$$\int_s f(x'\,y'\,z')\,u_1\,ds - \frac{\gamma}{2\pi}\int_s \frac{f(x'\,y'\,z')}{r^3}\,ds\,,$$

$$\int_s f(x'\,y'\,z')\,u_2\,ds - \frac{\gamma}{2\pi}\int_s \frac{f(x',\,y',\,z')}{r^3}\,ds\,,$$

dąży równomiernie do zera wraz γ. A więc na mocy nierówności (18) różnica (17) ma istotnie tę własność, którą chcieliśmy uzasadnić.

Jest tedy jasnem, że pytanie, postawione w ustępie *1* można uważać za rozwiązane.

O PERYODACH CAŁEK HYPERELIPTYCZNYCH RODZAJU $p = 2$.

NAPISAŁ

STANISŁAW KĘPIŃSKI.

W kilku rozprawach o równaniach różniczkowych [1]), którym czynią zadość peryody całek hypereliptycznych, rozważanych jako funkcye jednego z punktów rozgałęzienia powierzchni Riemanna (dwuliściowej), powraca Fuchs kilkakrotnie do wyprowadzenia (z własności wspomnianych równań) znanych związków dwuliniowych, istniejących między owemi peryodami.

Ogranicza się jednak Fuchs ostatecznie do wyprowadzenia związków dwuliniowych, istniejących tylko między peryodami całek gatunku pierwszego (t. j. wszędzie skończonych). Nadto, biorąc za punkt wyjścia równanie różniczkowe, któremu czynią zadość peryody całki

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)\,(x-z)}}\,,$$

---

[1]) L. Fuchs: Die Periodicitätsmoduln der hyperellipt. Integrale etc., Crelle's J., t. 71; Ueber rationale Verbindung der Periocidätsint. etc. ibidem; Sitzungber. der Akad. der Wissensch. Berlin, 1888, 1889, 1890.

R. Fuchs: Ueber die Percodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale, Crelle's J., Bd. 119, 1898.

gdzie $\psi(x)$ jest wielomianem, jest zmuszony rozważać także równania różniczkowe, którym czynią zadość peryody innych całek — równania należące, według określenia Fuchsa, do tej samej „kategoryi". Rozumowań i rachunków, zjawiających się na tej drodze, zresztą dość długich i zawiłych można (dla $p=2$) częściowo uniknąć lub znacznie je uprościć, biorąc za punkt wyjścia nieco odmienny kształt całek hypereliptycznych, a nadto można łatwym sposobem wyprowadzić, obok związków dwuliniowych między peryodami całek gatunków pierwszego, także związki dwuliniowe między peryodami całek gatunków pierwszego i drugiego i między peryodami całek gatunku drugiego.

---

§ 1.

Rozważać będziemy całki na powierzchni Riemanna dwuliściowej, rodzaju $p=2$, określonej przez równanie algebraiczne $f(s,x)=0$, kształtu:

$$s^2 = \psi(x) \,.\, (x-z),$$

gdzie $\psi(x)$ jest wielomianem stopnia 4-go:

$$\psi(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$
$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4).$$

Powierzchnia więc ta posiada, jako punkty rozgałęzienia: punkt w nieskończoności i punkty:

$$z,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4.$$

Jako linie przejścia z pierwszego (górnego) liścia, na którym są rozpostarte wartości s, np.

$$s = +\sqrt{\psi(x)(x-z)}\,,$$

na liść drugi (dolny), którego punkty odpowiadają wartościom:

$$s = -\sqrt{\psi(x)(x-z)}\,,$$

możemy wziąć np. proste łączące: punkt w nieskończoności z punktem z, punkt α_1 z punktem α_2 i punkt α_3 z punktem α_4 (fig. 1),

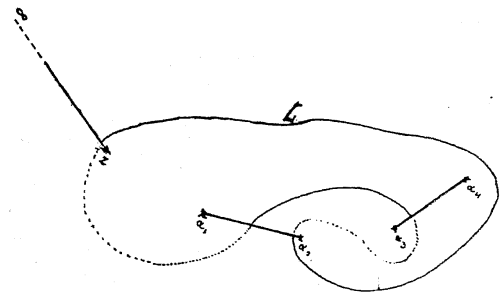

Fig. 1.

Do powierzchni Riemanna $p=2$ należą, jak wiadomo, dwie całki gatunku pierwszego, liniowo od siebie niezależne. Całki te weźmiemy w postaci:

$$I_1 = \int \frac{(x-z)\,dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}}\,,$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}} = -2\,\frac{dI_1}{dz}\,.$$

Peryody tych całek otrzymamy, biorąc całki wzdłuż jakiegokolwiek toru L na powierzchni Riemanna, zamkniętego i nie dającego się ściągnąć do jednego punktu (fig. 1).

Rozważmy szczegółowiej peryody całki I_1, które nadal oznaczać będziemy przez y:

$$(2)\qquad y = \int_L \frac{(x-z)\,dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}}\,.$$

Jeżeli z będziemy uważali za parametr zmienny, to y będzie funkcyą ilości z i według metody Fuchsa (Crelle J., t. 71), znajdziemy łatwo równanie różniczkowe, któremu zadość czyni $y(z)$:

$$(3)\qquad \psi(z)\,y^{\mathrm{IV}} + 2\psi'(z)\,y''' + \frac{9}{8}\,\psi''(z)\,y'' + \frac{1}{8}\,\psi'''(z)\,y' - \frac{3}{16}\,y = 0\,,$$

gdzie $y^{(i)} = \dfrac{d^i y}{dz^i}$.

Równanie to, 4-go rzędu, posiada cztery rozwiązania szczególne, liniowo od siebie niezależne, wszystkie w formie (2), gdyż, jak wiadomo, na naszej powierzchni Riemanna $p=2$ istnieją cztery tory „podstawowe", z których przez odpowiednie kombinacye możemy otrzymać każdy inny tor zamknięty. Tory te podstawowe: A_1, B_1; A_2, B_2 przyjmiemy w tak zwanej formie „kanonicznej" (fig. 2):

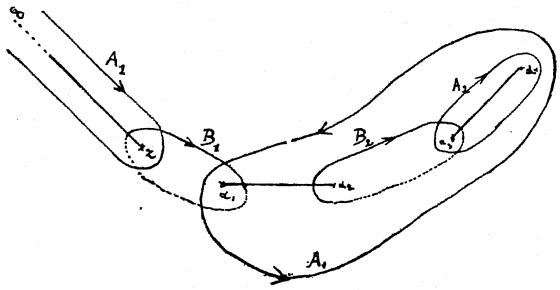

Fig. 2.

Strzałki oznaczają kierunek całkowania.

Możemy więc przyjąć, że owe rozwiązania szczególne równania (3): y_1, y_2, y_3, y_4 są to właśnie całki (2), wzięte wzdłuż tomów A_1, A_2, B_1, B_2.

---

§ 2.

Jeżeli dla krótkości spółczynnik i-tej pochodnej ilości y w równaniu (3) nazwiemy λ_i ($i=0, 1, 2, 3, 4$), to równanie z niem „sprzężone" (équ. adjointe), wprowadzone przez Lagrange'a, posiada kształt:

$$(4) \qquad \lambda_0 y - \frac{d(\lambda_1 y)}{dz} + \frac{d^2(\lambda_2 y)}{dz^2} - \frac{d^3(\lambda_3 y)}{dz^3} + \frac{d^4(\lambda_4 y)}{dz^4} = 0,$$

tak, iż spółczynniki równania (4) — nazwijmy je μ_i — wyrażają się w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \lambda_0 - \lambda'_1 + \lambda''_2 - \lambda'''_3 + \lambda^{IV}_4, \\
\mu_1 &= -\lambda_1 + 2\lambda'_2 - 3\lambda''_3 + 4\lambda'''_4, \\
\mu_2 &= \lambda_2 - 3\lambda'_3 + 6\lambda''_4, \\
\mu_3 &= -\lambda_3 + 4\lambda'_4, \\
\mu_4 &= \lambda_4.
\end{aligned}$$

Obliczając spółczynniki μ_i dla równania sprzężonego z (3) przekonamy się łatwo, z uwagi na związki:

$$\lambda_1 = \lambda'_2 - \lambda'''_4,$$
$$\lambda_3 = 2\lambda'_4,$$

że:

$$\mu_i = \lambda_i.$$

Mamy więc okazaną własność równania (3), bardzo ważną dla nas w dalszym ciągu:

Równanie różniczkowe (3) jest z sobą samem sprzężone.

Możemy równaniu (3) nadać wraz z Jacobim (Crelle, 32) kształt:

$$(3') \qquad (c_2 y'')'' + (c_1 y')' + c_0 y = 0.$$

gdzie $c_2 = \psi(z)$, $c_1 = \frac{1}{8}\psi''$, $c_0 = -\frac{3}{16}$.

---

§ 3.

Równania z sobą sprzężone rzędu 4 go w bardzo prosty sposób dają się scharakteryzować przy pomocy „niezmienników" Laguerre'a, t. j. funkcyj wymiernych spółczynników równania różniczkowego i ich pochodnych, które przy przekształceniu:

$$(5) \qquad \begin{aligned} y(z) &= \varrho(z)\, v(x), \\ x &= \varrho(z), \end{aligned}$$

zmieniają się tylko o pewien czynnik $\sigma(z)$.

W teoryi takich niezmienników bardzo dogodnem jest używanie kształtu normalnego równania różniczkowego:

$$(16) \qquad \frac{d^n u}{dz^n} + \frac{n.n-1}{1.2} p_2 \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} + \ldots + n p_{n-1} \frac{du}{dz} + p_n u = 0,$$

który otrzymamy z dowolnego równania:

$$(7)\qquad \lambda_n \frac{d^n y}{dz^n} + \lambda_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \ldots \qquad + \lambda_0 y = 0,$$

przez przekształcenie

$$(8)\qquad y = e^{-\frac{1}{n}\int \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} dz} u,$$

należące także do typu przekształceń (5).

Stąd wnosimy bezpośrednio, że wszystkie własności równania (6), oparte na jego niezmiennikach, posiada równanie (7) i naodwrót.

Owóż, w 14-ym tomie „Acta mathematica" okazał Brioschi[1]), że, aby równanie (6) było z sobą samem sprzężone, warunkiem wystarczającym jest równość zeru tak zw. niezmienników „zasadniczych" o skaźniku nieparzystym:

$$(9)\qquad \begin{aligned} a_3 &= p_3 - \frac{3}{2} p'_2, \\ a_5 &= p_5 - \frac{5}{2} p'_4 + \frac{15}{7} p''_3 - \frac{5}{7} p'''_2 - \frac{10}{7} \frac{7n+13}{n+1} p_2 a_3, \end{aligned}$$

i t. d.

Chcąc nasze równanie (3) sprowadzić do kształtu (6) należy według (8) podstawić:

$$(8^1)\qquad y = e^{-\frac{1}{4}\int \frac{2\psi'}{\psi} dz} = \psi(z)^{-\frac{1}{2}} u;$$

otrzymamy równanie:

$$(10)\qquad u^{IV} + 6 p_2 u'' + 4 p_3 u' + p_4 u = 0,$$

gdzie

$$p_2 = \frac{3}{8} \frac{4\psi'^2 - 5\psi\psi''}{\psi^2},$$

$$(11)\qquad \text{zaś} \qquad p_3 = \frac{3}{2} p'_2,\ ^{2)}$$

a więc stosownie do tego, co powiedzieliśmy, również z sobą samem sprzężone

[1]) „Les invariants des équ. diff.", p. 237.
[2]) Obliczenie ilości p_4 jest dla nas w dalszym ciągu zbyteczne.

Równanie (10) można wskutek tego warunku napisać w formie Jacobi'ego:

$$u^{IV} + 6 (p_2 u')' + p_4 u = 0.$$

---

§ 4.

Dla równania (10) utwórzmy wraz z Halphenem[1]) równanie tak zwane przekształcone, którego całkami są

$$\xi = u_i u'_k - u_k u'_i, \qquad i \lessgtr k = 1, 2, 3, 4.$$

Takich różnych od siebie jest $\binom{4}{2} = 6$: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$, a więc równanie różniczkowe, któremu zadość czyni ξ, jest, wogóle mówiąc, rzędu 6-go. W naszym jednak przypadku, z uwagi na (11) redukuje się ono do równania rzędu 5-go i posiada kształt[2]):

$$(12)\qquad (\xi''' + 6 p_2 \xi' + 4 p_3 \xi)'' + 6 p_2 (\xi''' + 6 p_2 \xi' + 4 p_3 \xi) - 4 p_4 \xi' - 2 p'_4 \xi = 0,$$

czyli kształt:

$$(13)\qquad \xi^{V} + 10 q_2 \xi''' + 10 q_3 \xi'' + 5 q_4 \xi' + q_5 \xi = 0,$$

gdzie

$$(14)\qquad \begin{aligned} 5 q_2 &= 6 p_2, \\ 5 q_3 &= 2 (3 p'_2 + p_3), \\ 5 q_4 &= 2 (3 p''_2 + 18 p_2^2 + 4 p'_3 - 2 p_4), \\ q_5 &= 2 (2 p_3'' + 12 p_2 p_3 - p'_4). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że między funkcyami ξ istnieje związek liniowy jednorodny (15) $c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 + \ldots c_6 \xi_6 = 0$.

Tworząc dla równania (13) odpowiednie niezmienniki zasadnicze — nazwijmy je α_3, α_5, — otrzymamy:

[1]) Sur les invariants etc. Acta math., t. 3, str. 328, 329.
[2]) por. Halphen, l. c.

$$\alpha_3 = 3q'_2 - 2q_3 = \frac{2}{5}\alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_5 = q_5 - \frac{5}{2}q'_4 + \frac{5}{7}(3q'_3 - q_2'') = -12p_2\alpha_3 + \frac{3}{7}\alpha_3'' = 0.$$

Z twierdzenia więc Brioschi'ego, przytoczonego w § 3-cim, wynika twierdzenie:

Jeżeli równanie rzędu 4-go (10) jest z sobą samem sprzężone, to również równanie „przekształcone" Halphena jest z sobą samem sprzężone.

Z tego ogólnego twierdzenia wynika:

Równanie utworzone dla peryodów całek jest z sobą samem sprzężone[4]).

Między całkami i ich pochodnemi równania różniczkowego z sobą samem sprzężonego rzędu nieparzystego $(2n-1)$ istnieje n związków jednorodnych stopnia 2-go. Związki te dla równania rzędu 5-go (13) są następujące:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) = 0,\\ &\varphi(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4', \xi_5') = 0,\\ &\varphi(\xi_1'', \xi_2'', \xi_3'', \xi_4'', \xi_5'') = 1, \end{aligned}$$

gdzie φ oznacza formę kwadratową.

Oznaczając $y_i y'_k - y_k y'_i = \zeta$, mamy z uwagi na (8'): $\zeta = \frac{1}{c}\psi . \xi$, a więc:

$$(16')\qquad \begin{aligned} &\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5) = 0,\\ &\varphi(\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3', \zeta_4', \zeta_5') = 0,\\ &\varphi(\zeta_1'', \zeta_2'', \zeta_3'', \zeta_4'', \zeta_5'') = \frac{c^2}{\psi^2}, \end{aligned}$$

gdzie c jest wielkość stała.

---

[3]) por. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II, str. 115.

[4]) Własność tę równania (13) zauważył Brioschi: Relations différentielles etc. Crelle's J., t. 116.

§ 5.

Własności równań sprzężonych, przytoczone w §§ 2, 3, 4-ym, posłużą nam do wyprowadzenia w sposób bardzo prosty związków dwuliniowych między peryodami całek hypereliptycznych.

Weźmy na uwagę peryody (2) całki I_1 wzdłuż torów A_1, A_2, B_1, B_2, które oznaczmy L_1, L_2, L_3, L_4:

$$\text{B)}\qquad y_i(z) = \int_{L_i} \frac{(x-z)\,dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}};$$

wówczas peryodami całki I_2 będą wyrażenia:

$$\text{B')}\qquad -2y'_i(z) = \int_{L_i} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}}.$$

Podstawiając według (8')

$$y_i = \psi^{-\frac{1}{2}} u_i,$$

mamy:

$$y'_i = \psi^{-\frac{1}{2}} u'_i - \frac{1}{2}\psi^{-\frac{3}{2}}\psi' u_i,$$

a więc:

$$u_i u'_k - u_k u'_i = \xi = \psi . (y_i y'_k - y_k y'_i),$$
$$i \gtrless k = 1, 2, 3, 4.$$

Wskutek tego ze związku liniowego jednorodnego (15) otrzymujemy żądany związek dwuliniowy między peryodami całek:

$$(17)\qquad \Sigma\, a_{ik}(y_i y'_k - y_k y'_i) = 0,$$

gdzie $a_{ik} = c_m$ są wielkościami stałemi.

Idzie o to, aby ten związek (11) zredukować do zwykłej formy Riemannowskiej, t. j. aby dla obranych dróg kanonicznych A, B bliżej określić spółczynniki a_{ik}.

W tym celu zauważmy, że związek ten dwuliniowy musi być niezależny od obiegów zmiennej z około punktów osobliwych równania (3), t. j. musi być niezmienny przy grupie podstawień tegoż równania.

Grupę tę podstawień znajdziemy łatwo znanym sposobem, śledząc przy obiegach punktu z około punktów a_i zmianę torów L_i, które należy sobie wyobrazić jako nitki rozciągliwe, rozpięte około punktów

$$\infty, z, a_1, a_2, a_3, a_4 .$$

W celu ułatwienia rozumowania wprowadzimy tory elementarne [1]), z których każdy obiega punkt z i punkt a_i w kierunku strzałki (fig. 3).

Fig. 3.

Mamy:

$$(17)\qquad \begin{aligned} L_1 &= A_1 = A'_1 = s_4\, s_3\, s_2\, s_1, \\ L_2 &= A_2 = s_4\, s_3\,, \\ L_3 &= B_1 = s_1\,, \\ L_4 &= B_2 = s_3\, s_2\,, \end{aligned}$$

gdzie s_i^{-1} jest torem s_i, przebieżonym w kierunku przeciwnym w kierunku strzałki.

Jeżeli więc, wychodząc z punktu M (fig. 3) z wartością $\sqrt{\psi\,.\,(x-z)}$ dodatną (na pierwszym liściu), nazwiemy wprost całkę:

$$\int_{s_i} \frac{(x-z)\,dx}{\sqrt{\psi\,(x)\,(x-z)}} = s_i\,,$$

to wtedy $s_i^{-1} = s_i$, a więc według (17):

$$(18)\qquad \begin{aligned} y_1 &= -\,s_1 + s_2 - s_3 + s_4\,, \\ y_2 &= -\,s_3 + s_4\,, \\ y_3 &= s_1\,, \\ y_4 &= -\,s_2 + s_3\,, \end{aligned}$$

skąd nawzajem:

[1]) por. Fuchs, Crelle, 71.

$$(19)\qquad \begin{aligned} s_1 &= y_3\,, \\ s_2 &= y_1 - y_2 + y_3\,, \\ s_3 &= y_1 - y_2 + y_3 + y_4\,, \\ s_4 &= y_1 + y_3 + y_4\,. \end{aligned}$$

Chcąc więc znaleść podstawienia dla y, wyszukamy naprzód podstawienia całek s_i.

W tym celu uporządkujmy punkty rozgałęzienia s_i w ten sposób, aby dla $k<i$ obieg trójkąta $z\, a_i\, a_k$ był ujemny (t. j. aby przy tym obiegu pole trójkąta $z\, a_i\, a_k$ pozostawało po ręce prawej), zaś dla $k>i$ obieg $z\, a_i\, a_k$ był dodatni.

Weźmy na uwagę tor s_i i niech punkt z obiega punkt a_k w kierunku ujemnym. Stosownie do poprzedzającego uporządkowania punktów a_i, rozróżnimy trzy przypadki.

1) $k<i$. Po obiegu zmiennej z otrzymamy z toru s_i (fig. 4):

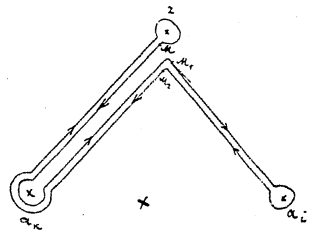

Fig. 4.

$$\bar{s}_i = s_k^{-1}\, s_i\, s_k\,.$$

Z uwagi więc, że w punkcie wyjścia M pierwiastek $\sqrt{\psi\,(x)\,(x-z)}$ posiada teraz wartość ujemną (na 2-gim liściu), w punkcie M_1 dodatnią, a w M_2 ujemną i z uwagi, że całka $s_k^{-1} = s_k$, mieć będziemy:

$$\bar{s} = -\,s_k + s_i - s_k\,,$$

czyli

$$(20)\qquad \bar{s}_i = s_i - 2\, s_k\,, \qquad \text{dla } k<i\,.$$

2) $k=i$. Przy obiegu punktu z około punktu a_i tor s_i zajmuje kolejno położenia wskazówki na zegarze (fig. 5) i powraca do swego pierwot-

nego położenia niezmieniony. Wówczas wprawdzie po obiegu pierwiastek $\sqrt{\psi(x)(x-z)}$ zmienia swój znak, jednocześnie jednak punkt z obiega ka-

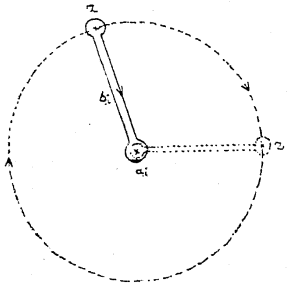

Fig. 5.

żdy element toru s_i raz jeden, przez co znowu znak pierwiastka się zmieni. Jest więc całka:

(21) $$\bar{s}_i = s_i, \qquad \text{dla} \quad k = i.$$

3) $k > i$. Po obiegu otrzymamy tor (fig. 6):

$$\bar{s}_i = s_k^{-1}\, s_i\, s_k.$$

Pamiętać trzeba jednak o tem, że w punktach M, M_1, M_2 wartości $\sqrt{\psi \cdot (x-z)}$

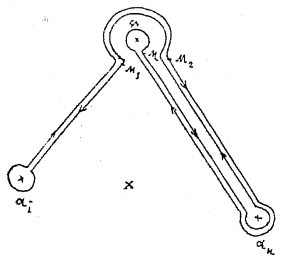

Fig. 6.

są wszystkie dodatnie (na 1-ym liściu); otrzymamy więc:

(22) $$\bar{s}_i = s_i + 2\, s_k, \qquad \text{dla} \quad k < i.$$

Z formuł (20), (21), (22) możemy teraz ułożyć tabelkę podstawień całek s przy obiegach około punktów a:

	a_1	a_2	a_3	a_4
$\bar{s}_1$	s_1	$s_1 + 2\,s_2$	$s_1 + 2\,s_3$	$s_1 + 2\,s_4$
$\bar{s}_2$	$s_2 - 2\,s_1$	s_2	$s_2 + 2\,s_3$	$s_2 + 2\,s_4$
$\bar{s}_3$	$s_3 - 2\,s_1$	$s_3 - 2\,s_2$	s_3	$s_3 + 2\,s_4$
$\bar{s}_4$	$s_4 - 2\,s_1$	$s_4 - 2\,s_2$	$s_4 - 2\,s_3$	s_4

Korzystając z tej tabelki i ze wzorów (18, 19) łatwo znajdziemy podstawienia dla y_i przy obiegach z.

(a) około punktu a_1:

(23) $$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= y_1 - 2\,y_3 \\ \bar{y}_2 &= y_2 \\ \bar{y}_3 &= y_3 \\ \bar{y}_4 &= y_4, \end{aligned}$$

(b) około punktu a_2:

(24) $$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= -\,y_1 + 2\,y_2 - 2\,y_3 \\ \bar{y}_2 &= \qquad\quad y_2 \\ \bar{y}_3 &= 2\,y_1 - 2\,y_2 + 3\,y_3 \\ \bar{y}_4 &= -\,2y_1 + 2y_2 + y_4; \end{aligned}$$

(c) około punktu a_3:

(25) $$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= -\,y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 \\ \bar{y}_2 &= -\,2y_1 + 3y_2 - 2y_3 - 2y_4 \\ \bar{y}_3 &= 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 \\ \bar{y}_4 &= -\,2y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4; \end{aligned}$$

(*d*) około punktu a_4:

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= -y_1 \qquad\qquad - 2y_3 - 2y_4\\
\bar{y}_2 &= -2y_1 + y_2 - 2y_3 - 2y_4\\
\bar{y}_3 &= +2y_1 \qquad\qquad + 3y_3 + 2y_4\\
\bar{y}_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad y_4
\end{aligned}
$$

Z podstawień tych (23, 24, 25, 26) korzystając, obliczymy nakoniec podstawienia dla wyrażeń:

$$y_i\, y'_k - y_k\, y_i' = (y_i\, y'_k).$$

I tak np. podstawienia obliczone z (23) są:

$$
\begin{aligned}
(\overline{y_1\, y'_2}) &= (y_1\, y'_2) + 2\,(y_2\, y'_3)\\
(\overline{y_1\, y'_3}) &= (y_1\, y'_3)\\
(\overline{y_1\, y'_4}) &= (y_1\, y'_4) - 2\,(y_3\, y'_4)\\
(\overline{y_2\, y'_3}) &= (y_2\, y'_3)\\
(\overline{y_2\, y'_4}) &= (y_2\, y'_4)\\
(\overline{y_3\, y'_4}) &= (y_3\, y'_4).
\end{aligned}
$$

Przy tych ostatnich podstawieniach ma, jak wiadomo, związek (17) pozostać bez zmiany t. j.:

$$\Sigma\, a_{ik}\, (\overline{y_i\, y_k}') = \Sigma\, a_{ik}\, (y_i\, y'_k),$$

skąd wynika, że: $2a_{12} + a_{23} = 0$, $-2a_{14} + a_{34} = a_{34}$, a więc:

$$a_{12} = 0\,, \quad a_{14} = 0.$$

Dla oznaczenia dalszych a_{ik} weźmy podstawienia odpowiadające (24):

$$
\begin{aligned}
(\overline{y_1\, y'_2}) &= -2\,(y_1\, y'_2) + (y_1\, y'_3) \qquad\qquad + 2\,(y_1\, y'_3)\\
(\overline{y_2\, y'_3}) &= +2\,(y_1\, y'_2) \qquad\qquad\qquad\qquad + 3\,(y_2\, y'_3)\\
(\overline{y_2\, y'_4}) &= +2\,(y_1\, y'_2) \qquad\qquad\qquad\qquad - 2\,(y_2\, y'_3) + (y_2\, y'_4)\\
(\overline{y_3\, y'_4}) &= \qquad\qquad + 2\,(y_1\, y'_3) + 2\,(y_1\, y'_4) - 2\,(y_2\, y'_3) - 2\,(y_2\, y'_4) + 3\,(y_3\, y'_4)
\end{aligned}
$$

skąd wniesiemy, iż:

$$a_{34} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{13} = a_{24}.$$

Związek zatem dwuliniowy (17) redukuje się do prostej postaci:

$$(27)\qquad (y_1\, y'_3 - y_3\, y'_1) + (y_2\, y'_4 - y_4\, y'_2) = 0.$$

W teoryi całek hypereliptycznych wprowadza się zwykle całki kształtu:

$$
(C)\qquad
\begin{aligned}
j_1 &= \int \frac{x\, dx}{\sqrt{\psi(x)\,(x-z)}}\,,\\
j_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)\,(x-z)}}\,,
\end{aligned}
$$

związane z całkami I_1, I_2 (A, § 1) równościami:

$$I_1 = j_1 - z\, j_2$$

$$I_2 = j_2\,.$$

Jeżeli więc oznaczymy peryody całek j_1, j_2 na torach A, B:

	A_1	A_2	B_1	B_2
j_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
j_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

mieć będziemy (B, B', § 5):

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \omega_{11} - z\,\omega_{21} \qquad\qquad -2y'_1 = \omega_{21}\\
y_2 &= \omega_{12} - z\,\omega_{22} \qquad\qquad -2y'_2 = \omega_{22}\\
y_3 &= \omega_{13} - z\,\omega_{23} \qquad\qquad -2y'_3 = \omega_{23}\\
y_4 &= \omega_{14} - z\,\omega_{24} \qquad\qquad -2y'_4 = \omega_{24}.
\end{aligned}
$$

Podstawiając to wyrażenie w (27), otrzymamy znaną formułę Riemanna:

$$(27^*)\qquad (\omega_{11}\,\omega_{23} - \omega_{21}\,\omega_{13}) + (\omega_{12}\,\omega_{24} - \omega_{14}\,\omega_{22}) = 0.$$

§ 6.

Z kolei przejdziemy do wyprowadzenia związków dwuliniowych między peryodami całek gatunku drugiego i pierwszego oraz związków między peryodami całek gatunku tylko drugiego.

Jako całki gatunku drugiego wprowadzimy funkcye:

$$(\mathrm{D})\qquad E_1 = \int^x \frac{(x-z)^3\,dx}{\sqrt{\psi(x)\,(x-z)}}\,,\qquad E_3 = \int^x \frac{(x-z)^2\,dx}{\sqrt{\psi(x)\,(x-z)}}\,,$$

które istotnie 1) są od siebie liniowo niezależne, i 2) – jak łatwo sprawdzić — są wszędzie skończone, z wyjątkiem punktu $x=\infty$, gdzie stają się nieskończenie wielkiemi.

Zauważmy jeszcze, że E_2 i E_4 można otrzymać z I_1 przez proste całkowanie:

$$(\mathrm{E})\qquad E_2 = -\frac{3}{2}\int I_1\,dz\,,\qquad E_4 = \frac{3\,.\,5}{2\,.\,2}\int dz\int I_1\,dz\,.$$

Peryody całki E_1 na torach A_1, A_2, B_1, B_2 nazwijmy:

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4;$$

wówczas peryodami całki E_2 będą całki $\int_{L_i} \frac{(x-z)^2\,dx}{\sqrt{\psi(x)\,(x-z)}}$, t. j.:

$$-\frac{2}{5}w'_1\,,\quad -\frac{2}{5}w'_2\,,\quad -\frac{2}{5}w'_3\,,\quad -\frac{2}{5}w'_4,\qquad \left(w' = \frac{dw}{dz}\right).$$

Peryody te w'_i wyrazimy przez y_i i ich pochodne.

Całkując równanie (3', § 2):

$$\frac{3}{16}\,y = \frac{1}{8}\,(\psi''(z)\,y')' + (\psi(z)\,y'')''\,,$$

względem z, mamy:

$$(28)\qquad \frac{1}{20}\,w_i' = \frac{1}{8}\,\psi''(z)\,y_i' + \psi'(z)\,y_i'' + \psi(z)\,y_i'''\,.$$

Stąd wynika, że:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{20}\,[(y_1\,w_3' - y_3\,w_1') + (y_2\,w_4' - y_4\,w_2')]\\
&= \frac{1}{8}\,\psi''(z)\,[(y_1\,y_3' - y_3\,y_1') + (y_2\,y_4' - y_4\,y_2')]\\
&\quad + \psi'(z)\,[(y_1\,y_3'' - y_3\,y_1'') + (y_2\,y_4'' - y_4\,y_2'')]\\
&\quad + \psi(z)\,[(y_1\,y_3''' - y_3\,y_1''') + (y_2\,y_4''' - y_4\,y_2''')];
\end{aligned}$$

stąd z uwagi na związek (27) i związek

$$(29)\qquad (y_1\,y_3'' - y_3\,y_1'') + (y_2\,y_4'' - y_4\,y_2'') = 0,$$

mamy:

$$(30)\qquad \begin{aligned}
&\frac{1}{20}\,[(y_1\,w_3' - y_3\,w_1') + (y_2\,w_4' - y_4\,w_2')]\\
&= \psi(z)\,[(y_1\,y_3''' - y_3\,y_1''') + (y_2\,y_4''' - y_4\,y_2''')].
\end{aligned}$$

O wyrażeniu

$$(31)\qquad (y_1\,y_3''' - y_3\,y_1''') + (y_2\,y_4''' - y_4\,y_2''') = f(z),$$

zauważymy, że jestto funkcya zmiennej z, posiadająca jako punkty osobliwe, możliwie tylko $a_1, a_2, a_3, a_4, \infty$, że następnie żaden z tych punktów nie jest istotnie osobliwy (nie jest bowiem istotnie osobliwy dla funkcyj $y_i(z)$ i ich pochodnych) i nakoniec, że ta funkcya pozostaje niezmienną przy podstawieniach (23, 24, 25, 26), t. j. przy dowolnych obiegach zmiennej z. Jestto więc funkcya jednowartościowa algebraiczna, t. j. wymierna.

Funkcyę tę znaleść możemy następującym sposobem:

Z równości (20) wynika:

$$\begin{aligned}
&[(y_1\,y_3''' - y_3\,y_1''') + (y_2\,y_4''' - y_4\,y_2''')]\\
&+ [(y_1'\,y_3'' - y_3'\,y_1'') + (y_2'\,y_4'' - y_4'\,y_2'')] = 0,
\end{aligned}$$

a więc według (31):

$$(y_1' y_3'' - y_3' y_1'') + (y_2' y_4'' - y_4' y_2'') = - f(z), \tag{32}$$

skąd znowu:

$$(y_1' y_3''' - y_3' y_1''') + (y_2' y_4''' - y_4' y_2''') = - f'(z). \tag{33}$$

Biorąc więc pochodną wyrażenia (31) i uwzględniając (33), mamy:

$$(y_1 y_3^{IV} - y_3 y_1^{IV}) + (y_2 y_4^{IV} - y_4 y_2^{IV}) = 2 f'(z).$$

Równość tę, pomnóżmy przez $\psi(z)$ i podstawmy z równania (3, § 1):

$$\psi y_i^{IV} = - 2 \psi' y_i''' - \frac{9}{8} \psi'' y_i'' - \frac{1}{8} \psi''' y_i' + \frac{3}{16} y_i;$$

mieć będziemy z uwagi na (31, 29, 27):

$$- 2 \psi' f = 2 \psi f',$$

skąd

$$f(z) = \frac{c}{\psi(z)}. \tag{34}$$

Stałą c znajdziemy, rozwijając lewą stronę wyrażenia (31) w okolicy któregokolwiek z punktów a_i np. najdogodniej, w okolicy punktu a_1.

W tym celu znajdziemy rozwinięcia w okolicy a_1 całek y_i.

Z teoryi równań różniczkowych Fuchsa[1]) wiadomo, że wykładniki k w szeregu:

$$y = (z-a)^k [A_0 + A_1 (z-a) + \ldots],$$

otrzymuje się z tak zw. „równania fundamentalnego określającego", które dla równania różniczkowego (3) redukuje się do:

$$k (k-1)^2 (k-2) = 0.$$

Stąd wynika, że wszystkie całki y_i równania (3) „należą" do wykładników k całkowitych dodatnich lub równych zeru.

[1]) Crelle J., t. 66.

Ponieważ nadto przy obiegu zmiennej z w kierunku ujemnym całki y_i ulegają podstawieniom (23), mamy rozwinięcia:

$$y_1 = P_1 (z-a_1) + \frac{y_3}{\pi i} \log (z-a_1)$$

$$y_2 = P_2 (z-a_1)$$

$$y_3 = P_3 (z-a_1)$$

$$y_4 = P_4 (z-a_1),$$

gdzie $P_i = A_0^{(i)} + A_1^{(i)} (z-a_1) + \ldots$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} &(y_1 y_3''' - y_3 y_1''') + (y_2 y_4''' - y_4 y_2''') = f(z) = \\ &- 2 \frac{y_3^2}{\pi i} \frac{1}{(z-a_1)^3} + 3 \frac{y_3 y_3'}{\pi i} \frac{1}{(z-a_1)^2} - 3 \frac{y_3 y_3''}{z-a_1} + P_1 (z-a_1). \end{aligned} \tag{35}$$

Zauważmy jednak, że $y_3 = \int\limits_{B_1} \frac{(x-z)^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{\psi(x)}}$ jest całką wziętą wzdłuż toru, okalającego w kierunku ujemnym punkty z i a_1. Jeżeli więc z znajdzie się w okolicy punktu a_1, to tor ten możemy uważać za koło o promieniu dowolnie małym. Mamy zatem dla $|z-a_1| < |x-a_1|$:

$$y_3(z) = y_3(a_1) + y_3'(a_1)(z-a_1) + \frac{y_3''(a_1)}{1.2} (z-a_1)^2 + \ldots,$$

gdzie:

$$y_3(a_1) = \int\limits_{B_1} \frac{(x-a_1)^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{\psi(x)}},$$

$$y_3'(a_1) = - \frac{1}{2} \int\limits_{B_1} \frac{(x-a_1)^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{\psi(x)}},$$

$$y_3''(a_1) = - \frac{1}{4} \int\limits_{B_1} \frac{(x-a_1)^{-\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{\psi(x)}}, \quad \text{i t. d.,}$$

(obieg B_1 jest ujemny).

Podstawiając w powyższe wyrażenia

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = (x-a_1)^{-\frac{1}{2}}\,\psi'(a_1)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{4}\frac{\psi''}{\psi'}(x-a_1)+\ldots\right]$$

i całkując po kole B_1 otrzymamy

$$y_3(a_1)=0$$

$$y_3'(a_1)=\pi i\;\psi'(a_1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_3''(a_1)=-\frac{\pi i}{8}\psi''(a_1)\,\psi'(a_1)^{-\frac{3}{2}}$$

i t. d.

tak, iż:

$$y_3(z)=(z-a_1)\left[+\pi i\;\psi'(a_1)^{-\frac{1}{2}}-\frac{\pi i}{16}\psi''(a)\,\psi'(a_1)^{-\frac{3}{2}}(z-a_1)+\ldots\right]$$

Podstawiając to wyrażenie w (35), mieć będziemy w okolicy punktu a_1:

$$f(z)=\frac{c}{\psi(z)}=\frac{\pi i\,\psi'(a_1)^{-1}}{z-a_1}+P(z-a_1),$$

Skąd wynika:

$$c=\pi i,$$

a więc:

$$f(z)=\frac{\pi i}{\psi(z)}.$$

Zatem, związek (30) między peryodami w_i' i y_k redukuje się do równania:

(30′) $$(y_1 w_3' - y_3 w_1') + (y_2 w_4' - y_4 w_2') = 20\,\pi i.$$

Biorąc pochodną wyrażenia (30′) względem z, mamy z uwagi na to, że $w_i'' = \frac{15}{4} y_i$, związek między peryodami w_i' i y_k'

(36) $$(y_1' w_3' - y_3' w_1') + (y_2' w_4' - y_4' w_2') = 0.$$

Stąd wynika przez różniczkowanie i z uwagi na (27):

(37) $$(y_1'' w_3' - y_3'' w_1') + (y_2'' w_4' - y_4'' w_2') = 0.$$

Nakoniec otrzymanie związków między peryodami w_i i peryodami w_k', $y_k\,y_k'$ także już nie przedstawia żadnych trudności.

Jakoż, całkując równość (28) względem z, mieć będziemy:

$$\frac{1}{20}w_i=\frac{1}{8}\int\psi''(z)\,y_i'\,dz+\psi(z)\,y_i',$$

czyli, ponieważ:

$$\int\psi''\,y_i'\,dz=\psi''\,y_i-\psi'''\,y_i-\psi'''\int y_i\,dz+\psi^{IV}\int dz\int y_i\,dz,$$

gdzie $\psi^{IV}=1.2.3.4$:

$$w_i=\frac{2}{45}\psi'''\,w_i'-\frac{1}{6}\psi''\,y_i-\frac{4}{3}\psi\,y_i''.$$

Mamy zatem:

$$(w_1'\,w_3-w_3'\,w_1)+(w_2'\,w_4-w_4'\,w_2)$$

$$=-\frac{1}{6}\psi''\left[(w_1'\,y_3-w_3'\,y_1)+(w_2'\,y_4-w_4'\,y_2)\right]$$

$$-\frac{4}{3}\psi\left[(w_1'\,y_3''-w_3'\,y_1'')+(w_2'\,y_4''-w_4'\,y_2'')\right].$$

Wyrażenie w 1-ej klamrze jest to lewa strona równania (30′) ze zmienionym znakiem, zaś wyrażenie w klamrze 2-ej jest lewą stroną równości (37).

A więc związek między peryodami w_i i w_k' całek gatunku 2-go jest:

(38) $$(w_1'\,w_3-w_3'\,w_1)+(w_2'\,w_4-w_4'\,w_2)=\frac{10}{3}\pi i\,\psi''.$$

Z tego związku otrzymamy znowu przez dwukrotne różniczkowanie dwa inne. I tak różniczkując raz jeden i podstawiając $w_i''=\frac{15}{4}y_i$, mieć będziemy związek między peryodami y_i, w_k:

$$(39) \qquad (y_1 w_3 - y_3 w_1) + (y_2 w_4 - y_4 w_2) = \frac{8}{9} \pi i \psi''' .$$

Różniczkując zaś (39) i uwzględniając (30′) mieć będziemy **związek między** y_i', w_k:

$$(40) \qquad (y_1' w_3 - y_3' w_1) + (y_2' w_4 - y_4' w_2) = \frac{4}{3} \pi i .$$

---

§ 7.

Od związków, wyprowadzonych w poprzedzającym ustępie przejdziemy do zwykłych związków **Riemannowskich**[1]), jeżeli jako całki drugiego gatunku wprowadzimy n. p.:

$$e_1 = \int^x \frac{x^3\, dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}} ,$$

$$e_2 = \int^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}} ,$$

związane z całkami E_1 i E_2 równościami:

$$E_1 = e_1 - 3z\, e_2 + 3z^2 j_1 - z^3 j_2,$$

$$E_2 = e_2 - 2z\, j_1 + z^2 j_2 .$$

Peryody całek e_1, e_2 nazwijmy η_{1i}, η_{2i}:

	A_1	A_2	B_1	B_2
l_1	η_{11}	η_{12}	η_{13}	η_{14}
l_2	η_{21}	η_{22}	η_{23}	η_{24}

[1]) Por. Königsberger: Vorl üb. Theorie der hyp. Integrale (Leipzig, 1878, p. 69 i 70).

wówczas:

$$w_i = \eta_{1i} - 3z\, \eta_{2i} + 3z^2 w_{1i} - z^3 w_{2i}$$

$$-\frac{2}{5} w_i' = \eta_{2i} - 2z\, w_{1i} + z^2 w_{2i} ,$$

Podstawiając we wzorach (36), (40), (30′), (39), (38) za w_i, w_i' powyższe wyrażenia oraz

$$y_i = w_{1i} - z\, w_{2i} ,$$

$$y_i' = -\frac{1}{2} w_{2i} ,$$

mieć będziemy:

$$(36^*) \qquad (w_{21}\eta_{23} - w_{23}\eta_{21}) + (w_{22}\eta_{24} - w_{24}\eta_{22}) = 0,$$

$$(40^*) \qquad (w_{21}\eta_{13} - w_{23}\eta_{11}) + (w_{22}\eta_{14} - w_{24}\eta_{12}) = -\frac{8}{3}\pi i ,$$

$$(30'^*) \qquad (w_{11}\eta_{23} - w_{13}\eta_{21}) + (w_{12}\eta_{24} - w_{14}\eta_{22}) = -8\pi i ,$$

$$(39^*) \qquad (w_{11}\eta_{13} - w_{13}\eta_{11}) + (w_{12}\eta_{14} - w_{14}\eta_{12}) = -\frac{16}{3}(z + \Sigma a_i)\pi i ,$$

$$(38^*) \qquad (\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{21}\eta_{13}) + (\eta_{12}\eta_{24} - \eta_{13}\eta_{22}) = +\frac{8}{3}(z\Sigma a_i + \sum_i \sum_k a_i a_k),$$

dla $i, k = 1, 2, 3, 4$ oraz $i < k$.

Wprawdzie całki e_1, e_2 są szczególne, gdyż punkty, w którym się stają nieskończenie wielkiemi, leży w nieskończoności, tworzą one jednak system całek gatunku II fundamentalny i każdą inną całkę tegoż gatunku o dowolnym punkcie nieskończonościowym można, jak wiadomo, liniowo wyrazić przez e_1, e_2, j_1, j_2.

---

§ 8.

Nakoniec zauważmy, że, rozwijając wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{vmatrix} = 0,$$

według wyznaczników częściowych (rzędu 2-go) pierwszego i drugiego wiersza, otrzymamy tożsamość:

$$(y_1 y_2')(y_3 y_4') - (y_1 y_3')(y_2 y_4') + (y_1 y_4')(y_2 y_3') = 0,$$

gdzie $(y_i y_k') = (y_i y_k' - y_k y_i')$, czyli z uwagi na (27):

(41) $$(y_1 y_2')(y_3 y_4') + (y_1 y_4')(y_2 y_3') + (y_1 y_3')^2 = 0.$$

Podobnie, wychodząc z wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{vmatrix} = 0,$$

i zważając na związek (29), otrzymamy tożsamość drugą:

(42) $$(y_1 y_2'')(y_3 y_4'') + (y_1 y_4'')(y_2 y_3'') + (y_1 y_3'')^2 = 0.$$

Jeżeli nakoniec rozwiniemy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \end{vmatrix} = \frac{c}{\psi^2},$$

(wartość tę $\frac{c}{\psi^2}$ znajdziemy przy pomocy równania różniczkowego 3') według wyznaczników częściowych 1-go i 4-go wiersza i dodamy wyrażenia tożsamościowo różne zeru:

$$(y_1 y_2''')(y_3 y_4''') - (y_1 y_3''')(y_2 y_4''') + (y_1 y_4''')(y_2 y_3''') = 0$$

i $$(y_1' y_2'')(y_3' y_4'') - (y_1' y_3'')(y_2' y_4'') + (y_1' y_4'')(y_2' y_3'') = 0,$$

otrzymamy związek:

(43) $$[(y_1 y_2''') + (y_1' y_2'')][(y_3 y_4''') + (y_3' y_4'')] + [(y_1 y_4''') + (y_1' y_4'')][(y_2 y_3''') + (y_2' y_3'')] + [(y_1 y_3''') + (y_1' y_3'')]^2 = \frac{c}{\psi^2}.$$

Gdy więc nazwiemy:

$$(y_1 y_2') = \zeta_1,\ (y_1 y_4) = \zeta_2,\ (y_1 y_3') = -(y_2 y_4') = \zeta_3,\ (y_2 y_3') = \zeta_4,\ (y_3 y_4') = \zeta_5,$$

to:

$$(y_1 y_2'') = \zeta_1',\quad (y_1 y_4'') = \zeta_2' \ldots$$

$$(y_1 y_2''') + (y_1' y_2'') = \zeta_1'',\quad (y_1 y_4''') + (y_1' y_4'') = \zeta_2'', \ldots$$

i tożsamości (41), (42), (43) przyjmą kształt:

(41') $$\zeta_1 \zeta_5 + \zeta_2 \zeta_4 + \zeta_3^2 = 0,$$

(42') $$\zeta_1' \zeta_5' + \zeta_2' \zeta_4' + \zeta_3'^2 = 0,$$

(43') $$\zeta_1'' \zeta_5'' + \zeta_2'' \zeta_4'' + \zeta_3''^2 = \frac{c}{\psi^2}.$$

Są to związki (16', § 4), zauważone przez p. Darboux.