gnetyczne eteru), składający się jednak nie z ruchów regularnie okresowych jak światło, tylko z wstrząśnień nieregularnych [1]).

Nie będę się jednak wdawał tutaj w dalsze szczegółowe roztrząsanie tych i innych hypotez, ponieważ wszystkie te badania doświadczalne i teoretyczne jeszcze w zanadto mglistym stanie się znajdują i mianowicie także z tego powodu, że wszystkie te zjawiska, należące do zakresu zjawisk fosforescencji, fluorescencji etc., nie są w związku bezpośrednim z promieniowaniem normalnem, termicznem, którem się tutaj specjalnie zajmowaliśmy.

Możnaby mi wogóle zarzucić, że trzymałem się tym razem zasady: „multa sed non multum", gdyż musiałem poruszać wiele specjalnych kwestyj, nie zgłębiając ich należycie, ale nie chodziło mi wogóle tak dalece o podanie specjalnych wiadomości jak raczej o to, ażeby dać ogólne wyobrażenie o kierunku pracy teraźniejszej w tej części nauki i o prądach umysłowych, które popychają fizykę współczesną do największych postępów właśnie na polu nauki o promieniowaniu.

[1]) Na podstawie tej teorji Sommerfeld doszedł nawet już do ciekawych wniosków co do dyfrakcji promieni Röntgena. (Zaczynamy rozumieć coraz jaśniej w optyce, że mniemana prawidłowość drgań świetlnych jest pozorna; *przyp. wyd.*).

---

# XVI. ÜBER DIE ATMOSPHÄRE DER ERDE UND DER PLANETEN [1]).

(Physikalische Zeitschrift, 2. Jahrgang, Nr. 20, 1900; pp. 307—313).

Über die Zustände in den höheren Atmosphärenschichten, namentlich auch über die Frage, ob die Gashülle der Erde begrenzt ist, und ob auf anderen Himmelskörpern eine Atmosphäre vorhanden ist, herrschen noch so verworrene Ansichten, daß es wünschenswert scheint zu untersuchen, inwieweit man durch rein theoretische Erwägungen zu einer kritischen Sichtung der diesbezüglichen Hypothesen gelangen kann. Solche Betrachtungen, nicht aber eine Zusammenstellung der bisherigen experimentellen Ergebnisse (siehe diesbezügl. z. B. Günther Geophysik) bilden den Zweck dieser Zeilen.

Wäre die Erdatmosphäre ein ruhendes Gas von gleichförmiger Temperatur, so wäre der Druck in der Entfernung $r$ vom Mittelpunkte gegeben durch die Formel

$$p = p_0 \, e^{-\frac{ga}{R\theta_0}\left(1-\frac{a}{r}\right)}$$

wo $a$ den Erdradius, $R$ die Gaskonstante bedeutet. Daraus würde sogar für unendliche Entfernung eine endliche Dichte folgen, nämlich $\rho = \rho_0 \cdot 10^{-356}$, und die Gesamtmasse wäre natürlich unendlich (Mascart C. R. 114).

Nach Melanderhjelm und Laplace soll jedoch die Zentrifugalkraft der Erdrotation eine Begrenzung der Gasmasse bewir-

[1]) Auszug aus einer Abhandlung gleichen Titels, erschienen in dem anläßlich der 500-jährigen Gründungsfeier der Krakauer Universität von der Lemberger Universität herausgegebenen Jubiläumswerke.

ken; dort wo dieselbe der Schwerkraft das Gleichgewicht hält, wäre die Grenzfläche zu suchen. Verlangt man nun Gleichheit der Kräfte für die Richtung der Zentrifugalkraft, so erhält man als Grenzfläche eine Kugel mit einem Radius $r = \sqrt[3]{\frac{ga^2}{\omega^2}} = 42.000$ km, dagegen eine Fläche $r^3 = \frac{ga^2}{\omega^2 \cos^2 \varphi}$, wenn man die Gleichgewichtsbedingung für die Richtung der Schwerkraft aufstellt. In beiden Fällen verbleiben natürlich unkompensierte Komponenten.

Darin, daß diese Komponenten sowie die Druckkräfte, welche in dem Gase bestehen müssen, nicht berücksichtigt werden, liegt offenbar der prinzipielle Fehler dieser Berechnungen.

Man muß also nach Neumann die Gleichung der Hydrostatik $\int \frac{dp}{\rho} = U$ zu Hilfe nehmen und darin das Potential der Zentrifugalkraft und der Gravitation einführen, wodurch man erhält:

$$p = p_0 \, e^{-\frac{1}{R\theta}\left[ga\left(1-\frac{a}{r}\right) - \frac{\omega^2 r^2 \cos^2 \varphi}{2}\right]}$$

Die Niveauflächen bilden drei Systeme; für kleine $r$ sind sie annähernd ellipsoidisch bis zur Fläche kleinsten Druckes mit dem früher erwähnten Aquatorial-Radius $r_0 = \sqrt[3]{\frac{ga^2}{\omega^2}}$ und einem Polarradius $r = \frac{2}{3} r_0 = 28.000$ km. Für größere $r$ entstehen zwei, ins Unendliche reichende Systeme, von denen das eine (in Richtung des Aquators gelegene) jedoch wieder wachsenden Drucken entspricht. Man müßte also jene Fläche als Grenzfläche ansehen, da man nicht annehmen kann, daß die ganze Weltatmosphäre mit der Erde mitrotiert.

Auerbach (Winkelm. Handb. I, p. 527) bestreitet überhaupt die Berechtigung der Annahme, daß die Atmosphäre als Ganzes mitrotiert, da nach obiger Formel für $r = a$ am Aquator ein viermal so großer Druck sich ergibt als am Pole, was mit der Erfahrung in Widerspruch steht.

Dieser Einwand ist aber ungerechtfertigt, da wir ja am Aquator den Druck nicht in der Entfernung $a$, sondern in einer um 21 km größeren (wegen der Erd-Abplattung) messen. Überhaupt ist ein



derartiger Widerspruch nicht möglich, da ja den hydrostatischen Gleichungen zufolge die Grenzfläche zweier Flüssigkeiten (Wasser und Luft) eine Fläche konstanten Druckes sein muß.

Dagegen muß man gegen jene Berechnung zwei Einwände anderer Art erheben:

1. Auch in jener Grenzfläche ist der Druck noch nicht Null, sondern $p = 10^{-175} p_0$. Auch dies müßte durch den Gegendruck einer äußeren ruhenden „Himmelsatmosphäre" äquilibriert werden, dann käme jedoch infolge innerer Reibung ein Geschwindigkeitsgefälle zustande, welches die ganze Rechnung hinfällig macht.

2. Es wurde die Ungleichförmigkeit der Temperatur nicht berücksichtigt, welche auf die Druckverteilung einen viel größeren Einfluß ausübt, als die Zentrifugalkraft.

Auf die Wichtigkeit dieses letzteren Faktors wurde schon 1819 von G. Schmidt (Gilberts Ann. 62) hingewiesen; die in jener Arbeit durchgeführte Berechnung der „Höhe der Atmosphäre" zu 6·6 bis 27·5 g. M., welche auf unbegründeter Extrapolation einer empirischen Temperaturformel beruht, ist jedoch wertlos.

Die erste rationelle Theorie dieser Art, die bekannte Theorie des „konvektiven", „indifferenten" oder „adiabatischen" Gleichgewichtes, verdanken wir Lord Kelvin. Kelvin nimmt an, daß Wärmeleitung und Strahlung in Anbetracht der Geschwindigkeit der atmosphärischen Zirkulation von so geringem Einfluß sind, daß im wesentlichen die Formel für adiabatische Zustandsänderungen $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$ zutreffen wird, mit Hilfe deren die hydrostatischen Gleichungen ergeben:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \frac{k-1}{k} \frac{ga}{R\theta_0}\left[1 - \frac{a}{r}\right]$$

für kleine Erhebungen $x = r - a$ annähernd:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \frac{k-1}{k} \frac{gx}{R\theta_0}$$

Nun wäre gemäß dieser Formel schon in einer Höhe von 29 km der absolute Nullpunkt der Temperatur erreicht (unter Voraussetzung $\theta_0 = 10^0$ C). Da aber die Temperatur überhaupt nicht negativ werden kann, so müßten also die Anhänger der „begrenzten Atmosphäre"-Theorie in dieser Höhe die Grenze der Atmo-

sphäre annehmen, obwohl allerdings Kelvin selber sagt: „Es schien mir immer höchst unwahrscheinlich, daß überhaupt eine Grenze der Atmosphäre existiert, und gewiß kann sie nicht in so geringer Höhe liegen“. (Math. Phys. Papers III, p. 256).

Kelvin selbst weist auf den Einfluß der Strahlung und der Abweichungen vom Boyle-Charles'schen Gesetz hin, welche das obige Resultat modifizieren müßten. In der Tat ist es ja wohl unzweifelhaft nachgewiesen, daß unsere Atmosphäre noch in Höhen von mehr als 200 km hinreichend dicht ist, um Meteore erglühen zu machen; daß aber Kelvins Erklärung nicht in jeder Beziehung ausreichend ist, werden wir weiter unten nachweisen.

Bekanntlich widerspricht die Formel auch in Bezug auf die Größe des Temperaturgradienten $\frac{d\theta}{dx}$, der sich zu 1° pro 100 m ergibt, den zahlreichen auf Bergen und bei Ballonfahrten gemachten Erfahrungen, welche für die unteren Atmosphärenschichten im Mittel za. 0·59° pro 100 m ergeben haben.

Dies wird von Kelvin, in Ausführung eines Gedankens von Joule, durch den Einfluß der Kondensationswärme des Wasserdampfes erklärt, infolge deren die bei der Ausdehnung der Luft erfolgende Abkühlung vermindert wird. So müßte ein mit Dampf gesättigter aufsteigender Luftstrom z. B. bei Temperatur $\theta = 0°$, einen Temperaturgradienten $\frac{d\theta}{dx} = 0{\cdot}66°$, bei $\theta = 10°$, $\frac{d\theta}{dx} = 0{\cdot}54°$ aufweisen. Gegen die Allgemeingültigkeit dieser Erklärung erheben sich jedoch manche Bedenken. So setzt sie voraus, daß Kondensation tatsächlich eintritt, kann sich also auf wolkenfreie Schichten der Atmosphäre nicht beziehen; in antizyklonalen Gebieten kann sie schon gar nicht zutreffen, während auch dort ein ähnlicher Temperaturgradient gefunden wird und überhaupt ergibt sich der beobachtete Temperaturgradient immer noch erheblich kleiner, als die berechneten Werte.

Als Beispiel möchte ich einige, dem jüngst erschienenen Schriftchen Bezolds: „Theoretische Betrachtungen über die Ergebnisse der wissenschaftlichen Luftfahrten“ entnommene Zahlen anführen, welche Mittelwerte aus den zahlreichen in Assmanns und Bersons Werke: „Wissenschaftliche Luftfahrten“ gesammelten Beobachtungsdaten bilden, nebst den für einen feuchten, aufsteigenden Luftstrom (von der Anfangstemperatur 10°) geltenden theoretischen



Werten, welche ich nach Kelvins Methode beiläufig berechnet habe.

Temperaturgradient (Mittelpunkttemperatur am Erdboden $\theta_0 = 10{\cdot}3°$):

| Höhenschichte | 0—1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 | 7000 | 8000 | 9000 | 10000 m. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mittel . . . | 0·49 | 0·50 | 0·54 | 0·53 | 0·64 | 0·69 | 0·68 | 0·72 | 0·80 | 0·80 |
| Zyklonal . . | 0·59 | 0·59 | 0·55 | 0·50 | 0·75 | | | | | |
| Antizyklonal | 0·36 | 0·46 | 0·51 | 0·48 | 0·55 | | | | | |
| Berechnet nach Kelvin . . | 0·58 | 0·62 | 0·70 | 0·76 | 0·87 | | | | | |

Der Einfluß der Kondensationswärme wird bei wachsender Höhe, also abnehmender Temperatur, wegen der raschen Abnahme des Dampfgehaltes immer kleiner, und es sollte sich der Gradient dem Werte 1° für trockene Luft nähern; dies findet auch tatsächlich statt — wodurch die früheren Beobachtungen von Glaisher, die Formeln von Mendelejeff etc. als unrichtig erwiesen sind, — aber in viel geringerem Maße, als theoretisch zu erwarten wäre.

Es scheint nach alledem, daß bei dieser Erscheinung doch auch noch andere Faktoren, also vor allem die Strahlung, in erheblichem Maße mitspielen; dabei wäre nicht nur die Absorption der Sonnenstrahlung in der freien Atmosphäre, am Erdboden und in den Wolken, sondern auch der gegenseitige Wärmeaustausch der verschiedenen Atmosphärenschichten und die Ausstrahlung in den Weltraum zu berücksichtigen.

So erklärt Bezold (loc. cit.) den geringen Wert des Temperaturgefälles über dem Erdboden durch die zeitweise überwiegende Ausstrahlung des Erdbodens, infolge deren häufig sogar eine „Temperaturumkehr“ eintritt, während die entsprechende Erwärmung der unteren Schichten durch Bestrahlung des Erdbodens keine analoge Verminderung des Temperaturgradienten hervorrufen kann, da der Zustand labil wird, sobald letzterer den Wert 1° (pro 100 m) übersteigt. [Für größere Höhen ist aber diese Erklärung wohl nicht ausreichend. (Zusatz d. Verf.)].

Es drängt sich nun die Frage auf, inwiefern diese beiden Faktoren, die Kondensationswärme des Wasserdampfes und die Strahlung, auch das früher erwähnte merkwürdige Resultat, daß eine

Begrenzung der Atmosphäre und zwar bereits in sehr geringer Höhe stattfinden muß, zu modifizieren vermögen.

Diesbezüglich wurde schon von Ritter (siehe weiter unten) nachgewiesen, daß der Wasserdampfgehalt der Luft nur eine relativ geringe Erhöhung der betreffenden Grenzschichte bewirken kann, da sein Einfluß nur in den untersten warmen Schichten zur Geltung kommt.

Um über den Einfluß des zweiten Faktors eine Vorstellung zu gewinnen, habe ich ein Beispiel berechnet, in welchem derselbe im Vergleich mit der Wirklichkeit noch bedeutend übertrieben ist, nämlich die Temperaturverteilung in einem (mit der Geschwindigkeit $u_0$ im Niveau $x = 0$) aufsteigenden Luftstrom, welcher pro cm³ die Sonnenwärme (in mechanischem Maße) $S\rho = J\alpha s\rho$ absorbiert [$\alpha$ = Absorptionskoëffizient, von der Größenordnung $\alpha = 0{\cdot}00033$, $s$ = Sonnenstrahlung = za. 0·05], wobei also die Abkühlung infolge Ausstrahlung gar nicht berücksichtigt wird. Die Integration der betreffenden Differentialgleichung ergibt als „kritische Höhe" (für $\theta = 0$):

$$x = \frac{k}{k-1}\,\frac{\theta_0 R}{g}\left[1 + \frac{k-1}{k}\,\frac{S}{u_0 g}\right]$$

Also würde die Strahlung bei Einsetzung plausibler Werte für $u_0$ nur eine geringe Erhöhung bewirken $\left(\text{z. B. za. } 5\,\%\ \text{für } u_0 = 10\,\frac{cm}{sek}\right)$, jedenfalls aber das Resultat, daß es eine Grenze gibt, nicht ändern.

Es bleibt also noch zu untersuchen, inwieweit die Abweichung der Luft vom idealen Gaszustande diese Verhältnisse ändern wird.

Diesbezüglich hat Ritter eine beachtenswerte Theorie entwickelt, indem er berücksichtigte, daß ein aufsteigender Luftstrom unter Voraussetzung des rein adiabatischen Zustandes wegen sukzessiver Abkühlung in genügender Höhe den Verflüssigungspunkt der Luft erreichen muß, so daß von dort an eine Verminderung des Temperaturgefälles eintritt, ähnlich, aber in höherem Maße, wie in mit Wasserdampf gesättigter Luft.

Ritter berechnete die Höhe einer solchen Atmosphäre, da die betreffenden Daten für Luft fehlten, unter Annahme der auf Wasserdampf bezüglichen Zahlen zu 349 km. Abgesehen von der hier-



durch entstehenden Unsicherheit [1]), ist gegen die Berechnung einzuwenden, daß sie ein Mitführen der kondensierten Flüssigkeitströpfchen voraussetzt, was bei den höheren Kondensationsgraden offenbar nicht möglich ist. Auch müßte der ganze Himmel mit „Luftwolken" bedeckt erscheinen, was tatsächlich nicht stattfindet. Auf diesen Punkt werden wir übrigens später noch zu sprechen kommen. Vorderhand müssen wir festhalten, daß die Berücksichtigung der Kondensationserscheinungen zwar die Grenze der Atmosphäre hinausschiebt, aber die Folgerung, daß es eine solche Grenze gibt, nicht zu beseitigen vermag.

Demgegenüber ist zu bemerken, daß einfache, auf die kinetische Gastheorie gestützte Erwägungen zu einem ganz entgegengesetzten Resultate führen. Sobald ein Molekül eine größere Geschwindigkeit erlangt, als $V = \sqrt{2ga}$, d. i. za. 11 km/sek., muß es auf hyperbolischer Bahn sich von der Erde in den Weltraum hinaus entfernen (falls es nicht vorher mit einem anderen Molekül zusammenstößt!).

Da nun im Gase alle möglichen Geschwindigkeiten vertreten sind, wird die Erdatmosphäre fortwährend solche Teilchen verlieren; dieselben werden sich außerhalb der Sphäre der Erdanziehung bewegen, dort mitunter kollidieren, eventuell wieder auf die Erde zurückfallen etc., kurz ein Medium bilden, welches denselben Gascharakter hat wie die Erdatmosphäre. So führt uns, wie schon M. P. Rudzki (Zapiski mat. obszcz. Odessa 15 (1893), p. 71) hervorhebt, die kinetische Gastheorie zu dem Resultate, daß die Atmosphäre unbegrenzt ist. Es können kolossale Dichtigkeits- und Temperaturunterschiede bestehen, aber überall muß es Gas von einer endlichen Dichtigkeit geben, und fortwährend muß ein allseitiger Austausch der Moleküle vor sich gehen. (Auf die diesbezüglichen Untersuchungen Stoneys werden wir am Schlusse noch zu sprechen kommen).

Nun kann aber die kinetische Gastheorie in diesen Dingen unmöglich mit den allgemeinen hydromechanischen und thermodynamischen Gleichungen in Widerspruch stehen, da letztere aus ihr

[1]) In Wasserdampf würde die Kondensation vom 0 Punkte an beginnen; in Luft tritt sie (nach Olszewski) z. B. bei 4 mm Druck erst bei — 211° ein.

abgeleitet werden können. Somit müssen wir bei den früheren Überlegungen einen ausschlaggebenden Faktor außer acht gelassen haben.

In dem Mechanismus der Gastheorie sind nun implizite schon zwei Erscheinungen enthalten, welche wir bisher nicht berücksichtigt haben: die Wärmeleitung und die innere Reibung. Wäre die Atmosphäre in Ruhe, so wäre auch nach der kinetischen Gastheorie der isotherme Zustand der einzig mögliche Gleichgewichtszustand [1]) – die so sehr verbreitete Meinung, daß die Gastheorie in diesem Falle das der adiabatischen Gleichung entsprechende Temperaturgefälle liefere [2]), beruht auf Fehlschlüssen. In Anbetracht der tatsächlich stattfindenden Zirkulation ist jedoch die Wärmeleitung ganz zu vernachlässigen, und wir würden jenen „adiabatischen" Zustand erhalten, — wenn nicht überdies die innere Reibung vorhanden wäre.

Bezüglich der inneren Reibung scheint die Ansicht zu herrschen, daß man ihren Einfluß bei derartigen Fragen der atmosphärischen Zirkulation vernachlässigen kann, seitdem Helmholtz gezeigt hat, wie außerordentlich geringfügig der Reibungswiderstand ist, welchen die Atmosphärenschichten bei ihrer horizontalen Bewegung erfahren.

Hier jedoch verhält sich die Sache ganz anders, es kommt nicht die Reibung paralleler Schichten bei tangentialer Bewegungs-Richtung in Betracht, sondern bei normaler Richtung der Strömung, nebst der mit Volumänderung verbundenen Reibung.

Um sich über diese Verhältnisse klar zu werden, muß man auf die Grundformeln reibender Flüssigkeiten zurückgreifen, welche hier jedoch eine etwas kompliziertere Gestalt annehmen, da man auch den Reibungskoëffizienten $\mu$ als veränderlich betrachten muß. Außerdem ist die „Temperaturgleichung" zu modifizieren durch Berücksichtigung des wärmenden Einflusses der Reibung, welcher durch die „Dissipationsfunktion" (siehe z. B. Lamb, Hydrodynamics p. 518) bestimmt wird.

So erhält man [wenn $\mu$ proportional der Temperatur gesetzt wird, $\mu = \gamma\theta$] [3]) für die stationäre vertikale Bewegung einer Luftsäule (bei Vernachlässigung der kinetischen Energie) die Bewegungsgleichung:

$$g = -R\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta R}{u}\frac{du}{dx} + \frac{4}{3}\frac{\gamma}{b}u\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{du}{dx}\right]$$

und die Temperaturgleichung:

$$\frac{A}{c}\frac{d\theta}{dx} + \frac{R\theta}{u}\frac{du}{dx} = \frac{4}{3}\frac{\gamma}{b}\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

wobei $b$ das Produkt aus Dichte und Geschwindigkeit bedeutet $b = \rho u$, welches wegen der Kontinuitätsgleichung konstant sein muß. Die obere Gleichung kann man nach Addition der unteren einmal integrieren; die vollständige Integration des Gleichungssystems stößt aber auf Schwierigkeiten.

Doch kann man durch Diskussion desselben schon eine Vorstellung über den qualitativen Charakter der Erscheinung erhalten. Anschaulicher wird dies illustriert durch folgende hypothetische Aufgabe: Es gehe in vertikaler Richtung eine stationäre Strömung der Luft vor sich, und zwar ohne innere Reibung (mit der Geschwindigkeit $u_0$ im Niveau $x = 0$), so daß sich die Kelvin'sche adiabatische Temperaturverteilung herstellt.

Nun beginne plötzlich die gewöhnliche innere Reibung zu wirken. Ihr Einfluß wird sich in der Verzögerung der Bewegung

$$-\frac{du}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{\gamma}{b}u'\frac{d}{dx}\left(\theta'\frac{du'}{dx}\right)$$

und in der (pro gr. Luft auf dem Wege 1 cm) in Wärme umgesetzten Bewegungsenergie

$$Q = \frac{4}{3}\frac{\gamma}{b}\theta'\left(\frac{du'}{dx}\right)^2$$

zeigen, welche unter obiger Annahme identisch werden, nämlich

$$= \frac{4}{3}\mu_0 k^2 g^2 \frac{u_0\rho_0}{p_0^2}\left(\frac{\theta_0}{\theta'}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Ein Luftteilchen wird somit auf dem Wege 1 cm seine Temperatur ändern gemäß der Gleichung

$$\frac{D\theta}{Dx} = \frac{A}{c}\left[Q - \frac{p}{u\rho}\frac{du}{dx}\right].$$

[1]) Siehe z. B. Boltzmann, Gastheorie I, 134.

[2]) Siehe z. B. Möller, Met. Ztschr. 10, 298 (1893).

[3]) In Wirklichkeit ist $\mu$ einer Potenz der Temperatur proportional, welche bei den schweren Gasen 1, bei den leichten za. $^2/_3$ beträgt.

In der nachfolgenden Tabelle habe ich für einige Anfangsgeschwindigkeiten $u_0$ die Werte $\frac{du}{dt}$ und $\frac{D\theta}{Dx}$ (in Graden pro 100 m) in verschiedenen Höhen zusammengestellt, wobei statt der Höhe $x$ die — proportional mit der Höhe bis 0 abnehmende — absolute Temperatur $\theta$ angegeben ist.

I. $-\frac{du}{dt} =$

| $\theta_0 =$ | $23^0$ | $3^0$ | $2^0$ | $1^0$ (abs.) |
|---|---|---|---|---|
| $u_0 = 1$ | $1{\cdot}7 \,.\, 10^{-6}$ | 0·35 | 5·0 | 253 |
| $u_0 = 10$ | $1{\cdot}7 \,.\, 10^{-5}$ | 3·5 | 50 | 2530 |
| $u_0 = 100$ | $1{\cdot}7 \,.\, 10^{-4}$ | 35 | 500 | 25300 |
| $u_0 = 500$ | $8{\cdot}5 \,.\, 10^{-3}$ | 175 | 2500 | 126500 |

II. $\frac{D\theta}{Dx} =$

| $\theta_0 =$ | $23^0$ | $3^0$ | $2^0$ | $1^0$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_0 = 1$ | — 1·01 | — 1·01 | — 1·00 | — 0·65 |
| $u_0 = 10$ | — 1·01 | — 1·00 | — 0·94 | + 2·65 |
| $u_0 = 100$ | — 1·01 | — 0·96 | 0·29 | + 35·6 |
| $u_0 = 500$ | — 1·01 | — 0·76 | + 2·61 | + 182·2 |

Während also die Hemmung z. B. an der Erdoberfläche nur $\frac{du}{dt} = -0{\cdot}61 \,.\, 10^{-13}\, u$ beträgt, so würde sie in den höchsten Schichten so enorme Werte erreichen, wie die Tabelle I zeigt. Als Vergleich führe ich Helmholtz's Resultat, betreffs der Hemmung horizontaler Luftbewegung an, wonach die innere Reibung die Bewegungsgeschwindigkeit der oberen Luftschichten in 42,747 Jahren auf die Hälfte vermindern würde, was einem Werte

$$\frac{du}{dt} = -0{\cdot}75 \,.\, 10^{-13}\, u$$

entspricht.



Die zweite Tabelle führt uns den erwärmenden Einfluß der Reibung vor Augen, welcher nicht nur eine Abkühlung bis zum Nullpunkt verhindert, sondern sogar das Zeichen von $\frac{D\theta}{Dx}$ ändert.

Natürlich gilt dies alles nur für den ersten Moment, aber das Beispiel illustriert doch anschaulich den in gewisser Höhe enorm zunehmenden hemmenden (in Bezug auf vertikale Strömungen) und erwärmenden Einfluß der inneren Reibung, welcher darin begründet ist, daß der Koëffizient derselben vom Gasdrucke unabhängig ist.

Die nach der adiabatischen Theorie berechnete „Höhe" der Atmosphäre gibt uns also nur ein ungefähres Maß der Schichte (za. 30 km), innerhalb welcher die ungestörte atmosphärische Zirkulation stattfindet, wo man also von innerer Reibung absehen kann.

In höheren Schichten verliert jene Theorie die Berechtigung; die Abkühlung eines aufsteigenden Luftstromes kann infolge der Reibung nicht bis zum absoluten Nullpunkt fortschreiten.

In Wirklichkeit ist auch noch zu berücksichtigen, daß eben wegen der Hemmung der Strömungen auch der Einfluß der Strahlungsabsorption, ja auch der Wärmeleitung erhöht werden wird.

Durch die Temperaturverhältnisse wird also keine „Begrenzung" der Atmosphäre bewirkt und ebensowenig durch die Zentrifugalkraft; letztere wird überhaupt nur eine geringe Druckänderung bewirken, da die äußeren Schichten mit nach oben abnehmender Geschwindigkeit an der Erdrotation teilnehmen werden. Mit einiger Annäherung kann man hierauf die Formel anwenden, welche für die analoge Flüssigkeitsbewegung gilt: $\omega = \omega_0 \frac{a^3}{r^2}$ (vergl. Lamb, p. 525). Es ergibt sich, daß erst in der Höhe von $6^1/_2$ km eine Horizontalgeschwindigkeit von 1 m/sek auftreten würde, in Wirklichkeit noch weit weniger wegen der Veränderlichkeit von $\mu$, so daß die unteren Atmosphärenschichten vollständig an der Erdrotation teilnehmen, und erst in sehr großen Höhen sich der von $W$ nach $E$ gerichtete Strom bemerkbar machen kann. Die Hemmung der Erdrotation [Moment $= 8\pi\mu a^2\omega_0$ (loc. cit.)] würde das Jahr um den $10^{-17}$ Teil einer Sekunde verlängern, also nur um eine unmeßbar kleine Größe. Ebenso bleibt die Druckdifferenz an der Vorder- und Rückseite (Morgen und Abend) der Erde weit unter der Grenze der Meßbarkeit mittels physikalischer oder astronomi-

scher Methoden (loc. cit.). So kann auch von dieser Seite aus kein Einwand gegen das Resultat erhoben werden, daß sich die Atmosphäre in die ungemessene Ferne des Weltraumes erstreckt. Ihre Dichte wird zwar schon in der Entfernung von einem Erdradius ganz außerordentlich gering sein [1]), aber die Unterschiede zwischen jener „Himmelsluft" und unserer Atmosphäre können nur quantitative sein. An eine numerische Berechnung der Druck- und Temperaturverhältnisse in jenen oberen Regionen ist allerdings vorderhand noch nicht zu denken; denn, abgesehen von den mathematischen Schwierigkeiten, würde sie eine genaue Kenntnis der gesamten atmosphärischen Zirkulation (vergl. den Einfluß von $u_0$ in der Tabelle), der Absorptionsverhältnisse der Luft bei tiefen Temperaturen etc. voraussetzen, da sich das Problem nicht als statisches, sondern als ein wesentlich dynamisches darstellt.

Es scheint daher auch schwer zu entscheiden, ob der Verflüssigungspunkt der Luft erreicht wird; wäre der Zustand rein adiabatisch, so wäre dies unvermeidlich; in Wirklichkeit aber hängt es von dem noch ungewissen Verhältnisse zwischen Druckgefälle und Temperaturgefälle in großen Höhen ab, ob die Dampfdruckkurve der Luft geschnitten wird.

Es drängt sich der Gedanke auf, daß vielleicht die hie und da beobachteten „leuchtenden Nachtwolken" durch solche Kondensation der Luft erklärt werden könnten; denn wenn wir den Berechnungen ihrer Höhe zu über 100 km Glauben schenken, können wir schwerlich annehmen, daß sie aus Wasser resp. Eis bestehen können [2]).

Als Gegengrund gegen die Annahme einer Himmelsatmosphäre wird oft die Abwesenheit (richtiger Nichtnachweisbarkeit!) einer Mondatmosphäre angeführt. Wendet man aber die Gleichungen der Aërostatik auf das aus zwei Kugeln [Massen $m$ und $\mu$, Radien $a$ und $\alpha$] bestehende System, Erde — Mond an, so erhält man für einen isothermen Zustand als Dichte der Mondatmosphäre

$$\rho = \rho_0 \, e^{-\frac{ga}{R\Theta}\left[1 - \frac{\mu a}{m\alpha}\right]} = \rho_0 \, . \, 10^{-340}$$

[1]) Der Druck muß kleiner sein, als die Formel (1) angibt, also im obigen Falle unter $10^{-8}$ mm liegen.

[2]) Ich habe für den Wasserdampfdruck eine Extrapolationsformel in derselben Weise berechnet, wie es Hertz für Quecksilberdampf tat, aus welcher



und für einen adiabatischen Zustand:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\mu a}{m\alpha}\right)^{\frac{1}{k-1}} = 0{\cdot}00045 \, . \, \rho_0$$

und

$$\theta = \theta_0 \left(\frac{\mu a}{m\alpha}\right) = -260{\cdot}5^\circ \text{ C.}$$

Selbstverständlich sind diese Berechnungen in quantitativer Hinsicht wertlos, aber sie zeigen doch, daß man sich eher wundern müßte, wenn auf dem Monde eine Atmosphäre von höherer Größenordnung der Dichte als $\rho = 0{\cdot}003 \, \rho_0$ bestehen würde — und dies ist die von den Astronomen als zulässig bezeichnete Grenze.

Bezüglich verschiedener, vom astronomischen Standpunkte aus für die Existenz eines Gasmediums sprechender Gründe verweise ich im übrigen auf Berberichs Aufsatz (Naturw. Rdsch. XIV. [1899] pp. 365, 377).

Auch bei Erklärung von astronomischen Erscheinungen, wie Nebelflecken, Kometenschweifen etc., mögen jene früher erwähnten, an Stellen, wo die Temperatur- und Dichtezustände die Dampfdruckkurve schneiden, erfolgenden Kondensationsvorgänge vielleicht noch eine Rolle spielen.

Es erübrigt uns noch eine Diskussion der Erscheinungen, welche auf der Zusammengesetztheit der Luft aus verschiedenen Gasen beruhen. Wäre die Atmosphäre in absoluter Ruhe, so würde nach Dalton's Gesetz der Partialdruck jeden Gases der Formel (1) genügen, als ob die anderen Gase nicht vorhanden wären. Wegen der Unterschiede in dem, der Dichte proportionalen Werte der Gaskonstante $R$ würde sich somit die Zusammensetzung der Atmosphäre mit der Höhe ändern, wie dies folgende von Hann berechnete Tabelle ersichtlich macht:

| Höhe $x$ | | 0 | 10000 | 20000 | 40000 m. |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_2$ | Gehalt | 21·00 | 18·35 | 15·92 | 11·51 |
| $N_2$ | Gehalt | 78·96 | 81·63 | 84·07 | 88·46 |

In Wirklichkeit ist es aber noch nicht gelungen, einen Unterschied zu konstatieren; selbst die durch einen Registrierballon in 15000 m Höhe geschöpfte Luft war nach Hergesell fast ganz

sich z. B. schon für — 100° ein Dampfdruck von bloß $3{\cdot}6 \, . \, 10^{-5}$ mm ergibt und in jenen Höhen müßte eine noch weit niedrigere Temperatur herrschen.

normal zusammengesetzt: 78·27 $N_2$, 20·79 $O_2$, 0·94 $A$ [Fortschr. d. Ph. 53 (1897) p. 192], während das normale Verhältnis ist: 78·06 $N_2$, 21·00 $O_2$, 0·94 $A$. Dies ist in der Langsamkeit begründet, mit welcher wie alle Diffusionsvorgänge, so hier die Entmischung der Luft vor sich geht. Ich habe (in der Orig.-Abhandlg.) aus der Maxwell-Boltzmann'schen Diffusionsgleichung berechnet, daß die relative Geschwindigkeit der Sauerstoff- und Stickstoffströmung, wenn man die ganze Luftmasse gleichmäßig durchmischen und dann sich selbst überlassen würde, am Meeresniveau nur $3.10^{-8}$ cm/sek betragen würde. Somit ist es ganz natürlich, daß dieser Entmischungsvorgang durch die, infolge atmosphärischer Strömungen verursachte Mischung vollständig neutralisiert wird. Erst in den oberen Atmosphärenschichten, wo die Vertikalströmungen vermindert sind, dürfte derselbe zur Geltung kommen, und es ist wahrscheinlich, daß in größerer Entfernung von der Erde die leichteren Gase $He$, $H_2$ überwiegen. Experimentell ließe sich übrigens vielleicht eher ein Unterschied im Gehalte von $A = 40$, $Ne = 80$, $Xe = 128$ und $He = 4$ nachweisen, als in dem, störenden Einflüssen unterliegenden, Verhältnisse der an Dichte wenig verschiedenen $O_2$ und $N_2$. Auch sollten in zyklonalen Gebieten die schwereren Bestandteile vorherrschen, in antizyklonalen die leichteren; der Unterschied würde auf die Ausdehnung des Zyklons schließen lassen.

In Anbetracht dieser dürftigen Ergebnisse der Theorie und der negativen Ergebnisse der Praxis erschien es nun höchst überraschend, daß es J. Stoney gelungen sein sollte, bloß auf Grund der Kenntnis von Masse und Größe der Planeten die Zusammensetzung der Gashülle derselben zu berechnen. Da ich in der Tat seine in der Arbeit „On Atmospheres of Planets and Satellites" (Trans. Roy. Dublin Soc. VI [1898] p. 305) dargelegten Erwägungen, welche seinerzeit ziemliches Aufsehen erregten, für verfehlt halte, möchte ich daher diesbezüglich noch einige Worte anschließen.

Stoney stützt sich auf das Resultat, daß Moleküle, deren Geschwindigkeit $\sqrt{2ga}$ übersteigt, von der Erde „verloren" werden. Indem er die Höhe der Atmosphäre zu 200 km und deren Temperatur in der Grenzschicht (?) zu — 66° C. (!) annimmt, berechnet er das Verhältnis der mittleren Molekulargeschwindigkeiten verschiedener Gase zu jener kritischen Geschwindigkeit. Dann schließt er: Die Erfahrung lehrt, daß unsere Erde $He$ und $H_2$ verloren hat, denn diese Gase sind in der Atmosphäre nicht enthalten, obwohl sie durch Quellen und unterseeische Vulkane (?) ausgeschieden werden, daß dagegen $O_2$ und $N_2$ erhalten bleiben; also wird ein Gas verloren, wenn seine Molekulargeschwindigkeit größer als $\frac{1}{9}$ der kritischen ist (wie hier bei $H_2$ und $He$); dagegen bleibt der Verlust unmerklich, wenn sie bloß $\frac{1}{20}$ beträgt (wie bei $N_2$ und $O_2$). Und diese Regel wird dann auf die Planeten angewendet und so gewissermaßen „a priori" die Zusammensetzung ihrer Atmosphäre berechnet.



Vor allem muß man gegen die undenkbaren Annahmen bezüglich der „Grenze" der Atmosphäre protestieren, sodann gegen die über das Vorkommen von $H_2$ und $He$ gemachten Voraussetzungen. Warum ist der Gehalt an $Xe$ und $Ne$ so gering, wenn nur die Molekulargeschwindigkeit, also die Dichte des Gases, in Betracht kommt?

Aber ein prinzipieller Einwand ist überhaupt gegen die Art zu erheben, in welcher die Gastheorie verwendet wird. Es werden nur die abgeworfenen Teilchen berücksichtigt, nicht aber jene, welche von außen in die Anziehungssphäre der Erde gelangen; auch jene „verlorenen" Teilchen können untereinander oder mit den, noch in elliptischen Bahnen sich bewegenden Teilchen zusammenstoßen und wieder zurückgelangen etc. Was soll dann überhaupt den Unterschied der Erdatmosphäre und des äußeren Mediums ausmachen? Wollte man dies alles in Rechnung ziehen (mit der üblichen Annäherung), so käme man zu den gewöhnlichen Gleichungen der Aërostatik und zu dem leicht abzuleitenden Resultat, daß eben dort, wo geringerer Druck herrscht, das ist an der Oberfläche der kleineren Planeten (und Monde), die leichteren Gase vorherrschen werden, nicht, wie Stoney meint, die schwereren.

Die eigentlichen Schwierigkeiten treten aber erst dann auf, wenn man den Einfluß der Konvektionsströme, Temperaturverhältnisse etc. berücksichtigt, welche in erster Linie für die Diffusionsvorgänge maßgebend sind, und welche Stoney nicht in Betracht zieht; solange wir hierüber nicht genauere Kenntnisse besitzen, sind derlei Spekulationen aussichtslos. Allerdings wird man bei Anwendung der aëromechanischen Gleichungen auf den Weltraum im allgemeinen noch gewisse Korrekturen an diesen Gleichungen einzuführen haben, die darin begründet sind, daß man in Anbe-

tracht der enormen Verdünnung also der sehr großen Weglänge $\lambda$ der Moleküle die Änderungen im Zustande des Gases im Bereiche von $\lambda$ nicht mehr als linear annehmen darf, sondern höhere Glieder der Entwickelung berücksichtigen muß. Es scheint mir dies jedoch der einzige rationelle Weg zu sein, auf welchem man hoffen kann, einst auch zu genaueren quantitativen Ergebnissen zu gelangen.

---

# XVII. O NOWSZYCH POSTĘPACH NA POLU KINETYCZNYCH TEORYJ MATERJI [1]).

(Prace matematyczno-fizyczne t. XII, 1900; str. 112—135).

Teorja kinetyczna materji, usiłująca objąć zjawiska materjalne ogólnym mechanicznym na świat poglądem, nie może mieć pretensji do prawdziwości bezwzględnej, tak samo, jak wszystkie inne teorje fizyczne. Jak teorja energetyczna i teorja elektryczna (dzisiaj jeszcze bardzo nierozwinięta), a może jeszcze inne teorje, które w przyszłości powstaną, może być ona tylko „obrazem“ ujawniających się nam zjawisk; obrazem, którego zaleta, wobec zbioru faktów pojedynczych, polega na tem, iż: 1) obejmuje je w całość systematyczną, zbudowaną na, ile możności, najmniejszej liczbie założeń; 2) doprowadza nas na drodze dedukcji teoretycznej do odkrycia zjawisk, przedtem nieznanych.

Pomimo, że z jednej strony nie zdołano dotąd żadnej wykazać sprzeczności założeń podstawowych i wysnutych z nich wniosków z faktami doświadczalnemi a z drugiej — teorja nie przestała być płodną, przyznać trzeba, że po nadzwyczajnym rozkwicie za czasów Maxwella, w nowszych czasach znacznie straciła ona na uznaniu. Przyczyną tego jest w części powstanie i rozwijanie się innych teoryj, wyrażających odmienny pogląd na świat zjawisk, w znacznej jednak mierze nadzwyczajna trudność matematyczna i zawiłość logiczna rozważań, mających na celu dalsze doskonalenie teorji, wskutek czego już tylko mała liczba specjalistów jest au courant nowszych postępów tej nauki.

[1]) Referat, wygłoszony na Zjeździe lekarzy i przyrodników polskich w Krakowie w r. 1900.