Stąd oczywiście wynika, zważywszy na równanie (43) będzie:

$$(60) \qquad \left| x - \frac{1}{n} \sum_i x_i \right| \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2} \,,$$

co stanowi twierdzenie następujące: Biorąc za niewiadomą x średnią arytmetyczną jej wartości dostrzegalnych, popełniamy błąd, który, najprawdopodobniej, nie przenosi wartości strony prawej nierówności (60).

W analogicznym przypadku, wiadoma reguła Gaussa wyraża się nierównością

$$\left| x - \frac{1}{n} \sum_i x_i \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2} \,,$$

której strona prawa różni się od strony prawej nierówności (60) wartością prawdopodobną błędu najprawdopodobniejszego. Różnica ta pochodzi stąd, że Gauss przyjmuje a priori równym zeru błąd najprawdopodobniejszy. Ale błąd najprawdopodobniejszy jest, właściwie mówiąc, błędem prawdopodobnym systematycznym, którego, choćbyśmy nawet pewni byli dokładności narzędzia, zaniedbywać nie wolno z tego mianowicie powodu, że źródłem jego może być także i sam obserwator.

O ZASADZIE DIRICHLETA.

PODAŁ

S. ZAREMBA.

---

1. Chcemy w tej pracy pokazać, że z istnienia funkcyi Greena, odniesionej do obszaru (D), ograniczonego powierzchnią jednospójną (S), mającą w każdym punkcie określone i różne od zera promienie krzywizny, wywnioskować można możliwość zagadnienia Dirichleta dla tego obszaru nawet w tym przypadku, gdy wartości szukanej funkcyi na powierzchni (S) mają linie przerwy. Dodajemy, że w poniższem przedstawieniu dojdziemy do metody bardzo prostej rozwiązania następującego pytania. Niechaj $v(x, y, z)$ będzie funkcyą, czyniącą zadość równaniu Laplace'a wewnątrz powierzchni (S) i przyjmującą na tej powierzchni wartości z liniami przerwy; oznaczyć granicę, do której dąży funkcya $v(x, y, z)$, gdy punkt (x, y, z) na łuku danym dąży do punktu, położonego na jednej z linij przerwy. Pytanie to nie jest bez znaczenia dla tego, że od niego zależy rozciągnięcie na przestrzeń procesu „alternującego" Schwarza w zagadnieniu Dirichleta.

2. Uprościmy wysłowienie, zapożyczając na chwilę pewne terminy z teoryi elektryczności. Wyobraźmy sobie, że powierzchnia (S), utrzymana na potencyale zero, jest poddana wpływowi masy elektrycznej równej -1, skoncentrowanej w punkcie $M(x, y, z)$, położonym wewnątrz powierzchni. Oznaczmy przez $u(x, y, z, x', y', z')$ gęstość w punkcie $P(x', y', z')$ elektryczności indukowanej w tych warunkach na powierzchni (S). Wyznaczymy granicę niższą u_1 oraz granicę wyższą u_2 tej funkcyi u, opierając się na twierdzeniach następujących:

A). Niechaj (S_1) będzie powierzchnią zamkniętą, znajdującą się całkowicie wewnątrz powierzchni (S); styczną do tej ostatniej w punkcie P i nadto taką, aby punkt M był jej punktem wewnętrznym. Jeżeli oznaczymy przez u'_1 funkcyę, określoną dla powierzchni (S_1) tak samo, jak funkcya u była określoną dla powierzchni (S), będzie wtedy dla punktu P':

$$u_1' \leqslant u. \tag{1}$$

B). Niechaj (S_2) będzie powierzchnią całkowicie zewnętrzną względem powierzchni (S), mogącą składać się z kilku powierzchni zamkniętych i styczną do (S) w punkcie P; niechaj u'_2 będzie funkcyą analogiczną do funkcyi u i u', w odniesieniu do powierzchni (S_2). Będzie wtedy w punkcie P:

$$u \leqslant u_2'. \tag{2}$$

Aby dowieść pierwszego z tych twierdzeń, oznaczmy przez w potencyał warstwy pojedyńczej o gęstości u, rozpostartej na powierzchni (S), przez w'_1, zaś potencyał warstwy pojedyńczej o gęstości u_1', rozpostartej na powierzchni (S_1), Funkcye w_1 i u_1' w punkcie P, będą miały wartości równe, lecz w każdym innym punkcie powierzchni (S_1) różnica $w_1' - w_1$ będzie dodatnią. Jeżeli więc n oznacza normalną wewnętrzną do powierzchni (S) w punkcie P będzie:

$$\frac{dw_1'}{dn} \geqslant \frac{dw_1}{dn}.$$

Z drugiej strony, pochodne funkcyj w_1' i w_1, wzięte według normalnej do powierzchni (S) i (S_1) w punkcie P będą, jak wiadomo, równemi sobie. Wnosimy stąd bezpośrednio, że nierówność (1) istotnie zachodzi.

W podobny sposób udowodnić można twierdzenie drugie.

3. Z założenia uczynionego o powierzchni (S) wypływa, że istnieć będzie długość a taka, iż każda kula o promieniu a, styczna do tej powierzchni w punkcie P, znajdować się będzie albo całkowicie zewnątrz, albo też całkowicie wewnątrz tej powierzchni i będzie z nią miała jeden tylko punkt wspólny P. W całym poniższym wykładzie przyjmiemy, że najkrótsza odległość punktu M (do którego odnosi się funkcya u) od powierzchni (S) jest co najwyżej równa a. W tych warunkach punkt na powierzchni (S) najbliższy punktu M będzie jedynym.

Oznaczmy ten punkt przez O, weźmy go za początek osi spółrzędnych, pamiętając, aby oś z miała kierunek normalnej wewnętrznej do powierzchni (S) w punkcie O. Punkt M będzie oczywiście znajdował się na osi z.

Połóżmy:

$$\gamma = OM, \tag{3}$$

i otoczmy punkt O krzywą zamkniętą (C), nakreśloną na powierzchni (S). Krzywa ta podzieli powierzchnię na dwie części; niechaj (S') będzie częścią, zawierającą punkt O, (S'') zaś częścią drugą. Wybierzmy krzywą (C) tak, aby rzut jej na płaszczyznę x, y był kołem o środku w punkcie O; Niechaj δ będzie promieniem tego koła. Dość wziąć δ dość małe tak, aby prostopadła do płaszczyzny x, y spotykała część (S') powierzchni (S) tylko w jednym punkcie i aby nadto spełnił się warunek następujący: Niechaj (Σ) będzie kulą o promieniu a, styczną zewnętrznie do powierzchni (S) w punkcie P powierzchni (S'); wtedy będzie można niezależnie od położenia punktu P na powierzchni (S') zbudować kulę (Σ') o promieniu niewiększym od a, styczną w punkcie O do powierzchni (S) i ortogonalną do kuli (Σ). Przyjmiemy, że długość δ wybrano dostatecznie małą tak, aby można było uważać ją za niezależną od położenia punktu O na powierzchni (S).

To mając, rozważmy kulę (Σ_1) o promieniu a, styczną wewnętrznie do powierzchni (S) w punkcie $P(x', y', z')$, położonym na powierzchni (S'). Łatwo widzieć, że będzie można znaleść liczbę dodatnią λ, niezależną od położenia punktu O na powierzchni (S) i taką, aby pod jedynym warunkiem

$$x'^2 + y'^2 \leqslant \lambda\gamma \tag{4}$$

punkt M znajdował się wewnątrz kuli (Σ_1).

Gdy warunek (4) jest spełniony, wtedy w celu zastosowania twierdzenia ***(A)*** w Nr. 2 możemy powierzchnię (S_1) utożsamić z kula (Σ_1). Oznaczmy przez d odległość punktu M od środka kuli (Σ_1): niechaj będzie $r = \overline{MP}$. Wartość funkcyi u'_1 w punkcie P będzie wtedy daną przez wzór dobrze znany

$$u'_1 = \frac{a^2 - d^2}{4\pi a r^3}.$$

Z drugiej strony, kładąc $\varrho^2 = x'^2 + y'^2$ i oznaczając przez k stałą dodatnią, niezależną od położenia punktu O na powierzchni (S), znajdujemy:

$$a^2 - d^2 > 2a\gamma - \gamma^2 - k\varrho^2.$$

Ponieważ funkcya u, jak wiadomo, nie staje się ujemną, w żadnym punkcie powierzchni (S), możemy na zasadzie poprzedzającego następującym sposobem określić funkcyę u_1, która będzie służyła nam jako granica niższa

funkcyi u: w każdym punkcie powierzchni (S'), którego spółrzędne sprawdzają nierówność (4) będzie:

$$u_1 = \frac{\gamma}{2\pi r^3} - \frac{\gamma^2}{4\pi a r^3} - k\frac{\varrho^2}{4\pi a r^3}, \tag{5}$$

we wszystkich zaś innych punktach na (S') i we wszystkich punktach na (S'') będzie:

$$u_1 = 0. \tag{6}$$

4. Przejdźmy do szukania granicy wyższej u_2 funkcyi u i załóżmy najprzód, że punkt P, do którego odnosi się funkcya u, leży na części (S'') powierzchni (S). Zastosujmy twierdzenie ***(B)*** Nr. 2, zastępując powierzchnię (S_2) układem dwu kul: jednej (S'_2) o promieniu stałym $R < a$, stycznej zewnętrznie do powierzchni (S) w punkcie O, drugiej (S''_2) równej (S'_2) i stycznej zewnętrznie do powierzchni (S) w punkcie P. Przyjmijmy, że długość R wzięto dostatecznie małą, by stosunek odległości środków kul (S'_2) i (S''_2) do $2R$ nie był niższym od pewnej liczby stałej ν, większej od jedności bez względu na położenie punktu O na powierzchni (S) oraz punktu P na części (S'') tej powierzchni.

Wiadomo, że teorya obrazów elektrycznych pozwala bardzo łatwo zbudować funkcyę Greena dla przestrzeni, znajdującej się zewnątrz kul (S'_2) i (S''_2). Zastanawiając się nad otrzymanem w ten sposób wyrażeniem funkcyi i uwzględniając uczyniony wyżej wybór długości R, będzie można spostrzedz, że zawsze da się oznaczyć stała dodatnia A, niezależna od położenia punktu O na powierzchni (S) i punktu P na części (S'') tej powierzchni i taka, że w każdym punkcie kuli (S''_2) będzie:

$$u'_2 < A\gamma.$$

Wynika stąd, że w przypadku, gdy punkt P jest położony na części (S'') powierzchni (S); granicę wyższą u_2 funkcyi u można określić za pomocą równania

$$u_2 = A\gamma. \tag{7}$$

Załóżmy teraz, że punkt P jest położony na części (S') powierzchni (S). Niechaj (Σ) będzie kulą o promieniu a, styczną zewnętrznie do powierzchni (S) w punkcie P, (Σ') kulą o promieniu a', ortogonalną do kuli (Σ) i styczną w punkcie O do powierzchni (S). Powierzchnia zewnętrzna bryły, utworzonej z kul (Σ) i (Σ'), niechaj odgrywa rolę powierzchni Σ_2.

Przy pomocy teoryi obrazów elektrycznych (Maxwell, Traité d'électricité et de magnétisme, T. I, str. 316), oznaczając przez a, a' i r odległości punktu M od środków kul (Σ) i (Σ'') i od punktu P, przez l odległość punktu P od środka kuli (Σ'), znajdziemy łatwo następujące wyrażenie na wartość, jaką przyjmuje funkcya u'_2 w punkcie P:

$$u'_2 = \frac{a^2 - \alpha^2}{4\pi a r^3}\left\{1 - \frac{a'^3 r^3}{\{a'^2 r^2 + (a'^2 - \alpha'^2)(l^2 - \alpha'^2)\}^{\frac{3}{2}}}\right\}. \tag{8}$$

Jest jasnem, że:

$$u'_2 < \frac{a^2 - \alpha^2}{4\pi a r^3}. \tag{9}$$

Z drugiej strony, przyjmując, jak wyżej, $\varrho^2 = x'^2 + y'^2$, poznajemy bez trudności, że można znaleść stałą dodatnią m, niezależną od położenia punktu O na powierzchni (S) taką, aby było:

$$a^2 - \alpha^2 < 2\alpha\gamma + \gamma^2 + m\varrho^2, \tag{10}$$

skąd, ze względu na nierówność (9), wypływa:

$$u'_2 < \frac{\gamma}{2\pi r^3} + \frac{\gamma^2}{4\pi a r^3} + m\frac{\varrho^2}{4\pi a r^3}.$$

Moglibyśmy zatem położyć:

$$u_2 = \frac{\gamma}{2\pi r^3} + \frac{\gamma^2}{4\pi a r^3} + m\frac{\varrho^2}{4\pi a r^3}, \tag{11}$$

lecz uczynimy to tylko dla wartości ϱ, sprawdzających nierówność

$$\varrho^2 \leqslant \gamma, \tag{12}$$

zachowując sobie inne określenie funkcyi u_2 dla innych wartości ϱ. W tym celu połóżmy:

$$P = \{a'^2 r^2 + (a'^2 - \alpha'^2)(l^2 - \alpha'^2)\}^{\frac{3}{2}},$$

i napiszmy wzór (8) tak:

$$u'_2 = \frac{a' - \alpha'}{4\pi a r^3} \cdot \frac{(a^2 - \alpha^2)(a' + \alpha')(l^2 - \alpha'^2)}{P} \cdot \frac{1 + \frac{a'^2 r^2}{P} + \frac{a'^4 r^4}{P^2}}{1 + \frac{a'^3 r^3}{P^{\frac{3}{2}}}}.$$

Mamy $\frac{\alpha'^2 r^2}{P} < 1$, a stąd:

$$u'_2 < \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha'-\alpha'}{4\pi r^3} \cdot \frac{(\alpha^2-\alpha^2)(\alpha'+\alpha')(l^2-\alpha'^2)}{\alpha P},$$

a ponieważ $\alpha'-\alpha'=\gamma$, $P > \alpha'^2 r^2$, przeto:

$$(13) \qquad u'_2 < \frac{3}{2} \frac{\gamma}{4\pi r^2} \cdot \frac{a^2-\alpha^2}{r^2} \frac{\left(2+\frac{\gamma}{\alpha'}\right)(l^2-\alpha'^2)}{\alpha\alpha'}.$$

Zauważmy, że istnieją dwie stałe dodatnie h i g, niezależne od położenia punktu O na powierzchni S, takie, że $\alpha' > h\varrho^2$, $l^2-\alpha^2 < g\varrho^2$, skąd przy uwzględnieniu nierówności (10), (13) i przy warunku

$$(14) \qquad \varrho^2 \geqslant \gamma,$$

będzie:

$$u'_2 < n\frac{\gamma}{r^3},$$

gdzie n jest stałą, niezależną od położenia punktu O na powierzchni (S) A więc dla punktów części (S') powierzchni (S), których spółrzędne czynią zadość nierówności (14) możemy przyjąć:

$$(15) \qquad u_2 = n\frac{\gamma}{r^3}.$$

5. Dajmy, że mamy znaleść funkcyę $v(x, y, z)$, czyniącą zadość wewnątrz powierzchni (S) równaniu Laplace'a i przyjmującą w punkcie (x', y', z') tej powierzchni wartość, którą przedstawia funkcya $f(x', y', z')$. Oznaczmy przez ds element powierzchni (S) w punkcie (x', y', z') i niechaj $u(x, y, z, x', y', z')$ oznacza funkcyę, określoną w ust. 2. Teorya funkcyi Greena pozwala spodziewać się, że funkcya szukana wyrazi się za pomocą wzoru

$$(16) \qquad v = \int_S u(x, y, z, x' y' z') f(x', y', z')\, ds,$$

gdzie skaźnik S oznacza, że całkowanie ma być rozciągnięte na całą powierzchnię (S).

Okażemy, że tak jest w istocie, skoro tylko funkcya $f(x', y', z')$ czyni zadość warunkom następującym:

1°. jej wartość bezwzględna nie przekracza nigdy stałej dodatniej B;

2°. jest ona wogóle dobrze określoną i ciągłą, z wyjątkiem pewnych linij, których ogół oznaczmy przez (L) przy przejściu, przez które zmienia się nagle o ilość skończoną, stając się nieoznaczoną na samych liniach.

Funkcya, określona równaniem (16), czyni zadość, jak widzimy, równaniu Laplace'a wewnątrz powierzchni (S); idzie więc tylko o przekonanie się, że przyjmuje wartości, przepisane na samej powierzchni. Wypływa to bezpośrednio z twierdzenia następującego:

Oznaczmy przez γ najkrótszą odległość punktu (x, y, z) od powierzchni (S) i niechaj będzie:

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2;$$

różnica

$$(17) \qquad v - \frac{\gamma}{2\pi} \int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds,$$

dąży równomiernie do zera, gdy γ do zera dąży. Inaczej mówiąc, każdej liczbie dodatniej dowolnie małej ε odpowiada liczba dodatnia μ taka, że przy warunku $\gamma < \mu$ jest

$$\left| v - \frac{\gamma}{2\pi} \int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds \right| < \varepsilon.$$

Aby tego dowieść, przyjmijmy — co nam wolno — że γ czyni zadość równocześnie trzem nierównościom:

$$\gamma < a, \quad \gamma < \frac{\delta^2}{\lambda}, \quad \gamma < \delta^2,$$

gdzie δ i λ są elementami, określonemi w ust. ***3.*** W tem założeniu, bez szkody dla ogólności, można przyjąć, że:

$$f(x', y', z') \geqslant 0,$$

bez względu na położenie punktu (x', y', z') na powierzchni (S). Lecz przy tych warunkach jest:

$$(18) \qquad \int_S f(x', y', z')\, u_1\, ds < \int_S f(x', y', z')\, u\, ds < \int_S f(x', y', z')\, u_2\, ds.$$

Otóż uwzględniając otrzymane wyżej wartości na u_1 i u_2, znajdziemy z łatwością, że każda z różnic:

$$\int_s f(x'\,y'\,z')\,u_1\,ds - \frac{\gamma}{2\pi}\int_s \frac{f(x'\,y'\,z')}{r^3}\,ds\,,$$

$$\int_s f(x'\,y'\,z')\,u_2\,ds - \frac{\gamma}{2\pi}\int_s \frac{f(x',\,y',\,z')}{r^3}\,ds\,,$$

dąży równomiernie do zera wraz γ. A więc na mocy nierówności (18) różnica (17) ma istotnie tę własność, którą chcieliśmy uzasadnić.

Jest tedy jasnem, że pytanie, postawione w ustępie *1* można uważać za rozwiązane.

O PERYODACH CAŁEK HYPERELIPTYCZNYCH RODZAJU $p = 2$.

NAPISAŁ

STANISŁAW KĘPIŃSKI.

W kilku rozprawach o równaniach różniczkowych [1]), którym czynią zadość peryody całek hypereliptycznych, rozważanych jako funkcye jednego z punktów rozgałęzienia powierzchni Riemanna (dwuliściowej), powraca Fuchs kilkakrotnie do wyprowadzenia (z własności wspomnianych równań) znanych związków dwuliniowych, istniejących między owemi peryodami.

Ogranicza się jednak Fuchs ostatecznie do wyprowadzenia związków dwuliniowych, istniejących tylko między peryodami całek gatunku pierwszego (t. j. wszędzie skończonych). Nadto, biorąc za punkt wyjścia równanie różniczkowe, któremu czynią zadość peryody całki

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)\,(x-z)}}\,,$$

---

[1]) L. Fuchs: Die Periodicitätsmoduln der hyperellipt. Integrale etc., Crelle's J., t. 71; Ueber rationale Verbindung der Periocidätsint. etc. ibidem; Sitzungber. der Akad. der Wissensch. Berlin, 1888, 1889, 1890.

R. Fuchs: Ueber die Percodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale, Crelle's J., Bd. 119, 1898.