WYZNACZENIE PARU GRANIC W TEORYI POWIERZCHNI.

PODAŁ

W. ARVAY [1]).

Zarówno miara krzywizny Gaussa, jak i miara krzywizny Casorati'ego są granicami stosunków nieskończenie małych pól na powierzchni do pewnych obrazów tychże pól. Po wyznaczeniu tych granic otrzymują się wyrażenia, zawierające promienie krzywizny. Nie trudno dostrzedz, że taką samą metodę postępowania, jakiej użyli Gauss i Casorati (Acta mathematica, t. IV), można stosować i do obliczenia innych granic [2]). Zajmiemy się mianowicie wykonaniem następującego rachunku.

Uważajmy na jakiejś powierzchni puukt O i sąsiedni punkt P. Odkładamy na normalnej w punkcie O promień krzywizny ϱ przecięcia normalnego, przechodzącego przez linię OP. Prowadząc przez koniec promienia ϱ prostą równoległą do normalnej w punkcie P otrzymujemy na przecięciu jej z powierzchnią pewien punkt Q. Niechaj punkt P opisuje pewną linię krzywą zamkniętą, otaczającą punkt O, wtedy punkt Q opisywać będzie także jakąś linię krzywą, otaczającą punkt O.

Wyznaczyć stosunek G_1 (odpowiadający mierze krzywizny Gaussa) pól objętych temi dwiema liniami krzywemi.

[1]) Z seminaryum matematycznego prof K. Żorawskiego w Krakowie.

[2]) Analogiczne rozważania spotykamy także u Lilienthala (Acta math, t. 1).

Pierwsze z tych pól wyrazi się wzorem:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overline{OP}^2\, d\alpha\,,$$

gdzie a jest kątem bieżącego promienia wodzącego z jednym z kierunków głównych.

Drugie z tych pól jest

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overline{OQ}^2\, d\beta\,.$$

gdzie według związku znanego z teoryi powierzchni:

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2\, \varrho^2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1^{\,2}} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2^{\,2}}\right),$$

β zaś oznacza kierunek prostopadły do kierunku sprzężonego z kierunkiem α, t. j. związane jest z α równaniem:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{t}{r}\operatorname{tg}\alpha,$$

z którego przez różniczkowanie łatwo otrzymuje się:

$$d\beta = \frac{r\,t\,d\alpha}{r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \frac{d\alpha}{\varrho_1\,\varrho_2\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{\varrho_1^{\,2}} + \dfrac{\sin^2\alpha}{\varrho_2^{\,2}}\right)}.$$

Po zastosowaniu tych związków i w założeniu, że punkt P opisuje nieskończenie małe koło, żądany stosunek G_1 sprowadzi się do obliczenia całki:

$$G_1 = \frac{\varrho_1\,\varrho_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\varrho_2\cos^2\alpha + \varrho_1\sin^2\alpha)^2},$$

którą można napisać w kształcie:

$$G_1 = \frac{\varrho_1\,\varrho_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{(\varrho_2\cos^2\alpha + \varrho_1\sin^2\alpha)^2} + \frac{\varrho_1\,\varrho_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\alpha\, d\alpha}{(\varrho_2\cos^2\alpha + \varrho_1\sin^2\alpha)^2}.$$

Wstawiając

$$\operatorname{tg} \alpha = x,$$

łatwo przekształcić te całki na całki funkcyj wymiernych i obliczyć. W ten sposób otrzymuje się:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2 \cos^2 \alpha + \varrho_1 \sin^2 \alpha)^2} = -\int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2\varrho_1 (\varrho_2 \cos^2 \alpha + \varrho_1 \sin^2 \alpha)}$$

$$+ \frac{1}{2\varrho_1 \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}} \operatorname{tg} \alpha\right) = \frac{2\pi}{2\varrho_1 \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2 \cos^2 \alpha + \varrho_1 \sin^2 \alpha)^2} = -\int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2\varrho_2 (\varrho_2 \cos^2 \alpha + \varrho_1 \sin^2 \alpha)}$$

$$+ \frac{1}{2\varrho_2 \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}} \operatorname{tg} \alpha\right) = \frac{2\pi}{2\varrho_2 \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}.$$

Po wstawieniu tych wartości otrzymamy:

$$G_1 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}$$

które to wyrażenie jest ilorazem średniej arytmetycznej i geometrycznej z największości i najmniejszości promienia krzywizny w danym punkcie.

Drugi stosunek obliczymy analogicznie do miary krzywizny Casorati'ego. Zamiast przeprowadzać przez koniec promienia ϱ równoległą do normalnej w punkcie P, odcinamy na kierunku OP wielkość $\varrho \, d\omega$, gdzie $d\omega$ jest kątem między normalnemi w punktach O i P. Tym razem obraz Q będzie leżał na promieniu OP, tak iż kąt β jest równy kątowi α.

Obliczenie tego stosunku C_1 sprowadzi się do wyrażenia:

$$C_1 = \frac{\varrho_2^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2 \cos^2 \alpha + \varrho_1 \sin^2 \alpha)^2} + \frac{\varrho_1^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2 \cos^2 \alpha + \varrho_1 \sin^2 \alpha)^2}.$$

Wstawiając znane już wartości na obie te całki, otrzymamy:

$$C_1 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}},$$

a więc wartość ta sama co poprzednio, co nie ma wogóle miejsca dla miar krzywizny G i C.

Zupełnie tak samo obliczymy te stosunki, gdy brać będziemy zamiast promienia ϱ, odległość punktu O od punktu, w którym normalne są do siebie najbliżej położone, to jest, gdy weźmiemy:

$$R = \frac{1}{\varrho \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_2^2}\right)}.$$

W tym przypadku stosunek G_2 sprowadzi się do obliczenia całki:

$$G_2 = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\varrho_2 \cos^2 \alpha + \varrho_1 \sin^2 \alpha)^2 \, d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2},$$

którą możemy przedstawić w kształcie takim:

$$G_2 = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{2\pi} \left[(\varrho_2 - \varrho_1)^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2} \right.$$

$$\left. + 2\varrho_1 (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2} + \varrho_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2} \right].$$

Aby obliczyć pierwszą całkę:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2},$$

można skorzystać z tożsamości:

$$\int \frac{\cos^4 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2} = \frac{1}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} \int \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha}$$

$$- \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} \int \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2},$$

gdzie:

$$\int \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} \left[\alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{tg} \alpha\right) \right],$$

zaś wartość drugiej całki po stronie prawej już nam jest znana; otrzymujemy tedy:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2} = \frac{2\pi (\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_2 (\varrho_2^2 - \varrho_1^2)^2} - \frac{2\pi \varrho_1}{2\varrho_2^3 (\varrho_2^2 - \varrho_1^2)}.$$

Drugą i trzecią całkę mamy już obliczone powyżej:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2} = \frac{2\pi}{2\varrho_1 \varrho_2^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha)^2} = 2\pi \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2\varrho_1^3 \varrho_2^3}.$$

Po wstawieniu tych wartości otrzyma się:

$$G_2 = \frac{1}{2} + \frac{2 \varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + \varrho_2)^2}.$$

Stosunek odpowiadający mierze krzywizny Casorati'ego sprowadza się do całki:

$$C_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\varrho_2 \cos^2 \alpha + \varrho_1 \sin^2 \alpha)^2 \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha},$$

lub podobnie jak poprzednio:

$$C_2 = \frac{1}{2\pi} \left[(\varrho_2 - \varrho_1)^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \alpha \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} \right.$$

$$\left. + 2\varrho_1 (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} + \varrho_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} \right].$$

Pierwszą z tych całek:

$$\int \frac{\cos^4 \alpha \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2 (\varrho_2^2 + \varrho_1^2 x^2)}$$

obliczymy za pomocą rozkładu na ułamki proste. Otrzymamy, jak łatwo sprawdzić:

$$\int \frac{\cos^4 \alpha \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)} \left[\sin \alpha \cos \alpha + \frac{3\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2} \alpha \right.$$

$$\left. - \frac{2\varrho_1^3}{\varrho_2 (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{tg} \alpha \right) \right],$$

zatem:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \alpha \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} = \frac{2\pi}{2(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)} \left\{ \frac{3\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2} \alpha - \frac{2\varrho_1^3}{\varrho_2 (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)} \right\}.$$

Podobnie przez rozkład na ułamki proste obliczyć można drugą całkę:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} = \frac{2\pi}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} \left[1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right];$$

ostatnia wreszcie ma wartość:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha} = \frac{2\pi}{\varrho_1 \varrho_2}.$$

Po wstawieniu tych wartości otrzymuje się:

$$C_2 = \frac{1}{2} + \frac{2 \varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + \varrho_2)^2},$$

a więc i w tym razie istnieje związek $G_2 = C_2$.