frac{\text{tg} \beta \lambda}{\beta \lambda} + \theta' \lambda' \rho' \frac{\text{tg} \beta' \lambda'}{\beta' \lambda'} = 0.$$

Ist der Stab ein Hohlzylinder, also der Querschnitt ein Kreisring mit den Radien *R*, *r*, so ist

$$(21) \quad \theta = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2) (R^2 + r^2);$$

wenn man wieder $(R^2 - r^2)\pi\lambda\rho$ gleich dem Gewichte *p* setzt, so hat man endlich

$$(22) \quad p(R^2 + r^2) \frac{\text{tg} \beta \lambda}{\beta \lambda} + p'(R'^2 + r'^2) \frac{\text{tg} \beta' \lambda'}{\beta' \lambda'} = 0$$

zur Bestimmung der Tonhöhe; die zur Berechnung der Geschwindigkeit der Torsionswellen geeignetste Formel ist analog (15) und (16)

$$(23) \quad c_T = 2\pi NL \frac{\lambda'}{l_T z_T},$$

wobei das z_T aus der Gleichung

$$(24) \quad \frac{\operatorname{tg} z_r}{z_r} = \frac{p(R^2 + r^2)}{p'(R'^2 + r'^2)} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0 r}{l_r}}{\frac{\pi l_0 r}{l_r} - 1}$$

zu berechnen ist.

Kennt man c'_L und c'_r , so folgt daraus

$$E = \rho c'^2_L; \quad T = \rho c'^2_r = 2(\mu + 1)E;$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{T} \right) - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{c'_L}{c'_r} \right)^2 - 1.$$

Da Torsionsschwingungen zusammengesetzter Stäbe noch nicht untersucht waren, so war eine experimentelle Bestätigung der Formeln wünschenswert. Als solche will ich die Resultate eines Versuches anführen, wobei eine Messingröhre, mit den Rändern etwas übergreifend, an eine Glasröhre angesiegelt wurde.

Es waren

$$\begin{aligned} \lambda' &= 305 \text{ mm} \\ p' &= 150 \text{ g} \\ l_L &= 126.6 \text{ mm} \\ l_r &= 218.6 \text{ „} \\ R &= 14.45 \text{ „} \\ r &= 13.79 \text{ „} \end{aligned}$$

(Die hiebei verwendete Glasröhre ist die auf S. 27 als *B* bezeichnete, daselbst sind auch *N* und *L* angeführt).

Aus diesen Daten wurde berechnet:

$$c_L = 3144 \text{ m/sek}, \quad c_r = 1872 \text{ m/sek}, \quad \mu = 0.411,$$

während die direkte Bestimmung aus Longitudinal- und Transversalton eines längeren Stückes derselben Messingröhre

$$c_L = 3180 \text{ m/sek}, \quad c_r = 1881 \text{ m/sek}, \quad \mu = 0.429$$

ergab, was in Anbetracht dessen, daß gemäß dem früher Gesagten die Genauigkeit bei so großen Geschwindigkeiten überhaupt

¹⁾ Hiebei ist also die Kenntnis von R und r nötig; $2R$ wurde mit einem Dickenmesser bestimmt, r meistens aus dem Gewichte, dem spezifischen Gewichte und dem R berechnet.

geringer ist, als genügende Übereinstimmung angesehen werden kann.

IV.

Stefan hatte bei seinen Versuchen als tonerregenden Teil fast ausschließlich Holzstäbe benützt. Für longitudinale Töne sind diese auch ganz gut anwendbar, nicht aber für Torsionstöne.

Infolge der verschiedenen Elastizität in der Richtung senkrecht und parallel zu den Faserflächen, sowie infolge der Inhomogenität des Materials gibt ein solcher Stab je nach der Art des Anreibens ganz verschiedene Torsionstöne. (Bei einem Versuche gab ein 995 mm langer Stab aus weichem Holz einen Longitudinalton von 2669 Schwingungen und Torsionstöne, welche zwischen 709 und 762 schwankten, was für die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwellen $c_L = 5310 \text{ m/sek}$ und für die Torsionswellen $c_r = 1410 \text{ bis } 1517 \text{ m/sek}$ ergibt). Am besten entsprach der Anforderung auf Reinheit und Gleichmäßigkeit der Töne eine ziemlich dickwandige Glasröhre, welche daher bei den im Folgenden angeführten Versuchen ausschließlich benützt wurde.

Auch der zu untersuchende Körper wurde in Röhrenform gegossen, einerseits weil die Theorie voraussetzt, daß die Kräfte auf den ganzen Querschnitt verteilt sind, während sie, falls man an die Glasröhre ein massives Stück anfügt, bloß an der Mantelfläche des letzteren angreifen würden, andererseits weil in einem röhrenförmigen Stücke sich viel rascher eine gleichförmige Temperatur herstellen läßt, als in einem massiven, was in Anbetracht des schlechten Wärmeleitungsvermögens solcher Körper sehr wichtig ist.

Die Befestigung des Stückes geschah auf die Weise, daß die Glasröhre bis über die Schmelztemperatur des Materials erwärmt und dann das Stück darangefügt wurde; beim Erkalten hielt es infolge der Adhäsion meist genügend fest.

Der Ton wurde durch Reiben des Glases mittelst eines weichen, mit Wasser gut durchfeuchteten, mit Flanell überzogenen Filzlappens erregt.

Das Hauptaugenmerk mußte bei den Versuchen auf die Konstanterhaltung auf einer beliebigen Temperatur gerichtet werden.

Stefan hatte einfach den Stab längere Zeit an einem Orte von wenig veränderlicher Temperatur neben einem Thermometer gelassen, bevor der Ton bestimmt wurde; um größere Temperatur-

unterschiede zu ermöglichen und eine größere Genauigkeit zu erzielen, wurde bei diesen Versuchen folgende Anordnung getroffen: es wurde ein doppelwandiger parallelepipedischer Kasten aus Zinkblech hergestellt, der oben durch einen gut passenden Holzdeckel verschließbar war, in welchem sich zwei Löcher zum Durchstecken der Thermometer befanden, während an einer der Schmalseiten des Kastens eine kreisförmige Öffnung ausgeschnitten war, durch welche das Ende der Glasröhre (bis zu einer Marke) mit dem daran befestigten (z. B. Wachs-) Stücke hineinragte. In den Raum zwischen den Doppelwänden konnte mittelst zweier Röhrenansätze Wasser eingeleitet werden. Damit das Innere des Kastens von der äußeren Luft möglichst abgesperrt werde, wurde der Zwischenraum zwischen der Glasröhre und dem Rande der Öffnung mit Watta ausgefüllt, welche durch zwei eingeschobene Korkringe beiderseits festgehalten wurde. Ebenso wurde ein Wattapfropfen in die Röhre gesteckt. Daß dies auf die Tonhöhe keinen irgend merklichen Einfluß habe, wurde durch Versuche konstatiert. Mittelst Durchleiten von Eiswasser konnte die Temperatur erniedrigt werden, durch Erwärmen mit einem untergestellten Bunsen-Brenner beliebig erhöht werden; die Flammenhöhe konnte so reguliert werden, daß die Temperaturschwankung im Inneren während einer Stunde $0.2 - 0.3^{\circ}$ nicht überstieg. So lange wurde auch jedesmal abgewartet, bevor der Versuch begonnen wurde, damit in dem (Wachs-) Stücke eine gleichmäßige Temperaturverteilung eintrete.

Diese Anordnung der Versuche hat zugleich den Vorteil, daß, falls die äußere Temperatur gleich bleibt, der Einfluß der thermischen Änderung der Elastizität des Glases auf die Tonhöhe des Systems nur sehr klein ist, da bloß das in den Kasten hineinragende Stück diesbezüglich in Betracht kommt. Wenn man die Rechnung ganz exakt durchführen will, kann man die von Stefan abgeleitete Formel für einen aus drei Stücken bestehenden Stab anwenden¹⁾. Diese Stücke wären in diesem Falle:

- I. Glasröhre auf Zimmertemperatur,
- II. Glasröhre auf Temperatur des Kastens,
- III. Wachsröhre.

Bei den im Folgenden angeführten Versuchen war aber die Länge des Stückes II nur $\frac{1}{80}$ von I, so daß in Anbetracht des

geringen Unterschiedes von c_1 und c_2 der Einfluß der Erwärmung desselben ganz vernachlässigt werden konnte.

Bei Anstellung der Experimente muß auch der Umstand berücksichtigt werden, daß der Knotenpunkt, in welchem der Stab festgeklemmt wird, von der jeweiligen Tonhöhe abhängt, daß daher seine Lage jedesmal aus der übereinstimmenden Saitenlänge am Monochord nach Formel (17) berechnet werden muß. Praktisch ist es, behufs Verschiebung des Einklemmungspunktes von vornherein eine Skala auf der Glasröhre einzuzätzen. (Als Klemmbacken dienten zwei 1.5 cm breite, etwas ausgehöhlte Korkstücke, welche auf Brettlehen aufgeleimt waren, die mit einer Schraubenzwinde zusammengedrückt wurden).

Man könnte sich von dieser Komplikation ganz befreien, indem man auch an der anderen Seite der Röhre ein Wachsstück befestigt, so daß das System symmetrisch wird. Dann hätte man die Rechnung für einen einseitig befestigten Stab von der halben Länge der Glasröhre mit angefügtem Wachsstück durchzuführen. Da aber in diesem Fall ein zweiter Kasten erforderlich ist, und auch die Herstellung gleicher Röhrenstücke nicht ganz leicht ist, zog ich es vor, bei der beschriebenen Anordnung zu bleiben.

Die Messung der Tonhöhe geschah, wie früher erwähnt wurde, mittelst eines Monochordes. Um bei der Abgrenzung des schwingenden Saitenstückes möglichste Genauigkeit zu erreichen, wurde die Kante des verschiebbaren Steges zugeschärft und auch eine Vorrichtung angebracht, daß die Saite von oben niedergedrückt wurde, so daß ein Schwanken derselben an den Endpunkten, welches eine Tonvertiefung zur Folge hat, vermieden wurde. Die Stahlsaiten wurden durch Gewichte gespannt; die Tonhöhe blieb sehr konstant; auch die Korrektion infolge der Steifheit der Saite war zu vernachlässigen, so daß die direkt abgelesenen Saitenlängen den Schwingungszahlen verkehrt proportional gesetzt werden konnten.

Die Vergleichung der Tonhöhen der Saite und des Stabes geschah nach dem Gehör; Schwabungen konnten nicht wahrgenommen werden, aber trotzdem war eine ziemliche Genauigkeit der Einstellung möglich, da Unterschiede von $0.1\text{ mm} = 1$ Schwingung auf 1500 noch merklich waren. Allerdings war diese Fehlergrenze bei Unreinheit der Töne etwas höher.

¹⁾ Diese Sitzungsber., LV, 1867.

V.

Bei der Durchführung der Messungen zeigten sich besonders zwei störende Umstände, und die dadurch hervorgerufenen Fehler waren die Ursache, daß namentlich die Bestimmung des μ nicht die gewünschte Genauigkeit erlangte. So zeigt es sich nämlich, daß nur wenn die Länge des angesetzten Stückes eine gewisse Größe nicht überschreitet, der Grundton des Systems ertönt; will man den Ton noch vertiefen, indem man ein längeres Stück ansetzt oder die Temperatur erhöht, so spricht der Grundton nicht mehr an, meist aber tritt jetzt der erste Oberton hervor. Dies hat den Effekt, daß die Tonvertiefung, mit welcher nach dem auf S. 16 Gesagten die Genauigkeit wächst, nur eine gewisse Grenze erreichen kann. Oft ist es nicht einmal vorteilhaft, so weit zu gehen, da zuweilen schon vorher die Klarheit des Tones merklich getrübt ist. Insbesondere ist die Beobachtung des Torsionstones erschwert, da die durch die rückweisen drehenden Bewegungen der Hand hervorbrachten Töne nicht so gut charakterisiert sind, als die Longitudinaltöne, bei denen es leichter ist, je nach der Art des Reibens den Grund- oder Oberton festzuhalten.

Da das Verschwinden des Grundtones bei der größten erreichbaren Tonvertiefung einzutreten beginnt, also wenn der Knotenpunkt des Glasstabes am meisten gegen die Trennungsstelle zu verschoben ist, meint Stefan, welcher diese Erscheinung auch beobachtete, daß ihre Ursache in der Verteilung der Verdünnungen und Verdichtungen im schwingenden Stabe liegen müsse, welche in der Nähe der Knoten am stärksten, in der Nähe der Schwingungsbäuche am geringsten seien.

Vielleicht bietet aber folgende Überlegung eine befriedigendere Erklärung.

Man kann die Schwingungen des Wachsstückes auch als eine Art von durch die Glasröhre erzwungenen Schwingungen betrachten; für sich allein tönt das Wachsstück nicht. Unter sonst gleichen Verhältnissen werden sich diese leichter erzeugen lassen, wenn ihre Amplitude im Vergleich zur Amplitude der Glasschwingungen klein, als wenn sie groß ist. Nun ergeben die Gleichungen (12) für das Verhältnis der Amplituden

$$\frac{A'}{A} = \frac{\cos \beta \lambda}{\cos \beta' \lambda'} = - \frac{E \gamma \beta \sin \beta \lambda}{E' \gamma' \beta' \sin \beta' \lambda'}$$

oder nach leichter Transformation, wenn wieder zur Abkürzung $\beta' \lambda' = z$ gesetzt wird

$$\frac{A'}{A} = \frac{\cos \frac{\pi l_0}{l}}{\cos z} = - \frac{p}{p'} \frac{\sin \frac{\pi l_0}{l} z}{\frac{\pi l_0}{l} \sin z}$$

Betrachten wir nun die Grenzfälle, wo

1. der Knoten der Mitte der Glasröhre am nächsten liegt, also der Ton der höchstmögliche wird, nämlich gemäß dem auf S. 14 Gesagten gleich jenem, welcher der Gleichung (19) entspricht; dann ist $z = 0$, also nach der ersten der obigen Formeln $\frac{A'}{A}$ dem absoluten Betrage nach höchstens gleich Eins, und zwar desto kleiner, je mehr $\frac{\pi l_0}{l}$ sich von 180° entfernt, also je größer $\frac{p'}{p}$.

2. Wenn der Knoten an der Verbindungsstelle selbst liegt, ist nach Formel (17)

$$\lambda = \frac{\pi}{2\beta}, \text{ also } \beta \lambda = \frac{\pi l_0}{l} = \frac{\pi}{2}, \text{ also auch } \beta' \lambda' = z = \frac{\pi}{2},$$

somit nach der zweiten der obigen Formeln

$$\frac{A'}{A} = - \frac{p}{p'}$$

In der Regel wird p' bei weitem kleiner sein als p , mithin im zweiten Falle die Amplitude der Wachserschwingungen A' viel größer sein müssen als jene der Glasschwingungen A , daher wird der Ton nur sehr schwer erzeugt werden können, während im Falle 1) das Gegenteil stattfindet. Dies ist auch von vornherein ersichtlich, da wir im Anfange bewiesen haben, daß sich die Gleichung (14) auch aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes ableiten läßt, so daß also im Falle 2) die Amplituden der Wachserschwingungen unverhältnismäßig größer sein müssen als jene der erregenden Glasröhre, um diesen Gleichgewicht zu halten. Zugleich ergibt sich, daß tiefe Töne desto leichter ansprechen werden, je größer $\frac{p'}{p}$ ist; dies stimmt mit der Erfahrung überein, z. B. ein Wachsstück vom Gewichte 58.97 g, welches an die später noch zu beschreibende Glas-

röhre A befestigt war, erzeugte noch einen Ton von 130 mm Saitenlänge, dagegen ein sehr dünnes vom Gewichte 17.83 g war schon bei 116 mm kaum zum Tönen zu bringen.

Es würde daraus hervorgehen, daß man p' möglichst groß machen soll, doch ist dann, wie schon früher bemerkt, die Klangreinheit beeinträchtigt. Will man dann doch Töne hervorbringen, so springen die Stücke ab — eben wegen der großen Amplituden.

Der erste Oberton dagegen hat dann meist seinen Knoten in der Nähe der Mitte des Glasstückes, daher nach Formel (17)

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{2\beta}, \quad \beta\lambda = \pi,$$

daher auch

$$\beta'\lambda' = \pi,$$

also

$$\frac{A'}{A} = +1,$$

er wird also gerade dann leicht ansprechen.

Der zweite störende Umstand ist der, daß die Tonhöhe nicht ganz unabhängig ist von der Art des Anreibens; wenn das Reibzeug ziemlich trocken ist, daher die Reibung groß, die Töne laut, so erscheinen sie meist tiefer, als wenn man, mit ganz naßem Reibzeug, mit geringer Reibung leisere Töne erregt. Dies bildet nicht eine Eigentümlichkeit der zusammengesetzten Stäbe, es ist auch recht deutlich an Torsionstönen (weniger gut an Longitudinaltönen) von Metallröhren, namentlich wenn sie mit Kolophoniumlappen gerieben werden und, wie früher erwähnt, an Holzstäben bemerkbar.

Eine diesbezügliche Bemerkung fand ich bei Wertheim (Ann. chim. et phys. XII, XIII), welcher dies darauf zurückführt, daß bei lauterem Tönen, also größeren Verschiebungen, die Elastizitätskräfte nicht mehr proportional denselben, sondern langsamer wachsen.

Es wäre ganz plausibel, daß dies bei Wachs etc., wo die Elastizitätsgrenze weit niedriger ist, mehr hervortritt als bei anderen Körpern. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß auch die Reibung selbst, welche in der einen frei schwingenden Stab voraussetzenden Theorie nicht berücksichtigt wird, einen Einfluß hat.

Eine analoge Erscheinung wäre die, daß gestrichene Saiten einen etwas tieferen Ton geben als gezupfte. Um diese Fehlerquelle möglichst zu verringern, wurde das Reibzeug möglichst naß gemacht,

und wurden meist ziemlich leise Töne erregt. Die dabei vorkommenden Schwankungen blieben meist unter 0.1 — 0.2 mm Saitenlänge (bei geringer Tonvertiefung weniger).

Zur Untersuchung gelangten gelbes Bienenwachs, Paraffin, Spermazet, Kerzenstearin und weißer Schellack. Hierbei waren die Röhren durch Gießen in Formen erzeugt worden; nur jene aus Schellack mußte, da dieses auch bei hoher Temperatur nicht ganz dünnflüssig wird, durch Überkleben eines geölten Messingstabes hergestellt werden.

Die Versuche konnten leider nicht bis in unmittelbare Nähe des Schmelzpunktes fortgesetzt werden, denn entweder wurden die Körper schließlich schon so weich, daß sie sich infolge der Schwerkraft zu rasch verbogen (Paraffin, Wachs, Schellack), oder sie wollten an der Glasröhre nicht mehr haften (Spermazet, Stearin).

VI.

Die Resultate der Messungen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Die Bezeichnungen sind übereinstimmend mit dem Früheren: t = Temperatur, λ' = Länge des angesetzten Stückes, p' = dessen Gewicht; R' , r' = äußerer und innerer Radius; l_t = die dem Longitudinalton des ganzen Systems entsprechende Saitenlänge; l_r = analog dem Torsionston; c'_t = die daraus berechnete Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in dem Versuchsstücke; c'_r jene der Torsionswellen; μ = das hieraus sich ergebende Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation.

Bei allen Versuchen war

$$\begin{array}{ll} N = 435 & R = 1.2306 \\ L = 417.1 & r = 0.9362. \end{array}$$

Der besseren Übersicht wegen sind die erhaltenen Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den Figuren 3, 4, 5 und 6 als Punkte graphisch eingetragen; man sieht sofort, daß eine lineare Formel die Abhängigkeit derselben von der Temperatur nicht darstellen könne; man muß hierzu eine Funktion von der Form $c = a + bx + cx^2$ verwenden, bei Paraffin müßte sogar noch ein Glied $+ dx^3$ hinzukommen.

Die Werte dieser Konstanten wurden für die Longitudinalwellen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; anstatt

(Gelbes) Wachs.

$$l_{0L} = 104.0, \quad p = 765.5, \quad \lambda = 1495.5, \quad l_{0T} = 165.7.$$

(Glasröhre A).

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
5.7	167	88.74	1.53025	0.7639	136.4		1032		
7.3	150.6	79.8			130.3	214.6	1010	615	0.856
16.4	151	79.73			135.98	225.8	922	552	0.894
16.6	130	68.0			126.75	209.5	900	540	0.889
25.7	111.5	58.97			127.6	210.9	737	443	0.881
26.1	95	50.19			119.08	196.05	735	438	0.408
30.6	130.9	68.0			98.95 ¹⁾		670		
50.7	152	79.73			101.42 ¹⁾		660		
31.6	95	50.19			123.1	205.4	662	388	0.454
36.6	78.5	41.8			120.6	199.9	556	329	0.424
Mittel . . .									0.401

Paraffin.

$$l_{0L} = 104.0, \quad \lambda = 1495.5, \quad p = 766.5, \quad l_{0T} = 165.7.$$

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
6.1	204.4	54.75	1.244	0.77	121.26	194.0	1522	916	0.379
6.2	148.3	36.0	1.214	0.77	111.59	177.1	1501	886	0.434
6.5	117.7	28.9			109.1		1500		
17.3	205	54.75	1.244	0.77	124.5	199.55	1414	858	0.859
17.3	129	35.73	1.258	0.77	110.93	176.6	1414	828	0.459
17.3	159.3	38.05	1.214	0.77	113.34	180.46	1430	842	0.448
21.6	118.4	28.9	1.214	0.77	109.7	174.6	1300	733	0.574
21.7	129.4	35.73			111.3		1349		
24.6	160.1	38.25	1.214	0.77	116.0	185.05	1259	757	0.883
25.2	206.0	54.75			136.4		1194		
25.2	216.0	54.75			96.85 ¹⁾		1189		
27.8	118.9	28.9			111.8		1035		
28.6	207	54.75			101.0 ¹⁾		984		
29.3	103.3	25.4			111.9		851		
30.2	93.5	23.95			112.0		744		
30.8	159.3	38.05	1.214	0.77	101.9 ¹⁾	163.75	751	437	0.473
32.9	56.0	14.15			108.6		470		
35.3	42.9	10.55			110.6		261		
35.3	42.9	10.55			102.4 ¹⁾		240		
Mittel . . .									0.438

1) Erste Oberton.

Spermazet.

$$l_{0L} = 104.0, \quad p = 765.5, \quad \lambda = 1495.5, \quad l_{0T} = 165.7.$$

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
4.9	166.6	62.45	1.366	0.773	117.7	189.4	1517	909	0.894
14.5	166.9	62.45			118.8		1432		
18.9	167	62.45			118.9		1426		
19.9	167	62.45			119.25	191.45	1403	859	0.834
24.7	167.2	62.45			121.05		1311		
27.5	167.4	62.45			121.37	196.1	1298	782	0.378
28.4	167.4	62.45			122.4	197.9	1258	759	0.378
32.6	167.8	62.45			127.2	212.6	1129	645	0.533
32.9	167.8	62.45			129.1		1092		
33.1	149.7	55.10			122.2	201.6	1091	628	0.506
Mittel . . .									0.420

Weißer Schellack.

$$l_{0L} = 102.2, \quad p' = 751.0, \quad \lambda = 1468.5.$$

(Glasröhre B)

t	λ'	p'	l_L	c'_L
8.7	171.5	40.77	96.4 ¹⁾	1009
19.4	136.5	34.32	117.7	970
25.5	104	28.42	109.5	948
26.3	136.5	34.32	124	869
30.8	104	28.42	110.1	865
35.3	104	28.42	111.4	821
40.0	98	23.71	111.4	762

Stearin.

$$l_{0L} = 104.0, \quad \lambda = 1495.5, \quad p = 765.5.$$

t	λ'	p'	l_L	c'_L
16.1	159.5	62.84	119.1	1354
17.3	188	56.9	120.8	1313
17.3	180.5	53.95	118.5	1396
18.1	185.3	78.18	126.16	1354
26.4	185.8	78.18	128.5	1284
33.6	186.2	78.18	133.25	1181
37.3	160.5	62.84	123.4	1177
38.5	186.5	78.18	135.4	1145
38.5	186.5	78.18	93.18 ¹⁾	1188
40.8	121.3	37.32	113.36	1076
41.5	160.6	62.84	127.5	1077
49.2	122.0	37.32	117.6	911

1) Erster Oberton.

bei Paraffin die vierte Konstante hinzuzunehmen, zog ich es vor die Kurve in drei Stücke zu teilen und für jedes die quadratische Formel zu berechnen. Die durch diese Gleichungen dargestellten Kurven sind in jenen Figuren eingetragen. Wo die Werte des μ bestimmt waren ¹⁾, wurde daraus das Mittel genommen, mit dieser Zahl die Torsionswellengeschwindigkeit berechnet und die so erhaltene Kurve gleichfalls eingezeichnet. Hierbei ist allerdings die

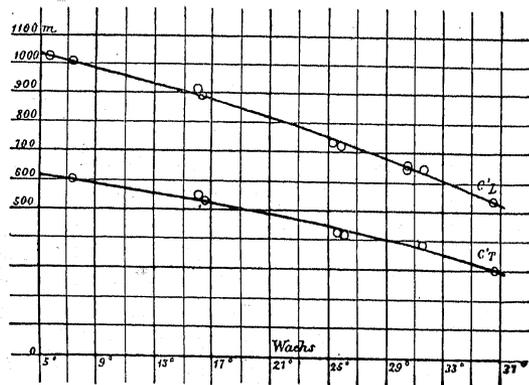


Fig. 3.

Änderung des μ mit der Temperatur nicht berücksichtigt, doch sind dazu die Beobachtungen nicht genügend genau, ihre Zahl zu gering, und würden die Korrekturen bei der Torsionsgeschwindigkeit überhaupt nicht sehr groß sein.

¹⁾ Bei Stearin gelangte ich zu keinen brauchbaren Resultaten. Wahrscheinlich liegt der Grund in der stark kristallinen Struktur und der Sprödigkeit desselben; es wird leicht von kleinen Sprüngen durchzogen, welche kaum sichtbar sind und sich nur durch Änderung des Tones bemerkbar machen.

Ebenso war bei Schellack wegen der Ungleichmäßigkeit der Röhre eine Berechnung des μ nicht möglich.

Die Werte der Konstanten sind:

	Longitudinalwellengeschwindigkeit			Torsionswellengeschwindigkeit		
	a	b	c	a	b	c
Wachs 6—37° ..	1092.9	-9.417	-0.1464	652.9	-5.626	-0.0874
Spermazet 5—33° ..	1479.8	+7.526	-0.5675	878.1	+4.466	-0.3867
Stearin 16—49° ..	1352.7	+4.9012	-0.2786			
Schellack 9—40° ..	1022.4	+0.1455	-0.1673			
Paraffin 6—25° ..	1465.8	+12.390	-0.8774	864.3	+7.306	-0.5174
25—30° ..	-3816.7	+438.986	-9.4892	2250.6	+258.86	-5.5955
30—35° ..	+9323.2	-434.826	+5.0817	+5499.3	-256.40	+2.9688

Die mit Hilfe dieser Konstanten für einige Temperaturen berechneten Schallgeschwindigkeiten und die daraus folgenden Elastizitätsmoduln sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Schallgeschwindigkeit					Elastizitätsmodul				Dehnungsm. Tors.-M.
	Wachs	Spermazet	Paraffin	Stearin	Schellack	Wachs	Spermazet	Paraffin	Stearin	
10°	984	1498	1502		1007	95.8	214	207		181 157 121 87.8
20	846	1403	1363	1339	958	70.2	187	168		
30	679	1195	813	1249	876	44.6	134	58.6		
40				1103	761					
50				901						
10	588	889	886			84.2	75.5	71.9		181 157 121 87.8
20	505	833	804			25.0	65.8	58.5		
30	405	709	479			15.9	47.2	20.4		

Wenden wir uns nun zur Diskussion der Resultate.

In Betreff der Übereinstimmung der einzelnen Beobachtungen untereinander ergibt sich Folgendes:

Die Longitudinalgeschwindigkeiten stimmen untereinander ziemlich gut überein; die durchschnittlichen Abweichungen betragen $1-1\frac{1}{2}\%$, also eine für derartige Versuche befriedigende Genauigkeit. Bei den Torsionsgeschwindigkeiten sind die Fehler etwas größer. Bemerkenswert ist, daß auch die Beobachtungen bei verschiedenen Längen der Stücke und auch jene der Obertöne keine bedeutenden Differenzen zeigen, was auch als Bestätigung der Theorie gelten kann (vergl. z. B. Paraffin bei $17^{\circ}3$ oder bei $25^{\circ}2$).

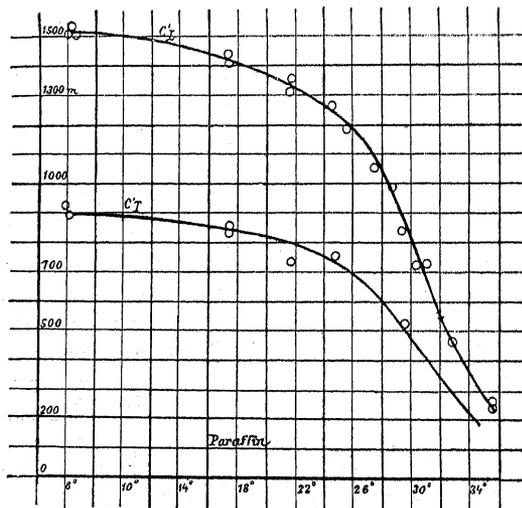


Fig. 4.

Bezüglich des Waxes muß bemerkt werden, daß Stefan zu einem etwas anderen Resultate gelangte; den in der Einleitung erwähnten Zahlen zufolge fand er bei gewöhnlicher Temperatur die Geschwindigkeit allerdings fast gleich, aber die Abnahme derselben mit wachsender Temperatur ist nach seinen Messungen noch bedeutend rascher. Vielleicht läßt sich dies dadurch erklären, daß hier gelbes Bienenwachs verwendet wurde, während er weißes Wachs gebrauchte, welches zumeist mit anderen Stoffen, namentlich Talg, versetzt wird. Auch die Differenz des Wertes für Stearin

von der aus Warburg's Beobachtungen folgenden Zahl 1437 m/sec wird sich auf eine kleine Verschiedenheit des Materials zurückführen lassen.

Allon zur Untersuchung gelangten Stoffen ist die bedeutende Abnahme der Elastizität mit wachsender Temperatur gemeinsam und bei allen erfolgt sie mit zunehmender Temperatur immer rascher, nur das Paraffin bildet hievon eine Ausnahme; seine Kurve weist in der Nähe von 30° einen Wendepunkt auf und wird oberhalb dieser Abszisse wieder konvex. Ob dies bloß eine Eigentüm-

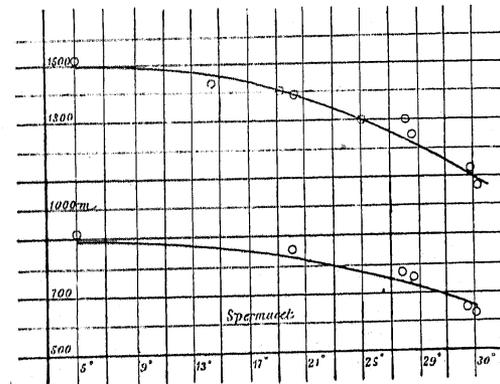


Fig. 5.

lichkeit dieses Körpers ist, läßt sich nicht entscheiden; es wäre möglich, daß auch die anderen Stoffe bei noch höherer Temperatur eine solche Erscheinung zeigen; leider ließ sich dies aus früher genannten Gründen nicht mehr untersuchen.

Es scheint ferner, daß wenigstens beim Paraffin, die Kurve sich kontinuierlich der Ordinate 0 nähert, um sie vielleicht beim Schmelzpunkte zu erreichen; auch bei den anderen Stoffen ist dies nicht unwahrscheinlich, da bei den höchsten Temperaturen die Neigung besonders groß ist. Es wäre nun sehr merkwürdig, wenn die wirkliche Schallgeschwindigkeit bis 0 abnehmen würde, während sie ja in den meisten Flüssigkeiten Werte zwischen 1000 und 1500 m/sec hat. Diese Erscheinung wird aber durch den Umstand erklärt, auf

welchen zuerst Wertheim aufmerksam gemacht hat, daß nämlich diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in Stäben nicht identisch ist mit jener in Körpern, welche nach drei Dimensionen ausgedehnt sind.

Wird ein Stab gedehnt, so kann er sich ungehindert in der Quere zusammenziehen; in einem massiven, nach allen Richtungen

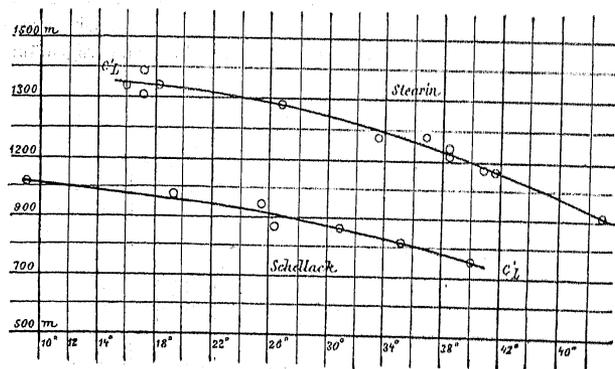


Fig. 6.

des Raumes ausgedehnten Körper ist dies dagegen nicht möglich, daher ergibt sich auch hier als Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht

$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, sondern

$$(c') = \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 - 2\mu(1 + \mu)} \frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(1 - \mu) T}{1 - 2\mu} \frac{1}{\rho}} = c'_z \sqrt{\frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}} = c'_r \sqrt{\frac{2 - 2\mu}{1 - 2\mu}}$$

Diese Geschwindigkeit braucht auch für c'_z oder $c'_r = 0$ nicht gleich Null zu sein, wenn nämlich $\mu = 0.5$ wird — wie dies ja bei Flüssigkeiten der Fall ist. Diese Geschwindigkeit (c') ist es auch, welche bei flüssigen Körpern beobachtet wird; das c' , welches den Longitudinalwellen eines Flüssigkeitsstabes (welcher seitlich durch keine festen Wände begrenzt ist) entspricht, ist gleich Null. Es

folgt somit, daß unsere Kurve, welche das c' in festen Körpern darstellt, bei der Schmelztemperatur die Abszissenaxe erreichen muß, und zwar scheint es oben nach dem Gesagten, daß sie hiebei keinen Sprung macht, sondern kontinuierlich verläuft. Um das (c') in ausgedehnten Körpern direkt zu messen, haben wir bis jetzt kein Mittel; man könnte es bei Kenntnis von μ berechnen, doch ist dazu die Bestimmung dieser Größe zu unsicher, da die kleine Differenz $1 - 2\mu$ im Nenner vorkommt.

Um die in der Einleitung berührte Frage des Zusammenhanges zwischen der thermischen Änderung der Elastizität und dem Ausdehnungskoeffizienten zu untersuchen, machte ich einige Messungen des spezifischen Gewichtes der Körper bei verschiedenen Temperaturen. (Diese Zahlen wurden schon in den vorhergehenden Berechnungen teilweise benutzt). Diese Werte, welche in Fig. 7 graphisch dargestellt sind, sind zugleich der Maßstab für die Ausdehnung.

t	Wachs	t	Paraffin	t	Spermazet	t	Stearin
1.6	$\rho = 0.9774$	0.7	$\rho = 0.9055$	1.3	0.9423	1.0	1.0017
17.7	0.9646	17.9	0.8928	17.8	0.9322	17.7	0.9931
29.7	0.9500	29.6	0.8719	29.8	0.9213	29.6	0.9849
39.5	0.9193	39.4	0.8452	34.7	0.9148	39.3	0.9748
47.2	0.8778					47.2	0.9605

Der Anblick der Kurven lehrt nun, daß allerdings Paraffin und Wachs, welche sich am meisten ausdehnen, auch ihre Elastizität am meisten ändern und daß ebenso beim Stearin die Kleinheit der thermischen Koeffizienten übereinstimmt, doch fehlt in den Details die Ähnlichkeit; so hat namentlich die merkwürdige Kurve der Schallgeschwindigkeit des Paraffins gar keine Analogie mit dessen Wärmeausdehnungskurve. Auch würde man beim Spermazet, welches seine Elastizität ziemlich rasch ändert, einen größeren Ausdehnungskoeffizienten erwarten können. Es scheint somit, daß zwischen diesen Größen nur ein mittelbarer Zusammenhang besteht. Von vornherein ist ja auch eher ein solcher zwischen dem Widerstande, welchen der Körper einer allseitigen Zusammendrückung entgegenstellt, also dem Volums-Elastizitätsmodul und der allseitigen thermischen Ausdehnung anzunehmen; man könnte erwarten, daß nämlich die Änderung der elastischen Kräfte mit der Tempe-

ratur eben von der Vergrößerung der Distanzen zwischen den Molekülen herrührt. Der Längsmodul E folgt aus dem Volumsmodul k mit Hilfe der Formel

$$E = 3(1 - 2\mu)k,$$

also

$$\delta E = 3(1 - 2\mu)\delta k - 6k\delta\mu.$$

Da somit die Änderung des E auch durch die Änderung des μ beeinflusst wird, ist es immerhin noch nicht ausgeschlossen, daß zwischen k und dem Ausdehnungskoeffizienten eine direkte Beziehung

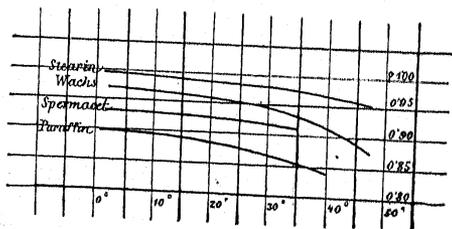


Fig. 7.

herrscht und die Abweichungen davon bei E bei Annäherung an die Schmelztemperatur auf Rechnung des μ zu setzen sind, welches sich dann gerade rasch ändert. Hierüber ist vorderhand eine Entscheidung nicht möglich.

In Betreff des zweiten, im Abschnitte I erwähnten Punktes, der Größe des μ , ist zu bemerken: In der Tat zeigen sich bei diesen weichen Körpern die μ , auch nach der dynamischen Methode bestimmt, verhältnismäßig groß; allerdings bleiben sie immerhin beträchtlich unterhalb der Zahl 0.5 von Mallock für Paraffin und dürfte dieser Wert (welcher auch (c) = ∞ involvieren würde) in den früher erwähnten Mängeln der statischen Methode begründet sein. Im Übrigen möchte ich den hier gefundenen Mittelwerten auch keine sehr große Genauigkeit beimessen, da ja die einzelnen Messungen ziemlich große Abweichungen zeigen. Ein Teil von ihnen läßt sich — bei Spermazet und Wachs — wohl auf die Änderung des μ mit der Temperatur zurückführen, doch bleiben auch dann noch beträchtliche Differenzen, namentlich bei Paraffin.

Dies ist bei der Größe des Einflusses, welchen geringe Fehler bei der Tonbestimmung etc. haben, leicht begreiflich.

Immerhin ist die Anwendung dieser Methode bei weichen Körpern gerechtfertigt, da zu erwarten ist, daß sich die Fehler der Gewichtbestimmung, Messung der Radien, Messung des Tones bei einem Mittelwerte gegenseitig aufheben, und da eben eine andere Methode zur Bestimmung des μ in solchen Stoffen nicht vorhanden ist.

VII.

Die allgemeinen Ergebnisse der Untersuchung sind also, um sie zum Schlusse noch kurz zusammenzufassen:

1. Bezüglich der Anwendbarkeit der Methoden überhaupt: Die Schwingungen zusammengesetzter Stäbe sind ein gutes Mittel zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinal- und Torsionswellen in Stäben von weichen Körpern (Paraffin, Schellack etc.) und somit auch des adiabatischen E ; sie gestatten auch die Bestimmung des μ , allerdings wird sich dabei keine große Genauigkeit erzielen lassen.

2. Bezüglich der Änderung der Elastizität mit der Temperatur:

Die Geschwindigkeit c_L und c_T , somit auch E und T , nehmen mit wachsender Temperatur bei solchen Körpern sehr rasch ab, und zwar nicht derselben proportional, sondern immer rascher; ob zum Schlusse immer wieder ein Wendepunkt eintritt — wie beim Paraffin — ließ sich nicht entscheiden. Die Kurven dürften bei der Schmelztemperatur die Abszissenaxe berühren. Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dieser Abnahme und dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten existiert nicht, doch ist damit noch nicht ausgeschlossen, daß ein solcher zwischen letzterem und dem Volumsmodul besteht, was dann die scheinbare Übereinstimmung zwischen den obigen Größen bei Stoffen, die weit von ihrem Schmelzpunkte entfernt sind, erklären würde.

3. Bezüglich der Größe des μ :

Dasselbe schwankt bei den untersuchten Stoffen (Wachs, Spermazet, Paraffin) — den Versuchen zufolge — zwischen 0.4 und 0.44, ist somit relativ groß, wenn auch nicht so, wie es die statischen Methoden zu ergeben scheinen. Bei Wachs und Spermazet war eine Zunahme mit steigender Temperatur bemerkbar.