jest jednakowoż ilościowo zupełnie analogicznym do odnośnego rezultatu dawniejszej teoryi, w której natężenie prądu określono jako „ilość elektryczności przepływającej przez przekrój przewodnika“ w ciągu jednostki czasu.

Interpretacyę wszelkich innych pojęć (pomocniczych lub mających na celu skrócone wysłowienie odnośnych twierdzeń) zwykłej teoryi, która w rachunkach przynajmniej zakłada ciągłość przestrzenną materyi grubszej, można drogą powyżej wskazaną wyprowadzić bez trudności z założeń zasadniczych i twierdzeń głównych wyłożonej tu teoryi molekularnej.

O PRAWIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA BŁĘDU.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Traktując ten sam przedmiot w r, 1894 [1]), zdołałem uniknąć drugiej hypotezy Gaussa, czyli tak zwanego prawa średniej arytmetycznej; nie mogłem się tam jednak ustrzedz hypotezy pierwszej, mianowicie założenia, że prawdopodobieństwo błędu jest funkcyą tylko błędu.

W pracy niniejszej odrzucam obie hypotezy Gaussa, a wychodzę natomiast z zasady ogólnej, że prawdopodobieństwo popełnienia błędu, przy dostrzeganiu pewnej niewiadomej, zależy od tej niewiadomej i błędu; jest to oraz funkcya przerywana. Zadanie polega na tem, aby dobrać funkcyę ciągłą dwóch zmiennych, któraby w odpowiednich punktach ową funkcyę przerywaną odtwarzała. Ale wtedy zadanie jest nieoznaczonem; oznaczonem należy je dopiero uczynić przez wybór funkcyi, najlepiej celowi odpowiadającej. W tem właśnie wyborze pomienionej funkcyi leży cała trudność zadania. Ośmielam się mniemać, że trudność tę pokonałem szczęśliwie.

---

[1]) Prace mat.-fiz., t. V, „O metodzie najmniejszych kwadratów“ str. 103—117.

§ 1.

Wyobraźmy sobie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ogólnie x_i, jako wartości dostrzegalne niewiadomej x, otrzymane w jednakowych warunkach i godne jednakowego zaufania [1]). Wartościom tym odpowiadają błędy

(1) $$x-x_1,\ x-x_2,\ \ldots,\ x-x_n,$$

które uważać należy jako zdarzenia wzajemnie niezależne, a prawdopodobieństwo błędu

(2) $$\Delta_i = x - x_i,$$

który w szeregu (1) powtarza się, powiedzmy, m_i razy, wyraża się, na zasadzie twierdzenia J. Bernoulli'ego, granicą ilorazu

(3) $$q_i = (m_i / n)_{n=\infty}.$$

Zauważmy jednak, że q_i wyraża prawdopodobieństwo błędu Δ_i w tem tylko założeniu, iż popełniony został przy dostrzeganiu jakiejkolwiek niewiadomej x. Jeśli więc oznaczymy przez r_i prawdopodobieństwo, że błąd Δ_i popełniony został istotnie przy dostrzeganiu niewiadomej x, a nie innej, wówczas prawdopodobieństwo popełnienia błędu Δ_i, dodajmy: przy dostrzeganiu niewiadomej x, — wyraża się iloczynem

(4) $$p_i = r_i\, q_i,$$

który już stanowi zupełne określenie prawdopodobieństwa błędu.

Widoczna, że prawdopodobieństwo p_i zależy od x i Δ_i; mamy tedy ogólnie:

(5) $$p_i = \varphi\,(x, \Delta_i).$$

Lecz że p_i odnosi się tylko do tych układów wartości x, Δ_i, które wyrażać mogą niewiadomą i jej odpowiadające błędy, przeto p_i jest funkcyą (x, Δ_i) przerywaną. Możemy jednak pomyśleć sobie funkcyę ciągłą $\varphi\,(x, \Delta)$ któraby w odpowiednich punktach (x, Δ_i) odtwarzała wartości p_i. Zadanie jest wogóle nieoznaczonem, bo funkcyj $\varphi\,(x, \Delta)$, zadość czyniących warunkom (5), jest nieskończenie wiele. Idzie tu wszakże przy tem i nadewszystko o to, aby z pomiędzy możliwych funkcyj $\varphi\,(x, \Delta)$ wybrać najlepiej odpowiadającą naszemu celowi; jak zaś należy rozumieć to „najlepiej", wyjaśnimy zaraz.

[1]) W ten sposób wyrażamy, że wartości x_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ dostrzeżone zostały przez tego samego obserwatora i tem samem narzędziem.

Jakąkolwiekby była funkcya $\varphi\,(x, \Delta)$, byleby zadość czyniąca warunkom (5), iloczyn

(6) $$\varphi\,(x, \Delta_1)\,\varphi\,(x, \Delta_2)\ldots\varphi\,(x, \Delta_n)$$

wyobrażać będzie prawdopodobieństwo spółistnienia błędów Δ_i. Zauważmy jednak, że każdy czynnik tego iloczynu, jak i sam iloczyn, wyraża odnośne prawdopodobieństwo tylko dopóty, dopóki x wyobraża wartość niewiadomej prawdziwą, bo tylko dopóty spełniają się warunki (5). Po za tem, ani żaden czynnik pomienionego iloczynu, ani sam ten iloczyn, nie może już wyrażać prawdopodobieństwa. Owóż, przez funkcyę $\varphi\,(x, \Delta)$, odpowiadającą naszemu celowi „najlepiej", rozumieć będziemy taką i tylko taką, dla której: z pomiędzy różnych wartości, pomyślanych na niewiadomą x, ta jest zarazem i najbliższą prawdziwej, która przywodzi iloczyn (6) do maximum. Wówczas bowiem to maximum posiadać będzie wartość możliwie zbliżoną do iloczynu $p_1\, p_2 \ldots p_n$, czyli do prawdopodobieństwa spółistnienia błędów prawdziwych Δ_i; a właśnie, przyjmując za prawdopodobieństwo p funkcyę $\varphi\,(x, \Delta)$ ciągłą, o to nam głównie iść powinno, żeby, wobec niemożliwości wyrażenia wtedy ściśle tego prawdopodobieństwa, wyrazić je przynajmniej możliwie najdokładniej.

Stawiamy przeto zadanie wyznaczenia takiej funkcyi ciągłej $\varphi\,(x, \Delta)$, dla której: wartość x, przywodząca iloczyn (6) do maximum, jest zarazem możliwie najbliższą wartości niewiadomej x prawdziwej.

Wartość niewiadomej x, zadość czyniącą powyższym dwóm warunkom, nazywać będziemy wartością tej niewiadomej „najprawdopodobniejszą".

---

§ 2.

Zamiast iloczynu (6), możemy rozważać jego logarytm naturalny. Jeżeli oznaczymy wtedy przez $\bar{x}$ wartość niewiadomej x najprawdopodobniejszą i założymy odpowiednio:

(7) $$\bar{\Delta}_i = \bar{x} - x_i,$$

to warunek konieczny maximum tego iloczynu wyrazi się równaniem:

(8) $$\sum_i \left\{ \frac{\partial \lg \varphi\,(\bar{x}, \bar{\Delta}_i)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \lg \varphi\,(\bar{x}, \bar{\Delta}_i)}{\partial \bar{\Delta}_i} \right\} = 0.$$

Oznaczmy, dla krótkości, stronę lewą tego równania przez λ, t. j. założmy:

$$\lambda = \sum_i \left\{ \frac{\partial \lg (\overline{x}, \overline{\Delta}_i)}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \lg \varphi (\overline{x}, \overline{\Delta}_i)}{\partial \overline{\Delta}_i} \right\} \tag{9}$$

i zauważmy, że według tego założenia, λ jest funkcyą ilości $\overline{x}, \overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_n$. Jeśli więc w wyrażeniu λ uwzględnimy podstawienia (7) i rozwiążemy równanie $\lambda = 0$ względem $\overline{x}$, znajdziemy na $\overline{x}$ funkcyę ilości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, która to równanie sprowadza do tożsamości. W tem rozumieniu tożsamości $\lambda = 0$, będziemy mieli również tożsamościowo $\partial\lambda / \partial x_i = 0$.

W myśl powyższej uwagi, otrzymujemy układ równań:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{d\lambda}{d\overline{x}} \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{\Delta}_i} = 0, \tag{10}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

w którym

$$\frac{d\lambda}{d\overline{x}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{x}} + \sum_i \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{\Delta}_i}, \tag{11}$$

wyobraża pochodną λ względem $\overline{x}$ zachodzącego wyraźnie i za pośrednictwem $\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_n$.

Przy pomocy związku (11), z układu równań (10) znajdujemy:

$$\sum_i \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} = \mu, \tag{12}$$

gdzie

$$\mu = \frac{\dfrac{d\lambda}{d\overline{x}} - \dfrac{\partial \lambda}{\partial \overline{x}}}{\dfrac{d\lambda}{d\overline{x}}}. \tag{13}$$

Ponieważ równanie $\lambda = 0$, czyli równanie (8), wyraża warunek konieczny maximum iloczynu (6) ze względu na zmienną x, przeto pochodna $d\lambda / d\overline{x}$ powinna być ujemną, albo równą zeru. Powiadam, że $d\lambda / d\overline{x}$ zerem być nie może.

Jakoż, oczywista, że ani jedna z pochodnych $\partial\overline{x} / \partial x_i$ nie może być nieskończenie wielką. Jeśliby więc było $d\lambda / d\overline{x} = 0$, otrzymalibyśmy wtedy z równań (12) i (13) oraz układu (10):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \overline{x}} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{\Delta}_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

[illegible] λ, czyli strona lewa równania (8), nie zawierałyby wtedy ani $\overline{x}$, ani $\overline{\Delta}_i$, co być oczywiście nie może. Pozostaje przeto możliwą tylko wartość ujemna dla pochodnej $d\lambda / d\overline{x}$, t. j. warunek

$$\frac{d\lambda}{d\overline{x}} < 0. \tag{15}$$

---

§ 3.

Skorośmy się już upewnili, że $d\lambda / d\overline{x}$ zerem być nie może, funkcya $\overline{x}$ czyni zadość z pewnością równaniu różniczkowemu (12), w którem μ, według wzorów (13) i (9), zależy od $\overline{x}, \overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_n$, a więc zależy od $\overline{x}$ wyraźnie i za pośrednictwem $\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_n$, a od x_i za pośrednictwem $\overline{\Delta}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ponieważ jednak równanie (12) jest cząstkowem, wyraża ono tylko warunek konieczny dla wyznaczenia funkcyi $\overline{x}$. Tę funkcyę $\overline{x}$ należy zatem poddać jeszcze jednemu warunkowi, a mianowicie: wyrazić, zgodnie z wymaganiem § 1, że z pomiędzy wszystkich, zadość czyniących równaniu (12) ma się nadawać „najlepiej“ do odtwarzania wartości niewiadomej x prawdziwej.

Zasadnicza różnica między niewiadomą x i jej wartością najprawdopobniejszą $\overline{x}$ polega oczywiście na tem, że pierwsza od punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zgoła nie zależy, a druga jest funkcyą tego punktu; mamy tedy w tem rozumieniu

$$dx = 0, \tag{16}$$

$$d\overline{x} = \sum_i \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} dx_i. \tag{17}$$

Lecz że funkcya $\overline{x}$ ma w punkcie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ odtwarzać niewiadomą x możliwie najlepiej, a niewiadoma ta, jak widać z równania (16), posiada charakter stałej nie zaś funkcyi, przeto funkcya $\overline{x}$ powinna możliwie dokładnie odtwarzać wogóle stałą, lub, co jest to samo, powinna zależyć od punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ minimalnie. Stąd wypływa, że z pomiędzy wszystkich funkcyj $\overline{x}$, zadość czyniących równaniu (12), ta najlepiej odpowiada naszemu celowi, której różniczka $d\overline{x}$ zawiera się w przedziale najmniejszym; pomieniona bowiem różniczka zerem być ściśle nie może, ale najbliższą zera być może.

Jakoż, z równania (17) wynika następujące:

$$d\overline{x}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i}\right)^2 \sum_i dx_i^2 - \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} dx_j - \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_j} dx_i\right)^2, \tag{18}$$

a z tego wynika znowu nierówność

$$|d\overline{x}| \leqslant \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i}\right)^2 \sum dx_i^2}. \tag{19}$$

W nierówności tej czytamy, że przedział, w którym się zawiera różniczka $d\overline{x}$, posiada minimum, i że je osiąga pod warunkiem następującym:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i}\right)^2 = minimum. \tag{20}$$

Pod warunkiem tedy (20), różniczka funkcyi $\overline{x}$ jest najwięcej zbliżoną do zera, a sama funkcya $\overline{x}$ do stałej, jak być właśnie miało.

---

§ 4.

Oznaczmy przez $\delta\overline{x}$ waryacyę funkcyi $\overline{x}$, tylko nie względem punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ale względem jej natury. Biorąc w tem założeniu waryacye równań (20) i (12), znajdziemy:

$$\sum_i \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} \frac{\partial\, \delta\overline{x}}{\partial x_i} = 0, \tag{21}$$

oraz

$$\sum_i \frac{\partial\, \delta\overline{x}}{\partial x_i} = \frac{d\mu}{d\overline{x}}\, \delta\overline{x}, \tag{22}$$

gdzie $d\mu/d\overline{x}$ wyobraża pochodną ilości μ względem $\overline{x}$, zachodzącego wyraźnie i za pośrednictwem ilości Δ_i.

Oznaczmy teraz przez ω czynnik, mający się dopiero wyznaczyć i, pomnożywszy równanie (21) przez $1/\delta\overline{x}$, a równanie (22) przez $\omega/\delta\overline{x}$, dodajmy je stronami odpowiedniemi; znajdziemy:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} + \omega\right) \frac{\partial \lg \delta\overline{x}}{\partial x_i} = \omega \frac{d\mu}{d\overline{x}}. \tag{23}$$

W równaniu (23), kosztem nieoznaczoności czynnika ω, funkcya $\lg \delta\overline{x}$ staje się zupełnie dowolną, tak, że równanie to rozpada się na $n+1$ równań, z których jedno jest:

$$\frac{d\mu}{d\overline{x}} = 0, \tag{24}$$

a n pozostałych są postaci następującej:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} + \omega = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Z równań (25) otrzymujemy:

$$d\overline{x} = -\omega\, d\sum_i x_i, \tag{26}$$

co dowodzi, że $\overline{x}$ i ω mogą zależeć jedynie od sumy $\sum_i x_i$, a więc, że ω jest funkcyą samego $\overline{x}$. Rugując przeto pochodne $\partial\overline{x}/\partial x_i$ z równań (12) i (25), znajdujemy związek

$$\mu = -n\omega, \tag{27}$$

z którego wypływa, że μ zależyć tylko może od samego $\overline{x}$, podczas gdy według równania (24) to samo μ od $\overline{x}$ zależeć zgoła nie powinno. Związek (27) utrzymuje się więc jedynie pod warunkiem, że μ i ω są liczbami stałemi.

Skoro μ stałe, z równań (26) i (27) otrzymujemy

$$\overline{x} = \mu\left(\frac{1}{n} \sum_i x_i + \varepsilon\right), \tag{28}$$

rozumiejąc przez ε nową stałą.

5.

Kiedy już funkcya $\overline{x}$ jest wiadoma, możemy przystąpić do wyznaczenia natury funkcyi $\varphi(x, \Delta)$. W tym celu uwzględnijmy w równaniu (13) podstawienie (11), t. j. wyraźmy to równanie pod postacią:

$$\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{x}} + (\mu - 1) \sum_i \frac{\partial \lambda}{\partial \Delta_i} = 0. \tag{29}$$

Ze względu na założenie (9), całką tego równania jest

$$\lambda = \sum_i F\{(1-\mu)\,\bar{x} + \mu\,\bar{\Delta}_i\}, \tag{30}$$

gdzie F jest symbolem funkcyi dającej się łatwo wyznaczyć.

Jakoż, równanie $\lambda = 0$ powinno być tożsame z równaniem (28); wyrażając zaś to ostatnie pod postacią

$$\sum_i \{(1-\mu)\,\bar{x} + \mu\,(\bar{\Delta}_i - \varepsilon)\} = 0 \tag{31}$$

i bacząc na nierówność (15), spostrzegamy, że funkcyę F w (30) należy tak uszczególnić, iżby było

$$\lambda = -\,2\left(\frac{h}{\mu}\right)^2 \sum_i \{(1-\mu)\,\bar{x} + \mu\,(\bar{\Delta} - \varepsilon)\}. \tag{32}$$

gdzie h oznacza stałą.

Tym sposobem na ilość λ mamy dwa wyrażenia: (9) i (32). Z porównania tych wyrażeń otrzymujemy tożsamość, a z tej wynika znowu równanie następujące:

$$\frac{\partial \lg \varphi(x,\Delta)}{\partial x} + \frac{\partial \lg \varphi(x,\Delta)}{\partial \Delta} = -\,2\left(\frac{h}{\mu}\right)^2 \{(1-\mu)\,x + \mu\,(\Delta - \varepsilon)\}. \tag{33}$$

Całką tego równania jest

$$\lg \varphi(x,\Delta) = \lg \psi(x-\Delta) - h^2\left(\frac{1-\mu}{\mu}\,x + \Delta - \varepsilon\right)^2,$$

albo raczej

$$\varphi(x,\Delta) = \psi(x-\Delta)\,e^{-h^2\left(\frac{1-\mu}{\mu}x + \Delta - \varepsilon\right)^2}, \tag{34}$$

gdzie ψ oznacza symbol funkcyi dowolnej.

---

§ 6.

Ściśle rzeczy biorąc, wzór (34) nie wyraża jeszcze prawdopodobieństwa błędu Δ, popełnionego przy dostrzeganiu niewiadomej x, ale wyraża dopiero taką funkcyę $\varphi(x,\Delta)$, dla której: wartość x, przywodząca iloczyn (6) do

maximum, jest jednocześnie i funkcyą punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i możliwie blizką stałej.

Z rozumowania wszakże naszego wynika oraz i to, że ta właśnie funkcya $\varphi(x,\Delta)$, jakkolwiek ciągła, nadaje się przecież do wyrażenia prawdopodobieństwa błędu z pomiędzy wszystkich funkcyj ciągłych najlepiej, a w miarę im więcej punktów płaszczyzny x, Δ wyczerpują możliwe układy wartości niewiadomej x i jej odnośnego błędu Δ, z tem większem przybliżeniem funkcya $\varphi(x,\Delta)$ wyraża prawdopodobieństwo błędu.

To wiedząc, zauważmy przedewszystkiem, że funkcya $\varphi(x,\Delta)$ powinna mieć maximum; w przeciwnym bowiem razie mogłaby ona nieograniczenie rosnąć, a wiemy, że prawdopodobieństwo nie przekracza nigdy jedności.

Ponieważ, według (34), układ wartości (x,Δ), przywodzący $\varphi(x,\Delta)$ do maximum, zadość czyni równaniom

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\psi'(x-\Delta)}{\psi(x-\Delta)} - 2h^2\left(\frac{1-\mu}{\mu}\,x + \Delta - \varepsilon\right)\frac{1-\mu}{\mu} = 0,\\ &-\frac{\psi'(x-\Delta)}{\psi(x-\Delta)} - 2h^2\left(\frac{1-\mu}{\mu}\,x + \Delta - \varepsilon\right) = 0,\end{aligned}\right. \tag{35}$$

które się redukują do następujących:

$$\frac{1-\mu}{\mu}\,x + \Delta - \varepsilon = 0, \qquad \psi'(x-\Delta) = 0, \tag{36}$$

przeto widoczna, że spółcześnie z $\varphi(x,\Delta)$, osiąga także maximum i funkcya $\psi(x-\Delta)$.

Załóżmy więc

$$\psi(x-\Delta) = [max.\ \psi(x-\Delta)]\ \Theta(x-\Delta), \tag{37}$$

gdzie oczywiście

$$0 \leqslant \Theta(x-\Delta) \leqslant 1, \tag{38}$$

a tem samem, zamiast (34), połóżmy

$$\varphi(x,\Delta) = [max.\ \psi(x-\Delta)]\ \Theta(x-\Delta)\,e^{-h^2\left(\frac{1-\mu}{\mu}x + \Delta - \varepsilon\right)^2}. \tag{39}$$

Powróćmy teraz do wyrażenia funkcyi $\bar{x}$, (28), i zauważmy, że zawiera ono dwie stałe: ε i μ, z których pierwsza jest liczbą mianowaną, a druga oderwaną, i gdzie od znaczenia pierwszej zależy wartość drugiej. Nadajmy stałej ε znaczenie błędu najprawdopodobniejszego, t. j. załóżmy

$\varphi(x, \varepsilon) = max.\ \varphi(x, \Delta)$ i szukajmy odpowiedniej wartości μ. Ponieważ według (39):

$$\varphi(x, \varepsilon) = [max.\ \psi(x-\Delta)]\ \Theta(x-\varepsilon)\ e^{-h^2\left(\frac{1-\mu}{\mu}x\right)^2},$$

aby więc stało się zadość założonemu warunkowi, mieć powinniśmy:

(40) $\Theta(x-\varepsilon) = 1,$ (41) $\mu = 1.$

Z równania (40) wynika

(42) $$x = x_0 + \varepsilon,$$

gdzie x_0 jest pierwiastkiem równania $\Theta(x_0) = 1$, który widocznie jest wartością niewiadomej najprawdopodobniejszą dostrzegalną; na mocy zaś równania (41), wzory (28) i (39) przywodzą się do następujących:

(43) $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i + \varepsilon,$$

oraz

(44) $$\varphi(x, \Delta) = [max.\ \psi(x-\Delta)]\ \Theta(x-\Delta)\ e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}.$$

Pozostaje tedy wyznaczyć jeszcze $max.\ \psi(x-\Delta)$.

W tym celu zauważmy, że niewiadoma x i błąd Δ zawierają się z pewnością między $-\infty$ i $+\infty$, a więc że

(45) $$\frac{max.\ \psi(x-\Delta)}{d\Delta\ dx}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}\,d\Delta\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta(x-\Delta)\,dx = 1.$$

Ale ponieważ całka z czynnikiem podcałkowym dx od Δ nie zależy, przeto zakładając:

(46) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta(x-\Delta)\,dx = I$$

i wiedząc, że

(47) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}\,d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

z równania (45) znajdziemy:

$$max.\ \psi(x-\Delta) = \frac{h\,d\Delta\,dx}{I\sqrt{\pi}},$$

i wzór (44) przyjmie ostatecznie postać:

(48) $$\varphi(x, \Delta) = \frac{h\,\Theta(x-\Delta)}{I\sqrt{\pi}}\ e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}\,d\Delta\,dx.$$

Na mocy równania (46), z wzoru (48) otrzymujemy:

(49) $$\frac{1}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, \Delta)\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\ e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}\,d\Delta.$$

Wzór (49) wyraża prawdopodobieństwo błędu w założeniu, że niewiadoma ma wartość jakąkolwiek; jest to, wyjąwszy stałą ε, prawo Gaussa. Na zasadzie tego wyniku z wzoru (48) wypływa, że prawdopodobieństwo błędu Δ, popełnionego przy dostrzeganiu niewiadomej x, jest iloczynem prawdopodobieństwa $\Theta(x-\Delta)\,dx/I$, że błąd Δ dotyczy niewiadomej x, przez prawdopodobieństwo $h\,e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}\,d\Delta/\sqrt{\pi}$, że wartością tego błędu jest Δ.

---

§ 7.

Zakładając $x - \Delta = a$, wzór (48), na mocy równania (42), możemy jeszcze tak wyrazić:

(50) $$\chi(a, x_0) = \frac{h\,dx_0\,da}{I\sqrt{\pi}}\ \Theta(a)\ e^{-h^2(a-x_0)^2}.$$

i wtedy, w założeniu, że wartością niewiadomej najprawdopodobniejszą dostrzegalną jest x_0, wyraża on prawdopodobieństwo, że a jest także jedną z wartości dostrzegalnych tej niewiadomej. Ponieważ jednak, między różnemi wartościami dostrzegalnemi niewiadomej x, znajduje się prawdopodobnie jedna, równa x, a x zawiera się z pewnością między $-\infty$ i $+\infty$, przeto całka

(51) $$k = \frac{1}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x, x_0)\,dx = \frac{h\,dx_0}{I\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta(x)\ e^{-h^2(x-x_0)^2}\,dx,$$

wyraża prawdopodobieństwo zdarzenia $a = x$, lub, co jest to samo, zdarzenia $a - x_0 = x - x_0$.

Ale różniczkując równanie (51) względem x_0 i dzieląc przez $2h^2$, znajdujemy nowe:

$$\frac{1}{2h^2}\frac{dk}{dx_0} = \frac{1}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x, x_0)(x - x_0)\,dx, \tag{52}$$

którego strona prawa wyraża znowu nadzieję matematyczną, że $a - x_0 = x - x_0$.

Że zaś ta sama nadzieja matematyczna równać się także powinna $k(x - x_0)$, otrzymujemy związek

$$\frac{dk}{dx_0} = -2h^2 k(x_0 - x).$$

Stąd znajdujemy

$$k = c\,e^{-h^2(x_0 - x)^2}.$$

a na zasadzie równania (42):

$$k = c\,e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

k wyraża zatem prawdopodobieństwo błędu najprawdopodobniejszego ε. Ponieważ ten błąd zawiera się z pewnością między $-\infty$ i $+\infty$, mamy na zasadzie równania (47)

$$k = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon. \tag{53}$$

jako wyrażenie ostateczne na prawdopodobieństwo błędu ε.

---

§ 8.

Rozważajmy teraz prawdopodobieństwo układu błędów $\Delta_i = x - x_i$:

$$P = \frac{h^n\,\Theta(x_1)\,\Theta(x_2)\ldots\Theta(x_n)}{I^n\sqrt{\pi^n}}\,e^{-h^2\sum_i(\Delta_i - \varepsilon)^2}\,dx^n\,d\Delta_1\,d\Delta_2\ldots d\Delta_n. \tag{54}$$

Zakładając, jak w § 2, $\bar{\Delta}_i = \bar{x} - x_i$ i rozumiejąc przez $\bar{x}$ wyrażenie (43), mamy

$$\sum_i(\Delta_i - \varepsilon)^2 = n(x - \bar{x})^2 + \sum_i(\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2, \tag{55}$$

a tem samem

$$P = \frac{h^n\,\Theta(x_1)\,\Theta(x_2)\ldots\Theta(x_n)}{I^n\sqrt{\pi^n}}\,e^{-nh^2(x-\bar{x})^2 - h^2\sum(\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2}\,dx^n\,d\Delta_1\,d\Delta_2\ldots d\Delta_n. \tag{56}$$

Załóżmy teraz

$$Q = \frac{1}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} P\,dx,$$

t. j. na mocy równania (27):

$$Q = \frac{\Theta(x_1)\,\Theta(x_2)\ldots\Theta(x_n)}{I^n\sqrt{n\,\pi^{n-1}}}\,e^{-h^2\sum_i(\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2}\,h^{n-1}\,dx^{n-1}\,d\Delta_1\,d\Delta_2\ldots d\Delta_n. \tag{57}$$

W ten sposób otrzymamy

$$P = Q\,R, \tag{58}$$

gdzie

$$R = \frac{\sqrt{n}\,h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2(x-\bar{x})}\,dx. \tag{59}$$

Według równania (58), prawdopodobieństwo P jest iloczynem z prawdopodobieństwa Q pojawienia się wartości dostrzegalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jakąbykolwiek wartość miała niewiadoma, przez prawdopodobieństwo R, że niewiadoma ta posiada wartość x.

---

§ 9.

Szukajmy teraz związków najprawdopodobniejszych między $n + 2$ ilościami $\varepsilon, x, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Związkom tym odpowiadają maxima prawdopodobieństw: k, (53), Q, (57) i R, (59), osiągnięte ze względu na wartości stałej h; mamy tedy

$$\textit{wart. najpr.}\left(\frac{1}{2h^2}\right) = \varepsilon^2 = \frac{1}{n-1}\sum(\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2 = n(x - \bar{x})^2.$$

Stąd oczywiście wynika, zważywszy na równanie (43) będzie:

$$(60) \qquad \left| x - \frac{1}{n} \sum_i x_i \right| \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2} \,,$$

co stanowi twierdzenie następujące: Biorąc za niewiadomą x średnią arytmetyczną jej wartości dostrzegalnych, popełniamy błąd, który, najprawdopodobniej, nie przenosi wartości strony prawej nierówności (60).

W analogicznym przypadku, wiadoma reguła Gaussa wyraża się nierównością

$$\left| x - \frac{1}{n} \sum_i x_i \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2} \,,$$

której strona prawa różni się od strony prawej nierówności (60) wartością prawdopodobną błędu najprawdopodobniejszego. Różnica ta pochodzi stąd, że Gauss przyjmuje a priori równym zeru błąd najprawdopodobniejszy. Ale błąd najprawdopodobniejszy jest, właściwie mówiąc, błędem prawdopodobnym systematycznym, którego, choćbyśmy nawet pewni byli dokładności narzędzia, zaniedbywać nie wolno z tego mianowicie powodu, że źródłem jego może być także i sam obserwator.

O ZASADZIE DIRICHLETA.

PODAŁ

S. ZAREMBA.

---

1. Chcemy w tej pracy pokazać, że z istnienia funkcyi Greena, odniesionej do obszaru (D), ograniczonego powierzchnią jednospójną (S), mającą w każdym punkcie określone i różne od zera promienie krzywizny, wywnioskować można możliwość zagadnienia Dirichleta dla tego obszaru nawet w tym przypadku, gdy wartości szukanej funkcyi na powierzchni (S) mają linie przerwy. Dodajemy, że w poniższem przedstawieniu dojdziemy do metody bardzo prostej rozwiązania następującego pytania. Niechaj $v(x, y, z)$ będzie funkcyą, czyniącą zadość równaniu Laplace'a wewnątrz powierzchni (S) i przyjmującą na tej powierzchni wartości z liniami przerwy; oznaczyć granicę, do której dąży funkcya $v(x, y, z)$, gdy punkt (x, y, z) na łuku danym dąży do punktu, położonego na jednej z linij przerwy. Pytanie to nie jest bez znaczenia dla tego, że od niego zależy rozciągnięcie na przestrzeń procesu „alternującego" Schwarza w zagadnieniu Dirichleta.

2. Uprościmy wysłowienie, zapożyczając na chwilę pewne terminy z teoryi elektryczności. Wyobraźmy sobie, że powierzchnia (S), utrzymana na potencyale zero, jest poddana wpływowi masy elektrycznej równej -1, skoncentrowanej w punkcie $M(x, y, z)$, położonym wewnątrz powierzchni. Oznaczmy przez $u(x, y, z, x', y', z')$ gęstość w punkcie $P(x', y', z')$ elektryczności indukowanej w tych warunkach na powierzchni (S). Wyznaczymy granicę niższą u_1 oraz granicę wyższą u_2 tej funkcyi u, opierając się na twierdzeniach następujących: