

XVIII. SUR LES PHÉNOMÈNES AÉRODYNAMIQUES ET LES EFFETS THERMIQUES QUI LES ACCOMPAGNENT.

(Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences mathématiques et naturelles 1903; pp. 143-182).

I. Équations fondamentales de l'Aérodynamique.

§ 1. L'Aérodynamique est restée très en arrière de l'Hydrodynamique qui, depuis les recherches fondamentales de Stokes, de Helmholtz et de Kelvin, a fait des progrès énormes, grâce surtout à l'intérêt qu'elle a éveillé chez les savants anglais (Lord Rayleigh, MM. Lamb, Love, Hicks, Reynolds, Thomson etc.). En dehors de l'Acoustique, il n'y a que fort peu de cas particuliers (transpiration par des tubes Poiseuille, effusion par une ouverture dans une lame mince, disques oscillants de Maxwell et Meyer, résistance des corps projetés etc.) qui aient été traités avec quelque approximation, très vague quelquefois; mais pas une loi générale, pas une solution précise n'a été trouvée jusqu'à présent.

Les problèmes les plus importants sont à peine abordés, surtout en ce qui concerne les applications à l'aérostatique et à la météorologie lesquelles par conséquent sont plongées dans un état d'empirisme nébuleux.

C'est qu'on ne peut pas, en général, comme dans les calculs de l'Hydrodynamique, regarder les gaz comme incompressibles et surtout que la compressibilité, déterminée par la loi de Boyle-Charles, dépend d'une nouvelle variable, de la température, dont les variations jouent un rôle aussi considérable que les différences de pression. Par conséquent il faut ajouter, aux équations ordinaires de l'Hydrodynamique, une équation déduite de la Thermodynamique.

La complication du problème consiste en ce qu'il est impossible, en général, de séparer ce côté thermique de la recherche du côté mécanique.

Dans les travaux antérieurs, on admettait un état isotherme ou un état adiabatique ou bien on se contentait de supposer que la réalité est comprise entre ces limites, souvent très éloignées ¹⁾. Ce n'est qu'en 1894 qu'a été précisée la loi thermique sur laquelle ces considérations doivent être basées, et qui, par conséquent, devrait aussi servir de fondement à l'exposé systématique de l'Aérodynamique. Elle a été déduite ²⁾ en même temps par Kirchhoff et, sous une forme plus générale, par M. Lad. Natanson à l'aide de considérations cinématiques ainsi que par M. C. Neumann à l'aide de la Thermodynamique. Comme cette loi n'a pas été jusqu'aujourd'hui appliquée à ces questions ³⁾, nous nous proposons, dans ce travail, de présenter un essai dans cette direction.

§ 2. Adoptons le procédé de Stokes ⁴⁾ qui consiste à déduire les équations de la viscosité sans hypothèse moléculaire, en supposant seulement que les forces du frottement intérieur soient proportionnelles à la vitesse des déformations élémentaires. Pour être exact, il faut y ajouter une correction si la température du gaz n'est pas partout la même, puisque le coefficient de viscosité en dépend. En effet, on ne saurait négliger cette circonstance s'il s'agit, par exemple, des mouvements de l'océan atmosphérique dans les régions supérieures duquel règne sans doute une température extrêmement basse ⁵⁾.

Dans ce cas, la substitution des équations bien connues

$$(1) \quad p_{xx} = -p - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc.}$$

¹⁾ Nous trouvons la théorie isotherme de l'effusion par une petite ouverture dans les ouvrages de Duhamel, Mousson, Willner, Lang, la théorie adiabatique [d'après St. Venant et Wantzel] chez: Zeuner, Wilde, Lamb; toutes les deux chez Winkelmann, Chwolson etc.

²⁾ Voir Natanson, Bulletin Intern. de l'Acad. de Cracovie 1902, p. 144.

³⁾ Nous en avons donné une application dans notre étude „Sur l'atmosphère de la terre et des planètes“, voir Physik. Zeitschr. 2, p. 307 (1901).

⁴⁾ D'après Lamb, Hydrodynamics p. 509.

⁵⁾ Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc.“ loc. cit.

dans

$$(2) \quad \rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}$$

donnerait

$$(3) \quad \rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \text{ etc.}$$

Mais dans les applications ordinaires, les différences de température n'étant pas grandes, on peut négliger les termes de la seconde ligne, et c'est ce que nous ferons en général.

Dans ces équations, p représente la moyenne arithmétique des trois tensions perpendiculaires:

$$(4) \quad p = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}).$$

Il n'en résulte pas que p soit identique à la pression qui figure dans l'expression de la loi de Boyle-Charles, ce qui est néanmoins une hypothèse bien probable, admise par presque tous les auteurs récents¹⁾. La même supposition peut être énoncée sous une autre forme: si nous avons considéré la loi Boyle-Charles au lieu de l'équation (4) comme définition de p , nous serions parvenus à l'équation

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + \nu \frac{\partial \text{div}}{\partial x}$$

[où le symbole div est une abréviation pour $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$] et nous devrions formuler l'hypothèse de Stokes de la manière suivante: le coefficient de viscosité ν pour les changements de volume est le tiers du coefficient μ pour les changements de forme. C'est ce que nous admettrons, eu égard à la théorie cinétique qui, d'après Maxwell²⁾, fournit le même résultat³⁾; mais nous insistons sur l'import-

¹⁾ Voir Natanson: Bulletin de l'Acad. d. Sc. de Cracovie 1901, p. 95.

²⁾ Scientific Papers II. p. 69 (1890).

³⁾ Voir à ce sujet Natanson, Bulletin Internat. de l'Académie de Cracovie, Année 1901, pp. 108-110.

tance d'une vérification expérimentale de cette relation et nous ne croyons pas avec M. Meyer¹⁾ que ce soit là une question indifférente, parce que la viscosité de volume se superpose à la pression et n'en peut être distinguée. On verra plus loin des exemples qui démontrent la fausseté de cette opinion (§ 24, § 25); on y pourrait encore ajouter l'extinction des ondes sonores par suite de la viscosité à laquelle la „viscosité de volume“ contribue aussi.

§ 3. La méthode la plus simple pour déduire l'équation thermique fondamentale consiste dans l'application du principe de la conservation de l'énergie à un élément de masse $dm = \rho dx dy dz$, se déplaçant dans le gaz. La variation de l'énergie totale, comprenant les énergies calorifique, cinétique et potentielle (par rapport aux forces extérieures), sera égale au travail effectué par les tensions agissant sur sa surface, augmenté de la quantité de chaleur transmise en vertu de la conductibilité calorifique. Cette relation est exprimée par l'équation:

$$(6) \quad \frac{D}{Dt} \left[\frac{c_v}{A} \theta + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + U \right] dm = \left[\frac{\partial}{\partial x} (u p_{xx} + v p_{xy} + w p_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u p_{xy} + v p_{yy} + w p_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u p_{xz} + v p_{yz} + w p_{zz}) + \kappa \Delta^2 \theta \right] dx dy dz$$

qui par le développement des opérations différentielles et par l'introduction des valeurs (1) et des équations de mouvement se transforme en:

$$(7) \quad \frac{c_v}{A} \rho \frac{D\theta}{Dt} + p \text{ div} = \Phi + \kappa \Delta^2 \theta$$

où Φ représente la quantité de chaleur dégagée grâce au frottement intérieur (par seconde et cm^2); c'est ce qu'on appelle, d'après Lord Rayleigh, fonction dissipative:

$$(8) \quad \Phi = -\frac{2}{3} \mu \text{div}^2 + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}.$$

¹⁾ Gastheorie p. 114: Crelle Journal 75 p. 337, (1873). M. Meyer trouve $\nu = 2\mu$ en s'appuyant sur les principes de la théorie cinétique des gaz (d'après Maxwell-Clausius), mais ce résultat est erroné. Voir Boltzmann, Gastheorie I p. 93 (1895).

La déduction peut être rendue plus rigoureuse en appliquant le théorème en question à une quantité finie de gaz, en transformant l'intégrale de surface en intégrale triple et en la spécialisant pour une quantité élémentaire ¹⁾.

§ 4. Il faut remarquer cependant que cette équation ne sera pas rigoureusement exacte, pas plus que les équations (3), puisqu'on ne peut pas supposer que le frottement intérieur et la conductibilité de la chaleur soient des phénomènes tout-à-fait indépendants. On pourrait même douter qu'il y ait en général des phénomènes quelconques, simultanés et coexistants, qui soient rigoureusement indépendants l'un de l'autre. Dans notre cas, M. Natanson ²⁾ a démontré, en effet, que la théorie moléculaire cinématique fournit, pour les phénomènes de conductibilité dans un gaz, des expressions différentes suivant que ce gaz est en repos ou en mouvement; mais, en général, la différence sera très petite et il sera difficile d'en démontrer l'existence par la voie expérimentale. Nous nous bornerons donc au degré d'exactitude auquel permet d'atteindre l'hypothèse de "l'indépendance" ou de la "superposition" des phénomènes de viscosité et de conductibilité. De même, nous omettons la considération des écarts de la loi de Boyle-Charles, en supposant l'exactitude de la formule

$$(9) \quad \frac{p}{\rho} = R\theta.$$

§ 5. En somme, les équations fondamentales de l'Aérodynamique seront, outre la formule citée (9), les suivantes:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div}}{\partial x} + \mu \Delta^2 u \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div}}{\partial y} + \mu \Delta^2 v \\ \rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div}}{\partial z} + \mu \Delta^2 w \end{array} \right.$$

l'équation de continuité:

$$(11) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

¹⁾ Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc.“, loc. cit.

²⁾ Bulletin Internat. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie 1902, p. 137.

et l'équation thermique (7) qui peut être écrite, en considérant la relation

$$\frac{c_v}{A} = \frac{R}{k-1}$$

ainsi que (9) et (10), sous la forme suivante:

$$(12) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + kp \operatorname{div} = (k-1) [\Phi + \alpha \Delta^2 \theta]$$

où Φ désigne l'expression (8).

On remarque que cette équation, jointe à (11) donne la formule ordinaire de la détente adiabatique:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k$$

dans le cas où les termes du second membre sont négligeables en comparaison de ceux du premier. Ceux-ci, en effet, représentent la réaction thermique de la compression ou de la dilatation adiabatique.

Pour définir des problèmes spéciaux, il faut préciser les conditions pour u, v, w, p, θ à la surface et, pour un système variable avec le temps, l'état primitif. Dans la plupart des applications, le gaz est contenu dans des parois solides et dont la température est approximativement constante ¹⁾; u, v, w doivent être supposés nuls sur ces parois conformément aux expériences qui ont démontré l'adhésion complète des couches superficielles. Dans le cas d'un mouvement stationnaire, l'équation (11) donne: $\operatorname{div} = 0$ pour ces surfaces, d'où résulte, la direction normale étant prise pour axe des Z et la vitesse normale étant désignée par v_n :

$$\frac{\partial v_n}{\partial \zeta} = 0;$$

c'est-à-dire que la direction des lignes de flux dans les couches superficielles est parallèle à la surface. En désignant la vitesse dans cette direction par V , on trouve que l'équation (12) se réduit à la surface à

$$(13) \quad \Phi = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 = -\alpha \Delta^2 \theta.$$

¹⁾ Des différences de température entre les parties diverses des parois produiraient des courants de convection. Voir: Oberbeck [Wiedem. Ann., 7, p. 271 (1876)], Lorenz [Wied. Ann., 13 p. 582 (1881)].

Près des parois, par conséquent, l'effet thermique de la compression ou de la dilatation disparaît, tandis que la production de chaleur par frottement, balancée par la déperdition en vertu de la conductibilité, y joue le rôle principal.

Dans un gaz pour lequel le coefficient de conductibilité calorifique α serait égal à zéro, un mouvement stationnaire serait impossible, puisque les couches superficielles se réchaufferaient sans cesse. Cela suffit pour démontrer qu'on n'est pas en droit, en général, de traiter la viscosité et la conductibilité comme des facteurs, secondaires.

II. Théorèmes généraux sur la symétrie et la similitude dynamiques.

§ 6. Supposons les forces extérieures égales à zéro. Nous remarquerons que les équations de l'Hydrodynamique ordinaire ne seront pas changées par la substitution de $-u, -v, -w, a-p$ à u, v, w, p , pourvu qu'il s'agisse d'un mouvement „calme“¹⁾, c'est-à-dire pourvu qu'on puisse négliger les termes du second ordre par rapport aux vitesses et à leurs dérivées partielles (ce qui permet de

remplacer $\frac{D}{Dt}$ par $\frac{\partial}{\partial t}$). Cela veut dire que les mouvements „calmes“ de fluides sont ce qu'on pourrait appeler „renversables“: en changeant les signes de toutes les différences de pression, on obtient un mouvement analogue, caractérisé par les mêmes lignes de flux et la même vitesse, mais en sens inverse.

Le mouvement inerte, objet de l'Hydrodynamique classique ou „idéale“, qui résulte de l'omission contraire, est aussi renversable s'il est stationnaire, mais sans inversion de pression, puisque celle-ci dépend alors du carré de la vitesse.

Au contraire, les équations complètes qui tiennent compte de la viscosité et de l'inertie et qui correspondent aux mouvements „violents“, ne sont pas renversables.

Notons aussi cette conclusion: si le liquide s'écoule par un tube ou par une ouverture dans une paroi symétrique par rapport au plan YZ situé dans cette paroi, les lignes de flux seront aussi sy-

¹⁾ Ce terme nous paraît plus juste que „lent“, puisque des mouvements très rapides pourront appartenir aussi à cette catégorie pourvu que la densité soit suffisamment petite.

métriques (fig. 1), lorsque le mouvement est calme. Si la différence de pression augmente à un degré tel que le mouvement devienne „violent“, celui-ci devient asymétrique, ce qui explique la tendance des liquides à former des jets et des tourbillons dans de pareils cas (fig. 2).

Il est vrai que Helmholtz¹⁾ ne voyait pas d'autre hypothèse propre à expliquer la formation des jets que celle de l'existence des „surfaces de discontinuité“; je crois cependant que l'asymétrie

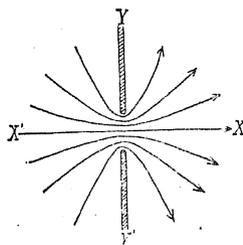


Fig. 1.

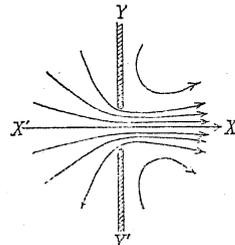


Fig. 2.

mentionnée suffit pleinement; c'est ce que j'ai l'intention de démontrer en détail dans un autre travail, en appuyant mon opinion de considérations théoriques et de données expérimentales.

Dans l'Aérodynamique, la valeur absolue de la pression entre aussi dans le calcul des équations (9) et (12) qui par conséquent ne permettent point de procéder par la méthode de l'inversion dont il a été question plus haut Ici l'asymétrie est un phénomène très général; mentionnons le „jet“ de gaz, se formant si celui-ci s'écoule sous forte pression²⁾, la formation des tourbillons annulaires de fumée (d'après la méthode de Tait), les mouvements asymétriques et les tourbillons autour d'un corps projeté (Mach). C'est seulement pour des mouvements très calmes, avec des différences de pression très petites, qu'il y aura des cas de symétrie approximative (voir par exemple au § 28).

¹⁾ „Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen“. Berl. Akad. Ber. 1868 p. 216; Ges. Abh. I p. 146.

²⁾ Voir § 92.

§ 7. Un principe qui est très fertile en applications diverses est le principe de la similitude dynamique, employé par exemple par Helmholtz ¹⁾ dans l'Hydrodynamique ordinaire.

Lorsqu'on connaît la solution d'un problème donné, on peut se demander si les mêmes équations ne peuvent pas être satisfaites en substituant

$$\begin{array}{l} \text{les valeurs } ux \text{ à } x \text{ (de même pour } y, z) \\ mu \quad n \quad u \quad (n \quad n \quad n \quad v, w) \\ bp \quad n \quad p \\ h\theta \quad n \quad \theta \\ n \quad t \quad n \quad t \\ m \quad t \quad n \quad t \end{array}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes qui résultent de la substitution de ces variables en (10) et (12), sont les suivantes

$$\text{(d'après 10):} \quad \frac{b}{h} \frac{m^2}{n} \equiv \frac{b}{n} \equiv \frac{m}{n^2}$$

$$\text{(d'après 12):} \quad \frac{mb}{n} \equiv \frac{m^2}{n^2} \equiv \frac{h}{n^2}$$

¹⁾ Wied. Annalen, VII. p. 375 (1879). Après avoir achevé la présente étude j'ai remarqué que Helmholtz, dans un autre travail (Berl. Akad. Ber. 1873, p. 501; Ges. Abhandlg. I p. 158), avait étendu ses recherches pour y comprendre l'Aérodynamique et les applications à la navigation aérienne. Mais le raisonnement dont il se sert donne lieu à quelques objections fondamentales, qui rendent plus que douteuses ses conclusions définitives. En dehors d'une erreur numérique

[le rapport des coefficients de viscosité $\frac{\mu}{\rho}$ pour l'air et pour l'eau n'est pas 0.8082 mais 8.082] qui change complètement les résultats quantitatifs, nous mentionnons trois points importants: 1) l'omission complète de l'influence de la température dans les équations fondamentales 2) la compressibilité de l'air est négligée dans le cas d'un ballon énorme, se mouvant avec une vitesse de 9 $\frac{m}{sec}$. 3) la viscosité est négligée dans le même cas et dans le cas analogue d'un bateau dans l'eau. L'importance du dernier point est mise en évidence par le résultat bien connu qu'une sphère animée d'une vitesse constante ne subirait point de résistance dans un liquide sans viscosité. Je crois que l'on ne peut pas étendre la notion de „similitude“ à des cas aussi différents que ces deux-là. Ce terme sera employé, dans ce qui suit, d'une façon différente, au sens strict du terme. Une partie considérable de la résistance d'un bateau provient de la formation des ondes qui dépendent évidemment de la gravité; sous ce rapport il n'y a aucune analogie avec un ballon.

qui se réduisent à deux identités indépendantes ¹⁾ entre quatre variables:

$$(14) \quad h \equiv m^2; \quad b \equiv \frac{m}{n}$$

Voici des exemples particuliers qui mettront en évidence l'importance pratique de cette similitude dynamique:

§ 8. Posons $n = 1$, donc: $b = \sqrt{h} = m$. Dans le même vase, il y aura un mouvement tout-à-fait analogue au mouvement primaire, lorsque les pressions seront élevées en proportion de la racine de la température; les vitesses alors seront élevées dans la même proportion;

α) Ainsi la vitesse du son, qui est donnée par $c = \sqrt{kR\theta}$, augmente en raison de la racine de la température, indépendamment de la pression. Mais cette formule n'est exacte que pour des amplitudes très petites et comporte l'omission des effets de viscosité et de conductibilité; si l'on n'adopte point ces hypothèses simplificatrices, on aura une formule compliquée dans laquelle entrera aussi la pression. Notre conclusion restera pourtant exacte, pourvu qu'on la rapporte à des sons dont le nombre de vibrations est proportionnel à $\sqrt{\theta}$ et pourvu qu'on mesure la vitesse pour des pressions

correspondantes [proportionnelles à $\theta^{\frac{2\alpha+1}{2}}$ dans le cas général]. Elle s'applique aussi à la propagation dans des tuyaux étroits.

β) La résistance (dimension x^2p) qu'éprouve un corps se mouvant avec une petite vitesse, est à peu près proportionnelle à celle-ci. Ceci est exact pour des vitesses quelconques, si la pression s'élève en raison de la vitesse et la température dans une proportion quadratique.

γ) Applications semblables à l'écoulement des gaz.

§ 9. Posons $h = 1$; par conséquent $m = 1$, $b = \frac{1}{n}$: la température reste invariable; la vitesse sera aussi la même dans deux vaisseaux semblables dont les dimensions sont en raison inverse des pressions du gaz.

¹⁾ Si l'on tient compte de la variabilité des coefficients μ et α , en les supposant proportionnels à θ^2 , on doit remplacer l'équation (14, 2) par:

$$b \equiv \frac{m^2 \alpha + 1}{n}$$

z) En effet, il est facile de voir que la formule approximative de Kirchhoff pour la vitesse du son dans des tuyaux étroits (rayon r):

$$v = \sqrt{\frac{k\rho}{\rho}} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi N}} \right\}; \quad \text{où } \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + \sqrt{\frac{\alpha}{c\rho}} \left\{ \sqrt{k} - \frac{1}{k} \right\};$$

satisfait à cette proposition (en considérant que N doit être changé en raison inverse des dimensions).

β) La formule de Poiseuille-Meyer:

$$(15) \quad M = \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{\pi R^4}{8\mu}$$

n'est applicable que dans le cas du mouvement „calme“ dans un tube long et étroit. Notre théorème démontre que son application à un tube de dimensions n fois plus grandes n'est justifiée que lorsque les pressions sont diminuées en raison inverse ¹⁾. Dans ce cas, la vitesse sera la même, le volume qui s'écoule sera augmenté proportionnellement à n^2 . Mais ce résultat ne dépend pas de la validité de la formule (15) et n'est même pas limité au flux stationnaire, ni aux mouvements „calmes“; il peut être appliqué par exemple à l'écoulement d'un gaz par une ouverture.

γ) La résistance de corps, de grandeur différente mais semblables, projetés avec une certaine vitesse dans un gaz de pression inverse à leurs dimensions, sera proportionnelle à celles-ci. Un mouvement semblable très rapide provoque des sons sibilants (Reibungstöne); la théorie est restée impuissante jusqu'à présent à expliquer ce phénomène. Néanmoins, nous pouvons prédire que le nombre des vibrations sera en proportion inverse des dimensions des corps, si la pression est réduite dans la même proportion (puisque N a la dimension de $\frac{u}{x}$)²⁾. Une loi semblable a été établie en effet par M. Strouhal³⁾ dans ses recherches sur les sons qui accompagnent

¹⁾ Tandis que dans l'Hydrodynamique il faut, d'après Helmholtz, une diminution de pression en raison de $\frac{1}{n^2}$, puisqu'il n'y existe qu'un genre de similitude:

$$b \equiv m^2 \equiv \frac{1}{n^2}$$

²⁾ Wiedem. Ann., p. 216 (1878).

le mouvement rapide d'un cylindre (tube de verre, fil métallique etc.) dans l'air; la loi empirique énoncée par ce savant prétend que le nombre des vibrations dans l'air à la pression atmosphérique est proportionnel à la vitesse divisée par le rayon du cylindre:

$$N = c \frac{v}{r}.$$

Nous en concluons par notre méthode que cette formule entraîne la conclusion que la hauteur du son est indépendante de la pression et de la température. M. Strouhal, au contraire, prétend qu'un abaissement de la température produit une élévation du son, mais l'examen des nombres correspondant aux températures de 9.5° C et de 37° C ne paraît pas devoir être favorable à cette opinion. La formule citée n'est d'ailleurs qu'une relation approximative.

δ) Saint Venant et Wantzel¹⁾ ont observé que la vitesse d'un gaz qui s'écoule par un orifice ne peut être augmentée par l'élévation de la pression que jusqu'à une certaine limite, qui ne dépend pas de la différence des pressions, intérieure p_2 et extérieure p_1 , mais de leur rapport $\frac{p_2}{p_1}$. Ceci posé, imaginons deux expériences exécutées avec le même orifice, mais avec des pressions différentes, où cette valeur critique a été atteinte:

$$(1) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{P_2}{P_1} \quad (2).$$

Le mouvement caractérisé par p_2 et p_1 sera semblable au cas (3) où les pressions sont P_2 , P_1 et où les dimensions de l'orifice ont été diminuées en raison de $\frac{P_2}{P_1} = \frac{p_1}{p_2}$. Puisque la vitesse ne change pas, la comparaison avec la deuxième expérience nous apprend que la vitesse sera indépendante des dimensions de l'orifice²⁾. Cette conclusion, qui est la conséquence de l'existence d'un rapport critique $\frac{p_2}{p_1} = 1.89$, s'accorde avec les résultats des expériences.

¹⁾ Journal de l'École polytechnique XVI (1839). Comptes Rendus 17 (1843). Ces observations ont été confirmées par Zeuner, Hirn, Wilde, Salcher et Whitehead etc.

²⁾ Égale approximativement à la vitesse du son (voir Lamb, Hydrodynamics p. 28).

Mach et Salcher¹⁾ et Emden²⁾ ont remarqué la formation de cannelures dans le jet d'un gaz qui s'écoule, aussitôt que le rapport des pressions dépasse la valeur critique. Emden explique ce phénomène par des changements de densité correspondant à un train d'ondes sonores fixes. La mesure des distances des cannelures lui a suggéré la formule empirique

$$\lambda = 0.88 d \sqrt{\frac{p_2}{p_1} - 1.9}$$

où d est le diamètre de l'orifice. Cette recherche aussi aurait pu être facilitée par des considérations pareilles. On sait que dans un autre cas semblable, où les valeurs correspondantes sont $D, p_1 \frac{d}{D}, p_2 \frac{d}{D}$, la longueur λ deviendra $\lambda \frac{D}{d}$. On ne saurait déterminer λ a priori dans un troisième cas, où les valeurs D, P_1, P_2 satisferaient à la relation

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1 \frac{d}{D}}{p_2^2 \frac{d}{D}} = \frac{p_1}{p_2^2}$$

mais si l'on a établi le fait que λ ne dépend pas des valeurs absolues des pressions, mais seulement de leur rapport, on sait que cette grandeur conserve la valeur $\lambda \frac{D}{d}$. C'est-à-dire qu'on aura établi la proportionnalité de λ avec les dimensions de l'orifice en général: $\lambda = d f.c. \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$, sans avoir eu besoin d'entreprendre des expériences spéciales à ce sujet.

e) L'exemple suivant servira aussi à démontrer l'utilité de la méthode en question:

Kohlrausch³⁾ a fait des recherches sur les sons qui naissent dans un gaz passant par une fente étroite (Spaltentöne). Les mesures s'étendaient à la dépendance entre le nombre des vibrations N , la largeur de la fente s et la pression p_1 du gaz dans le résér-

voir. Comme celui-ci s'écoulait dans l'atmosphère libre, l'influence de la pression extérieure p_2 ne pouvait pas s'y manifester. Mais nous pouvons déterminer a priori la manière dont elle se manifestera. Ce que nous cherchons, c'est la formule générale $N = f(s, p_1, p_2)$, dont le résultat empirique de Kohlrausch: $N = f(s, p_1, p_0) = \varphi(s, p_1)$, avec $p_2 =$ pression atmosphérique constante, égale à p_0 , est un cas particulier. Profitons de la similitude du mouvement s, p_1, p_2 avec celui où ces variables ont les valeurs

$$s \frac{p_2}{p_0}; \quad p_1 \frac{p_0}{p_2}, \quad p_0,$$

et où nous aurons

$$N_0 = \varphi \left(s \frac{p_2}{p_0}, \quad p_1 \frac{p_0}{p_2} \right).$$

Les nombres de vibrations dans ces deux cas seront en raison inverse du temps [comme au § 8, α, γ et au § 9, α] c'est-à-dire: $N_0 : N = p_0 : p_2$, et, par conséquent, on aura le résultat cherché:

$$N = \frac{p_2}{p_0} \varphi \left(s \frac{p_2}{p_0}, \quad p_1 \frac{p_0}{p_2} \right) = f(s, p_1, p_2).$$

On pourrait trouver d'une manière analogue (voir § 8) l'effet d'un changement de température. Il est à regretter qu'on ne puisse pas utiliser de cette façon les mesures de Kohlrausch parce qu'elles ne contiennent pas des valeurs explicites de p_1 , mais seulement les vitesses moyennes U qui en dépendent, et parce que les résultats, condensés dans la formule approximative $N = A(U - B)$ et dans un tableau des valeurs de A, B , en fonction de la variable s , ne fournissent pas la loi finale sous une forme explicite.

§ 10. Le troisième cas spécial $b = 1, m = 1$ de la similitude, ainsi que les modifications produites par la dépendance de la viscosité de la température, présentent moins d'intérêt.

Notons encore qu'il n'y a qu'un genre de similitude lorsque la pesanteur intervient comme force extérieure:

$$m = \sqrt{n}; \quad h = u; \quad b = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

c'est ce qui peut être appliqué aux courants de convection qui naissent par suite de différences de température.

§ 11. La similitude dynamique s'applique-t-elle aussi aux mou-

¹⁾ Sitzungsber. d. Wien. Akad., 98 (1889), Wiedem. Ann., 42, p. 144 (1890).

²⁾ Wiedem. Ann., 69, p. 264, 426, 453 (1899).

³⁾ Wiedem. Ann., 13, p. 545 (1881).

vements de différents gaz? Pour trancher cette question, on changera dans les équations (10, 12) les coefficients R , k , μ , α . Évidemment, par suite de (12), toute similitude est exclue pour des gaz pour lesquels les valeurs de k sont différentes.

Supposons donc k égal, et posons αR au lieu de R

$$\begin{array}{ccc} \beta\mu & n & \mu \\ \gamma\alpha & n & \alpha \end{array}$$

On trouve les conditions suivantes:

$$\text{(d'après 10):} \quad \frac{b}{\alpha h} \frac{m^2}{n} = \frac{b}{n} = \beta \frac{m}{n^2}$$

$$\text{(d'après 12):} \quad \frac{mb}{n} = \beta \frac{m^2}{n^2} = \gamma \frac{h}{n^2}$$

qui se réduisent à

$$(16) \quad \frac{\alpha\beta}{\gamma} = 1; \quad \alpha h = m^2; \quad nb = m\beta.$$

Comme R est proportionnel à l'inverse du poids moléculaire M , il résulte de la première de ces identités que la similitude n'est possible que pour des gaz pour lesquels la valeur de la constante $\frac{\mu}{\alpha M}$ est la même.

Le tableau suivant des coefficients $\frac{\alpha}{\mu}$ (rapportés à l'air) multipliés par M , prouve que pour plusieurs gaz cette condition est satisfaite avec une approximation remarquable:

$k=1.4$	H ₂	O ₂	N ₂	CO	NO
$\frac{\alpha M}{\mu}$	$\frac{6.7.2}{0.50} = 27$	$\frac{1.0.32}{1.1} = 29$	$\frac{1.0.28}{0.97} = 29$	$\frac{0.98.28}{0.97} = 28$	$\frac{0.95.30}{0.98} = 29$

$k=1.3$	CO ₂	N ₂ O	CH ₄	NH ₃
$\frac{\alpha M}{\mu}$	$\frac{0.64.44}{0.82} = 34$	$\frac{0.67.44}{0.82} = 36$	$\frac{1.37.16}{0.62} = 35$	$\frac{0.92.17}{0.57} = 27$

Voici quelques applications des considérations précédentes:

§ 12. Posons $h = 1$, $b = 1$; donc $m^2 = \alpha$, $n = m\beta = \beta\sqrt{\alpha}$. Pour une certaine température et une certaine distribution de pression, il y a des mouvements semblables dans deux vases semblables dont les dimensions sont proportionnelles aux coefficients $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ des gaz renfermés; les vitesses seront alors proportionnelles à $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

α) En rapprochant ce théorème de la loi (approximative) de Graham et Bunsen qui admet la proportionnalité du volume des différents gaz passant à travers une ouverture dans une lame mince à $\frac{1}{\sqrt{M}}$, on en déduit le résultat suivant: la quantité de gaz s'écoulant par des ouvertures différentes, à différence constante de pression, est proportionnelle à la surface de l'ouverture.

β) Supposons un conduit long et étroit qui serait traversé par des volumes de gaz différents, proportionnels à leur coefficient de fluidité $\frac{1}{\mu}$. Notre théorème prouve que le volume du gaz passant par de semblables conduits sera proportionnel au cube de leurs dimensions linéaires. Ce résultat est plus général en quelque sorte, que la formule de Poiseuille-Meyer qui s'applique dans le cas particulier d'un tube régulier circulaire.

γ) Un raisonnement analogue concernant des corps projetés montre que la pression de résistance sera proportionnelle à leurs dimensions linéaires si l'on suppose que, pour des gaz différents, elle change en raison du produit de la viscosité et de la vitesse; et qu'elle sera proportionnelle aux dimensions superficielles si le produit de la densité et du carré de la vitesse en définit la valeur.

Citons un autre exemple:

δ) Joule et Kelvin¹⁾ ont mesuré l'élévation de température $\Delta\Theta$ que subissent des corps (thermomètres, fils formant des couples thermoélectriques) qui traversent l'air avec une certaine vitesse. Les expériences des savants anglais démontrent la proportionnalité très approximative de $\Delta\Theta$ au carré de la vitesse [comprise entre

30 $\frac{m}{sec}$ et 100 $\frac{m}{sec}$] et son indépendance de la forme et de la gran-

¹⁾ Kelvin, Mathem. Phys. Papers, 1 p. 400, 445.

deur du corps [à peu près 1°C par $55 \frac{m}{sec}$]. Imaginons 1) un corps donné dont la vitesse serait v dans l'air 2) un deuxième, pareil, dans un autre gaz 3) un troisième dans le dernier gaz, à dimensions augmentées en raison de $\frac{\nu}{\nu_0} \sqrt{\frac{M_0}{M}}$, et doué d'une vitesse $v \sqrt{\frac{M_0}{M}}$, en appliquant notre théorème à la comparaison des corps 1—3, le résultat empirique de Kelvin à la comparaison des corps 3—2, nous pouvons dire que: dans des gaz différents (mais pour lesquels k a la même valeur) un corps animé de la vitesse v s'échauffe proportionnellement à la quantité $\Delta\Theta = aMv^2$, c'est-à-dire en raison du poids moléculaire du gaz et du carré de la vitesse. Il résulte en outre de l'application des théorèmes du § 8 et du § 9 le résultat inattendu que la constante a est indépendante de la pression du gaz et de sa température. Si l'extension de cette formule à des vitesses supérieures à la vitesse du son était permise, on pourrait évaluer, par exemple, l'échauffement d'un météore traversant l'air à une vitesse de 28 km à 2500° C.

Il faut noter que la formule empirique ne s'applique plus aux petites vitesses (moindres que $30 \frac{m}{sec}$), mais les mesures n'étaient pas suffisamment exactes pour mettre en évidence les écarts de la loi en question.

§ 13. Supposons: $h = 1$, $n = 1$; donc: $m = \sqrt{\alpha}$, $b = \beta \sqrt{\alpha}$:

Même vase; même température; les mouvements de différents gaz seront semblables, pourvu que les pressions soient en raison de $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$; alors les vitesses (et les volumes) seront proportionnels à $\frac{1}{\sqrt{M}}$

α) En effet, cette proposition s'accorde avec la formule ordinaire pour la vitesse du son, et aussi avec la formule de Kirchhoff (§ 9 α) pour des tuyaux. De plus, on voit facilement que la formule de M. Strouhal (§ 9 γ) pour la hauteur du son produit par le mouvement d'un corps cylindrique entraîne l'identité de la constante c pour les divers gaz, c'est-à-dire que le son est indépendant de la qualité du gaz. Nous ne connaissons pas encore d'expériences à ce sujet. De même que M. Emden, ayant établi la formule (§ 9 δ) pour l'air, aurait pu en conclure a priori que la largeur des cannelures λ est indépendante de la nature du gaz, ce qu'ont démontré ses expériences, de même nous pouvons prédire (d'après le § 8) qu'on

la trouvera indépendante de la température. De semblables considérations peuvent souvent faciliter les recherches expérimentales et étendre la portée des résultats obtenus.

β) Le rapport du volume d'un gaz qui s'écoule à l'active différence de pression sera, pour des gaz différents, proportionnel à leur fluidité:

$$\frac{V}{p_1 - p_2} \sim \frac{1}{\mu}$$

si l'on emploie des pressions correspondantes. En vertu de cette conclusion, on peut appliquer un procédé plus exact aux mesures de la viscosité. La formule de Poiseuille-Meyer

$$\frac{V}{p_1 - p_2} = \frac{R^4 \pi}{8 L \mu}$$

ne tient compte ni de l'inertie du gaz, ni de l'effet visqueux de la variabilité de la vitesse le long du tube, ni des différences de température (§ 27). On peut trouver pourtant la valeur exacte de la viscosité relative en employant des pressions non pas quelconques, mais proportionnelles à $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ pour les divers gaz. Il est remarquable que ce résultat soit indépendant de la forme du tube ou de l'orifice, et qu'il subsiste même pour l'écoulement par un orifice dans une lame mince.

γ) La méthode des „disques oscillants“ de Maxwell-Meyer qui n'est pourtant pas à l'abri d'objections, à cause de l'inexactitude de la théorie mathématique sur laquelle elle repose, peut aussi servir à des mesures exactes de la viscosité; seulement il faut y employer des pressions correspondantes, et la suspension du disque doit varier de sorte qu'on puisse produire des durées d'oscillation proportionnelles à $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

Evidemment, tout ce qui a été dit s'applique rigoureusement sous la condition seulement que k et $\frac{\alpha M}{\mu}$ soient égaux, aux gaz comparés, et même lorsqu'il y a de petites différences, ces mesures seront plus exactes que d'après les méthodes ordinaires ¹⁾.

¹⁾ On pourrait en profiter pour élucider la cause des divergences, problématique jusqu'à présent, qui existent entre les résultats donnés par les deux méthodes mentionnées. [Schumann, Wied. Ann. 23 p. 353 (1884)].

III. Phénomènes thermiques d'écoulement.

§ 14. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer nos équations à l'examen des phénomènes thermiques qui se manifestent dans un gaz s'écoulant par des tubes ou des orifices, phénomènes qui ont fait le sujet des célèbres recherches de Joule et de Kelvin¹⁾. Il est vrai qu'il n'y a pas de doute possible quant à l'interprétation générale de ces expériences, lesquelles sont classiques en Thermodynamique; cependant leur explication détaillée offre des difficultés qui ne peuvent être résolues que par une théorie aérodynamique détaillée. Ainsi l'explication usuelle du phénomène Joule-Kelvin ne tient pas compte de la variabilité de la vitesse et peut-être de la température dans les différentes couches du gaz; on comprend aisément qu'il y ait un abaissement de température dans un gaz qui se dilate, mais la manière dont il se répartira sur le gaz qui s'écoule, et sur celui qui reste dans le réservoir, n'est pas évidente.

Nous transformerons l'équation (12) en la multipliant par un élément de volume et en l'intégrant sur tout l'espace en question. Remarquons, en outre, que

$$(17) \quad \iiint p \operatorname{div} d\omega = \iint p (ul + vm + wn) dS - \iint \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\omega;$$

introduisons les valeurs de $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ données par (10) et transformons les intégrales triples, celle exceptée qui renferme $\frac{\partial}{\partial t}$, en intégrales doubles. En désignant la vitesse normale à la surface par v_n , la vitesse totale par $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, nous obtenons l'équation

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left[\frac{p}{k-1} + \rho \frac{V^2}{2} \right] d\omega + \iint \left[\left(\frac{k}{k-1} \dot{p} + \rho \frac{V^2}{2} \right) v_n - \frac{\mu}{3} v_n \operatorname{div} - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] dS +$$

¹⁾ Kelvin, Mathem. Physic. Papers, I p 333; Joule, Mechan. Wärmeäquivalent, Braunschweig 1872.

$$+ \mu \iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (\operatorname{div})^2 \right] d\omega = \iint \int \Phi d\omega + \alpha \iint \int \frac{\partial \theta}{\partial n} dS.$$

L'intégrale triple de gauche multipliée par μ annule les termes correspondants de Φ , les autres peuvent être transformés par intégration partielle, d'après la formule

$$(19) \quad \iint \int \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega = \iint v \left(m \frac{\partial v}{\partial z} - n \frac{\partial v}{\partial y} \right) dS,$$

en une intégrale désignée par l'expression symbolique

$$\iint \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) (ul + vm + wn) - v_n \operatorname{div} \right] dS = \\ = \iint \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v_n - v_n \operatorname{div} \right] dS.$$

Le résultat final est l'équation:

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial t} \iint \int \left[\frac{p}{k-1} + \rho \frac{V^2}{2} \right] d\omega + \iint \left[\left\{ \frac{k}{k-1} p + \rho \frac{V^2}{2} \right\} v_n + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \mu v_n \operatorname{div} - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mu \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v_n \right] dS = \\ = \alpha \iint \frac{\partial \theta}{\partial n} dS.$$

§ 15. Lorsque le courant du gaz est stationnaire, le premier terme de cette équation disparaît. Le reste, l'intégrale double, peut être appliqué à la surface d'un tube de flux, de longueur s , fermé par deux sections transversales q_1 et q_2 . Eu égard à l'équation de continuité qui prend la forme $\rho v q = \text{const.}$, on aura:

$$(21) \quad \frac{kR}{k-1} (v_1 - v_2) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \frac{2}{3} \mu \left[\operatorname{div}_1 - \operatorname{div}_2 \right] - \\ - \mu \left[\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial s} - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial s} \right] = \frac{1}{\rho V q} \iint \left[\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{V^2}{2} \right) + k \frac{\partial \theta}{\partial n} \right] dS.$$

Donc la différence de température en deux points de la même ligne de flux est en relation avec les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial s}$ et div . et du

carré de la vitesse en ces deux points, et aussi avec la longueur du chemin entre les deux points qui définit la valeur de la dernière intégrale. Dans les endroits où le gaz s'écoule avec une lenteur et une uniformité suffisantes, comme par exemple à l'intérieur de deux réservoirs qui communiquent par un tube étroit, on peut négliger ces premiers termes, mais on ne peut pas faire de même avec l'intégrale qui dépend de la distribution des vitesses et de la température entre ces deux points et qui, en général, ne sera pas négligeable. Cela serait vrai, par exemple, si l'équation

$$\nabla^2 \left[\mu \frac{V^2}{2} + \alpha \theta \right] = 0;$$

avait lieu, mais évidemment ce serait là un cas exceptionnel.

A) Donc on ne peut pas prétendre que la température d'un gaz, s'écoulant d'une manière stationnaire, reste invariable; ses différentes couches auront des températures différentes.

§ 16. Le théorème de constance de la température ne s'applique que dans un cas particulier, à la température moyenne. Ce que nous appelons température moyenne d'un profil c'est la température qui s'établirait dans le gaz passant par une surface orthogonale aux lignes de flux, si toutes ses couches étaient mélangées d'une façon complète, c'est-à-dire:

$$(22) \quad \Theta = \frac{\Sigma \theta \rho V q}{\Sigma \rho V q}$$

où la sommation s'étend sur tous les éléments de la surface orthogonale. Supposons, pour fixer les idées, que le point 1 soit situé à l'intérieur du réservoir 1, où les conditions de lenteur et d'uniformité du mouvement sont satisfaites. Envisageons maintenant les équations (21) ou (20) et notons le fait que les parois du réservoir et du conduit sont formées par des tubes de flux adhérents, c'est-à-dire qu'on peut développer V , en désignant la distance d'un point des parois par δn , de la façon suivante:

$$V = \delta n \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right), \text{ par conséquent: } \delta (V^2) = 2 \delta n \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2$$

ce qui disparaît à la surface (pour $\delta n = 0$) de même que V . Donc on aura, pour la température moyenne, l'équation

$$(23) \quad \frac{kR}{k-1} [\theta_0 - \Theta] = \frac{\frac{1}{2} \Sigma \rho q V^2 + \mu \Sigma \left(\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{div} + \frac{\partial V}{\partial s} \right) q V + \int \alpha \frac{\partial \theta}{\partial n} dS}{\Sigma \rho q V}$$

L'intégrale $\int \alpha \frac{\partial \theta}{\partial n} dS$ peut être divisée en trois parties qui correspondent aux parois du vaisseau et aux deux sections transversales. La première partie sera nulle si l'on suppose que les parois sont des isolateurs idéaux de la chaleur; de même les deux autres, si la section passe par des endroits où il y a uniformité suffisante.

B) Donc, dans des endroits où le courant stationnaire est assez lent et uniforme, la température moyenne du gaz qui s'écoule est égale à celle qui règne dans le réservoir primaire. C'est ce qu'on démontre les expériences de Joule et de Kelvin sur le gaz qui présente les moindres écarts de la loi Boyle-Charles, l'hydrogène, et où le bouchon de ouate remplace un système de tubes d'efflux. Il serait intéressant, d'autre part, de vérifier notre résultat précédent, concernant les différences de température dans les couches diverses d'un gaz quittant un tube étroit, résultat qui distingue notre théorie du raisonnement usuel. Cette différence provient de ce que le travail dans un gaz visqueux n'est pas donné par $\int (\mu l + \nu m + \omega n) p dS$, mais par $\int (\mu p_m + \nu p_m + \omega p_m) dS$. L'identité de ces deux expressions peut être démontrée facilement, pour le mouvement stationnaire, à l'aide de transformations semblables à celles du § 14, mais seulement pour toute la quantité du gaz comprise entre les parois et les deux sections dans les réservoirs, et non pas pour des tubes de flux considérés isolément. Evidemment, ces remarques ne concernent pas du tout les conclusions qu'on tire du phénomène de Joule et Kelvin, concernant les écarts de la loi Boyle-Charles.

§ 17. Envisageons encore l'équation (21) et considérons que, pour les tubes de flux adhérents aux parois: V , div et $\frac{\partial V}{\partial s}$ sont nuls. Puisque la température dans ces couches doit rester finie, ceci entraîne la conclusion que l'intégrale de droite disparaît. Transformons cette intégrale en

$$\iiint \left[\mu \Delta^2 \left(\frac{V^2}{2} \right) + \alpha \Delta^2 \theta \right] d\omega,$$

et considérons que V peut être développée dans la proximité des parois (la normale étant prise pour direction ζ) de la manière suivante :

$$V = \zeta \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_0 + \frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \right)_0 + \zeta \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial n} \right)_0 + \dots$$

ce qui donne la valeur limite de

$$\Delta^2 \left(\frac{V^2}{2} \right) = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2;$$

nous retrouvons ainsi la condition

$$\mu \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 = -\alpha \Delta^2 \theta$$

qui a été établie auparavant comme équation (13). D'ailleurs, la température des couches superficielles sera égale, naturellement, à celle des parois.

§ 18. Considérons encore un détail: la manière dont se manifeste l'effet de l'énergie cinétique, en supposant, pour l'accentuer et pour simplifier le calcul, que la vitesse soit si grande qu'on puisse négliger les termes du premier degré en comparaison des carrés des vitesses. Nous aurons pour chaque tube de flux

$$(24) \quad \frac{kR}{k-1} (\theta_0 - \theta) = \frac{V^2}{2}.$$

Un gaz idéal, sans viscosité, satisferait à l'équation ¹⁾

$$(25) \quad \int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const.},$$

où l'intégrale s'étend sur la longueur s de la ligne de flux allant du réservoir jusqu'au point considéré. La différentiation des deux équations (24) et (25) donne:

$$-\frac{k}{k-1} R \frac{d\theta}{ds} = V \frac{dV}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}$$

¹⁾ Voir p. ex. Lamb, p. 28.

dont l'intégration, en combinaison avec la loi Boyle Charles, mène à la formule ordinaire de détente adiabatique:

$$(26) \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1}.$$

On est habitué à considérer cette formule comme évidente a priori dans de pareils cas. Mais cette hypothèse est tout à fait fautive dans le cas des gaz réels visqueux. C'est ce que l'on démontre en remarquant que la formule (26) exigerait un refroidissement d'un courant stationnaire, correspondant à la chute de pression de p_1 à p_2 :

$$\theta_2 = \theta_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}},$$

tandis que nous avons vu au § 16 que la température moyenne reste invariable.

(C) L'équation (24), au contraire, reste approximativement applicable dans ce cas, pour un gaz visqueux, puisque l'abaissement de température ne correspond pas à l'expansion du gaz, mais au gain de son énergie cinétique. La température s'abaisse le plus où la vitesse est maxima, p. ex. à l'orifice d'une bombe à gaz comprimé, et c'est cet abaissement ¹⁾ qui a été utilisé par divers observateurs pour la liquéfaction des gaz, d'après la méthode dynamique. A mesure que le gaz perd sa vitesse, il revient aussi à sa température première par suite de la chaleur de friction. Donc, l'emploi direct de l'équation (26) n'est justifié que dans le cas d'une expansion infiniment lente; autrement il faut employer l'équation complète (21), dans le cas de grandes vitesses l'équation approximative (24) et dans le cas où la conductibilité de la chaleur est prépondérante, on peut supposer le régime isotherme.

§ 19. Jusqu'ici nous avons supposé que le courant reste stationnaire, par conséquent que la pression dans les réservoirs est maintenue constante, p. ex. à l'aide d'un dispositif pareil à celui des gazomètres ou de la bouteille de Mariotte, ou bien par suite de la communication avec une source constante de gaz. Mais au moment où nous interrompons l'efflux, de sorte que le gaz ne sort du réservoir que par expansion, la distribution de la température changera puisqu'alors il faut ajouter, à la partie droite de l'équation (21), le terme

¹⁾ Augmenté par suite du phénomène Joule-Kelvin.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R\theta}{k-1} + \frac{V^2}{2} \right) dm.$$

À l'intérieur du réservoir 1, où les vitesses sont petites et la température uniforme, on aura, d'après (20):

$$(27) \quad \frac{\partial p}{\partial t} \int \int \int d\omega = -kp \int \int v_n dS$$

ce qui, joint à l'équation de continuité

$$(28) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \int \int \int d\omega = -\rho \int \int v_n dS$$

donne

$$(29) \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{k}{\Omega} \int \int \int v_n dS dt}$$

Ω désignant le volume total du réservoir 1, et la formule (26).

D) Donc, à l'intérieur du réservoir 1, la pression et la température s'abaissent d'après la formule ordinaire de détente adiabatique.

§ 20. Dans le tuyau de décharge, le problème est plus compliqué et ne peut être analysé que par le moyen d'une solution détaillée, mais on peut trouver la température approximative du gaz qui a traversé le tuyau. Appliquons les équations (27, 28) à deux sections transversales des lignes de flux, l'une située dans le réservoir 1; près de son issue, l'autre au réservoir 2, près de l'entrée, et désignons les volumes correspondants par Ω_1 et Ω_2 . On obtient les équations: pour Ω_1 , comme plus haut:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 \frac{dp_1}{dt} + kp_1 \int \int v dS = 0 \\ \Omega_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \int \int v dS = 0 \end{array} \right.$$

Pour $\Omega_1 + \Omega_2$, en négligeant le volume du conduit, d'une manière analogue

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2) + k p_2 \int \int v dS = 0 \\ \frac{d}{dt} (\Omega_1 \rho_1 + \Omega_2 \rho_2) + \rho_2 \int \int v dS = 0 \end{array} \right.$$

En divisant (31,1) par (31,2) et en diminuant Ω_2 en comparaison avec Ω_1 , on obtient

$$k \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{d(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2)}{d(\Omega_1 \rho_1 + \Omega_2 \rho_2)} = \frac{dp_1}{d\rho_1} = k \frac{p_1}{\rho_1}$$

c'est-à-dire: $\Theta_2 = \Theta_1$.

b) Donc, pourvu, que les hypothèses de l'énoncé B soient remplies, la température moyenne du gaz entrant dans le réservoir 2 sera (approximativement) la même que celle du gaz renfermé dans le réservoir 1, gaz qui s'écoule d'après la formule adiabatique (quoique la pression soit inférieure).

On peut vérifier ce résultat, en calculant le travail extérieur et la quantité de chaleur „absorbée“, ce qui donne des valeurs égales à $V \frac{(p_0 - p_1)}{k}$, moindres évidemment que les valeurs qui correspondent à une expansion réversible.

§ 21. Ces résultats méritent d'attirer l'attention des physiciens qui étudient l'effusion, la transpiration et les phénomènes analogues, parce qu'ils démontrent l'inexactitude des recherches sur l'efflux stationnaire exécuté à l'aide de réservoirs fermés où la pression diminue. Ainsi M. Donnan¹⁾, en mesurant le temps nécessaire à un abaissement de la pression de 525 mm à 322 mm dans le réservoir, n'a pas obtenu, en réalité, des nombres relatifs pour le temps d'effusion des divers gaz, puisque la température ne restait pas constante et, comme il le croyait, égale à 25°C, mais pouvait s'abaisser: pour l'air à -14°C; pour CO₂ à -9°C; pour l'argon à -28°C. Ces nombres sont sans doute exagérés puisque les différences devaient être diminuées par suite de la conduction de la chaleur aux parois du vaisseau, mais en tout cas, cette grave source d'erreurs indique la nécessité de l'emploi de gazomètres à pression constante (§ 19). C'est une condition dont l'importance a été bien appréciée par Joule et Kelvin dans leurs travaux. Les mêmes considérations s'appliquent à la plupart de recherches semblables et aussi, en quelque sorte, aux travaux intéressants de M. Emden (loc. cit.). Cet expérimentateur n'y a pas remédié par l'emploi de la soupape régulatrice (Druckreduzierungsventil), puisqu'il n'a pas pris soin de réchauffer le gaz sortant à une température invariable. Cette ob-

¹⁾ Philos. Magazine 49 p. 423 (1900).

jection est encore plus importante pour les expériences de Mach et Salcher, faites à une pression plus haute et avec un réservoir de moindre capacité, ce qui peut expliquer aussi l'écart entre les observations de l'abaissement de la température dans le jet de gaz (une dizaine de degrés d'après M. Emden, une centaine d'après M. Mach). Le thermomètre, d'ailleurs, n'est nullement applicable à la mesure de la température d'un gaz animé d'une grande vitesse, puisque le mouvement du gaz et la distribution de chaleur changeraient complètement par suite de sa présence.

IV. Solutions spéciales de quelques problèmes d'Aérodynamique.

§ 22. Nous nous bornerons à l'étude de quelques problèmes simples dont quelques-uns toutefois montreront l'application de méthodes plus générales.

L'exemple le plus simple est le mouvement stationnaire d'un gaz compris entre deux parois cylindriques, concentriques; l'extérieure dont le rayon est r_2 est fixe et l'intérieure, de rayon r_1 , effectue une rotation de n tours par seconde. Désignons par ω la vitesse angulaire correspondant au rayon r ; nous aurons la solution des équations (10) et (11)

$$u = -\omega \frac{y}{r}; \quad v = \omega \frac{x}{r},$$

sous la condition que ω satisfasse à l'équation:

$$(33) \quad \omega = -\frac{a}{2r^2} + b = \frac{2\pi n}{1} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right].$$

Les pressions résultent de $\frac{dp}{dr} = \omega^2 r$, si la température est connue.

Celle-ci est déterminée par l'équation (12) qui, intégrée, donne

$$(34) \quad \theta = \theta_0 + \frac{\mu}{4\kappa} a^2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right] + c \log \frac{r}{r_2}$$

où θ_0 désigne la température de la paroi extérieure. Pour déterminer le coefficient c , supposons que le cylindre intérieur soit isolé au point de vue thermique. Il atteindra l'équilibre thermique lorsque:

$$x \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_1} = 0.$$

La température correspondante est

$$(35) \quad \theta_2 = \theta_0 + \frac{\mu a^2}{4\kappa} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1^2} \log \frac{r_1}{r_2} \right]$$

ou approximativement, pour une petite épaisseur $r_1 - r_2$,

$$(36) \quad \theta_2 = \theta_0 + \frac{2\mu}{\kappa} (\pi n r_2)^2$$

indépendamment de l'épaisseur, ce qui donne p. ex. pour $n = 100$, $r_2 = 10$ cm, dans l'air: $\theta_2 = \theta_0 + 1.4^\circ$.

§ 23. En supposant $r = \infty$ dans l'exemple précédent, ou bien en supposant $u = w = 0$; $v = f.c.(x)$, on aura un flux lamellaire stationnaire, qui est identique à celui qui se produit dans des circonstances analogues dans les liquides: $v = bx + c$. Mais, au sein des liquides, un mouvement variable lamellaire est aussi possible: lorsque le plan OYZ exécute des oscillations dans la direction des Y : $v_0 = A \cos \gamma t$. Ce mouvement se propage dans la direction des X , en vertu de l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, de la même manière que la chaleur dans un corps chauffé:

$$(37) \quad v = A e^{-x \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mu}}} \cos \left(\gamma t - x \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mu}} \right)$$

Dans les gaz, au contraire, il y a cette singularité que les équations (10, 11, 12) ne peuvent pas être satisfaites par l'hypothèse $u = w = 0$, $v = f(x, t)$, puisque la chaleur produite par le frottement donnera naissance à des vitesses dans la direction des X . Il est facile d'en faire l'évaluation approximative.

Voici un exemple intéressant de la manière dont des vibrations transversales peuvent produire des ondulations longitudinales sonores; ce sont les premières qui seront prédominantes dans la proximité de la paroi OYZ , les autres à des distances plus grandes, puisque leur coefficient d'extinction sera plus petit. L'effet d'une raréfaction du gaz sera d'augmenter l'extinction pour les ondes longitudinales et de la diminuer pour les ondes transversales.

§ 24. Un autre exemple qui met en évidence une différence des liquides et des gaz, est le suivant: un courant stationnaire dans

la direction X , dont la vitesse ne dépend que de la valeur de x , les parois étant parfaitement polies ou à une distance telle qu'on puisse négliger leur présence. En négligeant la conduction, on aura donc les équations:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{4\mu}{3} \frac{d^2u}{dx^2} \\ \frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \\ u \frac{dp}{dx} + kp \frac{du}{dx} = (k-1) \frac{4\mu}{3} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \end{array} \right.$$

Ce qui est intéressant c'est que, dans ce cas, on a une solution exacte, tandis que en Hydrodynamique on ne connaît pas de solution exacte des équations complètes, sauf dans quelques cas très simples comme le précédent. Un mouvement stationnaire analogue d'un liquide serait impossible, puisqu'il n'y aurait pas de forces d'expansion visqueuse qui pourraient s'opposer à l'accélération produite par les différences de pression.

Les équations (38,2) et (38,1) peuvent être intégrées immédiatement:

$$(39,2) \quad \rho u = b$$

$$(39,1) \quad \frac{du}{dx} = \frac{3}{4\mu} (bu + p - a).$$

De même (38,2) après avoir été divisée par $\frac{du}{dx}$, dont la valeur est donnée par l'équation précédente:

$$(39,2) \quad p = \frac{(k-1)}{2} bu - \frac{c}{u} - (k-1)a.$$

La substitution de cette valeur dans (39,1) et l'intégration donnent:

$$(40) \quad x = m + \frac{4\mu}{3} \int \frac{u du}{(k+1)\frac{b}{2}u^2 - kau - c}$$

où l'intégrale peut être évaluée par des fonctions cyclométriques ou logarithmiques.

Le problème est résolu, mais il paraît assez douteux qu'il possède des applications dans la pratique. Nous avons trouvé ici quatre constantes arbitraires, alors que nous sommes habitués à définir le

flux, p. ex. dans les tubes de Poiseuille, par trois données: la pression en deux points et la température du gaz. Mais, comme nous le verrons plus loin, il n'y a là qu'une apparente simplicité de la loi de Poiseuille, causée par l'omission de facteurs secondaires, notamment de l'influence de l'état de mouvement dans la proximité des extrémités du tube.

§ 25. Un exemple qu'il serait plus facile de réaliser est le mouvement variable défini par les conditions: $v = w = 0$; $u = f(x, t)$; mais ce problème ne pourrait être résolu dans toute sa généralité.

Nous supposons donc que le gaz, à pression initiale p_0 et température θ_0 , soit contenu dans un cylindre, à parois polies, fermé d'un côté, de l'autre côté admettant un piston, à masse négligeable, qui y soit enfoncé par une force constante a ; pour simplifier, nous négligerons aussi l'effet de l'inertie du gaz, en supposant un mouvement instantané, analogue dans toute son étendue:

$$(41) \quad u = x f(t).$$

Or, la force extérieure a doit être balancée par la somme de la pression intérieure du gaz et du frottement intérieur, c'est-à-dire, d'après (1):

$$(42) \quad p_{xx} = a = p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

L'introduction de $\frac{\partial u}{\partial x} = f(t)$ et la substitution de p dans l'équation thermique:

$$\frac{dp}{dt} + kp \frac{\partial u}{\partial x} = (k-1) \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

donne l'équation:

$$(43) \quad \frac{df}{dt} + \frac{3ak}{4\mu} f + f^2 = 0.$$

On en déduit par intégration:

$$(44) \quad \frac{1}{f} = A e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}; \quad \text{où: } \alpha = \frac{3ak}{4\mu}$$

et, en introduisant la valeur initiale

$$\frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = p_0 - a,$$

on obtient:

$$(45) \quad u = \frac{\alpha x}{\left(\frac{ak}{p_0 - a} + 1\right) e^{\alpha x} - 1}$$

Pour trouver la densité, intégrons l'équation de continuité:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

ce qui donne:

$$(46) \quad \rho = \rho_0 e^{-\int_0^t f dt}$$

où l'intégrale peut être développée de la manière suivante:

$$\int \frac{dt}{Ae^{\alpha t} - B} = \frac{1}{\alpha B} \log \left(\frac{Ae^{\alpha t} - B}{Ae^{\alpha t}} \right).$$

C'est-à-dire:

$$(47) \quad \rho = \rho_0 \left[1 + \frac{p_0 - a}{ak} (1 - e^{-\alpha x}) \right]^{-1}$$

La densité, la pression et la température approcheront, par conséquent, de manière asymptotique des limites:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\infty} = \frac{\rho_0}{1 + \frac{p_0 - a}{ak}}; \quad p_{\infty} = a; \\ \theta_{\infty} = \frac{p_{\infty}}{R\rho_{\infty}} = \frac{a \left(1 + \frac{p_0 - a}{ak} \right)}{R\rho_0} = \theta_0 \left[\frac{1}{k} + \frac{a}{p_0} \frac{k-1}{k} \right]. \end{array} \right.$$

Ce qu'il y a d'intéressant dans cet exemple, c'est la comparaison avec la formule adiabatique ordinaire qui donnerait:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{\alpha}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}; \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{\alpha}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Les valeurs qui en résultent pour l'élévation de la température finale sont inférieures à celle de notre calcul (48), ce qui est naturel puisque la formule adiabatique n'est applicable qu'au cas d'une expansion infiniment lente et ne tient pas compte du frottement intérieur.

Il est vrai que nous aussi, nous avons négligé un facteur: l'effet de l'inertie du gaz qui diminuera cette différence et produira des oscillations qui tendront à s'évanouir. Par conséquent, notre calcul ne serait exact que pour un gaz très raréfié. Cependant, cet exemple prouve qu'une erreur, très petite peut-être, est inévitable si l'on emploie la formule adiabatique à l'évaluation des mesures de la chaleur spécifique des gaz faites d'après la méthode de Clément-Desormes. Leur effet sera une augmentation apparente du coefficient k , le contraire de l'effet de la conductibilité. D'ailleurs, il dépendra de la manière dont se produit la compression; si le réservoir avait, par exemple, une forme sphérique, à parois dilatables, la diminution des longueurs serait la même dans toutes les directions:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \text{const.}$$

et, par conséquent, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$, c'est-à-dire que la viscosité n'aurait aucun effet, ni mécanique ni thermique (puisque $\Phi = 0$).

§ 26. Le système des équations aérodynamiques est si compliqué qu'on ne peut espérer de le résoudre directement que dans certains cas d'une simplicité exceptionnelle, tels que ceux que nous venons de citer. On peut aussi employer, outre les méthodes des § 7—§ 13, la méthode des approximations successives. En voici des cas particuliers. Si le coefficient α de conductibilité thermique était infini, on aurait un mouvement rigoureusement isotherme. La même conclusion s'applique approximativement à tous les cas où la conductibilité joue un rôle prépondérant, comme les mouvements „calmes“ dans les conduits étroits; à mesure que $\frac{1}{\alpha}$ diffère de zéro, la distribution de chaleur et de mouvement s'écarte de l'état limite, de sorte qu'on pourra développer toutes les variables en séries potentielles de la forme

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 + \frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \frac{u_3}{x^3} + \dots \\ \theta = \theta_0 + \frac{\theta_1}{x} + \frac{\theta_2}{x^2} + \dots \end{array} \right.$$

En décomposant les équations (10, 11, 12) après avoir substitué ces expressions, d'après les puissances de $\left(\frac{1}{x}\right)$, on aura une série d'équa-

tions à approximations progressives (pourtvu que la convergence soit établie) dont les trois premières représentent l'état le plus simple isotherme:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = \text{const} = \frac{p_0}{R\rho_0} \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_0 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}_0}{\partial x} \text{ etc.}, \\ \frac{\partial(\rho_0 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w_0)}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} (k-1)\Delta^2 \theta_1 = u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \text{div}_0 - (k-1)\Phi_0 \\ \frac{\partial p_1}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}_1}{\partial x} \text{ etc.} \\ \frac{\partial(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w_1 + \rho_1 w_0)}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

§ 27. Essayons d'appliquer cette méthode d'approximation à la théorie ordinaire¹⁾ du mouvement dans les tubes Poiseuille. Le raisonnement usuel correspond aux équations (50), simplifiées encore par l'hypothèse $v = w = 0$ et par l'omission des termes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ etc. Pour obtenir une approximation plus grande, il faut substituer les formules qui en résultent, c'est-à-dire:

$$(52) \quad p = \sqrt{p_1^2 - \frac{x}{l}(p_1^2 - p_2^2)} = \sqrt{a - cx}$$

$$(53) \quad u = \frac{\delta^2 - r^2}{8\mu} \frac{c}{\sqrt{a - cx}}$$

dans l'équation 51, 1) qui se transforme en

$$(54) \quad \Delta^2 \theta_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) = \frac{c^2}{16\mu} \frac{\delta^2 - 2r^2}{a - cx}$$

L'intégration donne:

$$(55) \quad \theta_1 = -\frac{c^2}{128 \cdot \mu} \frac{(\delta^2 - r^2)^2}{a - cx} = -\frac{1}{128 \cdot \mu} \left[\frac{(\delta^2 - r^2)(p_1^2 - p_2^2)}{lp} \right]^2 = -\frac{u^2 \mu}{2}$$

¹⁾ O. E. Meyer, Pogg. Ann., 127, p. 253, 353 (1866); 148, p. 1 (1873).

Nous aurons donc:

$$\theta = \theta_0 - \frac{\mu}{2x} u^2$$

et, ce qui est remarquable, $\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$, c'est-à-dire: le gaz n'échange pas de chaleur avec les parois du tube. L'abaissement maximum, dans l'axe du tube, s'élève à

$$(56) \quad \Delta \theta = \frac{9 \cdot \delta^4}{16 \cdot 128 \cdot \pi \cdot \mu} \left[\frac{p_1^2 - p_2^2}{lp} \right]^2$$

Ainsi on trouve, pour les expériences de Koch¹⁾ sur la viscosité de la vapeur de mercure, avec les nombres approximatifs:

$$p_1 = 100 \text{ cm}, \quad p_2 = 1 \text{ cm}, \quad l = 10 \text{ cm}, \quad r = 0.00425 \text{ cm}$$

un abaissement sur l'axe de 0.04° jusqu'à 400° C.

Ce résultat n'est point exact, sans doute, mais il suffit pour démontrer que la formule de Poiseuille, fondée sur l'hypothèse d'un mouvement lent et isotherme, n'est pas applicable dans un pareil cas et que le résultat final de ce travail — proportionnalité de μ à $\theta^{1.8}$ — est dénué de fondement. Des objections de même nature s'attachent aux travaux de L. Meyer et Steudel²⁾ et même à quelques-unes des mesures de O. E. Meyer (loc. cit.), quoique l'influence sur les nombres définitifs de celles-ci ne soit probablement pas importante. Elles font apprécier l'importance des conditions: petitesse du diamètre et de la différence des pressions et longueur du tube. La formule (56) d'ailleurs ne servira qu'à la vérification de la supposition du régime isotherme. On ne serait pas en droit de pousser plus loin le calcul d'approximation, à cause de l'inexactitude de la formule primaire (52, 53) qui provient des simplifications mentionnées³⁾.

D'autre part, si l'on voulait exécuter le calcul en tenant compte de ces effets secondaires, de la viscosité „de volume“ et de l'inégalité de pression dans les différentes couches d'un profil, on

¹⁾ Wied. Ann., 19, p. 857 (1883).

²⁾ Wied. Ann., 16, p. 368, 394 (1882).

³⁾ Il y faut ajouter l'omission des termes d'inertie

$$\rho u \frac{\partial a}{\partial x} \text{ etc.}$$

rencontrerait un autre obstacle: la connaissance de la pression en deux points de l'axe p_1, p_2 et de la température initiale ne suffirait pas à la détermination des constantes et des fonctions arbitraires du calcul; il faudrait connaître encore la distribution détaillée de la vitesse et de la pression dans le profil initial. Cela veut dire que le problème n'est pas défini d'une façon exacte, si l'on n'a pas précisé la forme des deux réservoirs qui communiquent par le tube, surtout dans le voisinage de ses extrémités. L'effet de ces circonstances, qui se manifeste par exemple dans les phénomènes de la „vena contracta“, peut modifier d'une manière considérable la transpiration par des tubes larges, de petite longueur. Cependant la méthode de Poiseuille, employée de la manière décrite au § 13, peut toujours servir à des mesures exactes de la viscosité relative.

§ 28. Une autre catégorie de problèmes peut être illustrée par l'exemple suivant. Supposons une sphère, en repos, dans un gaz animé d'un mouvement „calme“ stationnaire, avec une vitesse uniforme c à l'infini; cette hypothèse, qui implique l'omission des termes $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ en comparaison de $\mu \Delta^2 u$, exige que $\frac{\rho c a}{\mu}$ soit une quantité petite. La solution serait très simple, si le gaz était comprimé à une densité infinie, parce que dans ce cas div serait égal à zéro [d'après (11)] et le mouvement serait celui d'un liquide incompressible. Pour trouver les corrections qui résultent de la compressibilité, considérons que la distribution de la densité et aussi des autres variables dépend de la valeur constante de la pression à l'infini, que nous

appellerons P . A mesure que $\frac{1}{P}$ s'éloigne de zéro, le mouvement s'écartera du type incompressible. Donc, on pourrait développer toutes les variables en séries d'après les degrés de $\frac{1}{P}$ comme au § 26, ce qui permettrait de décomposer les équations (10, 11, 12) en un système d'équations à approximations progressives. Pour simplifier, nous nous bornerons à la considération de deux termes, en supposant que toutes les variables soient composées de la manière suivante:

$$(57) \quad \begin{cases} u = u_0 + u_1; & v = v_0 + v_1; & w = w_0 + w_1; \\ p = p_0 + p_1; & \rho = \rho_0 + \rho_1; & \theta = \theta_0 + \theta_1, \end{cases}$$

où les premiers termes représentent le type limite d'incompressibi-

lité, les seconds termes les corrections à y ajouter, petites en comparaison de ceux-là. L'équation (9) donne:

$$(58) \quad \frac{p_0}{\rho_0} = R\theta_0; \quad \frac{p_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{\theta_1}{\theta_0}.$$

Puisque nous supposons que les variations de la pression, définies par $\frac{\partial p_0}{\partial x}$ etc., sont petites par rapport à p_0 etc., on pourra déduire de l'équation (11), comme première approximation:

$$(59, 1) \quad \text{div}_0 = 0,$$

approximation seconde:

$$(59, 2) \quad \rho_0 \text{div}_1 + u_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0.$$

De l'équation (12):

$$(60) \quad u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + k p_0 \text{div}_1 = (k-1) [\Phi_0 + \kappa \Delta^2 \theta_0]$$

qui se transforme, eu égard à (59, 2) et 58, 1), en:

$$(61) \quad \begin{aligned} u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \Phi_0 = \\ = \frac{k}{k-1} R \rho_0 \left[u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right] - \kappa \Delta^2 \theta_0 \end{aligned}$$

De l'équation (10) enfin:

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_0}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_0; & \frac{\partial p_1}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \text{div}_1; \\ \frac{\partial p_0}{\partial y} = \mu \Delta^2 v_0; & \frac{\partial p_1}{\partial y} = \mu \Delta^2 v_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \text{div}_1; \\ \frac{\partial p_0}{\partial z} = \mu \Delta^2 w_0; & \frac{\partial p_1}{\partial z} = \mu \Delta^2 w_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \text{div}_1. \end{cases}$$

L'approximation première est représentée par le système (62, 1) qui détermine avec (59, 1), le problème analogue de l'Hydrodynamique, dont voici la solution:

$$(63) \quad \begin{cases} u_0 = -\frac{3}{4}ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{x^2}{r^2} + c \left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right) \\ v_0 = -\frac{3}{4}ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{xy}{r^2} \\ w_0 = -\frac{3}{4}ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{xz}{r^2} \\ p_0 = P - \frac{3\mu}{2} \frac{cax}{r^3} \end{cases}$$

Nous en ferons usage pour évaluer les variations de la température d'après (61). Le membre gauche de cette équation a pour valeur:

$$(64) \quad u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} = -\frac{3}{2} \mu \frac{c^2 a}{r^3} \left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{9}{2} \mu \frac{c^2 ax^2}{r^3} \left(1 - \frac{5}{4}\frac{a}{r} + \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)$$

$$(65) \quad \Delta p_0 = \frac{9}{4} \mu \frac{c^2 a^3}{r^4} \left(3 \frac{x^2}{r^2} + \frac{a^4}{r^4} - 6 \frac{a^2 x^2}{r^4} + 2 \frac{a^4 x^4}{r^6}\right)$$

ce qui démontre que la chaleur qui provient de la compression et du frottement intérieur sont des grandeurs du même ordre.

Les équations de la forme (61), appartenant au type „elliptique“

$$\Delta^2 \vartheta + u_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = F$$

qui se rencontre souvent dans des problèmes semblables, sont peu étudiées jusqu'à présent. Elles peuvent être intégrées par la méthode laborieuse d'approximations successives, en résolvant les équations

$$\begin{aligned} \Delta^2 \vartheta' &= F \\ \Delta^2 \vartheta'' &= F - \left(u_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial z}\right) \\ \Delta^2 \vartheta''' &= F - \left(u_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial z}\right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

et en tenant compte de la condition de surface $\vartheta = \Theta$.

On peut se restreindre à la première approximation, lorsque le coefficient $\frac{caR\rho_0}{k}$, qui détermine la convergence de la série, est

petit, condition qui ne diffère pas beaucoup, au point de vue quantitatif, de la supposition antérieure d'un mouvement „calme“. Dans ce cas, on déduirait la valeur suivante de (61) qui définit l'état de l'état isotherme:

$$(66) \quad \vartheta_0 = \Theta + \frac{\mu c^2}{32\kappa} \left\{ \frac{a}{r} \left[19 + 13 \frac{a^2}{r^2} + 24 \frac{x^2}{r^2} - 39 \frac{x^2 a^2}{r^4} \right] + \frac{3a^3}{r^2} \left[-9 + \frac{3x^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a^4}{3r^4} + \frac{4a^2 x^2}{r^4} - \frac{2a^4 x^2}{r^6} \right] \right\}$$

En substituant cette valeur dans (58, 1), (59, 2), on déduit la correction de la pression qui correspond à la compressibilité et à la variabilité de la température. Elle sera très petite, d'ailleurs, en comparaison de la pression de résistance p , lorsqu'on suppose un mouvement „calme“¹⁾.

§ 29. Puisque la température s'élève, d'après cette formule, suivant la direction de la normale à la surface, en raison de

$$(67) \quad \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\mu c^2}{32\kappa a} [20 + 111 \cos^2 \varphi],$$

une sphère solide, animée d'une vitesse c dans l'air tranquille devrait s'échauffer de même; l'effet serait plus grand aux „pôles“, qu'à „l'équateur“; sa valeur moyenne serait, d'après un calcul approximatif

$$\vartheta \theta = \frac{57}{32} \frac{\mu c^2}{\kappa}$$

indépendamment des dimensions de la sphère. La considération des corrections suivantes dans la série $\vartheta', \vartheta'', \vartheta'''$ changerait ce résultat de telle façon que la distribution deviendrait asymétrique, l'échauffement étant plus considérable au pôle „postérieur“ qu'à „l'antérieur“. Ce résultat, de même que l'excès comparatif de la température à l'équateur, est en accord avec les expériences de Joule et Kelvin²⁾ pour de petites vitesses; et la formule (68) s'accorde aussi avec leurs mesures pour des vitesses moyennes, en ce qui concerne l'indépendance de l'échauffement des dimensions du corps

¹⁾ Voir un calcul analogue approximatif, sans considération de la variabilité de la température: O. E. Meyer, Crelle's Journal, 75 (1873).

²⁾ Voir § 12, 2.

et la proportionnalité au carré de la vitesse, seulement le coefficient numérique est plus petit $\left[1^{\circ} \text{C pour } 28 \frac{m}{sec}, \text{ tandis que l'on a } 1^{\circ} \text{C pour } 55 \frac{m}{sec} \text{ d'après Kelvin} \right]$.

Cependant on aurait tort de considérer ceci comme une confirmation de la théorie, puisque les conditions de ces expériences s'écartent de beaucoup des suppositions du calcul. Rappelons que ρca doit être petit en comparaison de μ ($= 0.00018$) afin que le mouvement soit „calme“; par conséquent les vitesses employées par Kelvin ne seraient admissibles que dans un gaz très raréfié.

§ 30. Nous voyons que l'importance pratique de pareils exemples est limitée assez sérieusement par l'hypothèse du mouvement „calme“. Un intérêt plus considérable s'attacherait aux mouvements „violents“ (voir § 6), où d'ailleurs la compressibilité et les phénomènes thermiques jouent un rôle beaucoup plus considérable. Les méthodes approximatives qui pourraient être appliquées à des phénomènes pareils, où l'omission des termes d'inertie ne serait plus justifiée, sont les suivantes:

1) En considérant que le mouvement d'un gaz assez léger [c'est-à-dire ayant un coefficient R assez grand] sera plus rapproché du type „calme“, on peut développer toutes les variables en séries de $\frac{1}{R}$, ce qui donne des corrections successives à ajouter aux formules du type limite, d'après un procédé semblable à celui des §§ 26, 28.

2) Un développement pareil, d'après les puissances de μ , donnerait les corrections à faire dans les résultats se rapportant au type limite du gaz idéal, à cause de la viscosité.

L'avantage de ces méthodes consiste dans la linéarité des équations résultantes, mais leur complication est cependant plus considérable que dans les exemples précédents. En outre, lorsqu'une certaine limite d'inertie est dépassée, par suite de l'augmentation de la vitesse ou de la densité, l'état devient instable et les mouvements „turbulents“ prennent naissance.

Nous avons noté, dans les chapitres précédents, quelques cas semblables comme les ondulations fixes dans le jet d'un gaz et les sons de friction, qui semblent être la cause primaire du son dans les instruments à vent. Il faudrait chercher d'autres méthodes pour

le traitement de ces phénomènes, puisque les développements précédents supposent la continuité des fonctions. Mais nous ne nous occuperons pas ici des problèmes du mouvement visqueux inerte, considérant que dans un cas beaucoup plus simple — dans l'hydrodynamique des liquides visqueux — les recherches analogues sont à peine abordées et, jusqu'à présent, n'ont fourni que des résultats très insuffisants.