

dzanego nie zależy wcale od grubości warstwy gazu, ale od jego gęstości. Jeżeli więc ciała stałe o różnej temperaturze zbliżamy ku sobie, to ilość ciepła przewodzonego nie może przekroczyć pewnej granicy, t. j. nie może być większa od ilości, którą według zwykłej teorii (przy normalnem k) przewodzi gaz między ciałami znajdującymi się w odległości:

$$\Delta = 2\lambda \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} = 2\lambda \cdot \frac{1 + \eta}{1 - \eta}.$$

Rzecz szczególna, że wtedy powietrze i wodór mają prawie to samo przewodnictwo, jak to można wyrachować z wartości podanych powyżej dla γ .

Te ostatnie zjawiska nie zostały jeszcze zbadane doświadczalnie. Badania takie przedstawiałyby zapewne dość znaczne trudności. Jeżeli one potwierdzą powyższą teorię, będziemy mieli nowy dowód prawdziwości teorii kinetycznej gazów.

XIII. WEITERE STUDIEN ÜBER DEN TEMPERATURSPRUNG BEI WÄRMELEITUNG IN GASEN.

(Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CVIII. Abt. II a, 1899; pp. 5—23).

I. Versuche bei stationärer Wärmeleitung.

Die Methode, welche ich früher ¹⁾ zur Konstatierung und Messung des Temperatursprunges, welcher bei der Wärmeleitung in Gasen an der Oberfläche der festen Körper auftritt, benützt hatte, ist gewissermaßen eine indirekte gewesen, indem dessen Größe aus der beobachteten Verminderung der, zwischen ihnen vor sich gehenden Wärmeströmung berechnet wurde.

Es ist nun der Gedanke naheliegend zu versuchen, ob man nicht auch eine direkte Methode anwenden könnte, indem man bei stationärer Wärmeströmung die Temperatur des Gases in seinen verschiedenen Schichten mißt. Vielleicht wäre dies mittels optischer Methoden zu erreichen (z. B. vermittelt des Einflusses der Temperatur auf den Brechungsindex). Wenn man dagegen feste Körper, die in das Gas eingetaucht sind, als Thermometer (z. B. Thermoelemente) zur Temperaturmessung benützt, so muß man in Betracht ziehen, daß auch an ihrer Oberfläche ein Temperatursprung stattfindet, daher die ursprüngliche Temperaturverteilung modifiziert wird.

Man kann also auch bei dieser Methode den Temperatursprung nicht direkt beobachten, sondern muß ihn aus den gemessenen Größen berechnen, wobei auch noch auf den Einfluß der Strahlung Rücksicht zu nehmen ist.

Es ist dabei aber nicht nötig, den Thermometerkörper zu ver-

¹⁾ Smoluchowski, Wied. Ann. 64, S. 101 (1898).

schieben, um den ganzen Temperaturverlauf kennen zu lernen, was mit ziemlichen Schwierigkeiten verbunden wäre, sondern es genügt, wenn man ihn in einer gewissen Distanz fix befestigt und nun seine Temperatur mißt, einerseits wenn ein Temperatursprung besteht, und andererseits bei normalen Verhältnissen, d. h. wenn er unmerklich klein ist; letzteres ist ja bei höheren Drucken der Fall, da der Koeffizient γ in $\Delta\theta = \gamma \frac{\partial\theta}{\partial z}$ dem Drucke verkehrt proportional ist.

Fig. 1 gibt eine Übersicht dieser Verhältnisse für den Fall, daß

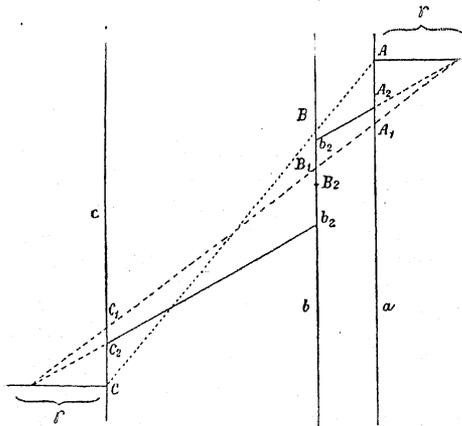


Fig. 1.

die Strahlung zu vernachlässigen ist. AC stellt das lineare Temperaturgefälle für den Fall vor, wo kein Temperatursprung besteht, also z. B. bei höherem Drucke, A_1C_1 für den Fall, wo an den beiden festen Wänden a, c der Temperatursprung AA_1 , respektive CC_1 stattfindet, und die gebrochene Linie $A_2b_2B_2C_2$ für den Fall, wo noch die feste, zur Temperaturmessung dienende Platte b eingeschoben ist. Deren Temperatur wird dann durch den Punkt B_2 bestimmt (wo $AA_2 = b_2B_2 = B_2b_2 = C_2C$), während sie im ersten Falle dem Punkte B entsprechen würde, und aus dieser Differenz B_2B kann der Temperatursprung berechnet werden.

Man könnte diese Methode auch als eine Zusammenfassung der Versuche ansehen, welche ich loc. cit. mittels separater Gefäße verschiedener Dimensionen angestellt habe; denn auch sie stützt sich auf den Umstand, daß der Einfluß des Temperatursprungs bei einem kleinen Zwischenraum viel bedeutender ist als bei einem großen, da derselbe äquivalent ist mit einer Zurückschiebung der festen Wände um die Strecke γ .

Bezeichnen wir das Verhältnis der Temperaturdifferenzen $\frac{\theta_A - \theta_b}{\theta_b - \theta_c}$ mit a für das beste Vakuum, wo also bloß die Strahlung wirksam ist, mit b für normale Drücke, wo Strahlung und gewöhnliche Wärmeleitung besteht, und mit c für ein derart verdünntes Gas, daß auch der Temperatursprung in Betracht kommt, ferner mit σ_1 und σ_2 die Koeffizienten der Strahlung zwischen der mittleren Platte b und der Wand a , respektive c , mit δ_1 und δ_2 die Abstände zwischen b und a , respektive c , und mit d das Verhältnis $d = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, dann gelten für den stationären Zustand folgende Gleichungen:

$$a = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

$$b = \frac{\sigma_1 + \frac{x}{\delta_2}}{\sigma_1 + \frac{x}{\delta_1}}, \quad c = \frac{\sigma_2 + \frac{x}{\delta_2 + 2\gamma}}{\sigma_1 + \frac{x}{\delta_1 + 2\gamma}}$$

Durch Elimination von σ_1, σ_2 und x erhält man hieraus:

$$(1) \quad \frac{2\gamma}{\delta_2} = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B},$$

wobei

$$(2) \quad A = 1 + d \left[1 + \frac{(1-c)(a-b)}{(b-d)(a-c)} \right], \quad B = d \left[-1 + \frac{(c-d)(a-b)}{(b-d)(a-c)} \right].$$

Die Vorteile dieser Methode gegenüber der in jener Abhandlung gebrauchten sind, daß man bei stationärem Wärmestrome arbeitet, somit die Kenntnis von spezifischen Wärmen nicht benötigt, dann daß sie, falls die Strahlung zu vernachlässigen ist, auch dann noch giltig bleibt, wenn x selbst sich ändern würde.

Dagegen zeigten sich bei der praktischen Durchführung große

Schwierigkeiten, welche bewirkten, daß die hier erhaltenen Resultate jenen früheren an Genauigkeit nachstehen.

Trotzdem scheint es mir von Interesse, darauf etwas näher einzugehen, insbesondere da dadurch — wie ich weiter unten aus-

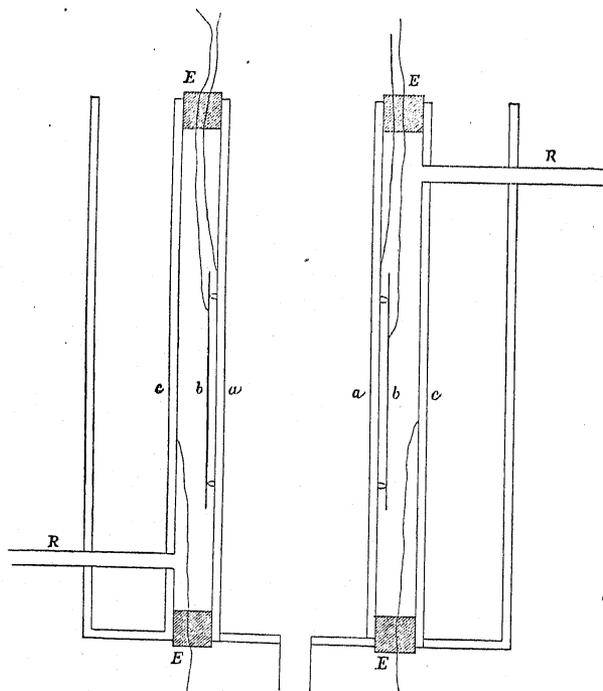


Fig. 2.

führen werde — ein augenscheinlicher Beweis für die Richtigkeit der hier angenommenen Theorie geliefert wird.

Die experimentelle Anordnung war folgende:

Ein zylindrisches Messinggefäß *aa* ist innerhalb eines hohlzylinderförmigen Messinggefäßes *cc* konzentrisch befestigt, indem es darin mittels zweier schwach konischer Ebonitringe *E*, die von

oben und unten fest eingepreßt sind, festgehalten wird. In den so gebildeten Hohlraum wird das zu untersuchende Gas mit Hilfe zweier Röhrenansätze *R* eingefüllt, respektive daraus ausgepumpt (Sprengelpumpe Tuma'scher Konstruktion und Macleod-Manometer).

Das innere Gefäß wird durch den Strom der Wasserleitung gekühlt (zirka 8°), während das äußere mittelst eingefüllten Wassers ungefähr auf Zimmertemperatur (15–18°) erhalten wird. Zwischen den beiden Wänden stellt sich ein sehr angenähert linearer Temperaturabfall her, welcher die Temperatur der eingeschobenen Platte *b* — hier in Form eines dünnen zylindrischen Kupferblechringes in der Art, wie Fig. 1 angibt — bestimmt. Der stationäre Zustand ist wegen der geringen Masse des Ringes *b* in sehr kurzer Zeit hergestellt. In seiner Stellung wird *b* durch ganz kleine, aus der Wand von *a* herausragende Ebonitstifte fixiert; die Temperaturdifferenzen *AB* und *BC* werden mittels sehr dünner, als Thermoelemente dienender Drähte aus Eisen und Neusilber gemessen, welche einerseits an der Außenfläche von *a*, *b* und der Innenfläche *c* angelötet sind, andererseits mit einem Kommutator und einem D'Arsonval-Galvanometer in Verbindung stehen; die Lötstellen, wo sich die kupfernen Leitungsdrähte mit ihnen vereinigen, sind (selbstverständlich von einander isoliert) in einem kleinen massiven Bleigefäß, das mit Petroleum gefüllt ist, untergebracht, so daß hier zwischen ihnen keine Temperaturdifferenzen entstehen können.

Aus den Ausschlägen des Galvanometers — mit geringen Korrekturen wegen der Abweichung von der Proportionalität mit der elektromotorischen Kraft versehen — ergeben sich unmittelbar die Werte von *a*, *b*, *c*; das Verhältnis $d = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ wurde nicht aus den gemessenen Dimensionen abgeleitet, da dies zu ungenau wäre, sondern aus den Werten von *b* für Luft und Wasserstoff mit Hilfe deren bekannter relativer Leitfähigkeit extrapoliert; die Unsicherheit, die durch diese Bestimmungsart hervorgerufen wird, verschwindet gegenüber anderen Fehlerquellen.

Das Resultat dieser Versuche ist insofern ein befriedigendes, als es die theoretische Brauchbarkeit dieser Methode beweist und zeigt, daß durch dieselbe für den Temperatursprung zwischen jenen Gasen und den metallischen Flächen Werte ganz ähnlicher Größenordnung gefunden werden, wie nach der früheren, gänzlich verschiedenen

Methode für Gase in Kontakt mit Glasflächen. Damals hatte ich nämlich gefunden: $\gamma = 0.000129 \text{ cm} \cdot \frac{760}{p}$ für Wasserstoff und $\gamma = 0.0000171 \text{ cm} \cdot \frac{760}{p}$ für Luft oder, in mittleren Weglängen ausgedrückt, $\gamma_n = 6.96 \lambda$ und $\gamma_n = 1.70 \lambda$.

Allerdings dürften aber diese Resultate den früheren an Genauigkeit erheblich nachstehen; dies zeigt sich auch in den Schwankungen des Wertes $p\gamma$, der konstant bleiben soll, wenn γ proportional der mittleren Weglänge ist, welche mitunter recht bedeutend sind, viel größer als bei den früher erwähnten Versuchen. Es rührt das davon her, daß γ aus den kleinen Differenzen $c-b$ berechnet wird, welche sich nicht mit der wünschenswerten Sicherheit bestimmen lassen, wie daraus hervorgeht, daß die einzelnen Versuche, aus denen die in den Tabellen angegebenen Zahlen als Mittelwerte gefunden werden, merkliche Unterschiede aufweisen. Ich überzeugte mich, daß die Ursache davon größtenteils in thermoelektrischen Kräften liegt, welche an den Verbindungsstellen verschiedener Leiterstücke (z. B. im Kommutator, beim Galvanometer, an etwaigen Knickstellen der Drähte) entstehen und welche leicht den Betrag von 1% der geringen zu messenden elektromotorischen Kraft (also bis zu 20% in γ) — die ja bloß einer Temperaturdifferenz von 2–5° entspricht — erreichen können.

Größere Temperaturdifferenzen wollte ich nicht anwenden, da man dann auch die Veränderlichkeit von κ und σ mit steigender Temperatur berücksichtigen und auch die Thermoelemente erst eichen müßte, was die Sache bedeutend komplizieren würde.

Durch besonders sorgfältige Anordnung könnte man allerdings jene Fehlerquellen reduzieren, aber dies schien mir dann aus einem anderen Grunde nicht der Mühe wert zu sein.

Mein Hauptzweck bei diesen Versuchen war nämlich die Untersuchung von verschiedenen Dämpfen in Kontakt mit Metallflächen gewesen, bei welchen der Temperatursprung wegen ihrer relativ kleinen Weglänge erst bei größeren Verdünnungen merklich wird, und hiebei konnte ich ein genügendes Dichthalten des Apparates nicht erzielen. Wenn ich es auch durch Anwendung verschiedener Schmiermittel und Kitte erreichen konnte, daß der Apparat hinreichend luftdicht war, so traten doch bald wieder Undichtigkeiten auf, wenn Äther-, Chloroformdämpfe etc. eingeführt wurden,

wahrscheinlich deshalb, weil diese Dämpfe die Schmiermittel erweichen.

Ich begnügte mich also mit diesen provisorischen Zahlen, nachdem ich nun eine viel bequemere Methode gefunden habe, die im Folgenden anlässlich der Versuche Schleiermacher's erwähnt werden wird, und welche ich zur Sammlung weiteres Beobachtungsmaterials zu benutzen gedenke.

Auf einen Versuch möchte ich aber noch näher eingehen, da er gewissermaßen ein experimentum crucis für die hier vertretenen Grundanschauungen bildet.

Wählt man nämlich die Strahlungskoeffizienten σ_1 und σ_2 derart, daß σ_2 klein ist gegenüber σ_1 , dieses aber immer noch geringen Einfluß ausübt im Vergleich mit der Wärmeleitung selbst, so muß offenbar die Temperatur von b bei einem gewissen Drucke ein Maximum erreichen. Denn solange die Leitung den größeren Einfluß hat, wird c mit steigender Verdünnung wachsen, wie in den obigen Versuchen; wenn sie aber — bei großer Verdünnung — schon sehr klein geworden ist im Vergleich zu σ_1 , so wird c annähernd gleich $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, also auch sehr klein geworden sein, muß also dazwischen einen größten Wert erreicht haben.

Würde dagegen die Verringerung der Wärmeleitung bei Verdünnung des Gases durch eine Abnahme des Wertes der Leitungsfähigkeit κ hervorgerufen sein, wie früher wohl ziemlich allgemein angenommen wurde, so müßte der Wert von c bei wachsender Verdünnung von Anfang an fortwährend abnehmen.

Bei der Berechnung dieses Falles können wir $\sigma_2 = 0$ setzen, dann verwandelt sich die Formel (2), wenn $a = 0$ gesetzt wird, in:

$$(3) \quad A = 1 + d \frac{d - \frac{b}{c}}{d - b}, \quad B = d^2 \cdot \frac{1 - \frac{b}{c}}{b - d}.$$

Ein Maximum erreicht dann c für den Wert:

$$(4) \quad 2\gamma = -\delta_1 + \sqrt{\frac{\kappa}{\sigma_1} (\delta_2 - \delta_1)}.$$

Um die Bedingungen für diesen Fall angenähert zu realisieren, schwärzte ich die Innenfläche von b und die Außenfläche von a mit Tusche, während die übrigen Oberflächen vergoldet waren

(wobei also die Strahlung sehr gering ist, wie auch aus dem Vergleich der Zahlen für b_{II} für Luft und Wasserstoff hervorgeht) und füllte Wasserstoff ein.

Folgende Tabelle gibt die dabei gemachten Beobachtungen und die daraus nach Formel (1) und (3) berechneten γ an:

$p = 64$	1.61	0.709	0.295	0.104	0.0084 mm	Mittel:
b resp. $c = 0.1985$	0.2585	0.3151	0.3904	0.4919	0.3899	
$\gamma =$	0.0359	0.0791	0.160	(0.419)		cm
$p\gamma =$	0.0577	0.0560	0.0472	(0.0435)		0.0537

Es tritt also wirklich ein deutliches Maximum von c ein, was unsere Theorie vollkommen bestätigt.

Die Formel (4) gilt eigentlich nicht mehr genau für so große Verdünnungen, doch scheint sich der Maximalwert $c = 0.548$, welcher daraus für $p = 0.067$ mm folgen würde, den beobachteten Werten gut einzufügen.

II. Diskussion anderer Experimentaluntersuchungen.

Es wäre auffallend gewesen, wenn in den zahlreichen älteren Experimentaluntersuchungen über Wärmeleitung der Gase sich keine Anhaltspunkte hätten finden lassen, welche auf die bezüglich des Temperatursprunges entwickelten Gesetze schließen lassen, und es scheint mir daher von Interesse, dieselben von diesem Standpunkte aus näher zu untersuchen.

Schon in der ersten Arbeit von Winkelmann¹⁾ findet man Angaben, die sich diesbezüglich verwerten lassen; so gibt er für den Betrag des Wärmeflusses $L = v \log e$ zwischen zwei konzentrischen Messingzylindern bei einer Dicke der Gasschichte von $R - r = 0.315$ cm für Wasserstoff folgende Zahlen an:

$p = 750$	91.9*	4.7	3.0	1.02 mm
$L = 294$	290*	258	245*	216.

Der Wert 290* ist als das normale L_0 aufzufassen, während der erste in Folge der Konvektionsströme etwas vermehrt, die

¹⁾ Winkelmann, Pogg. Ann., 156, S. 497 (1876).

übrigen nach unserer Anschauungsweise in Folge des Temperatursprunges vermindert sind.

Da dessen Einfluß einer Vermehrung der Dicke der Gasschichte äquivalent ist, so folgt:

$$\frac{L_0}{L} = \frac{R - r + 2\gamma}{R - r}, \text{ also } \gamma = \frac{R - r}{2} \frac{L_0 - L}{L_0}.$$

Hieraus folgen für γ und die Produkte $p\gamma$ die Werte:

$\gamma = 0.0195$	0.0288	0.0538 cm	
$p\gamma = 0.0916$	0.0864	0.1003	Mittel: 0.0928.

Somit ergibt sich für γ der Wert 0.000122 cm $\cdot \frac{760}{p}$, welcher

mit den von mir für Glas und Nickel gefundenen überraschend gut übereinstimmt. Bei Luft ist dies, des viel kleineren Wertes von γ wegen, schwieriger nachzuweisen; aus der einzigen dazu verwendbaren Angabe würde zirka ein Fünftel des obigen Wertes folgen, während er nach meinen Versuchen zirka ein Siebtel beträgt.

Bei den Versuchen von Kundt und Warburg¹⁾ über Abkühlung von Thermometern in Glasgefäßen war die Abnahme erst bei geringeren Drucken merklich, da die Dimensionen der verwendeten Gefäße relativ groß waren (freier Raum zirka 2.5 cm), und aus demselben Grunde war die Wirkung der Konvektionsströme ziemlich beträchtlich; diese Versuche eignen sich mithin nicht gut zur Berechnung von γ , da die größeren Verdünnungen nicht mehr gemessen wurden.

Genauere derartige Versuche hat Crookes²⁾ mit Luft innerhalb der Drucke von 1 mm und 2 Milliontel Atmosphären angestellt, und die von ihm erhaltenen Resultate stimmen qualitativ vollkommen mit den meinigen und den sofort zu besprechenden von Brush überein; aber leider läßt sich eine quantitative Berechnung nicht ausführen, da keine Beobachtungen zwischen Atmosphärendruck und 1 mm ausgeführt wurden und da die Dimensionen der Apparate nicht angegeben sind.

Crookes äußerte auch bereits die Mutmaßung, daß der Grund,

¹⁾ Kundt und Warburg, Pogg. Ann. 156, p. 177 (1875).

²⁾ Crookes, Proc. R. S., 31, p. 239 (1881).

warum diese Erscheinungen erst bei niedrigen Drucken auftreten, der sei, daß dann die Größe der mittleren Weglänge im Verhältnis zu den Gefäßdimensionen nicht mehr ganz zu vernachlässigen sei.

Die Arbeit von Brush¹⁾, die fast gleichzeitig mit der meinigen erschien, dürfte die einzige sein, welche die Untersuchung der hier in Betracht kommenden Erscheinungen von Atmosphärendruck bis zu den größten Verdünnungen umfaßt. Das umfangreiche, mittels derselben Kundt-Warburg'schen Methode gewonnene Beobachtungsmaterial ist aber nicht in Tabellen, sondern in Form von Kurven dargestellt.

Ich habe an anderer Stelle²⁾ nachgewiesen, daß dasselbe mit der hier vertretenen Theorie bestens übereinstimmt und sogar eine Berechnung von γ auszuführen gestattet, wobei das Produkt $p\gamma$ innerhalb weiter Druckgrenzen sich als konstant erweist. Die aus der graphischen Darstellung berechneten Werte waren:

$$\begin{aligned} \text{für Luft } \gamma &= 0.0000155 \text{ cm. } \frac{760}{p} \\ \text{für Wasserstoff } \gamma &= 0.0000724 \text{ cm. } \frac{760}{p}, \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, daß das Thermometer mit Schellack gefirnißt war, was die Ursache sein mag, daß diese Werte etwas kleiner sind als die früheren.

Auch insofern sind Brush's Experimente von Interesse, als sie zu bestätigen scheinen, daß bei den allergrößten Verdünnungen die durch das Gas geleitete Wärmemenge dem Drucke desselben proportional ist, wie ich³⁾ aus der kinetischen Gastheorie gefolgert habe.

Dagegen scheinen mir die theoretischen Spekulationen Brush's, namentlich das anlässlich der vermeintlichen Entdeckung des neuen Gases Etherion ausgesprochene Gesetz⁴⁾, daß die relative Wärme-

¹⁾ Brush, Phil. Mag. 45, p. 31 (1898).

²⁾ Smoluchowski, Phil. Mag. 46, p. 192 (1898).

³⁾ Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. in Wien 107, p. 304 (1898).

⁴⁾ Science, VIII, p. 490. Was dieses Gas anbelangt, ist es wohl höchst wahrscheinlich, daß dasselbe nur Wasserdampf ist, dessen Druck durch das von Brush verwendete Macleod-Manometer nicht angezeigt werden konnte (vergl. Crookes, Chem. News, 78, p. 221, 277; Smoluchowski, Nature, 59, p. 223 (1899)).

leitungsfähigkeit verschiedener Gase der Molekulargeschwindigkeit derselben proportional ist, vollständig unberechtigt zu sein.

Die Zahlen, durch welche er dieses Gesetz zu begründen sucht, sind nicht etwa den bei höherem Drucke angestellten normalen Beobachtungen entnommen, sondern sind ein Mittel aus dem Intervall von 0 bis 500 Milliontel Atmosphärendruck; er hätte ganz andere Werte erhalten, wenn er Apparate anderer Dimensionen, oder ein anderes Druckintervall benützt hätte.

Sämtliche vorerwähnten Untersuchungen sind auf die Messung der Abkühlungsgeschwindigkeit basiert. Ganz verschieden ist die im Folgenden zu besprechende Methode, welche mir für die Erforschung der hier in Betracht kommenden Erscheinungen am besten geeignet zu sein scheint.

Für den Wärmefluß zwischen konzentrischen Zylindern habe ich loc. cit. die Formel abgeleitet:

$$L = \frac{2\pi l}{\log \frac{R}{r} + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)}$$

und daraus

$$(5) \quad \gamma = \frac{\log \frac{R}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}} \left(\frac{L_0}{L} - 1 \right).$$

Man sieht daraus, daß der Einfluß von γ desto größer sein wird, je kleiner r ist; er muß also besonders groß sein, wenn an Stelle des Thermometers ein dünner Draht verwendet wird, was bei der Methode, welche das galvanische Glühen von Drähten benützt, der Fall ist. Von der großen Zahl von diesbezüglichen Untersuchungen sind für unseren Zweck nur wenige verwendbar, am besten wohl jene Schleiermachers¹⁾.

Dieser fand folgende Werte für die Wärmemenge, welche von einem 0.405 mm dicken Platindrahte an die Wände der 24.2 mm weiten, ihn umgebenden Glasröhren geleitet wurde, wenn der Zwischenraum mit Luft erfüllt war:

$p =$	91*	22	5.2	1.2	0.3	(0.07) mm
$L =$	2138*	2121	2071	1867	1344	(497).

¹⁾ Schleiermacher, Wied. Ann., 34, p. 623 (1888).

Die Werte, welche sich daraus mittels der Formel für das Produkt $p\gamma$ ergeben, und die aus dem Mittelwert rückwärts berechneten L sind:

$$p\gamma = \begin{array}{cccccc} 0.0125 & 119 & 124 & 125 & (164) & \text{Mittel: } 0.0123 \\ L = 2138^* & 2121 & 2060 & 1867 & 1353 & (613). \end{array}$$

Der letzte Wert fällt etwas heraus, wahrscheinlich in Folge eines Fehlers in p , da Drucke unter 1 mm nicht mehr direkt gemessen, sondern nach der Pumpenwirkung geschätzt wurden, die anderen ergeben aber eine treffliche Übereinstimmung; der Mittelwert ist

$$\gamma = 0.0000163 \text{ cm.} \cdot \frac{760}{p}$$

Noch bedeutend größer ist die Veränderlichkeit von L bei Wasserstoff, z. B.:

$$\begin{array}{ccc} p = 214 & 40 & 7.0 \text{ mm} \\ L = 1996 & 1922 & 1660, \end{array}$$

woraus sich, mit den früheren Werten gut übereinstimmend,

$$\gamma = 0.000132 \cdot \frac{760}{p} \text{ ergeben würde.}$$

Es war auch schon Eichhorn¹⁾ aufgefallen, daß bei den Schleiermacher'schen Versuchen die Veränderlichkeit der Wärmeleitung mit abnehmendem Druck so groß sei, viel größer als man den anderen Versuchen zu Folge erwarten konnte, und er glaubte, daß dies auf irgend welchen Fehlerquellen beruhen müsse.

Wenn man dagegen die hier gegebene Theorie berücksichtigt, zeigt sich, daß diese auf den ersten Blick sehr verschiedenen Ergebnisse mit einander in bester Übereinstimmung sind; es folgt aber daraus auch, daß man bei der Anwendung dieser Methoden zur Bestimmung der Wärmeleitung der Gase, deren Temperaturkoeffizienten etc. auf die Wirkung des Temperatursprunges Rücksicht nehmen muß, und daß manche der älteren Resultate diesbezüglich zu korrigieren sind.

III. Theoretische Berechnung des Temperatursprunges nach der Maxwell'schen Theorie.

In der vorigen Mitteilung²⁾ habe ich eine angenäherte theoretische Berechnung des Temperatursprunges auf Grundlage der

¹⁾ Eichhorn, Wied. Ann., 40, p. 697 (1890).

²⁾ Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. in Wien 107, p. 304 (1898).

Clausius'schen Theorie zu geben versucht. Da nun aber, wie ich auch daselbst erwähnte, die vereinfachenden Grundannahmen dieser Theorie in mancher Hinsicht bedenklich erscheinen, ist es wohl von Interesse, diese Verhältnisse auch vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie zu untersuchen, für welche allein bisher die strenge Berechnung der Wärmeleitung durchgeführt worden ist.

Allerdings werden wir auch dabei Vernachlässigungen begehen, indem wir voraussetzen werden, daß der Zustand des Gases bis an die Oberfläche überall gleich ist, so daß die Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle dieselbe ist wie bei gewöhnlicher Wärmeleitung. Auch diese Rechnung wird somit quantitativ nicht genau sein, ebenso wie die entsprechende Rechnung Maxwell's in seiner Abhandlung¹⁾ „On Stresses in Rarefied Gases arising from Inequalities of Temperature“ bezüglich des Gleitungskoeffizienten der Gase, was aber für unsere Zwecke nicht in Betracht kommt.

Der Weg, welchen wir hier einschlagen, ist jenem von Maxwell loc. cit. benützten vollkommen analog²⁾; auch die Bezeichnungsweise wähle ich möglichst gleich, um mir längere Entwicklungen durch den Hinweis auf die betreffenden Maxwell'schen Formeln zu ersparen; so werden auch die Größen, welche sich auf Moleküle beziehen, die sich zur festen Wand hinbewegen, mit dem Index 1, jene entgegengesetzter Art mit dem Index 2 versehen.

Wir nehmen an, daß die zur X-Axe senkrechte Oberfläche des festen Körpers so wirke, als ob von derselben der Bruchteil $1 - f$ vollständig „reflektierend“, dagegen der Rest f vollkommen diffus „zerstreuend“ wäre. Die Moleküle, welche auf den reflektierenden Teil fallen, werden mit ungeänderter Geschwindigkeit zurückgeworfen, jene, welche auf den übrigen Teil der Fläche stoßen, sollen absorbiert und dann wieder mit der Geschwindigkeitsverteilung, welche der Temperatur des festen Körpers entspricht, nach allen Richtungen gleichmäßig ausgesendet (zerstreut) werden.

Offenbar müssen nun folgende zwei Sätze gelten.

1. Die Menge der pro Zeiteinheit die Fläche verlassenden Moleküle $\rho_2 \bar{c}_2$ setzt sich zusammen aus den reflektierten $(1 - f)\rho_1 \bar{c}_1$ und zerstreuten $f\rho_2 \bar{c}_2$ Teilen, also:

$$(6) \quad \rho_2 \bar{c}_2 = (f - 1)\rho_1 \bar{c}_1 + f\rho_2 \bar{c}_2.$$

¹⁾ Maxwell, Trans. R. S., 152, p. 231 (1879).

²⁾ Eine vereinfachte Ableitung: Prace mat. fiz., X, p. 34 (1899), Warschau.

2. Dasselbe gilt bezüglich der hindurchgeführten Energiemenge:

$$(7) \quad \rho_2 \bar{\xi}_2 c_2^2 = (f-1) \rho_1 \bar{\xi}_1 c_1^2 + f \rho_2 \bar{\xi}_2 c_2^2.$$

Die Ausdrücke $\rho_2 \bar{\xi}_2$ etc. sind eigentlich Summen über alle Moleküle der Volumeneinheit, z. B.:

$$\rho_2 \bar{\xi}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta d\zeta \int_0^{\infty} \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi,$$

wobei $f(\xi, \eta, \zeta)$ die Anzahl der Moleküle bedeutet, deren Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ sind, welche nach Maxwell gleich einem Ausdruck (22 jener Abhandlung):

$$(8) \quad f = N \left[1 + \sqrt{2h} (\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta) + 2h \left(\frac{\alpha^2}{2} \xi^2 + \alpha \beta \xi \eta + \dots \right) + (2h)^{3/2} \left(\frac{\alpha^3}{6} \xi^3 + \frac{\alpha^2 \beta}{2} \xi^2 \eta + \alpha \beta \gamma \xi \eta \zeta + \dots \right) \right] \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$$

gesetzt werden kann. Dabei bedeuten $\alpha^2, \alpha\beta$ etc. nicht Potenzen, respektive Produkte von α, β etc., sondern eigene Konstanten.

Führt man die Integration ¹⁾ aus, wobei zu bemerken ist, daß die Integrale nach ξ bei den Molekülen 1 zwischen $-\infty$ und 0, bei den Molekülen 2 zwischen 0 und $+\infty$ auszuführen sind, so erhält man, wenn zugleich die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 0 \\ \alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 &= -2\alpha \end{aligned} \right\} \text{Maxwell's Gleichungen (25) und (27)}$$

berücksichtigt werden:

$$\rho \bar{\xi} = \pm \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} \right] N$$

$$\rho \bar{\xi} c^2 = \left[\pm \frac{1}{h\sqrt{\pi h}} - \frac{\alpha\sqrt{2}}{4h\sqrt{h}} \pm \frac{3\alpha^2}{4h\sqrt{\pi h}} \right] N,$$

wo das obere Zeichen für 2 und das untere für 1 gilt.

Die Größe α^2 ist bei ruhendem Gase und linearem Temperaturgefälle = 0; für die „zerstreuten“ Moleküle ist auch $\alpha = 0$.

¹⁾ Die Rechnung wird erleichtert, wenn man anstatt h im Exponenten von e vorerst eine andere Konstante k setzt und dann $\rho \bar{\xi}$ berechnet, da man dann $\rho \bar{\xi} c^2$ einfach durch Differentiation dieses Ausdruckes nach k erhält; hinterdrein wird wieder $k = h$ gesetzt.

Führt man diese Größen in die Gleichungen (6) und (7) ein und berücksichtigt, daß $\frac{1}{2h} = R\Theta, \frac{1}{2h'} = R\vartheta$, wo ϑ die Temperatur der Wand, R die Konstante des Gases bedeutet, so erhält man:

$$fN\Theta^{1/2} = fN'\vartheta^{1/2}$$

$$N\Theta^{3/2} \left[f - \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (2-f) \right] = N'f\vartheta^{3/2}$$

und daraus durch Elimination von N' :

$$(9) \quad \Theta - \vartheta = \frac{2-f}{f} \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \Theta.$$

Für α hat man:

$$\alpha = - \frac{\alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2}{2} = \frac{15}{4} \frac{\mu}{p} \left(\frac{R}{\Theta} \right)^{1/2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \text{ (Maxwell'sche Gleichung 51),}$$

somit:

$$(10) \quad \Theta - \vartheta = \frac{2-f}{f} \frac{15}{16} \sqrt{2\pi} \frac{\mu}{\sqrt{p\rho}} \frac{\partial \Theta}{\partial x}.$$

Um diese Gleichung leichter zu interpretieren, wollen wir noch die mittlere Weglänge $\lambda = \frac{\mu\pi\sqrt{2\pi}}{4\sqrt{p\rho}}$ nach Meyer (oder auch $\lambda =$

$= \frac{3\sqrt{2}\pi\mu}{4\sqrt{p\rho}}$ nach Clausius) einführen, obwohl wir da eigentlich nicht ganz konsequent verfahren, da in der Maxwell'schen Theorie keine mittlere Weglänge vorkommt. Hiedurch erhalten wir:

$$(11) \quad \Theta - \vartheta = \frac{15}{4\pi} \frac{2-f}{f} \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x}; \text{ also: } \gamma = \frac{15}{4\pi} \frac{2-f}{f} \lambda.$$

Diese Formel wird mit der von mir nach Clausius abgeleiteten

$$\gamma = \left[0.70 + \frac{4\beta}{3(1-\beta)} \right] \lambda$$

vollständig analog, nämlich

$$(12) \quad \gamma = \frac{15}{4\pi} \left(1 + \frac{2\beta}{1-\beta} \right) \lambda,$$

wenn $1-f = \beta$ gesetzt wird und unterscheidet sich nur dadurch, daß sie etwas größere Zahlenkoeffizienten enthält; es bleiben somit

auch nach dieser Theorie alle Folgerungen, die ich loc. cit. an die Form dieser Gleichung geknüpft habe, giltig.

Die numerischen Koeffizienten würden uns erst interessieren, wenn die Größe von β selbst in Betracht käme.

Es scheint mir ziemlich merkwürdig, daß zufolge den in den ersten zwei Abschnitten angeführten Zahlen der Koeffizient γ , also auch β , relativ wenig von der Natur des festen Körpers abhängt, mit welchem das Gas in Berührung steht.

Freilich weiß man nicht, inwieweit die Oberfläche desselben durch Oxydschichten, Wasserhaut, absorbierte Gasschichten etc. modifiziert sein mag; letztere würden vielleicht sogar eine gewisse Abhängigkeit von β von dem Gasdruck hervorrufen können; aus einem reichhaltigeren Versuchsmaterial werden sich, umgekehrt, Folgerungen bezüglich jener Verhältnisse ableiten lassen.

XIV. O ATMOSFERZE ZIEMI I PLANET.

(Księga pamiątkowa wydana przez Uniwersytet lwowski ku uczczeniu 500-letniego jubileuszu Uniwersytetu Jagiellońskiego r. 1900; str. 1—28).

Mało zagadnień fizycznych dało powód do powstania tak wielu i tak ze sobą sprzecznych teoryj jak pytanie, do jakiej wysokości sięga nasza atmosfera i jakie zjawiska zachodzą w jej górnych warstwach. Odnosi się to nietylko do spostrzeżeń i obliczeń opartych na różnych niezależnych metodach, jak n. p. na pomiarze wysokości, w której meteory zaczynają się rozżarzać, lub w której pokazuje się jeszcze zorza północna, albo wysokości, które jeszcze wywierają wpływ na zjawisko zmiernych etc., ale także do rozważań ściśle teoretycznych, opartych na zasadach hydromechaniki i termodynamiki.

Sądząc, że pochodzi to z niesłusznej jednostronności dawniejszych teoryj tego rodzaju, zamierzam w niniejszej pracy zwrócić uwagę na niektóre okoliczności zwykle nie dosyć uwzględniane, nie ograniczając się jednak do podania zarysu odnośnej teorii, lecz roztrząsając równocześnie dawniejsze badania na tem polu.

I.

Równowaga gazu o stałej temperaturze wymagałaby, żeby rozciągał się aż do nieskończoności, ponieważ nie podlega siłom włośkowatości.

Wstawiając do równania hydrostatyki $\int \frac{dp}{\rho} = U$ potencjał grawitacji

$$U = \frac{ga^2}{r} \text{ i uwzględniając równanie}$$

$$(1) \quad p = R\theta\rho$$