

O METODZIE PODOBIENSTWA DYNAMICZNEGO I JEJ ZASTOSOWANIACH W MECHANICE CIECZY I GAZÓW.

(Prace matematyczno-fizyczne t. XV, 1904; str. 1—20).

§ 1. Chciałbym w pracy niniejszej zwrócić uwagę na pewną metodę rozumowania, bardzo prostą a nadzwyczaj płodną w zastosowaniu do mechaniki cieczy a zwłaszcza gazów i pod tym względem jeszcze niedocenioną.

Jest to właściwie tylko pewien rodzaj znanej prostej metody wymiarów, używanej w najrozmaitszych rozważaniach fizycznych, ale szczególnie kształt, jaki jej nadać można w mechanice cieczy i gazów, usprawiedliwi używanie osobnej nazwy, wprowadzonej już przez Helmholtza i Rayleigha.

„Mechanicznie“ lub „dynamicznie“ podobnemi nazywamy rozwiązania szczególne równań hydrodynamicznych, odpowiadające sobie w ten sposób, że można jedno zamienić na drugie za pomocą powiększania w stałym stosunku zmiennych i ewentualnie także współczynników substancji. Takie dynamicznie podobne przykłady odznaczają się oczywiście ruchami geometrycznie podobnemi, ale nie jest to warunek wystarczający.

Znając pewne rozwiązanie, otrzymamy wszystkie inne dynamicznie do niego podobne za pomocą podstawienia wielkości:

nx, ny, nz	zamiast	x, y, z
mu, mv, mw	n	u, v, w
$\frac{n}{m} t$	n	t
bp	n	p
$\beta\mu$	n	μ
$\alpha\rho$	n	ρ

w zwykłych równaniach hydrodynamicznych:

$$(1) \quad \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho - \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \text{ i t. d.}$$

Wypływają stąd następujące tożsamości jako warunki podobieństwa:

$$\frac{\alpha m^2}{n} = \frac{b}{n} = \alpha = \beta \frac{m}{n^2},$$

które sprowadzają się do trzech warunków, określających jednoznacznie zależność rozwiązania od współczynników substancji:

$$(2) \quad n = \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}, \quad m = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha^2}},$$

przyczem także warunki graniczne muszą być odpowiednio dobrane.

Gdybyśmy np. drogą empiryczną poznali zależność prądu wody w korycie od kształtu przekroju koryta i od nachylenia jego, powyższe związki dałyby także rozwiązanie dla jakiegobądź innej cieczy, o innych współczynnikach ρ i μ . Dotychczasowe wiadomości na tem polu jednak nie są jeszcze wystarczające do rozwiązania tego zadania.

Szersze pole do zastosowania tej metody okazują przykłady, w których można pominąć jeden z czynników, uwzględnionych w równaniach ogólnych.

§ 2. Pomijając np. siły zewnętrzne, otrzymamy warunki:

$$(3) \quad m = \frac{\beta}{\alpha n}, \quad b = \frac{\beta^2}{\alpha n^2}.$$

Dla tej samej substancji (t. j. $\alpha = \beta = 1$) wynika stąd przykład podobieństwa, zauważony przez Helmholtza¹⁾. Mianowicie przepływ cieczy przez wąskie rurki czyni zadość znanemu wzorowi Poiseuille'a:

$$Q = \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{r^4 \pi}{8\mu},$$

¹⁾ Wied. Ann. 7, str. 375 (1879); Ges. Abh. I, str. 891.

tylko dla małych r , p , a dużych l ; poza pewnym obrębem tych wartości ruch następuje według praw zupełnie innych. Wiedząc jednak, że wzór ten jest ważny dla pewnej rurki, wnioskować możemy, że pozostanie on ważny dla rurki o wymiarach n -krotnych, jeżeli czynne ciśnienie zmniejszone zostanie równocześnie w stosunku $\frac{1}{n^2}$.

Prędkość wtedy zmniejsza się w stosunku $m = \frac{1}{n}$.

Uważając zaś prędkość, zamiast ciśnienia, za pierwotnie daną wielkość, wnioskujemy z (3,1), że warunkiem ważności prawa Poiseuille'a dla różnych cieczy w rurkach podobnych będzie pewna wartość stosunku $\frac{m\mu\alpha}{\beta}$ (według Reynoldsa $\frac{ua}{\mu} = 1000$ c. g. s.), ponieważ ruchy o równej wartości tego stosunku będą dynamicznie podobne. Reynolds¹⁾ stosuje to „kryterjum“ także do rur o różnych stosunkach długości do szerokości, określając liczbą n stosunek ich szerokości. Prawidło takie może znaleźć potwierdzenie empiryczne w obrębie pewnych granic, ale nie wydaje mi się uzasadnione w przypadku ogólnym.

Będzie ono zaś z pewnością zupełnie ściśle ważne dla innego przykładu²⁾, a mianowicie dla jednostajnego prostoliniowego ruchu kuli w cieczy, gdzie liczba n jest określona przez jeden tylko wymiar: promień kuli. O ile mianowicie stosunek $\frac{ua\rho}{\mu}$ (gdzie u oznacza prędkość, a promień kuli) będzie dostatecznie mały w porównaniu z 1, można pominąć bezwładność cieczy w porównaniu z lepkością i użyć dla oporu kuli w cieczy wzoru $P = 6\pi\eta au$.

§ 3. Ostateczność, przeciwną do założeń poprzedniego § 2, tworzy uwzględnienie siły zewnętrznej np. ciężkości, a pominięcie lepkości, z czego wynikają warunki:

$$(4) \quad m = \sqrt{n}, \quad b = na.$$

W ten sposób można obliczyć opór P statku, płynącego z prędkością V po cieczy idealnej, t. j. opór, pochodzący z wytwarzania fal na powierzchni cieczy, jeżeli zmierzony został opór P_0 , którego do-

znaje model statku o wymiarach n -razy mniejszych, a poruszający się z prędkością $\sqrt{n}$; mianowicie, skoro P ma wymiary bm^2 , $P = P_0 n^2$.

Ażeby skorzystać z tego wyniku dla rzeczywistych cieczy lepkich, Froude¹⁾ w ten sposób postąpił, iż opór całkowity uważał za sumę oporu falowego, wyznaczonego w wymieniony sposób i oporu lepkości, obliczonego za pomocą wzorów i tabliczek empirycznych. Metoda ta w praktyce okazała się bardzo dogodna i jest w powszechnem użyciu przy konstrukcji okrętów, ale nie jest ściśle uzasadniona i nie może być dokładna, gdyż ów ruch falowy i lepkość nie stanowią zupełnie niezależnych, nakładających się na siebie czynników.

§ 4. Zewnętrzna siła ciężkości odgrywa także rolę pierwszorzędą przy powstawaniu prądów w cieczach wskutek nierówności temperatury, określonych dodatkowem równaniem Fourierowskiem:

$$(5) \quad c\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right),$$

a powodujących nierówności gęstości wskutek: $\rho = \rho_0 (1 - s\theta)$.

Wartości względne nowo wprowadzonych współczynników c , s , κ oznaczmy znakami ζ , σ , γ , a stosunek różnic temperatury oznaczmy przez h . Podobieństwo w tym razie ogólnie możliwe jest tylko przy pominięciu wpływu bezwładności cieczy, a więc jeżeli (przy użyciu skrócenia $P = p - \rho_0 g z$) równanie (1) napisać można w formie:

$$(6) \quad \frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 s \theta g + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Z tego równania wypływa wtedy warunek podobieństwa:

$$\frac{b}{n} = \alpha s h = \beta \frac{m}{n^2},$$

z równania (5) zaś:

$$\frac{\zeta a m h}{n} = \gamma \frac{h}{n^2},$$

co sprowadzić można do:

$$(7) \quad n = \sqrt[3]{\frac{\gamma \beta}{\alpha^2 \sigma \zeta h}}; \quad m = \sqrt[3]{\frac{\sigma \gamma^2 h}{\alpha \beta \zeta}}; \quad b = \sqrt[3]{\frac{\gamma \beta \alpha \sigma^2}{\zeta h}}$$

¹⁾ Phil. Trans. 174, str. 941 (1883); 186 (1895).

²⁾ Lamb, Hydrodynamics (1895), str. 583.

Zbadawszy np. doświadczalnie prawo, według którego drucik danej grubości udziela ciepła cieczy otaczającej¹⁾, zależnie od różnicy temperatury jego a cieczy, otrzymamy za pomocą tych wzorów rozszerzenie tego prawa na jakiegobądź ciecie i na drucioku o dowolnej grubości, jeśli zważymy, że ilość ciepła, uchodząca przez 1 cm^2 powierzchni w przypadkach podobnych jest proporcjonalna do wymiarów wyrazu: $\propto \frac{\partial \theta}{\partial x}$ t. j. do:

$$\gamma \frac{h}{\mu} = \sqrt{\frac{\alpha^2 \gamma^2 \sigma \zeta h^4}{\beta}}$$

Oczywistym warunkiem ważności tej metody będzie mała różnica temperatury, ze względu na zmienność współczynnika lepkości i na pominięcie wpływu bezwładności.

Ale w każdym razie zastosowanie jej będzie bardziej usprawiedliwione aniżeli metody Boussinesqa²⁾, polegającej na rozważaniach nieco podobnych, ale opartych na równaniach dla cieczy idealnych. Równania te są absolutnie nie wystarczające w przykładach tego rodzaju, gdyż przy pominięciu lepkości ruch musiałby się wzmacniać w nieskończoność i ustalenie ruchu byłoby niemożliwe.

§ 5. Zjawiska, omawiane w poprzednim paragrafie, stanowią dział odrębny (i mało jeszcze zbadany) hydrodynamiki, będący w pewnej łączności z termodynamiką, gdyż bezpośrednią przyczynę ruchów stanowią różnice temperatury, z zewnętrznych przyczyn pochodzące, określone przez równanie (5).

Drobne zmiany temperatury, pochodzące z wewnętrznych ruchów cieczy (wskutek tarcia i rozprężenia), wcale przytem nie wchodzą w rachubę, i dlatego też w normalnych warunkach (t. j. jeżeli ściany otaczające ciecz jednakową mają temperaturę) hydrodynamika może się obejść bez rozważań termodynamicznych.

Zupełnie inaczej rzecz się ma w aerodynamice.

Wystarczy przypomnieć sobie a) różnicę wzorów Laplace'a a Newtona dla prędkości głosu, b) Saint Venanta, Wantzela i wielu innych badaczy³⁾, którzy wykazali wpływ ochłodzenia

¹⁾ Patrz np. Oberbeck, Wied. Ann. 56, str. 397 (1895).

²⁾ Journ. d. Phys. I, str. 65 (1902).

³⁾ Saint Venant et Wantzel, J. Ecol. Polyt. 16, str. 92 (1839); Comptes Rendus 17 (1893); Zeuner, Civilingen 20, str. 1 (1874); Fliegenger, ibid., str. 44; 23 str. 443 (1877); 24 str. 2 (1878); Hugoniot, Comptes Rendus 102, str. 1545, 103, str. 241 (1886); Wilde, Phil. Mag. 20, 531 (1885); 21 str. 494 (1886).

zenia adiabatyicznego na prędkość wypływu gazów przez otwory i błędy w odnośnych wzorach izotermicznych lub c) doświadczenia Joule'a i Kelvina, w których oziębienie adiabatyiczne znów zneutralizowane zostaje przez ogrzanie wskutek tarcia, ażeby się przekonać, że pominięcie skutków termicznych rozprężenia i tarcia wewnętrznego w przeważnej ilości przykładów aerodynamicznych nawet do wyvodu przybliżenie prawdziwej teorii posłużyć nie może.

Przyjęcie wzoru izotermicznego w pierwszych dwóch przypadkach dałoby równie fałszywe wyniki, jak pominięcie ciepła tarcia w ostatnim przykładzie.

Dotychczasowe badania teoretyczne opierały się na przyjęciu jednej z dwóch ostateczności: izotermizmu lub wzoru adiabatyicznego

$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$ bez głębszego uzasadnienia; teoria racjonalna jednak połączyć musi rozważanie mechanicznej strony zjawiska z równoczesnym zbadaniem jego strony termodynamicznej.

Równanie, które służy do określenia rozkładu termicznego, pojawia się w literaturze naukowej dopiero w roku 1894¹⁾; można je napisać w formie:

$$\frac{cp}{A} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \Phi + \kappa \Delta \theta$$

lub dogodniej:

$$(8) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = -kp \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (k-1) [\Phi + \kappa \Delta \theta],$$

gdzie pierwszy wyraz strony prawej określa wpływ termiczny rozprężenia, drugi $[\Phi = -\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \dots]$ i t. d.] wpływ ciepła tarcia, trzeci przewodnictwa cieplnego. Równania hydrodynamiczne zaś, jeżeli chodzi o gazy w niejednakowej temperaturze, przyjmują kształt uogólniony:

¹⁾ Neumann, Gött. Ber. 1894, str. 19; Kirchhoff, Vort. d. Wärme, str. 194 (1894); Natanson, Rozpr. Ak. Krak. 27, str. 286; patrz także Smoluchowski, „O atmosferze ziemi“ (Księga pamiątk. Uniwer. Lwów 1900) str. 15; Rozpr. Ak. Krak. 43, str. 74 (1903); Natanson, Rozpr. Ak. Krak. 42, str. 76 (1902).

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho X + \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \text{ i t. d.} \end{aligned} \right.$$

Rozwiązanie tych ogólnych równań w przypadkach specjalnych przedstawia jednak nadzwyczajne trudności. Oprócz kilku twierdzeń o zjawiskach termicznych, występujących przy wypływie gazów, nie poznaliśmy jeszcze żadnych ogólnych wyników, a znamy dotychczas tylko jedną ogólniejszą metodę: przybliżeń stopniowych ¹⁾, która niekiedy może być z korzyścią stosowana do rozwiązań specjalnych.

Nie widzimy jednak jeszcze możliwości teoretycznego rozwiązania takich problemów jak: opór ciała szybko poruszanego w powietrzu, tony powstające przy gwałtownym wypływie gazów przez wąski otwór i t. p., i do nich stosować musimy obecnie przedewszystkiem metodę doświadczalną.

Tem więcej zasługuje na uwagę fakt, że z podobieństwa dynamicznego, znajdującego tu znacznie szersze zastosowanie niż w hydrodynamice, można skorzystać w licznych przypadkach do wnioskowania apriorycznego zupełnie ścisłego i często też do skontrolowania, rozszerzenia i uogólnienia praw empirycznie znalezionych.

§ 6. Pierwszą próbę na tem polu, podjętą przez Helmholtza ²⁾, należy uważać za zupełnie chybioną.

Już same równania zasadnicze Helmholtza podlegają zarzutom dopiero co podniesionym: ponieważ Helmholtz nie zna jeszcze równania, określającego zmiany temperatury, wprowadza założenie izotermizmu zjawiska, czem już a priori wyklucza akustykę i w ogóle niemal wszystkie ruchy z wyjątkiem tych, które są objęte prawem Poiseuille'a.

W dalszym ciągu Helmholtz usiłuje wykazać analogję dynamiczną między ruchem balonu w powietrzu a ruchem statku na

¹⁾ Smoluchowski, Rozpr., loc. cit., str. 74. Pierwsze przybliżenie zwykle wystarczające jest w akustyce, która dzięki temu systematycznie się rozwijała.

²⁾ Berl. Akad. Ber. 1873, str. 501; Ges. Abh. I, str. 158.

powierzchni wody w sposób, który jeszcze mniej da się usprawiedliwić. Znaczna część oporu statku pochodzi z wytwarzania fal, na co niema analogji w przykładzie balonu. Do fal ściśnięcia i rozprężenia, pochodzących z szybkiego ruchu ciała w powietrzu, niema znów analogji w hydrodynamice. Helmholtz pomija ostatecznie jeszcze zupełnie zjawisko lepkości, nie zważając na to, że, jak wiadomo, w cieczy idealnej, ciało, poruszające się z stałą prędkością, wogóle żadnego nie doznaje oporu. Przeto też wynikiem liczbowym owej pracy, odnoszącym się do tego przedmiotu, żadnego nie można przypisać znaczenia, tem więcej, że w założenia rachunku wkładł się błąd liczbowy ¹⁾.

Uwagi godnym jest jednak inny przypadek analogji ruchów atmosfery i wody, którego zbadać zawdzięczamy Helmholtzowi ²⁾: analogji fal wodnych, wytwarzających się pod wpływem wiatru, z szeregami chmur, powstających na powierzchni między dwiema warstwami powietrza o różnej gęstości (np. wskutek różnicy temperatury) i różnej prędkości.

W ogólnym przypadku fale na granicy dwóch ośrodków $\left(\frac{s_1}{s_2} \dots \frac{\text{woda}}{\text{powietrze}} \right)$ mogłyby być podobne do fal na granicy powietrza $\left(\frac{S_1}{S_2} \dots \frac{\text{powietrze 1}}{\text{powietrze 2}} \right)$ tylko w tym razie, gdyby stosunki gęstości

były takie same $\left(\frac{s_1}{s_2} = \frac{S_1}{S_2} \right)$; ale przy założeniu ruchu potencjalnego ustalonego można otrzymać podobieństwo także w razie różnicy w tym stosunku, a warunki do tego potrzebne określają stosunek długości fal w obu przypadkach.

Tak Helmholtz oblicza, przy pewnych danych założeniach, że falam wodnym odpowiadałyby, przy tej samej prędkości wiatru, fale powietrzne o przeszło 2000 razy większej długości i tłumaczy tem powstawanie szeregów chmur o odstępach kilkuset metrów do kilkudziesięciu kilometrów.

Nie chcąc bynajmniej zaprzeczać doniosłości pojęcia takich fal w meteorologii, przecież zaznaczyć należy, że ścisłość porównania z rzeczywistymi falami wodnymi chroma wskutek pominięcia wło-

¹⁾ Smoluchowski, loc. cit., str. 79; zauważono to też w Encyclop. d. math. Wiss. IV, str. 154, 181 (Finsterwalder).

²⁾ Berl. Akad. Ber. 1889, str. 761; Ges. Abh. III, str. 309.

skowatości i lepkości, czynników, które, jak się zdaje, niemały¹⁾ wpływ wywierają na długość fal wodnych, powstających wskutek działania wiatru.

Zresztą podstawę całego rozumowania Helmholtza tworzą równania dla cieczy nieściśliwych, więc wchodzi ono właściwie w zakres hydrodynamiki, a nie aerodynamiki.

Chcąc używać metody podobieństwa dynamicznego w sposób ściśły i chcąc objąć nim ruchy właściwe gazom, musimy uwzględnić ogólne równania (8) i (9), wyrażające w nich gęstość za pomocą prawa Boyle-Charles'a, bez wprowadzania od początku specjalnych uproszczeń.

Siły zewnętrzne pomijamy w rozdziałach 7—16; uwzględniamy je zaś w § 17 i 18.

§ 7. Dla ogólności zmieniamy odrazu wszystkie zmienne i współczynniki z wyjątkiem k , który musi mieć tę samą wartość w gazach, między którymi istnieje ma podobieństwo. Podstawiamy więc:

$$\begin{array}{lll} nx, ny, nz & \text{zamiast} & x, y, z \\ mu, mv, mw & n & u, v, w \\ bp, h\theta & n & p, \theta \\ \beta u h^e, \gamma x h^e & n & \mu, z \\ \frac{R}{\alpha} & n & R \end{array}$$

i uwzględniamy tak równocześnie już zmienność współczynników μ, z , przyjmując je proporcjonalne do potęgi ε -tej temperatury²⁾.

¹⁾ Może nawet pierwszorzędny; patrz Lamb, Hydrodynamics, str. 549.

²⁾ Dla lepkości powietrza i wodoru otrzymano wartość $\varepsilon = \frac{2}{3}$. Barus, Wied. Ann. 36, str. 358 (1889; Am. J. Sc 35, str. 407 (1888); Puluj, Wien. Ber. 73, str. 589 (1876); dla CO₂ i kilku innych gazów otrzymano wartości bliskie jedności, Puluj, l. c.; Obermayer, Carl's Rep. 12, str. 465 (1876). Liczby dla odpowiedniego współczynnika przewodnictwa cieplnego ε są bardzo niepewne, wahają się np. dla powietrza między $\varepsilon = 0.42$ (Christiansen) i 0.77 (Schleiermacher); w ostatnich czasach Müller otrzymał 0.57 [Phys. Zeitsch. 2, str. 161 (1900)]; dawniejsza literatura: Winkelmann, Handb. d. Phys. II, 2, str. 316—319. Dla CO₂ i kilku innych gazów ε jest większe. Przyjmując ε równe dla tarcia i przewodnictwa, zgodnie z teorią kinetyczną, możemy popełnić bardzo mały błąd, który tylko w wyjątkowych przypadkach mógłby się uwidatniać.

Wypływają z tego warunki:

$$\frac{z b m^2}{h n} = \frac{b}{n} = \frac{\beta m h^e}{n^2}, \quad \frac{m b}{n} = \frac{\beta m^2 h^e}{n^2} = \frac{\gamma h^{1+\varepsilon}}{n^2},$$

sprowadzające się do trzech tożsamości:

$$(10) \quad \frac{\beta}{\alpha \gamma} = 1; \quad m = \sqrt{\frac{h}{\alpha}}; \quad h = \frac{m \beta h^e}{n} = \frac{\beta h^e \sqrt{h}}{n \sqrt{\alpha}}.$$

Ponieważ stała R jest odwrotnie proporcjonalna do ciężaru cząsteczkowego M , wynika z pierwszego z owych warunków, że podobieństwo tylko o tyle istnieje może, o ile stosunek $\frac{\mu}{\alpha M}$ dla różnych gazów jest jednakowy. Tabliczka następująca współczynników $\frac{\mu}{\alpha}$ (względem powietrza), pomnożonych przez M , pokazuje, że warunki ten istotnie dla różnych gazów dość dokładnie się spełnia:

$k=1.4$	H ₂	O ₂	N ₂	CO	NO
$\frac{\mu M}{\alpha}$	$\frac{6.7 \cdot 2}{0.50} = 27$	$\frac{1.0 \cdot 32}{1.1} = 29$	$\frac{1.0 \cdot 28}{0.97} = 29$	$\frac{0.98 \cdot 28}{0.97} = 28$	$\frac{0.95 \cdot 30}{0.98} = 29$

$k=1.3$	CO ₂	N ₂ O	CH ₄	NH ₃
$\frac{\mu M}{\alpha}$	$\frac{0.64 \cdot 44}{0.82} = 34$	$\frac{0.67 \cdot 44}{0.82} = 36$	$\frac{1.37 \cdot 16}{0.62} = 35$	$\frac{0.92 \cdot 17}{0.57} = 27$

Cztery z owych sześciu współczynników $n, m, h, b, \alpha, \beta$ można zatem dobrać dowolnie, to znaczy, że do danego przykładu będzie istniał czterokrotnie, a po dobraniu stałych α, β , jeszcze dwukrotnie, nieskończony szereg podobnych przykładów, podczas gdy w hydrodynamicie mieliśmy tylko pojedynczy szereg podobieństwa. Stąd właśnie pochodzi wielka różnorodność zastosowań tej prostej metody w aerodynamicie, którą uwidatnić chcemy następującymi przykładami.

§ 8. Zwykły wzór na prędkość głosu $v = \sqrt{kR\theta}$ spełnia oczywiście warunek $\left(m = \sqrt{\frac{h}{a}}\right)$ proporcjonalności prędkości do pierwiastka z temperatury. Przy tym stopniu przybliżenia prędkość jest niezależna od ciśnienia gazu i od wysokości tonu; ale uwzględniając lepkość i przewodnictwo cieplne, otrzymuje się według Kirchhoffa ¹⁾ dokładniejszy wzór na rozchodzenie się głosu w rurach (o promieniu r):

$$(11) \quad v = \sqrt{\frac{k\rho}{\rho}} \left[1 - \frac{\gamma}{2r} \sqrt{\frac{\eta}{\pi N}} \right],$$

$$\text{gdzie } \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + \sqrt{\frac{\kappa}{c\rho}} \left[\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right],$$

który okazuje tę samą zależność od temperatury jak tamten, jeżeli się używa ciśnień odpowiednich, t. j. będących w stosunku $\frac{\theta_0^{\frac{1}{2} + \epsilon}}{\sqrt{a}}$ i jeżeli się używa tonów o liczbie drgań proporcjonalnej do $\sqrt{\frac{\theta}{a}}$.

Przyjmując $h = \alpha = \beta = 1$, wnioskujemy zgodnie z tym wzorem, że w rurach o rozmaitych szerokościach prędkość głosu będzie taka sama dla tonów, których częstość jest odwrotnie proporcjonalna do stosunku wymiarów, jeżeli równocześnie w tym odwrotnym stosunku zmienia się ciśnienie gazu.

Posuwając się jeszcze o jeden stopień dalej w dokładności, trzeba zaznaczyć, że także natężenie głosu wpływać musi na jego prędkość ²⁾, ale i wtedy podobieństwo będzie istniało, jeżeli amplituda zmieniać się będzie w stosunku wymiaru długości; z tego wypływa wniosek bardzo naturalny, że wpływ skończonej amplitudy w wąskich rurkach silniej się uwydatni niż w szerokich.

§ 9. Prawa oporu, którego doznaje ciało, poruszane w gazie z stałą prędkością, mimo licznych badań doświadczalnych, jeszcze nie są dostatecznie wyświetlone, a także próby badania teoretycz-

nego nie powiodły się, z wyjątkiem krańcowego przypadku ruchu powolnego, gdzie przeważający wpływ lepkości spodziewać się kaže opór proporcjonalnego do prędkości, co istotnie wykazują ¹⁾ doświadczenia, wykonane nad bardzo powolnymi ruchami. W każdym razie, ponieważ opór ma wymiar ρx^2 , wynika z równań (10) przy podstawieniu $\alpha = \beta = 1$, $h = 1$, $n = 1$, że dokładna proporcjonalność do prędkości istnieć musi, jeżeli z wzrostem prędkości równocześnie ciśnienie gazu wzrośnie w stosunku prędkości ($b = m$), a temperatura w stosunku $(2 + \epsilon)$ -ej potęgi prędkości.

Przy szybszym ruchu, jak doświadczenia wykazały, opór wzrasta przybliżenie w stosunku kwadratowym prędkości; gdy szybkość zbliża się do prędkości głosu, opór wzrasta dość nagle w wiele szybszym tempie, przy jeszcze większych zaś prędkościach znowu w coraz powolniejszym stosunku ²⁾.

Przeważnie też spotykamy się z założeniem proporcjonalności oporu do wymiarów powierzchniowych, choć niektóre doświadczenia wykazały jego niezupełną dokładność, a oprócz tego powszechnie przyjmuje się proporcjonalność oporu do gęstości gazu, choć to przypuszczenie nie ma dotychczas żadnych podstaw doświadczalnych.

Wobec niepewności tych przypuszczeń i wobec zupełnego braku ścisłej teorii jest rzeczą uwagi godną, że proste rozważania podobieństwa dynamicznego posłużyć mogą do wyświetlenia niektórych z tych kwestyj.

§ 10. Przypuśćmy po pierwsze, że, mierząc opór w powietrzu w pewnej temperaturze θ_0 i pewnym ciśnieniu p_0 , empirycznie znaleźliśmy zależność oporu B ciał geometrycznie podobnych, poruszanych z pewną prędkością (u_0), od ich wymiarów $\{x\}$, zależność, którą wyrazimy zapomocą funkcji: $B = \varphi(x)$.

Chcąc wyznaczyć opór ciała w gazie o innej wartości ciśnienia p , możemy odszukać w szeregu owych pomiarów dynamicznie podobny przykład $\left(\alpha = \beta = h = m = 1; n = \frac{1}{b}\right)$, należący do wymiaru $x \frac{p}{p_0}$, zatem połączony z oporem $\varphi\left(x \frac{p}{p_0}\right)$. Ponieważ

¹⁾ Stokes, Camb. Phil. Soc. Trans. 9 (1851); Thiesen, Wied. Ann. 26, str. 314 (1885); Smoluchowski, loc. cit., str. 105.

²⁾ Patrz referat o odnośnych badaniach: Encyclop. math. Wiss. IV, 17, 4 (Finsterwalder), 18, 1 (Cranz).

¹⁾ Pogg. Ann. 184, str. 177 (1868); Low, Wied. Ann. 52, str. 652 (1894).

²⁾ Riemann, Gött. Abh. 8, str. 243 (1860); Earnshaw, Phil. Trans. 1860, str. 133; Rankine, Phil. Trans. 1870, str. 277; patrz także Riemann-Weber, Part. Diff. Gl. II, str. 469–521.

opór ma wymiar px^2 , zatem wartości jego w tych dwóch ostatnich przypadkach będą w stosunku $bu^2 \equiv \frac{1}{b}$ t. j. w odwrotnym stosunku ciśnienia, z czego wynika ogólnie wartość oporu, należącego do ciśnienia dowolnego p i wymiaru liniowego x :

$$(12) \quad r(x, p) = \frac{p_0}{p} \varphi \left(\frac{xp}{p_0} \right).$$

Jeżeli np. znaleźliśmy, że opór jest α) proporcjonalny do pierwszej potęgi wymiaru: $\varphi(x) = ax$, to wynika z konieczności, że będzie on niezależny od ciśnienia, a jeżeli β) proporcjonalny do powierzchni: $\varphi(x) = ax^2$, wtedy musi się też okazać proporcjonalność jego do ciśnienia p .

W analogiczny sposób można rozszerzyć wyniki badań także na wpływ temperatury, jeżeli poznana została jeszcze zależność oporu od prędkości (w danym ciśnieniu i temperaturze).

Określając mianowicie przez funkcję $\varphi(u, x)$ zależność oporu od prędkości i wymiaru w danej temperaturze θ_0 i ciśnieniu p_0 , stanowiąc specjalny przypadek $\varphi(u, x) = f(u, x, \theta_0)$ ogólniejszej funkcji f , uwzględniającej także zależność od temperatury, zważmy, że do ruchu, określonego przez dowolne elementy u, x, θ , można znaleźć zawsze dynamicznie podobny przykład w szeregu zbitych już przykładów w temperaturze θ_0 ; mianowicie podobny będzie ($\alpha = \beta = b = 1$; $m = \sqrt{h}$; $n = h^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$) ruch, określony przez

spółrzędne $u \sqrt{\frac{\theta}{\theta_0}}, x \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$, θ_0 , którego opór zmierzony wynosi $\varphi \left(u \sqrt{\frac{\theta}{\theta_0}}, x \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right)$. Z wymiaru oporu (bx^2) wynika tedy związek:

$$(13) \quad f(u, x, \theta) = \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^{1+2\varepsilon} \varphi \left(u \sqrt{\frac{\theta}{\theta_0}}, x \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right).$$

Jeżeli np. rezultatem doświadczeń była α) proporcjonalność oporu do prędkości i do wymiaru liniowego, wynika z tego także przybliżona jego niezależność od temperatury (ściśle biorąc proporcjonalność do ε -tej potęgi temperatury, podczas gdy β) proporcjonalność do kwadratu prędkości i do wymiaru powierzchniowego ko-

niecznie pociągałaby za sobą ściśle odwrotną proporcjonalność do temperatury.

Za pomocą analogicznego rozumowania można na tej samej podstawie, korzystając z podobieństwa ($b = h = 1$; $m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$; $n = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$), wyprowadzić wnioski co do oporu w rozmaitych gazach, które się dają objąć wzorem ogólnym:

$$(14) \quad \text{opór } B = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^2 \frac{M_0 p_0}{M p} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^{1+2\varepsilon} \cdot \varphi \left(u \sqrt{\frac{\theta_0 M}{\theta M_0}}; \frac{x p_0 p}{\mu p_0} \sqrt{\frac{M}{M_0}} \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right),$$

przyczem znak (θ) oznacza wartości dla powietrza lub gazu normalnego. Pokazuje się zatem, że np. w założeniu α) opór będzie przybliżenie proporcjonalny do lepkości gazu (ściśle biorąc do ilorazu lepkości przez ε -tą potęgę temperatury), w założeniu β) do jego gęstości.

Zauważyć należy, że zwykle przyjęte założenie proporcjonalności do przekroju ciała i do gęstości gazu nie da się utrzymać przy żadnym innym prawie, prócz właśnie owego prawa kwadratu prędkości, użycie więc tych założeń stanowiło jest błędne przy prędkościach krańcowo małych lub też bardzo dużych.

§ 11. Związki powyższe są matematycznie ściśle i pozostają oczywiście także ważne, mimo, że przy przekroczeniu pewnych granic ruch staje się burzliwy (mouvement turbulent), co się ujawnia np. w powstaniu szmeru świszczącego (Reibungstöne); i mimo, że zjawisko to pod względem teoretycznym jeszcze zupełnie jest niewytłumaczone, możemy (wskutek $\alpha = \beta = h = m = 1$; $b = \frac{1}{n}$;

$N = \frac{1}{t} = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$) przepowiedzieć, że przy danej prędkości i temperaturze w pewnym gazie wysokość tonu (liczba drgań) będzie odwrotnie proporcjonalna do wymiaru ciał poruszanych, jeżeli równocześnie ciśnienie zostanie zmienione w odwrotnym stosunku wymiarów.

Istotnie prawo tego rodzaju zostało znalezione przez Strouhala¹⁾ w pracy nad tonami, powstającymi wskutek ruchu szybkiego ciał walcowatych, drutów i t. d. w powietrzu; nadto liczba

¹⁾ Wied. Ann. 5, str. 216 (1878).

drań w powietrzu pod ciśnieniem atmosferycznym okazała się przybliżenie proporcjonalna do ilorazu prędkości przez promień walca:

$$N = c \frac{v}{r}.$$

Za pomocą naszej metody wywnioskujemy łatwo, że wzór ten pociąga za sobą niezależność wysokości tonu od ciśnienia i temperatury.

Strouhal twierdzi wprawdzie, że obniżenie temperatury powoduje podwyższenie tonu, ale liczby, które przytacza, odpowiadające temperaturom 9.5° C i 37° C, wcale nie wydają się przekonywające; zresztą, co prawda, także i wzór powyższy nie jest całkiem dokładny.

Łatwo też sprawdzić, że wzór ten pociąga za sobą równość stałej c dla różnych gazów, zatem niezależność tonu od rodzaju gazu. Nie znamy jeszcze doświadczeń dotyczących tej kwestji.

§ 12. Joule i Kelvin spostrzegli¹⁾, że ciała szybko poruszane w powietrzu, jak termometry, druty tworzące ogniwa termoelektryczne i t. p., ogrzewają się i że przyrost temperatury przy większych prędkościach, między 30 $\frac{m}{sek}$ i 100 $\frac{m}{sek}$, jest przybliżenie proporcjonalny do kwadratu prędkości, niezależny zaś od materiału i wymiarów ciała (wynosił koło 1° C. dla 55 $\frac{m}{sek}$). Można zatem przyjąć $\Delta\theta = u^2 \cdot f(\theta, p)$, gdzie funkcja θ, p określa zależność współczynnika proporcjonalności od temperatury i ciśnienia powietrza, nie zbadaną bliżej w owych doświadczeniach.

Otrzymamy ruch dynamicznie podobny do ruchu, dla którego owo prawo zostało stwierdzone, przyjmując $\alpha = \beta = h = m = 1$, $n = \frac{1}{b}$; przyczem $\Delta\theta$ musi pozostać niezmiennione; zatem $f(\theta, p) = f(\theta, bp)$; to znaczy, że owo podwyższenie temperatury musi być niezależne od ciśnienia powietrza. Również łatwo okazać (przy pomocy podobieństwa: $\alpha = \beta = b = 1$; $m = \sqrt{h}$; $n = h^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$), że nie

¹⁾ Kelvin, Math. Phys. Papers I, str. 400, 446.

może ono zależeć od temperatury, w której doświadczenie się odbywa.

Podobnie też dowieść można ($\alpha = m = h = b = 1$; $n = \beta$), że ogrzanie musi być niezależne od lepkości gazu, przy pomocy zaś podstawienia $h = \alpha$; $m = n = b = 1$; $\beta = \alpha^{-1}$, że ono dla różnych gazów musi być proporcjonalne do ich ciężaru cząsteczkowego.

Można zatem objąć powyższe uogólnienia wzoru Kelvina i Joule'a jednym wzorem: $\Delta\theta = a Mu^2$, gdzie a jest stałą, równą dla wszystkich gazów (o ile mają równe k).

Gdyby ekstrapolacja tego wzoru dla u większych aniżeli prędkości głosu była dozwolona, co oczywiście nie wydaje się prawdopodobne, można by obliczyć, że meteor, biegnący z prędkością 2.8 $\frac{km}{sek}$, musiałby się ogrzać do 2500° C. Dla małych prędkości

(poniżej 30 $\frac{m}{sek}$) powyższe prawo empiryczne przestaje być ważne, ale pomiary nie były wystarczające do uwydatnienia odpowiedniej modyfikacji tego wzoru.

§ 13. Przejdźmy do analogicznego rozpatrywania praw wpływu gazów. Przy stosunkowo małej różnicy ciśnienia z obu stron długiej a wąskiej rurki, objętość gazu przepływającego jest określona przez prawo Poiseuille-Meyera:

$$Q = \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{r^4 \pi}{8 \mu}$$

(jeżeli objętość gazu zostaje zmierzona pod ciśnieniem przeciętnem $\frac{p_1 + p_2}{2}$).

Przyjmując $m = h = \alpha = \beta = 1$; $b = \frac{1}{n}$, widzimy, że zastosowanie tego wzoru do rurek n razy dłuższych i szerszych tylko wtedy jest uprawnione, gdy równocześnie ciśnienia w stosunku $\frac{1}{n}$ zostaną zmniejszone (porówn. § 2). Ale prawidło, wypowiedziane w ostatnim zdaniu, nie jest wcale ograniczone do ruchu statecznego ani też do ruchów „spokojnych“; stosuje się np. równie dobrze do wpływu z naczynia zamkniętego przez otwór w ścianie.

Wzór powyższy służy zwykle jako podstawa do wyznaczenia

spółczynnika lepkości gazu, posiada jednakowoż tylko szczypliwy zakres ścisłej stosowalności, gdyż nie uwzględnia ani bezwładności gazu, ani tarcia, powstającego wskutek zmiany prędkości wzdłuż rurki, ani różnic temperatur spowodowanych ruchem ¹⁾.

Mimo to można wykonać ścisłe pomiary względnej lepkości rozmaitych gazów, korzystając z podobieństwa dynamicznego ($h = n = 1$; $m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$; $b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$), t. j. używając do tych porównawczych pomiarów ciśnień proporcjonalnych do wartości współczynnika $\frac{\nu}{M}$ dla różnych gazów. Przy użyciu takich ciśnień odpowiednich

stosunek ciśnienia czynnego do objętości przepływającej $\frac{p_1 - p_2}{\Omega}$ będzie dokładną miarą lepkości; to pozostanie ogólnie ważne bez względu na kształt naczynia lub przewodu, nawet dla wypływu przez otwór w cienkiej blaszce. Użycie rurek Poiseuille'a oczywiście zawsze będzie dogodniejsze, ponieważ błędy, pochodzące z niezupełnie odpowiedniego dobrania ciśnienia, nie dadzą się odczuć; także dla gazów o różnych wartościach współczynnika k użycie tej metody da lepsze rezultaty, aniżeli zwykły sposób mierzenia.

Można także wprowadzić znaczne ulepszenie w mierzeniu zależności lepkości gazów od temperatury dzięki podobieństwu ($\alpha = \beta = n = 1$; $m = \sqrt{h}$; $b = h^{\frac{1}{2} + \epsilon}$). Jeżeli w dwóch doświadczeniach, wykonanych z tym samym gazem w różnych temperaturach używać będziemy ciśnień proporcjonalnych do potęgi $(\frac{1}{2} + \epsilon)$ -tej temperatury, wtedy różnica wartości $\frac{p_1 - p_2}{\Omega}$ będzie dokładną miarą zmiany lepkości wskutek zmian temperatury.

Metoda ta zasługuje na uwagę zwłaszcza z tej przyczyny, że dawniejsze pomiary przy użyciu rurek Poiseuille'a oraz aparatu Maxwella i Meyera (krążków wahających się), dały wyniki sprzeczne w owej kwestji i sprzeczność ta dotychczas nie została wyjaśniona w sposób zadawalniający ²⁾.

Także metodę Maxwella i Meyera możnaby zresztą ulepszyć w sposób analogiczny, o tyle jednak więcej skomplikowany, że

należałoby odpowiednio dobrać nie tylko ciśnienie gazu ale także czas wahanja krążka.

§ 14. Do szerszych rur, jakie w praktyce bywają używane do przewodów gazowych, wzór Poiseuille'a nie może być stosowany i nie mamy jeszcze ani zaczątku odpowiedniej teorii. W praktyce zwykle przyjmuje się wzór:

$$u = c \sqrt{\frac{(p_1 - p_2)d}{l\rho}},$$

w którym d oznacza średnicę rury, l jej długość, ρ gęstość gazu, u przeciętną jego prędkość.

Wymiary jego istotnie odpowiadają koniecznemu warunkowi ($\frac{h}{\alpha} = m^2$), nawet dla rozmaitych gazów, jeżeli się przez ρ rozumie ich gęstość $\rho = \frac{p}{R\theta}$.

Natomiast forma wzoru, proponowana przez Stockalpera ¹⁾ na mocy doświadczeń przy budowie tunelu Gottharda:

$$u = c \sqrt{\frac{(p_1 - p_2)d}{l\rho \left(5 + \frac{1}{d}\right)}}$$

jest niemożliwa, gdyż nie spełnia warunków jednorodności.

Można wogóle w podobny sposób, jak to czyniliśmy dla oporu ciał, albo też bezpośrednio, używając równań (10), obliczyć ogólny wzór, wyznaczający zależność prędkości u od p_1, p_2, l, d, θ i od współczynników gazu M, ν , jeżeli doświadczalnie zbadano np. zależność jej od wielkości p_1, p_2, l dla powietrza (M_0, ν_0) w pewnej temperaturze θ_0 .

Oznaczając tę zależność za pomocą funkcji $\varphi(p_1, p_2, l)$, otrzymamy ogólnie:

$$(15) \quad u = \sqrt{\frac{\theta M_0}{\theta_0 M}} \varphi \left(\frac{p_1 \nu_0 d}{\nu d_0} \sqrt{\frac{M}{M_0} \left[\frac{\theta_0}{\theta} \right]^{\frac{1}{2} + \epsilon}}; \frac{p_2 \nu_0 d}{\nu d_0} \sqrt{\frac{M}{M_0} \left[\frac{\theta_0}{\theta} \right]^{\frac{1}{2} + \epsilon}}; \frac{l d_0}{d} \right).$$

Wypływ gazu przez otwór w cienkiej blaszce stanowi przypadk krawcowo przeciwny do ruchu w rurkach Poiseuille'a.

¹⁾ Co do wpływu tego czynnika: Smoluchowski, loc. cit. str. 104.

²⁾ Schumann, Wied. Ann. 23, str. 353 (1884).

¹⁾ Dinglers, Polyt. J. 1880.

Przy małej nadwyżce ciśnienia, objętości rozmaitych gazów wpływających czynią zadość z pewnem przybliżeniem prawu Bunsena, mianowicie: są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka z gęstości (zatem z M), ale zależnie od kształtu otworu mogą się przytrafiać znaczne zboczenia od tego prawidła¹⁾. Wobec tego zauważyć należy, że prawo Bunsena będzie ściśle ważne dla jakiegobądź otworu, jeżeli ciśnienia zostaną obrane proporcjonalnie do

$$\sqrt{\frac{u}{M}}, \text{ jak to wynika z podobieństwa } \left(h=n=1; m=\sqrt{\frac{1}{\alpha}}; b=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right).$$

Łatwo się przekonać, że ściśła stosowność prawa Bunsena w zwykłej używanej formie, t. j. przy stałym ciśnieniu, pociągłaby za sobą proporcjonalność objętości przepływającego gazu do przekroju otworu $\left(h=b=\beta=1; n=m=\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \right)$, podczas gdy proporcjonalność tej do trzeciej potęgi wymiarów (geometrycznie podobnych otworów) wymagałaby, żeby rozmaite gazy, caeteris paribus, przepływały w ilościach odwrotnie proporcjonalnych do współczynnika lepkości, jak to w specjalnym przypadku ilustruje prawo Poiseuille'a.

§ 15. Saint Venant i Wantzel²⁾ zauważyli, że prędkość gazu wypływającego przez otwór nie może być powiększona przez podwyższenie ciśnienia ponad pewną granicę, która nie zależy od różnicy ciśnienia wewnętrznego p_2 i zewnętrznego p_1 , tylko od ich stosunku $\frac{p_2}{p_1}$. Przyjawszy ten wynik, wyobraźmy sobie dwa doświadczenia nad tym samym otworem, ale pod różnemi ciśnieniami, w których ta wartość krytyczna została osiągnięta:

$$(1) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{P_2}{P_1} \quad (2).$$

Ów ruch pierwotny, określony przez p_2, p_1 , będzie podobny do trzeciego rodzaju ruchu (3), określonego przez ciśnienia P_2, P_1 i wymiary otworu zmniejszone w stosunku $\frac{P_2}{P_1} = \frac{p_2}{p_1}$. Ponieważ prędkość nie zmienia się przy zmianie 1—3, porównanie z przypad-

kiem drugim pokazuje, że prędkość wogóle będzie niezależna od wymiarów otworu¹⁾.

Wniosek ten, będący konsekwencją istnienia stosunku krytycznego $\frac{p_2}{p_1} = 1.89$, zgadza się z wynikami prac nad tym przedmiotem.

Mach i Salcher²⁾ i Emden³⁾ spostrzegli powstawanie prążków w promieniu gazu wypływającego, gdy stosunek ciśnień przekracza ową wartość krytyczną. Emden tłumaczy to zjawisko różnicami gęstości, odpowiadającymi szeregowi fal akustycznych stojących. Odstęp tych prążków wyraził przez wzór empiryczny:

$$\lambda = 0.88 d \sqrt{\frac{p_2}{p_1} - 1.9},$$

w której d oznacza średnicę otworu wypływu gazu.

Korzystając z naszej metody, byłby jednak Emden mógł sobie oszczędzić części pracy doświadczałnej, bo wystarczyło dowieść empirycznie, że λ jest tylko zależne od stosunku ciśnień: $\lambda = f\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$;

wtedy już z podobieństwa $\left(\alpha = \beta = h = m = 1; b = \frac{1}{n} \right)$ bezpośrednio wynika, że λ musi być także proporcjonalne do wymiarów d . Podobnie też, znalazłszy raz dla powietrza taki wzór, można było bezpośrednio wnioskować na podstawie $\left(b = h = 1; m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, n = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right)$, że odstęp prążków musi być niezależny od istoty gazu, co faktycznie wykazały doświadczenia Emdena, tak samo jak możemy przepowiedzieć (wskutek podobieństwa $\alpha = \beta = n = 1; m = \sqrt{h}$; $b = h^{\frac{1}{2} + \epsilon}$), że wielkość ta okaże się niezależna od temperatury.

§ 16. Ruchy burzliwe (mouvements turbulents), występujące przy szybkim wypływie, ujawniają się jako ton świszający. Kohlrausch⁴⁾ badał takie tony, używając szczelin wąskich jako otwo-

¹⁾ Przybliżenie równa prędkości głosu: Hugoniot, Comptes Rendus 103, str. 1178 (1886); Lamb, Hydrodynamics str. 28.

²⁾ Wien. Ber. 98 (1889); Wied. Ann. 42, str. 144 (1890).

³⁾ Wied. Ann. 69, str. 264, 426, 453 (1899).

⁴⁾ Wied. Ann. 13, str. 545 (1881).

¹⁾ Donnan, Phil. Mag. 49, str. 423 (1900).

²⁾ Patrz na str. 5 ej²⁾.

rów, co do zależności od szerokości szczeliny s i od ciśnienia p_1 gazu w rezerwarze przed szczeliną. Gaz wypływał na wolne powietrze, przeto skutek zmiany ciśnienia zewnętrznego p_2 nie mógł się w owych pomiarach uwidatnić. Możemy jednak a priori obliczyć, jaka to będzie zależność, zważając, że ilość drgań N ma wymiar $\frac{u}{x}$ i powołując się na podobieństwo ($\alpha = \beta = m = h = 1$;

$n = \frac{1}{h}$). Pisząc wzór empiryczny Kohlrauscha w formie $N = \varphi(s, p_1)$, otrzymamy ogólny wzór, zawierający zależność od ciśnienia p_2 :

$$N = \frac{p_1}{p_0} \varphi\left(\frac{s p_2}{p_0}, \frac{p_1 p_0}{p_2}\right).$$

a w podobny sposób, można by także przepowiedzieć zależność od temperatury

Pomiary Kohlrauscha nie dadzą się jednak wyzyskać do sprawdzenia tych wzorów, ponieważ nie znajdujemy podanych w nich bezpośrednich wartości p_1 , tylko zależne od nich średnie prędkości U gazu wypływającego i ponieważ rezultaty ostateczne, streszczone we wzorze przybliżonym $N = A(U - B)$ i w tabliczce wartości A, B , jako funkcji zmiennej s , nie uwidatniają tych związków w wyraźnej postaci matematycznej.

§ 17. W dotychczas omawianych zastosowaniach pomijaliśmy zupełnie pewien czynnik, jako nie znaczący w porównaniu z innymi, to jest siłę ciężkości. Ciężkość odgrywa jednak pierwszorzędną rolę w pewnej klasie zjawisk aerodynamicznych, t. j. przy wytwarzaniu prądów konwekcyjnych w otoczeniu ciał ogrzanych i w pewnych zastosowaniach do fizyki atmosfery.

Musimy w takich razach uzupełnić warunki (10) dodatkowym równaniem, odnoszącym się do wymiarów siły ciężkości ρg (g pozostaje niezmiennione, ρ zaś rośnie w stosunku $\frac{b\alpha}{h}$), które zmniejsza różnorodność podobieństwa o jeden stopień, ponieważ wtedy spełnione muszą być warunki:

$$(16) \quad m^2 = n = \frac{h}{\alpha}; \quad b = \frac{m}{n} \beta h^2.$$

Tak np. Lorenz¹⁾ obliczył z pewnem przybliżeniem ilość ciepła, unoszoną przez 1 cm^2 powierzchni ściany [o wysokości H , a szerokości nieskończonej], ogrzanej o ϑ_0 stopni ponad temperaturę T gazu otaczającego:

$$L = -\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0.548 \sqrt{\frac{c g \alpha^2 \rho^2}{\mu H T}} \vartheta_0^{3/4}.$$

Diwny kształt tego wzoru mógłby wzbudzić pewne wątpliwości, ale podstawienie odpowiednich wymiarów (c ma wymiar R, g bez wymiaru) daje wynik zgodny z warunkami podobieństwa (16), co prawda, o ile się pomija wielkość ε , t. j. zmienność współczynników lepkości i przewodnictwa; pominięcie to stanowi oczywiście ograniczenie ważności do małych ϑ_0 .

§ 18. Poważną trudność teoretyczną przy oznaczeniu przewodnictwa cieplnego gazów nastrocza właśnie obecność prądów konwekcyjnych, które nie dadzą się zupełnie usunąć, choć można wpływać na ich zmniejszenie przez rozrzedzenie gazu, przyczem jednak poniżej pewnej granicy ciśnienia, jako nowe źródło błędów, występuje t. zw. molekularny skok temperatury²⁾.

Wobec tego jest rzeczą interesującą, że względne wartości współczynnika α dla różnych gazów można otrzymać mimo nieznanych prądów konwekcyjnych, korzystając albo z podobieństwa ($h = 1$;

$$n = \alpha; \quad b = \frac{\beta}{\alpha}), \text{ albo z } (n = 1; \quad h = \frac{\beta}{\alpha}; \quad b = \beta h^2) \text{ t. j. używając}$$

dla różnych gazów naczyń o rozmiarach odpowiednich i ciśnieniach odpowiednich, albo też temperatur i ciśnień odpowiednich.

Także zależność współczynnika przewodnictwa od temperatury, będąca przedmiotem długoletniego sporu naukowego między Winkelmannem a Graetzem³⁾ i dotychczas nie wyznaczona z dostateczną pewnością, może być zbadana w sposób całkiem ścisły, jeżeli się zważy, że powstanie ruch analogiczny ($\alpha = \beta = 1$;

¹⁾ Wied. Ann. 13, str. 582 (1881). Wzór ten także w innych przypadkach okazał się przydatnym.

²⁾ Smoluchowski, Wied. Ann. 64, str. 101 (1898); Wien. Ber. 107, str. 304 (1898); 108, str. 5 (1899).

³⁾ Patrz Winkelmann, Handb. d. Phys. II, 2, str. 316—319.

$n = h = m^2$; $h = h' + \frac{1}{2}$) w temperaturze wyższej, w naczyniu o wymiarach w tym samym stosunku większych, z ciśnieniem proporcjonalnem do potęgi $(\varepsilon - \frac{1}{2})$ -ej, i że prąd ciepła (pro 1 cm^2 powierzchni, wtedy powiększony zostanie w stosunku h' , z czego ε wyznaczane być może.

Oczywiście wchodzą tu w grę także inne trudności doświadczalne, ale sędzę, że np. metoda elektrycznego ogrzewania drucików¹⁾ łatwo dałaby się do tych warunków dostosować i że wyniki w każdym razie byłyby dokładniejsze, niż przy pominięciu takich ostrożności.

Możnaby także, podobnie jak w rozdziałach poprzednich, dokończyć uogólnienia empirycznie znalezionych rezultatów co do wpływu prądów konwekcyjnych, ale poprzestaniemy na tych kilku przykładach, ponieważ zakres zastosowań tu jest szerszy niż w owych przypadkach, zwłaszcza, że jeszcze nie posiadamy odpowiednich badań doświadczalnych, któreby posłużyć mogły za punkt wyjścia.

¹⁾ Schleiermacher, Wied. Ann. 34, str. 623 (1888); patrz także Smoluchowski, Wien. Ber. 108, str. 17 (1899).

XX. ON THE PRINCIPLES OF AERODYNAMICS AND THEIR APPLICATION, BY THE METHOD OF DYNAMICAL SIMILARITY, TO SOME SPECIAL PROBLEMS.

(Philosophical Magazine Vol. 7. 1904; pp. 667—681).

§ 1. What is the characteristic feature of aerodynamics, contrasting it with hydrodynamics? Compressibility, of course; but it is not mere isothermic compressibility which makes the difference: there comes in, in general, as a factor of equal order of magnitude, variation of temperature, as produced by the motion of the gas.

To appreciate its importance, consider, for example, the difference between Newton's and Laplace's formula for the velocity of sound, and St. Venant & Wantzel's experiments¹⁾ on effusion of gases, extended and confirmed by many subsequent authors, by which these phenomena have been shown to differ widely from what the isothermic theory requires. In fact, the isothermic theory has to be limited to few exceptional cases of slow viscous motion, where conduction of heat is prevalent; transpiration through capillary tubes and slow oscillations of pendulums seem to be the only examples of practical importance.

In the two cases alluded to, and in most others, heat of adiabatic compression²⁾ is a prominent factor; but, in general, the heat produced by internal friction is no negligible quantity either. It was sufficient in Joule and Kelvin's plug experiments to annul the cooling by expansion, and in other experiments of those authors

¹⁾ J. d. l'Ecole Polyt. 16., p. 92 (1839); see ex. gr. Wilde, Phil. Mag. 20., p. 531 (1885), 21., p. 494 (1886).

²⁾ In acoustics it is predominant, above all others; taking it into account is sufficient there for a first approximation, and this is the only part of aerodynamics, therefore, where a systematic theory has been built up.