

Podobnie też otrzymujemy z drugiego równia (38):

$$(43) \quad \beta' = -\frac{m \delta}{b^2 + m^2},$$

t. j.

$$(44) \quad \beta = \frac{2n\pi}{c} \left(1 - \frac{\delta}{b^2 + 4n^2\pi^2} \right),$$

Podstawiając znalezione na α i β wartości do wzoru

$$f(\vartheta) = e^{x\vartheta} \cos \beta \vartheta,$$

biorąc za n kolejno wartości 1, 2, 3, ..., otrzymujemy nieskończony szereg rozwiązań szczególnych; pomnożywszy je przez czynniki dowolne i sumując od $n=1$ do $n=\infty$, otrzymamy całkę ogólną, którą będziemy mogli przystosować do jakichkolwiek warunków początkowych.

TEORIA PRZEKSZTAŁCENIA PFAFFA.

PODAŁ

C. RUSJAN.

(Dokończenie).¹⁾

§ 3.

Własności przekształconych wyrażeń różniczkowych poprzednich §§.

W poprzednich §§ dowiedliśmy, że wyrażenie różniczkowe o parzystej liczbie zmiennych niezależnych x_i :

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$$

w przypadku, gdy jego wyznacznik Δ nie jest równy zeru, można przekształcić na wyrażenie w nowych zmiennych $x_1, z_2, \dots, z_{2n}$ tak, że w nowej postaci

$$Z_2 dz_2 + Z_3 dz_3 + \dots + Z_{2n} dz_{2n}$$

zmienna x_1 będzie się zawierała tylko we wspólnym czynniku μ spółczynników $Z_2, Z_3, \dots, Z_{2n}$.

Wyrażenie różniczkowe o nieparzystej liczbie zmiennych x_i :

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1}$$

w przypadku, gdy jego wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, daje się sprowadzić do postaci

¹⁾ Patrz „Prace matematyczno-fizyczne,” t. VIII, str. 61–98.

$$dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2n+1} dz_{2n+1},$$

gdzie współczynniki $Z_2, \dots, Z_{2n+1}$ nie zawierają zupełnie zmiennej z_1 .

Teraz zajmijmy się zbadaniem własności przekształconych wyrażeń różniczkowych.

1. Niech nowa postać wyrażenia różniczkowego

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$$

o parzystej liczbie zmiennych x_i i o wyznaczniku Δ nierównym zeru będzie:

$$\mu_0 (U_2 dz_2 + U_3 dz_3 + \dots + U_{2n} dz_{2n}),$$

gdzie tylko μ_0 zawiera zmienną x_1 .

Jeżeli wyznacznik Δ danego wyrażenia nie jest równy zeru, nie będzie też równy zeru wyznacznik Δ przekształconego wyrażenia (T. VIII, str. 92).

Ten ostatni ma postać

$$\begin{vmatrix} 0, & U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & \dots, & U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1} \\ -U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & \mu_0 (22) + U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial z_2} - U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial z_2}, & \dots, & \mu_0 (2n, 2) + U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial z_2} - U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial z_{2n}} \\ -U_3 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & \mu_0 (3, 3) + U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial z_3} - U_3 \frac{\partial \mu_0}{\partial z_2}, & \dots, & \mu_0 (2n, 3) + U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial z_3} - U_3 \frac{\partial \mu_0}{\partial z_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & \mu_0 (2, 2n) + U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial z_{2n}} - U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial z_2}, & \dots, & \mu_0 (2n, 2n) + U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial z_{2n}} - U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial z_{2n}} \end{vmatrix},$$

albo

$$\begin{vmatrix} 0, & U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & U_3 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & \dots, & U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1} \\ -U_2 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & \mu_0 (22), & \mu_0 (32), & \dots, & \mu_0 (2n, 2) \\ -U_3 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & \mu_0 (23), & \mu_0 (33), & \dots, & \mu_0 (2n, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -U_{2n} \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1}, & \mu_0 (2, 2n), & \mu_0 (3, 2n), & \dots, & \mu_0 (2n, 2n) \end{vmatrix},$$

skutkiem czego wyznacznik ten otrzymuje nareszcie postać:

$$\mu_0^{2n} \lambda^2 \begin{vmatrix} 0, & U_2, & U_3, & \dots, & U_{2n} \\ -U_2, & (1, 2), & (3, 2), & \dots, & (2n, 2) \\ -U_3, & (2, 3), & (3, 3), & \dots, & (2n, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -U_{2n}, & (2, 2n), & (3, 2n), & \dots, & (2n, 2n) \end{vmatrix} \cdot \left((m, k) = \frac{\partial U_m}{\partial z_k} - \frac{\partial U_k}{\partial z_m} \right).$$

Ponieważ wyznacznik ten, jak zauważyliśmy, nie jest równy zeru, przeto wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 0, & U_2, & U_3, & \dots, & U_{2n} \\ -U_2, & (2, 2), & (3, 2), & \dots, & (2n, 2) \\ -U_3, & (2, 3), & (3, 3), & \dots, & (2n, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -U_{2n}, & (2, 2n), & (3, 2n), & \dots, & (2n, 2n) \end{vmatrix} \cdot \left((m, k) = \frac{\partial U_m}{\partial z_k} - \frac{\partial U_k}{\partial z_m} \right)$$

nie jest równy zeru. Ten ostatni zaś jest, oczywiście, wyznacznikiem oznaczonym przez nas literą Δ_1 , i utworzonym dla wyrażenia różniczkowego

$$U_2 dz_2 + U_3 dz_3 + \dots + U_{2n} dz_{2n}$$

o nieparzystej liczbie $2n-1$ zmiennych niezależnych z .

Wyznacznik ten nie jest równy zeru, przeto wyrażenie różniczkowe

$$U_2 dz_2 + U_3 dz_3 + \dots + U_{2n} dz_{2n}$$

ma te same własności, co i wyżej zbadane wyrażenie różniczkowe o nieparzystej liczbie zmiennych niezależnych

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1},$$

(T. VIII) str. 97, 98).

2. Niech nowa postać wyrażenia różniczkowego

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1}$$

o nieparzystej liczbie zmiennych x_i , którego wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, będzie:

$$dt_1 + T_2 dt_2 + \dots + T_{2n+1} dt_{2n+1},$$

gdzie ilości T nie zawierają zmiennej t_i . Jeżeli wyznacznik Δ_1 początkowego wyrażenia nie jest równy zeru, nie będzie też równy zeru i wyznacznik Δ_1 wyrażenia przekształconego. (T. VII, str. 92). Ten ostatni ma postać:

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & T_2, & T_3, & \dots, & T_{2n+1} \\ -1, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ -T_2, & 0, & (2, 2), & (3, 2), & \dots, & (2n+1, 2) \\ -T_3, & 0, & (2, 3), & (3, 3), & \dots, & (2n+1, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -T_{2n+1}, & 0, & (2, 2n+1), & (3, 2n+1), & \dots, & (2n+1, 2n+1) \end{vmatrix},$$

albo też:

$$\begin{vmatrix} (2, 2), & (3, 2), & \dots, & (2n+1, 2) \\ (2, 3), & (3, 3), & \dots, & (2n+1, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2, 2n+1), & (3, 2n+1), & \dots, & (2n+1, 2n+1) \end{vmatrix}, \quad \left(m, k \right) = \frac{\partial T_m}{\partial t_k} - \frac{\partial T_k}{\partial t_m}.$$

W tej postaci wyznacznik Δ_1 dla danego wyrażenia jest oczywiście wyznacznikiem oznaczonym przez nas literą Δ i utworzonym dla wyrażenia różniczkowego

$$T_2 dt_2 + \dots + T_{2n+1} dt_{2n+1}$$

o parzystej liczbie $2n$ zmiennych niezależnych t .

Ponieważ wyznacznik Δ ostatniego wyrażenia nie jest równy zeru, przeto wyrażenie różniczkowe

$$T_2 dt_2 + \dots + T_{2n+1} dt_{2n+1}$$

ma te same własności, co i wyżej zbadane wyrażenie

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}.$$

(T. VIII, str. 94 — 96).

§ 4.

Sprawdzenie wyrażań różniczkowych

$$X_1 dx_1 + \dots + X_{2n} dx_{2n} \text{ i } X_1 dx_1 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1} \\ \text{z poprzednich §§ do postaci najprostszej.}$$

1. Wyrażenie różniczkowe

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$$

o parzystej liczbie zmiennych niezależnych x_i i o wyznaczniku Δ nierównym zeru sprowadza się do postaci

$$\mu_0 (U_2 dz_2 + \dots + U_{2n} dz_{2n}),$$

gdzie tylko μ_0 zawiera zmienną x_1 , która pozostała nieprzekształconą; wyrażenie różniczkowe

$$U_2 dz_2 + \dots + U_{2n} dz_{2n}$$

o nieparzystej liczbie zmiennych z_i ma tę własność, że, jak widzieliśmy, wyznacznik jego Δ_1 nie jest równy zeru. Więc możemy do tego wyrażenia zastosować przekształcenie § 2 (T. VIII, str. 97, 98) i sprowadzić je do postaci

$$dv_2 + V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n},$$

gdzie $V_3, \dots, V_{2n}$ nie zawierają zupełnie zmiennej v_2 , wyznacznik zaś Δ wyrażenia różniczkowego

$$V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}$$

o parzystej liczbie $2n - 2$ zmiennych niezależnych v nie jest równy zeru.

Łącząc obadwa przekształcenia, wnosimy, że wyrażenie różniczkowe o parzystej liczbie zmiennych niezależnych x :

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$$

i o wyznaczniku Δ nierównym zeru, można przekształcić na wyrażenie w nowych zmiennych niezależnych $x_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n}$ tak, że nową postacią wyrażenia będzie:

$$\mu_0 (dv_2 + V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}),$$

gdzie tylko μ_0 zawiera x_1 , współczynniki zaś $V_3, \dots, V_{2n}$ nie zawierają ani x_1 , ani v_2 , wyznacznik Δ zaś wyrażenia różniczkowego

$$V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}$$

o parzystej liczbie $2n-2$ zmiennych niezależnych v nie jest równy zeru.

Za pomocą tego przekształcenia sprowadzamy tedy dane wyrażenie różniczkowe o parzystej liczbie zmiennych niezależnych i o wyznaczniku Δ nierównym zeru do wyrażenia o parzystej, lecz o dwie jednostki mniejszej, liczbie zmiennych niezależnych.

Do wyrażenia różniczkowego

$$V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}$$

możemy zastosować te same rozumowania, przekształcić je na wyrażenie w nowych zmiennych $v_3, w_4, \dots, w_{2n}$ i sprowadzić do postaci:

$$v_0 (dw_4 + W_5 dw_5 + \dots + W_{2n} dw_{2n}),$$

gdzie tylko v_0 zawiera zmienną v_3 ; $W_4, \dots, W_{2n}$ zaś nie zawierają zupełnie zmiennych v_3 i w_4 , przytem wyznacznik Δ wyrażenia różniczkowego

$$W_5 dw_5 + \dots + W_{2n} dw_{2n}$$

nie będzie równy zeru.

Dane wyrażenie różniczkowe da się wtedy sprowadzić do kształtu:

$$\mu_0 [dv_2 + v_0 (dw_4 + W_5 dw_5 + \dots + W_{2n} dw_{2n})],$$

z nowymi zmiennymi niezależnymi $x_1, v_2, v_3, w_4, \dots, w_{2n}$, gdzie μ_0 zawiera koniecznie x_1 i może zawierać i pozostałe zmienne; v_0 zawiera koniecznie v_3 i może zawierać też $w_4, \dots, w_{2n}$; $W_5, W_6, \dots, W_{2n}$ zawierają tylko $w_5, w_6, \dots, w_{2n}$; wyznacznik zaś Δ wyrażenia

$$W_5 dw_5 + \dots + W_{2n} dw_{2n}$$

nie jest równy zeru.

Zastosowawszy $n-1$ razy to przekształcenie, sprowadzamy to wyrażenie do nowej postaci o zmiennych niezależnych $x_1, v_2, v_3, w_4, w_5, w_6, \dots, v_{2n-2}, s_{2n-3}, s_{2n-1}, s_{2n}$:

$$\mu_0 \{ dv_2 + v_0 [dw_4 + \pi_0 (du_6 + \dots + \varrho_0 (ds_{2n-2} + S_{2n-1} ds_{2n-1} + S_{2n} ds_{2n}) \dots)] \},$$

gdzie μ_0 jest funkcją zmiennych niezależnych $x_1, v_2, v_3, \dots, s_{2n}$; v_0 jest funkcją $v_3, w_4, \dots, s_{2n}$; π_0 jest funkcją $w_5, \dots, s_{2n}$ i t. d. ϱ_0 jest funkcją $v_{2n-3}, s_{2n-2}, s_{2n-1}$ i s_{2n} . Przytem μ_0 zawiera koniecznie x_1 , v_0 — zmienną v_3 , π_0 — zmienną w_5 i t. d., ϱ_0 — zmienną v_{2n-3} ; na koniec S_{2n-1}, S_{2n} zawierają tylko s_{2n-1} i s_{2n} ; wyznacznik zaś Δ wyrażenia różniczkowego

$$S_{2n-1} ds_{2n-1} + S_{2n} ds_{2n}$$

nie jest równy zeru. Ostatnie wyrażenie można sprowadzić do postaci

$$\sigma_0 dt_{2n},$$

gdzie σ_0 zawiera koniecznie s_{2n-1} .

Stąd wynika, że za pomocą n wskazanych przekształceń możemy sprowadzić dane wyrażenie różniczkowe do postaci:

$$\mu_0 dv_2 + \mu_0 v_0 dv_4 + \mu_0 v_0 \pi_0 du_6 + \dots + \mu_0 v_0 \dots \varrho_0 ds_{2n-2} + \mu_0 \dots \sigma_0 dt_{2n},$$

gdzie μ_0 jest funkcją w ogóle wszystkich zmiennych niezależnych $x_1, v_2, v_3, w_4, w_5, u_6, \dots, s_{2n-1}, t_{2n}$ i zawiera koniecznie x_1 ; v_0 jest w ogóle funkcją $v_3, w_4, \dots, t_{2n}$ i zawiera koniecznie $v_3, \dots$ i t. d., σ_0 jest funkcją w ogóle s_{2n-1} i t_{2n} , i zawiera koniecznie s_{2n-1} .

Widzimy, że zmienne niezależne o nieparzystych skaznikach $x_1, v_3, w_5, \dots, s_{2n-1}$ zawierają się tylko w współczynnikach; x_1 zawiera się w μ_0, v_2 w v_0, w_5 w π_0 , i t. d. s_{2n-1} w σ_0 .

Korzystając z tego, możemy przekształcić te zmienne na nowe $a_1, a_2, \dots, a_n$, według wzorów:

$$\mu_0 (x_1, v_2, v_3, \dots, t_{2n}) = a_1, \quad v_0 (v_3, w_4, \dots, t_{2n}) = a_2, \dots, \sigma_0 (s_{2n-1}, t_{2n}) = a_n.$$

Wtedy dane wyrażenie różniczkowe sprowadzimy do postaci:

$$a_1 dv_2 + a_1 a_2 dw_2 + \dots + a_1 a_2 \dots a_n dt_{2n}, \quad ^1)$$

gdzie $a_1, a_2, a_n, \dots, a_n, v_2, w_4, \dots, t_{2n}$ są zmienne niezależne.

Kładąc

$$a_1 = X^{(1)}, a_1 a_2 = X^{(2)}, \dots, a_1 a_2 \dots a_n = X^{(n)}, v_2 = x^{(1)}, w_4 = x^{(2)}, \dots, t_{2n} = x^{(n)},$$

otrzymamy na koniec:

$$X^{(1)} dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(n)} dx^{(n)},$$

gdzie $x^{(i)}, X^{(i)}$ są zmienne niezależne w liczbie $2n$.

Ponieważ w tej ostatniej postaci danego wyrażenia różniczkowego wszystkie zmienne $x^{(i)}, X^{(i)}$ są niezależne od siebie, nie możemy go przeto sprowadzić do postaci jeszcze prostszej.

¹⁾ Natani (Dzien. Crellego, t. 58) zauważył, że wyrażenie różniczkowe $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$ można przedstawić w postaci $\frac{1}{t_1} da_1 + \frac{1}{t_1 t_2} da_2 + \dots + \frac{1}{t_1 t_2 \dots t_n} da_n$.

Stąd wnosimy, że wyrażenie różniczkowe

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$$

o parzystej liczbie zmiennych niezależnych x_i , i o wyznaczniku Δ nierównym zeru, zawsze można sprowadzić do kształtu najprostszego

$$X^{(1)} dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(n)} dx^{(n)},$$

także o $2n$ zmiennych niezależnych $x^{(i)}$ $\Delta^{(i)}$, ale o n różniczkach. Zmienne niezależne $x^{(i)}$, $X^{(i)}$ są funkcjami niezależnymi pierwotnych zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Możemy przeprowadzić przekształcenie danego równania

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$$

na wyrażenie postaci najprostszej

$$X^{(1)} dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(n)} dx^{(n)}$$

i innym sposobem.

Nadajmy mu postać:

$$\mu_0 (V_2 dv_2 + V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}),$$

gdzie tylko μ_0 zawiera zmienną x_1 , i gdzie wyznacznik Δ_1 wyrażenia różniczkowego

$$V_2 dv_2 + V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}$$

nie jest równy zeru.

Jeżeli ten wyznacznik Δ_1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & V_2, & V_3, & \dots, & V_{2n} \\ -V_2 & (2, 2), & (3, 2), & \dots, & (2n, 2) \\ -V_3 & (2, 3), & (3, 3), & \dots, & (2n, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -V_{2n} & (2, 2n), & (3, 2n), & \dots, & (2n, 2n) \end{vmatrix}$$

nie jest równy zeru, to nie wszystkie pierwsze główne minory wyznacznika

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2, 2), & (3, 2), & \dots, & (2n, 2) \\ (2, 3), & (3, 3), & \dots, & (2n, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2, 2n), & (3, 2n), & \dots, & (2n, 2n) \end{vmatrix}$$

są równe zeru, t. j. jeżeli dane wyrażenie różniczkowe

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n},$$

o parzystej liczbie zmiennych niezależnych i o wyznaczniku Δ nierównym zeru, przekształćmy na

$$\mu_0 (V_2 dv_2 + V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}),$$

to wyrażenie

$$V_2 dv_2 + V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}$$

będzie miało tę własność, że kładąc w nim jedną ze zmiennych niezależnych v równą stałej, zawsze możemy otrzymać wyrażenie różniczkowe o parzystej $2n-2$ liczbie zmiennych niezależnych i o wyznaczniku Δ nierównym zeru. Niech, na przykład, nierówny zeru pierwszy główny minor będzie:

$$\begin{vmatrix} (3, 3), & (4, 3), & \dots, & (2n, 3) \\ (3, 4), & (4, 4), & \dots, & (2n, 4) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (3, 2n), & (4, 2n), & \dots, & (2n, 2n) \end{vmatrix}$$

Wyrażenie różniczkowe

$$V_3 dv_3 + V_4 dv_4 + \dots + V_{2n} dv_{2n}$$

o parzystej liczbie $2n-2$ zmiennych niezależnych i o wyznaczniku Δ nie równym zeru możemy, kładąc $v_2 = \text{stałej}$, przekształcić na

$$v_0 (W_4 dw_4 + \dots + W_{2n} dw_{2n}),$$

gdzie tylko v_0 zawiera zmienną v_3 , wyznacznik Δ_1 zaś wyrażenia różniczkowego

$$W_4 dw_4 + \dots + W_{2n} dw_{2n}$$

nie jest równy zeru. Uważając teraz v_3 za zmienną, sprowadzimy dane wyrażenie różniczkowe do postaci

$$\mu_0 [V'_2 dv_2 + v_0 (W_4 dw_4 + \dots + W_{2n} dw_{2n})],$$

gdzie x_1 zawiera się tylko w μ_0 ; v_0 zawiera koniecznie zmienną v_3 , której nie ma w czynniku przy v_0 , V'_2 nie może mieć postaci $v_0 k$, gdzie tylko v_0 zawiera v_3 . W przeciwnym bowiem razie wyrażenie różniczkowe

$$V_2 dv_2 + V_3 dv_3 + \dots + V_{2n} dv_{2n}$$

o nieparzystej liczbie $2n-1$ zmiennych niezależnych v dałoby się sprowadzić do postaci

$$v_0 (k dv_2 + W_4 dw_4 + \dots + V_{2n} dw_{2n}),$$

gdzie współczynnik przy dv_3 byłby równy zeru, a sama zmienna v_3 zawierałaby się tylko w czynniku wspólnym v_0 . Takie przekształcenie dla wyrażenia różniczkowego o nieparzystej liczbie zmiennych niezależnych i o wyznaczniku Δ_1 nierównym zeru, jak dowiedliśmy na str. 88, t. VIII, jest niemożliwe.

Dalej, jeżeli wyznacznik Δ_1 wyrażenia różniczkowego

$$W_4 dw_4 + W_5 dw_5 + \dots + W_{2n} dw_{2n}$$

nie jest równy zeru, możemy zastosować do niego powyższe przekształcenie, i sprowadzić je do postaci:

$$W_4 dw_4 + \pi_0 (U_6 du_6 + \dots + U_{2n} du_{2n}),$$

gdzie π_0 zawiera zmienną w_5 , której nie ma w czynniku przy π_0 , W'_4 zaś nie może mieć kształtu $\pi_0 Z$, gdzie tylko π_0 zawiera zmienną w_5 . Więć dane wyrażenie sprowadzi się do postaci

$$\mu_0 \{ V''_2 dv_2 + v_0 [W'_4 dw_4 + \pi_0 (U_6 du_6 + \dots + U_{2n} du_{2n})] \},$$

gdzie wyznacznik Δ_1 wyrażenia różniczkowego

$$U_6 dx_6 + \dots + U_{2n} dx_{2n}$$

nie jest równy zeru.

Rozumując w ten sposób, możemy dane wyrażenie różniczkowe sprowadzić po n wskazanych przekształceniach do postaci:

$$\mu_0 \{ V_2^{(n)} dv_2 + v_0 [W_4^{(n-1)} + \pi_0 (U_6^{(n-2)} du_6 + \dots + \varrho_0 (S'_{2n-2} ds_{2n-2} + \sigma_0 dt_{2n}) \dots] \}.$$

Nowymi zmiennymi niezależnymi są tu: $x_1, v_2, v_3, w_4, w_5, \dots, s_{2n-2}, s_{2n-1}, t_{2n}$; μ_0 zawiera koniecznie zmienną x_1 , której nie ma w współczyn-

niku przy μ_0 ; v_0 zawiera koniecznie zmienną t_3 , której nie ma w współczynniku przy v_0 ; i t. d. σ_0 zawiera koniecznie s_{2n-1} . $V_2^{(n)}$ nie może mieć postaci $v_0 k$; $W_4^{(n-1)}$ nie może mieć postaci $\pi_0 Z$; i t. d. S'_{2n-2} nie może mieć postaci $\sigma_0 M$. To ostatnie wyrażenie możemy przekształcić na wyrażenie w nowych zmiennych, kładąc $\mu_0 (x_1, v_2, \dots, t_{2n}) = a_1$, $v_0 (t_2, t_3, \dots, t_{2n}) = a_2, \dots, \sigma_0 (s_{2n-1}, t_{2n}) = a_n$:

$$a_1, V_2^{(n)} dv_2 + a_1 a_2, W_4^{(n-1)} dw_4 \\ + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-1}, S'_{2n-1} ds_{2n-2} + a_1 a_2 \dots a_n dt_{2n}.$$

Zmienne $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ możemy przekształcić na nowe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, kładąc:

$$a_1 V_2^{(n)} = \beta_1; a_1 a_2 W_4^{(n-1)} = \beta_2 \dots; a_1 a_2 \dots a_{n-1} S'_{2n-1} = \beta_{n-1}; a_1 a_1 \dots a_n = \beta_n.$$

W rzeczy samej te wzory na przekształcenie możemy napisać w postaci:

$$a_1 = \frac{\beta_1}{V_2^{(n)}(v_2, a_2, \dots, t_{2n})}, \\ \frac{a_2}{V_2^{(n)}} = \frac{\beta_2}{\beta_1, W_4^{(n-1)}(v_2, w_4, a_3, \dots, t_{2n}) \dots}; S'_{2n-2}(v_2, w_4, \dots, a_n, t_{2n}) = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}.$$

Z pierwszego wzoru bezpośrednio wyznaczamy a_1 ; co się tyczy drugiego, lewa jego strona zawsze zawiera zmienną a_2 , ponieważ, jak zauważyliśmy, $V_2^{(n)}$ nie ma kształtu $a_2 k$ a prawa strona zupełnie nie zawiera zmiennej a_2 ; więc zawsze możemy wyznaczyć z niego tę zmienną i t. d., na koniec w ostatnim wzorze lewa strona zawsze zawiera zmienną a_n , ponieważ $S'_{2n-2}(v_2, w_4, \dots, a_n, t_{2n})$ nie ma kształtu $a_n M$.

Przekształciwszy w ten sposób zmienne $a_1, a_2, \dots, a_n$, otrzymujemy dane wyrażenie w postaci

$$\beta_1 dv_2 + \beta_2 dw_4 + \dots + \beta_n dt_{2n},$$

gdzie wszystkie zmienne $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, v_2, w_4, \dots, t_{2n}$ są niezależne od siebie. Przychodzim więc do tego samego wniosku, jak i poprzednio. To ostatnie przekształcenie jest identyczne z przekształceniem Gaussa z tą różnicą, że w naszym wykładzie zupełnie uzasadniamy możliwość kolejnego stosowania przekształcenia Pfaffa i dowodzimy niezależności zmiennych postaci najprostszej, czego właśnie brak w wykładzie tego sposobu Gaussa.

2. Teraz zajmijmy się sprowadzeniem do postaci najprostszej wyrażenia różniczkowego

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1}$$

o nieparzystej liczbie zmiennych niezależnych x_i i o wyznaczniku Δ_1 nierównym zeru.

Dowiedliśmy wyżej, że to wyrażenie różniczkowe można sprowadzić do postaci:

$$dt_1 + T_2 dt_2 + \dots + T_{2n+1} dt_{2n+1},$$

gdzie $T_2, T_3, \dots, T_{2n+1}$ nie zawierają zmiennej t_1 , wyznacznik zaś Δ wyrażenia różniczkowego

$$T_2 dt_2 + \dots + T_{2n+1} dt_{2n+1}$$

o parzystej liczbie zmiennych niezależnych $t_2, \dots, t_{2n+1}$ nie jest równy zeru. Temu ostatniemu wyrażeniu różniczkowemu możemy nadać kształt najprostszy:

$$X^{(2)} dx^{(2)} + X^{(3)} + \dots + X^{(n+1)} dx^{(n+1)},$$

gdzie x, X są funkcjami niezależnymi zmiennych niezależnych $t_2, \dots, t_{2n+1}$. Na mocy tego dane wyrażenie różniczkowe sprowadzamy do postaci:

$$dt_1 + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(n+1)} dx^{(n+1)},$$

gdzie $t_1, x^{(2)}, X^{(2)}, \dots, x^{(n+1)}, X^{(n+1)}$ są zmienne niezależne od siebie. Wnosimy stąd, że jeżeli wyznacznik Δ_1 wyrażenia różniczkowego

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1}$$

o nieparzystej liczbie $2n+1$ zmiennych niezależnych x_i nie jest równy zeru, wyrażenie to daje się sprowadzić do kształtu najprostszego:

$$dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + X^{(3)} dx^{(3)} + \dots + X^{(n+1)} dx^{(n+1)},$$

także o $2n+1$ zmiennych niezależnych $x^{(i)}, X^{(i)}$, lecz o $n+1$ różniczkach. Zmienne niezależne $x^{(i)}, X^{(i)}$ są funkcjami niezależnymi $2n+1$ pierwotnych zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$.

Możemy to przekształcenie traktować jeszcze w sposób inny. Jeżeli wyznacznik Δ_1 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \dots, & X_{2n+1} \\ -X_1, & (1, 1), & (2, 1), & \dots, & (2n+1, 1) \\ -X_2, & (1, 2), & (2, 2), & \dots, & (2n+1, 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_{2n+1}, & (1, 2n+1), & (2, 2n+1), & \dots, & (2n+1, 2n+1) \end{vmatrix}$$

danego wyrażenia różniczkowego nie jest równy zeru, to nie wszystkie pierwsze minory wyznacznika

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1, 1), & (2, 1), & \dots, & (2n+1, 1) \\ (1, 2), & (2, 2), & \dots, & (2n+1, 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1, 2n+1), & (2, 2n+1), & \dots, & (2n+1, 2n+1) \end{vmatrix}$$

są równe zeru. Niech nierówny zeru pierwszy główny minor jego będzie:

$$\delta = \begin{vmatrix} (2, 2), & (3, 2), & \dots, & (2n+1, 2) \\ (2, 3), & (3, 3), & \dots, & (2n+1, 3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2, 2n+1), & (3, 2n+1), & \dots, & (2n+1, 2n+1) \end{vmatrix}$$

Ten wyznacznik δ jest wyznacznikiem Δ wyrażenia

$$X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1};$$

jeżeli położymy w niem $x_1 = \text{stała}$. Ponieważ $\delta \neq 0$, możemy sprowadzić to wyrażenie do postaci najprostszej

$$X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(n+1)} dx^{(n+1)},$$

w której x, X są funkcjami niezależnymi zmiennych $x_2, x_3, \dots, x_{2n+1}$, x_1 zaś jest ilością stałą. Kładąc $x_1 = \text{zmiennej}$, dane wyrażenie sprowadzimy do postaci:

$$X'_1 dx_1 + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(n+1)} dx^{(n+1)},$$

gdzie $x_1, x^{(2)}, \dots, x^{(n+1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n+1)}$ są niezależnymi od siebie funkcjami zmiennych pierwotnych $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$; X'_1 jest funkcją oznaczoną tychże zmiennych albo też zmiennych $x_1, x^{(2)}, X^{(2)}, \dots, x^{(n+1)}, X^{(n+1)}$.

W tej postaci dane wyrażenie było otrzymane przez Gaussa, ale bez tego zastrzeżenia, że $x_1, x^{(2)}, \dots, x^{(n+1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n+1)}$ są niezależnymi od siebie.

Przed sprowadzeniem danego wyrażenia różniczkowego do postaci najprostszej moglibyśmy przekształcić je z początku na wyrażenie w zmiennych $y_1, y_2, \dots, y^{2n+1}$ zapomocą wzorów dowolnych. Nowe wyrażenie

$$Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \dots + Y_{2n+1} dy_{2n+1}$$



$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(2) \quad (1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(1, p) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, p) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + (p, p) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

t. j. $(p+1)$ równań liniowych, jednorodnych względem p pochodnych $\frac{\partial x}{\partial y_i}$.

Według przypuszczenia najwyższy stopień nierównych zeru minorów Δ_i ^{$\leq p$} Δ_1 jest $2k$. Więc pomiędzy temi równaniami mamy tylko $2k < p$ niezależnych i żądane wzory zawsze możemy z nich wyznaczyć.

Ponieważ dalej nierówny zeru minor $2k$ -go stopnia wyznacznika Δ i Δ_1 jest D , przeto równania

$$(1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(3) \quad (1, 2) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + (p, 2) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(1, 2k) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2k) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + (p, 2k) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0$$

są niezależne.

Z tych równań możemy wyznaczyć tylko $2k$ wzorów, reszta $p - 2k$ zostaje dowolną. Korzystając z tego, przyjmijmy, że zmiennych $x_{2k+1}, x_{2k+2}, \dots, x_p$ nie przekształcamy na nowe i że $x_{k+i} = y_i$.

Wtenczas otrzymamy:

$$(1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial x_{2k+i}} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial x_{2k+i}} + \dots + (2k, 1) \frac{\partial x_{2k}}{\partial x_{2k+i}} + (2k+1, 1) = 0,$$

$$(3) \quad (1, 2) \frac{\partial x_1}{\partial x_{2k+i}} + (2, 2) \frac{\partial x_2}{\partial x_{2k+i}} + \dots + (2k, 2) \frac{\partial x_{2k}}{\partial x_{2k+i}} + (2k+1, 2) = 0,$$

$$(1, 2k) \frac{\partial x_1}{\partial x_{2k+i}} + (2, 2k) \frac{\partial x_2}{\partial x_{2k+i}} + \dots + (2k, 2k) \frac{\partial x_{2k}}{\partial x_{2k+i}} + (2k + i, 2k) = 0.$$

Z tych ostatnich równań, oczywiście, możemy wyznaczyć $2k$ pochodnych $\frac{\partial x}{\partial a_{2k+i}}$, ponieważ wyznacznik ich D nie jest równy zeru. Po wyznaczeniu ich, całkując otrzymane $2k$ równań różniczkowych zwyczajnych, będziemy mieli:

$$x_i = \varphi_i(x_{2k+1}, x_{2k+2}, \dots, x_p, a_1, a_2, \dots, a_{2k}), \quad (i = 1, 2, \dots, 2k)$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$ są stałymi całkowania, t. j. ilościami niezależnymi od x_{2k+i} ; mogą one być wszakże funkcjami dowolnymi nowych zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_{2k}$, występujących zamiast pierwotnych zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$; skutkiem przekształcenia. Położymy $a_1 = z_1, a_2 = z_2, \dots, a_{2k} = z_{2k}$; otrzymamy wtedy żądane wzory przekształcenia

$$x_i = \varphi_i(x_{2k+1}, \dots, x_p, z_1, z_2, \dots, z_{2k}), \quad i = 1, 2, \dots, 2k$$

na zmienne $x_1, x_3, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_p$; wzory te mają tę własność, że dane wyrażenie różniczkowe nie będzie zawierało po przekształceniu zmiennej x_{2k+i} . Wybraliśmy z pomiędzy zmiennych $x_{2k+1}, x_p, \dots$, zmienną x_{2k+i} równą y_1 zupełnie dowolnie. Moglibyśmy obrać w tym celu jakąkolwiek inną zmienną z pomiędzy $x_{2k+1}, \dots, x_p$ i otrzymalibyśmy takie wzory. Z dane wyrażenie różniczkowe nie zawierałoby po przekształceniu innej zmiennej. Trzeba byłoby w tym celu w równaniach (4) zmienić skaznik i na jakikolwiek inny $1, 2, \dots, p-2k$.

Tu nasuwa się pytanie, czy nie moglibyśmy otrzymać takich wzorów, za pomocą których wyrugowałyby się z danego wyrażenia różniczkowego wszystkie zmienne $x_{2k+1}, x_{2k+2}, \dots, x_p$, których nie przekształcamy na nowe zmienne. W tym celu trzeba znaleźć takie wzory na przekształcenie, które zadość czynią równaniom różniczkowym (4) przy $i = 1, 2, \dots, p - 2k$.

Pomnożmy każde z równań (4) przez dx_{2k+i} i dodajmy lewe ich strony, kładąc $i = 1, 2, \dots, p-2k$.

Otrzymamy $2k$ równań różniczkowych zwyczajnych:

[illegible]

gdzie $dx_1, dx_2, \dots, dx_{2k}$ są różniczkami zupełnymi względem $x_{2k+1}, \dots, x_p$.

Na mocy tego, że wszystkie minory stopnia wyższego od $2k$ wyznacznika Δ są równe zeru, równania

$$(1, 2k+1) dx_1 + (2, 2k+1) dx_2 + \dots + (p, 2k+1) dx_p = 0,$$

$$(1, 2k+2) dx_1 + (2, 2k+2) dx_2 + \dots + (p, 2k+2) dx_p = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(1, p) dx_1 + (2, p) dx_2 + \dots + (p, p) dx_p = 0$$

są następstwem równań (5). Więc na mocy twierdzenia IX, I (t. VIII) równania (5) mają $2k$ całek niezależnych: $x_i = \varphi_i(x_{2k+1}, x_{2k+2}, \dots, x_p, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k})$ ($i=1, 2, \dots, 2k$), gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ są stałymi całkowania, t.j. ilościami niezależnymi od $x_{2k+1}, \dots, x_p$, ale które mogą być funkcjami dowolnymi zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_{2k}$, na które przekształcamy $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$. Połóżmy $\alpha_1 = z_1, \alpha_2 = z_2, \dots, \alpha_{2k} = z_{2k}$.

Otrzymałyśmy żądane wzory na przekształcenie:

$$x_i = \varphi_i(x_{2k+1}, \dots, x_p, z_1, z_2, \dots, z_{2k}), \quad (i=1, 2, \dots, 2k),$$

W rzeczy samej, każde z równań (5) rozkłada się na $p-2k$ równań wskutek dowolności różniczek $dx_{2k+1}, \dots, dx_p$, w przypuszczeniu, że $z_1, z_2, \dots, z_{2k}$ są stałymi. Więc równania (5), rozkładają się na $p-2k$ układów (4) przy $i=1, 2, \dots, p-2k$, a otrzymane wzory na przekształcenie, w przypuszczeniu, że $z_1, z_2, \dots, z_{2k}$ są stałymi, zadość czynią $p-2k$ układom równań (4); na mocy własności tych równań, dane wyrażenie różniczkowe nie będzie zawierało po przekształceniu zmiennych $x_{2k+1}, x_{2k+2}, \dots, x_p$ i będzie miało postać:

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2k} dz_{2k},$$

gdzie $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2k}$ zawierają tylko zmienne $z_1, z_2, \dots, z_{2k}$.

Wnosimy więc, że jeżeli wyznaczniki Δ i Δ_1 danego wyrażenia różniczkowego są równe zeru i najwyższy stopień nierównych zeru ich minorów jest jednakowy i równy $2k$, wtedy zawsze możemy przekształcić je tak, żeby wyrugować z niego $p-2k$ zmiennych niezależnych¹⁾.

Wyznacznik Δ_1 wyrażenia

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2k} dz_{2k}$$

o parzystej liczbie zmiennych niezależnych jest oczywiście równy zeru; wyznacznik zaś Δ nie jest równy zeru. W rzeczy samej najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznacznika Δ pierwotnego wyrażenia różniczkowego jest $2k$; więc na mocy wniosku II, str. 92, (t. VIII), naj-

¹⁾ Natani (l.c. str. 318) dokonywa tego samego przekształcenia, używając całek głównych.

wyższy stopień nierównych zeru minorów wyznacznika Δ przekształconego wyrażenia

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2k} dz_{2k} + 0 \cdot dx_{2k+1} + \dots + 0 \cdot dx_p$$

także jest równy $2k$.

Wyznacznik Δ tego ostatniego ma postać:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1, 1), & (2, 1), & \dots, & (2k, 1), & 0, & \dots, & 0 \\ (1, 2), & (2, 2), & \dots, & (2k, 2), & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1, 2k), & (2, 2k), & \dots, & (2k, 2k), & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix} \quad (m, n) = \frac{\partial Z_m}{\partial z_n} - \frac{\partial Z_n}{\partial z_m},$$

i ma tylko jeden nierówny zeru minor $2k$ -go stopnia:

$$\begin{vmatrix} (1, 1), & (2, 1), & \dots, & (2k, 1) \\ (1, 2), & (2, 2), & \dots, & (2k, 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1, 2k), & (2, 2k), & \dots, & (2k, 2k) \end{vmatrix} \quad (m, n) = \frac{\partial Z_m}{\partial z_n} - \frac{\partial Z_n}{\partial z_m}.$$

Ten ostatni jest oczywiście wyznacznikiem, który oznaczyliśmy przez Δ i utworzyliśmy dla wyrażenia różniczkowego

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2k} dz_{2k}.$$

Ponieważ ten wyznacznik Δ nie jest równy zeru, więc to ostatnie wyrażenie różniczkowe możemy sprowadzić do postaci najprostszej:

$$X^{(1)} dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(k)} dx^{(k)},$$

gdzie x, X są $2k$ funkcjami niezależnymi zmiennych niezależnych $z_1, z_2, \dots, z_{2k}$ albo też zmiennych pierwotnych $x; x_2, \dots, x_p$.

Więc jeżeli wyznaczniki Δ i Δ_1 wyrażenia różniczkowego

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p$$

są równe zeru i najwyższy stopień nierównych zeru minorów ich jest jednakowy i równy $2k (< p)$, to dane wyrażenie daje się sprowadzić do postaci najprostszej

Ponieważ $2k+1 < p$ i $D_1 \neq 0$, przeto zawsze możemy wyznaczyć z tych równań żądane wzory na przekształcenie. Ponieważ zaś liczba tych równań jest $2k+1 < p$, to możemy wyznaczyć z nich tylko $2k+1$ wzorów, reszta $p - (2k+1)$ zostaje dowolną. Korzystając z tego, przypuścimy, że $y_{2k+1+i} = y_i$ i że zmiennych $x_{2k+2}, x_{2k+3}, \dots, x_{2k+i}, x_{2k+i+2}, \dots, x_p$ nie przekształcamy na nowe. Wówczas otrzymamy równania:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{2k+1+i}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{2k+1+i}} + \dots + X_{2k+1} \frac{\partial x_{2k+1}}{\partial x_{2k+1+i}} + X_{2k+1+i} = 0,$$

$$(1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial x_{2k+1+i}} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial x_{2k+1+i}} + \dots + (2k+1, 1) \frac{\partial x_{2k+1}}{\partial x_{2k+1+i}} + (2k+1+i, 1) = 0,$$

$$(1, 2k) \frac{\partial x_1}{\partial x_{2k+1+i}} + (2, 2k) \frac{\partial x_2}{\partial x_{2k+1+i}} + \dots + (2k+1, 2k) \frac{\partial x_{2k+1}}{\partial x_{2k+1+i}} + (2k+1+i, 2k) = 0$$

Z tych równań wyznaczamy pochodne $\frac{\partial x}{\partial x_{2k+1+i}}$, ponieważ $D_1 \neq 0$. Całkując otrzymane równania różniczkowe zwyczajne, których jest $2k+1$, otrzymujemy $2k+1$ całek niezależnych:

$$x_\lambda = \varphi_\lambda(x_{2k+2}, \dots, x_p, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k+1}),$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, 2k+1);$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k+1}$ są stałymi całkowania, t. j. ilościami niezależnymi od x_{2k+1+i} , które wszakże mogą być funkcjami dowolnymi zmiennych $x_{2k+2}, \dots, x_p$ i nowych zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_{2k+1}$. Położmy $\alpha_1 = z_1, \dots, \alpha_{2k+1} = z_{2k+1}$; otrzymamy żądane wzory na przekształcenie:

$$x_\lambda = \varphi_\lambda(x_{2k+2}, \dots, x_p, z_1, z_2, \dots, z_{2k+1})$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, 2k+1),$$

które rugują z danego wyrażenia zmienną x_{2k+1+i} , wybraną dowolnie z liczby zmiennych $x_{2k+2}, \dots, x_p$. Rozumując w ten sam sposób, jak i wyżej w przypadku podobnym, możemy starać się o wyznaczenie takich wzorów na przekształcenie, które czyniłyby zadość równaniom (6) przy $i = 1, 2, \dots, p - (2k+1)$, a więc przy pomocy których moglibyśmy wyrugować z wyrażenia danego zmienne $x_{2k+2}, \dots, x_p$. Pomnożmy w tym celu każde z równań (6) przez dx_{2k+1+i} i dodajmy otrzymane rezultaty, kładąc $i = 1, 2, \dots, p - (2k+1)$.

Będziemy mieli równania:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2k+1} dx_{2k+1} + X_{2k+2} dx_{2k+2} + \dots + X_p dx_p = 0,$$

$$(1, 1) dx_1 + (2, 1) dx_2 + \dots + (2k+1, 1) dx_{2k+1} + (2k+2, 1) dx_{2k+2} + \dots + (p, 1) dx_p = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(1, 2k) dx_1 + (2, 2k) dx_2 + \dots + (2k+1, 2k) dx_{2k+1} + (2k+2, 2k) dx_{2k+2} + \dots + (p, 2k) dx_p = 0.$$

Na mocy własności wyznaczników Δ i Δ_1 , równania:

$$(1, 2k+1) dx_1 + (2, 2k+1) dx_2 + \dots + (p, 2k+1) dx_p = 0,$$

$$(1, p) dx_1 + (2, p) dx_2 + \dots + (p, p) dx_p = 0,$$

są wynikiem poprzednich równań (7).

Równania przeto (7) posiadają $2k+1$ całek niezależnych. (Tw. IX. II, t. VIII):

$$x_\lambda = \psi_\lambda(x_{2k+2}, \dots, x_p, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k+1}),$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, 2k+1),$$

gdzie α są stałymi całkowania, t. j. ilościami niezależnymi od $x_{2k+1}, \dots, x_p$, które wszakże mogą być funkcjami dowolnymi nowych zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_{2k+1}$. Kładąc $\alpha_1 = z_1, \alpha_2 = z_2, \dots, \alpha_{2k+1} = z_{2k+1}$, otrzymujemy żądane wzory:

$$(8) \quad x_\lambda = \psi_\lambda(x_{2k+2}, \dots, x_p, z_1, z_2, \dots, z_{2k+1}),$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, 2k+1),$$

które rugują z danego wyrażenia różniczkowego zmienne $x_{2k+2}, \dots, x_p$. W rzeczy samej, równania (7), po zastąpieniu w nich zmiennych x_λ przez prawe strony wzorów (8), rozkładają się na $p - (2k+1)$ układów równań (6) przy $i = 1, 2, \dots, p - (2k+1)$ wskutek dowolności różniczek $dx_{2k+2}, \dots, dx_p$ i w przypuszczeniu, że z_1, z_2, z_{2k+1} są stałymi.

Jeżeli zaś równaniom (6) staje się zadość przy $i = 1, 2, \dots, p - (2k+1)$, wtedy wyrażenie różniczkowe po przekształceniu nie zawiera zmiennej x_{2k+1+i} ($i = 1, 2, \dots, p - (2k+1)$), a więc ma kształt

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2k+1} dz_{2k+1},$$

gdzie $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2k+1}$ są funkcjami tylko zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_{2k+1}$.

Wnosimy stąd, że jeżeli wyznaczniki Δ i Δ_1 danego wyrażenia różniczkowego

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p,$$

są równe zeru i najwyższy stopień nierównych zeru ich minorów jest odpowiednio $2k$ i $2k+2$, zawsze możemy wyrugować z danego wyrażenia $2k+1$ zmiennych niezależnych. Wyznacznik zaś Δ_1 wyrażenia przekształconego

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2k+1} dz_{2k+1}$$

o nieparzystej $2k+1$ liczbie zmiennych niezależnych, nie jest równy zeru. W rzeczy samej, wyznacznik Δ_1 danego wyrażenia różniczkowego jest równy zeru i najwyższy stopień nierównych zeru jego minorów jest $2k+2$. Więc wyznacznik Δ_1 przekształconego wyrażenia

$$Z_1 dz_1 + \dots + Z_{2k+1} dz_{2k+1} + 0 \cdot dx_{2k+2} + \dots + 0 \cdot dx_p,$$

także jest równy zeru i najwyższy stopień nierównych zeru jego minorów jest $2k+2$. Ten atoli wyznacznik Δ_1 ma postać:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & Z_1, & Z_2, & \dots, & Z_{2k+1}, & 0, \dots, 0 \\ -Z_1, & (1, 1), & (2, 1), & \dots, & (2k+1, 1), & 0, \dots, 0 \\ -Z_2, & (1, 2), & (2, 2), & \dots, & (2k+1, 2), & 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Z_{2k+1}, & (1, 2k+1), & (2, 2k+1), & \dots, & (2k+1, 2k+1), & 0, \dots, 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, \dots, 0 \end{vmatrix} \quad \left((mn) = \frac{\partial Z_m}{\partial z_n} - \frac{\partial Z_n}{\partial z_m} \right)$$

z której łatwo wnosimy, że ma on tylko jeden minor stopnia $2k+2$ -go

$$\begin{vmatrix} 0, & Z_1, & Z_2, & \dots, & Z_{2k+1} \\ -Z_1, & (1, 1), & (2, 1), & \dots, & (2k+1, 1) \\ -Z_2, & (1, 2), & (2, 2), & \dots, & (2k+1, 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Z_{2k+1}, & (1, 2k+1), & (2, 2k+1), & \dots, & (2k+1, 2k+1) \end{vmatrix},$$

który może nie być równym zeru. Ten ostatni jest oczywiście wyznacznikiem Δ_1 wyrażenia różniczkowego

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2k+1} dz_{2k+1}.$$

Na mocy tego, że ten wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, ostatnie wyrażenie możemy sprowadzić do postaci najprostszej

$$dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(k+1)} dx^{(k+1)},$$

gdzie x, X są $2k+1$ funkcjami niezależnymi zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_{2k+1}$, albo też zmiennych pierwotnych $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Dowiedliśmy tedy, że jeżeli wyznaczniki Δ i Δ_1 danego wyrażenia różniczkowego o p zmiennych niezależnych są równe zeru i najwyższy stopień nierównych zeru ich minorów jest odpowiednio $2k$ i $2k+2$ ($< p+1$), wtedy dane wyrażenie daje się sprowadzić do postaci najprostszej

$$dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(k+1)} dx^{(k+1)},$$

o $2k+1 < p$ zmiennych niezależnych x, X , i o $k+1$ różniczkach.

Zmienne niezależne x, X kształtu najprostszego są funkcjami niezależnymi zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_p$ danego wyrażenia różniczkowego.

Dane wyrażenie różniczkowe możemy w przypadku obecnym rozważać w sposób inny. Sprowadziwszy je do wyrażenia

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_{2k+1} dz_{2k+1},$$

którego wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, możemy do tego ostatniego zastosować rozumowania, jakie stosowaliśmy w § 4 do wyrażenia

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2m+1} dx_{2m+1},$$

którego wyznacznik Δ_1 także był różnym od zera; więc możemy nadać mu kształt:

$$y_1 dy_1 + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(k+1)} dx^{(k+1)},$$

gdzie $y_1, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k+1)}$ są $2k+1$ funkcjami niezależnymi zmiennych niezależnych $z_1, z_2, \dots, z_{2k+1}$; przytem y_1 jest funkcją dowolną tych zmiennych; ponieważ dalej z_1, z_2, z_{2k+1} są funkcjami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_p$, więc $y_1, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k+1)}$ są funkcjami

niezależnymi zmiennymi $x_1, x_2, \dots, x_p$ danego wyrażenia. Lecz ponieważ $2k+1 < p$, przeto y_1 przestaje być funkcją dowolną tych zmiennych; przypadek ten właśnie tem różni się od przypadku $2k+1=p$ (§ 4).

Natani, który pierwszy rozważał kształt najprostszemu o najmniejszej liczbie różniczek i o jednej funkcji dowolnej, przypuszczał możliwość istnienia tego kształtu i w przypadku $2k+1 < p$ ¹⁾.

Rezultaty dwóch ostatnich §§ możemy połączyć, jeżeli przypuścimy, że nierównym zeru minorem $2k$ stopnia wyznacznika Δ p -go stopnia jest sam wyznacznik Δ w przypadku $p=2k$ i że nierównym zeru minorem $2k+2$ stopnia wyznacznika Δ_1 stopnia $p+1$ -go jest wyznacznik Δ_1 w przypadku $2k+1=p$. Połączymy je w twierdzeniu następującem: Jeżeli najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest jednakowy i równy $2k$ ($\leq p$), to dane wyrażenie różniczkowe daje się sprowadzić do postaci najprostszej o k różniczkach i o $2k$ ($\leq p$) zmiennych niezależnych — funkcjach niezależnych zmiennych niezależnych danego wyrażenia różniczkowego.

Jeżeli zaś najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest niejednakowy i równy odpowiednio $2k$ i $2k+2$ ($\leq p+1$), to dane wyrażenie sprowadza się do postaci najprostszej o $k+1$ różniczkach i o $2k+1$ ($\leq p$) zmiennych niezależnych — funkcjach niezależnych zmiennych niezależnych danego wyrażenia różniczkowego²⁾.

¹⁾ Natani, n. p. podawszy na str. 316 (l. c.) kryteria istnienia dla wyrażenia różniczkowego $X_1 dx_1 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$ kształtu najprostszego $X^{(1)} dx^{(1)} + \dots + X^{(k)} dx^{(k)}$, gdzie $2k \leq 2n$, przechodzi do oznaczenia kryteriów istnienia dla wyrażenia $X_1 dx_1 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1}$ kształtu $\lambda d\varphi + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(k+1)} dx^{(k+1)}$, gdzie φ jest funkcją dowolną zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$; $2k+1 \leq 2n+1$, i rozumuje w ten sposób: „Es sei die Anzahl der x gleich $2n+1$; bleibt das willkürliche Integral bestehen, so reducirt man vermittelst derselben die Anzahl der Veränderlichen um eine, und es finden die obigen Betrachtungen statt“.

²⁾ Lié podał dowód istnienia kształtu najprostszego danego wyrażenia różniczkowego na podstawie dwu twierdzeń o dwu szczególnych przekształceniach; twierdzenia te udowodnił przy pomocy teorii równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego (str. 339—41. Archiv. für Math. og Naturv., 1877). Te wszakże specjalne przekształcenia są w istocie szczególnymi przypadkami uogólnionego przekształcenia Pfaffa.

G. Darboux (l. c.) podał dowód istnienia kształtu najprostszego, opierając się na tem, że każde wyrażenie różniczkowe daje się sprowadzić do jednej z trzech prostszych postaci

$$1) (X_2 dy_2 + \dots + Y_p dy_p): dy_1 + X_2 dy_2 + \dots + Y_p dy_p; \quad X_2 dy_2 + \dots + Y_p dy_p;$$

$Y_2, \dots, Y_p$ nie zawierają y_1 ; przypuszczając mianowicie, że postać najprostsza możliwa jest dla $p=n-1$, Darboux, korzystając z poprzedniego przekształcenia, dowodzi, że jest ona możliwa i dla $p=n$. Frobenius (l. c.) dowiódł istnienia kształtu najprostszego danego wyrażenia różniczkowego na podstawach teorii niezmienników.

Liczba zmiennych niezależnych kształtu najprostszego jest więc równą zawsze średniej arytmetycznej najwyższych stopni nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 ¹⁾; liczba zaś różniczek jest równą połowie jednego z nich, jeżeli są równe między sobą, albo połowie większego, jeżeli nie są równe.

§ 6.

Własności wyznaczników Δ i Δ_1 danego wyrażenia różniczkowego w związku ze zmiennymi niezależnymi jego kształtu kanonicznego.

W poprzednich §§ dowiedliśmy, że każde wyrażenie różniczkowe

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p,$$

daje się sprowadzić za pomocą uogólnionego przekształcenia Pfaffa do jednego z dwóch kształtów najprostszych, o parzystej lub nieparzystej liczbie zmiennych, które charakteryzują się tą własnością, że wszystkie zmienne ich są niezależne od siebie, i że żadne uproszczenie dla nich jest niemożliwe. Te dwa kształty najprostsze nazywają się, jak wspomnieliśmy, według Lié'go, „kanonicznymi“, odpowiednio kształtem parzystym, lub nieparzystym.

Dane wyrażenie różniczkowe posiada nieskończenie wiele kształtów kanonicznych. W samej rzeczy, w poprzednich §§ przekształcając dane wyrażenie na nową postać, zawsze wybieraliśmy na nowe zmienne stałe całkowania pomocniczych równań różniczkowych.

Moglibyśmy wybierać jako nowe zmienne jakiegokolwiek funkcje niezależne tych stałych całkowania. Otrzymalibyśmy wtenczas inny kształt kanoniczny danego wyrażenia różniczkowego, t. j. taki, którego zmienne byłyby innymi funkcjami niezależnymi zmiennych niezależnych danego wyrażenia, ale liczba ich zostałaby tą samą, ponieważ rozumowania poprzednich §§ nie zmieniłyby się w niczem. Nasuwa się tu samo przez się pytanie: czy ostatnia okoliczność, t. j. niezmiennosc typu kształtu kanonicznego i liczby jego zmiennych niezależnych nie jest prawem ogólnem, niezależnem od sposobu przekształcania danego wyrażenia na postać kanoniczną? Tak w rzeczywistości jest. Można to uzasadnić na mocy twierdzenia następującego, odwrotnego do twierdzenia podanego w paragrafie poprzedzającym.

¹⁾ Frobenius, (l. c.).

Jeżeli dane wyrażenie różniczkowe o p zmiennych niezależnych daje się sprowadzić do postaci kanonicznej parzystej o $2k$ ($\leq p$) zmiennych niezależnych, to najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 danego wyrażenia jest jednakowy i równy $2k$ ($\leq p$). Jeżeli zaś dane wyrażenie różniczkowe daje się sprowadzić do postaci kanonicznej nieparzystej o $2k+1$ ($\leq p$) zmiennych niezależnych, najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 danego wyrażenia jest niejednakowy i równy odpowiednio $2k$ i $2k+2$ ($\leq p+1$).

Przypuścimy, że dane wyrażenie różniczkowe daje się sprowadzić do postaci kanonicznej parzystej

$$X^{(1)} dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(k)} dx^{(k)}$$

o $2k$ ($\leq p$) zmiennych niezależnych x, X ; niech wzory przekształcające na postać kanoniczną będą:

$$x_i = \varphi_i(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}, x_{2k+1}, \dots, x_p), \\ (i=1, 2, \dots, 2k).$$

t. j. innymi słowy, niech jacobian zmiennych x, X

$$\frac{\partial (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_{2k})}$$

względem zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$ będzie różnym od zera.

Na str. 78–79, t. VIII dowiedliśmy, że jeżeli wyrażenie różniczkowe $Z_1 dx_1 + Z_2 dx_2 + \dots + Z_p dx_p$ jest przekształceniem wyrażenia $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p$, zawsze mamy wzór:

$$\frac{\partial Z_m}{\partial x_n} - \frac{\partial Z_n}{\partial x_m} = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n (s, t) \frac{\partial x_s}{\partial x_m} \frac{\partial x_t}{\partial x_n}; \quad \left((s, t) = \frac{\partial X_s}{\partial x_t} - \frac{\partial X_t}{\partial x_s} \right), \\ (m, n=1, 2, \dots, p).$$

W zastosowaniu do wyrażeń różniczkowych

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p \quad \text{i} \quad X^{(1)} dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \\ + \dots + X^{(k)} dx^{(k)} + 0 \cdot dx^{(1)} + \dots + 0 \cdot dx^{(k)} + 0 \cdot dx_{2k+1} + \dots + 0 \cdot dx_p,$$

ten wzór przyjmuje postać:

Za pomocą wzoru tego wyznacznik Δ wyrażenia danego otrzymuje kształt

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1} \frac{\partial X_i}{\partial x_1} - \frac{\partial x_i}{\partial x_2} \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \right) & \dots & \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial x_i}{\partial x_{2k}} \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_i}{\partial x_1} - \frac{\partial x_i}{\partial x_{2k}} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) & \dots & \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial x_i}{\partial x_{2k}} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) \end{vmatrix}$$

Z tej postaci jego wnioskujemy, że według reguły mnożenia wyznaczników możemy uważać go za utworzony z dwóch układów elementów:

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_1}, \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x_1}, -\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_1}, -\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_0}, \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x_0}, -\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_0}, -\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_0}, \dots, -\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_0},$$

I

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_p}, \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_p}, \dots, \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x_p}, -\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_p}, -\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_p}, \dots, -\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_p},$$

i

$$\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_1}, \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_1}, \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_1}, \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_s}, \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_s}, \dots, \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_s}, \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_s}, \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_s}, \dots, \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x_s},$$

II

$$\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_n}, \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_n}, \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_n}, \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x_n}.$$

Jeżeli $p = 2k$

$$\Delta = \left| \frac{\partial (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_{2k})} \right|^2.$$

Strona prawa tego wzoru nie jest równą zero, ponieważ zmienne x, X kształtu kanonicznego są niezależne od siebie. Węć wyznacznik Δ nie jest równy zero.

Jeżeli $p > 2k$, wyznacznik Δ jest równy zeru, ponieważ w układach elementów I i II liczba wierszy jest większa od liczby kolumn.

Przytem są równe zero wszystkie minory tego wyznacznika stopnia wyższego od $2k$, ponieważ i te minory można uważać za utworzone według reguły mnożenia wyznaczników z dwu układów elementów, w których liczba wierszy jest większa od liczby kolumn. Co się tyczy minorów stopnia $2k$ -go, każdy główny minor tego stopnia, np. minor

$$\begin{array}{c} (r+1, r+1), (r+2, r+1), \dots, (r+2k, r+1) \\ (r+1, r+2), (r+2, r+2), \dots, (r+2k, r+2) \\ \dots \\ (r+1, r+2k), (r+2, r+2k), \dots, (r+2k, r+2k) \end{array}$$

jest równy:

$$\frac{\partial (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)})}{\partial (x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{r+2k})} \Big|^2$$

Ponieważ zmienne x, X kształtu kanonicznego są niezależne od siebie, więc nie wszystkie ich jacobiany względem zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_p$ są równe zeru; nie wszystkie tedy minory $2k$ -go stopnia wyznacznika Δ są równe zeru.

Weźmy teraz pod uwagę wyznacznik Δ_1 danego wyrażenia różniczkowego. Na mocy wzorów:

$$X_s = \sum_{r=1}^k X^{(r)} \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_s}, \quad (m \ n) = \frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m} = \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_n} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_m} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_m} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_n} \right),$$

$$(m, n = 1, 2, \dots, p),$$

możemy mu nadać kształt:

$$0, \quad \sum_{r=1}^k X^{(r)} \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_1}, \quad \sum_{r=1}^k X^{(r)} \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_2}, \quad \dots, \quad \sum_{r=1}^k X^{(r)} \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_\mu}$$
$$-\sum_{r=1}^k X^{(r)} \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_1}, \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_1} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_1} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_1} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_1} \right), \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_2} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_1} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_1} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_2} \right), \dots, \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_\mu} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_1} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_1} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_\mu} \right)$$
$$-\sum_{r=1}^k X^{(r)} \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_2}, \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_1} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_2} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_2} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_1} \right), \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_2} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_2} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_2} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_2} \right), \dots, \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_2} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_2} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_\mu} \right)$$
$$\dots$$
$$-\sum_{r=1}^k X^{(r)} \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_\mu}, \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_1} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_1} \right), \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial u_1} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial u_1} \right), \dots, \quad \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_\mu} \right)$$

z którego wnosimy, że możemy go uważać za utworzony według reguły mnożenia wyznaczników z dwu układów elementów:

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \begin{array}{ccccccc} 0, & 0, & \dots, & 0, & -X^{(1)}, & \dots, & -X^{(k)} \\ \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_1}, & -\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_1}, & \dots, & -\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_p}, & \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_p}, & \dots, & \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_p}, & -\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_p}, & \dots, & -\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_p} \end{array} \\ \\ \text{II} \\ \begin{array}{ccccccc} X^{(1)}, & X^{(2)}, & \dots, & X^{(k)}, & 0, & 0, & \dots, & 0, \\ \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_p}, & \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_p}, & \dots, & \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_p}, & \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x_p}, & \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_p}, & \dots, & \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x_p} \end{array} \end{array}$$

Ponieważ $2k \leq p$, liczba wierszy $p+1$ zawsze jest większą od liczby kolumn $2k$, a więc wyznacznik Δ_1 w tym przypadku zawsze jest równy zeru. Są też równe zeru wszystkie minory jego stopnia wyższego od $2k$. Co się tyczy minorów stopnia $2k$, one nie wszystkie są równe zeru, chociażby dla tego, że pomiędzy nimi są minory stopnia $2k$ wyznacznika Δ . Więc pierwsza część twierdzenia jest dowiedziona.

Przypuśćmy teraz, że dane wyrażenie różniczkowe

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p,$$

daje się sprowadzić do postaci kanonicznej nieparzystej

$$dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(k+1)} dx^{(k+1)}$$

o $2k+1$ ($\leq p$) zmiennych niezależnych x, X . Przypuśćmy, że wzory przekształcenia na kształt kanoniczny mają postać:

$$x_i = \varphi_i(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(k+1)}; x_{2k+2}, \dots, x_p),$$

$$(i=1, 2, \dots, 2k+1).$$

Wzór na str. 79, t. VIII będzie miał w danym razie postać :

$$(m, n) = \frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m} = \sum_{r=2}^{k+1} \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_m} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_n} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_n} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_m} \right),$$

($m, n = 1, 2, \dots, p$).

albowiem wyrażenie różniczkowe kształtu kanonicznego możemy przedstawić w postaci:

$$dx^{(1)} + X^{(2)} dx^{(2)} + \dots + X^{(k+1)} dx^{(k+1)} + 0 \cdot dX^{(2)} + \dots \\ + 0 \cdot dX^{(k+1)} + 0 \cdot dx_{2k+2} + \dots + 0 \cdot dx_p.$$

Za pomocą wzoru tego wyznacznik Δ wyrażenia danego możemy przedstawić w postaci:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} & \dots & \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} & \dots & \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} \\ \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} & \dots & \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} & \dots & \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} & \dots & \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} & \dots & \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} - \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \left(\frac{dx_{r2}}{dx_{r2}} \right)_{r+1} \end{vmatrix}$$

Rozumując na tym wyznaczniku w sposób podobny do tego, jakiego używaliśmy w przypadku poprzednim, wykażemy, że jest on zawsze równy zeru ze wszystkimi minorami swemi stopnia wyższego od $2k$ -go ($< p$).

Co się tyczy minorów stopnia $2k$ -go, każdy główny minor stopnia $2k$, np.

$$D = \begin{vmatrix} (r+1, r+1), (r+2, r+1), \dots, (r+2k, r+1) \\ (r+1, r+2), (r+2, r+2), \dots, (r+2k, r+2) \\ \dots \\ (r+1, r+2k), (r+2, r+2k), \dots, (r+2k, r+2k) \end{vmatrix},$$

jest równy:

$$\left| \frac{\partial (x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(k+1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k+1)})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{2k})} \right|^2.$$

Ponieważ zaś $x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k+1)}$ są niezależne od siebie, nie wszystkie ich jacobiany względem zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_p$ są równe zeru, a więc i nie wszystkie minory stopnia $2k$ wyznacznika Δ są równe zeru.

Przejdźmy teraz do wyznacznika Δ_1 . Na mocy wzorów

$$X_s = \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_s} + \sum_{r=2}^{k+1} X^{(r)} \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_s},$$

$$\frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m} = \sum_{r=2}^{k+1} \left(\frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_n} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_m} - \frac{\partial x^{(r)}}{\partial x_m} \frac{\partial X^{(r)}}{\partial x_n} \right),$$

możemy mu nadać kształt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_1^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} + \dots \\
 & \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_1^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} + \dots \\
 & \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_1^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} + \dots \\
 & \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_2^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} + \dots \\
 & \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_2^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} + \dots \\
 & \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_2^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_2 \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} + \dots \\
 & \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_p^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_i} + \dots \\
 & \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_p^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_i} + \dots \\
 & \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_p^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 x^{(k+1)}}{\partial x_p \partial x_i} \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_i} + \dots
 \end{aligned}$$

z którego wnosimy, że możemy go uważać za utworzony według prawidła mnożenia wyznaczników z dwu układów elementów:

$$\begin{aligned}
 & 0, \quad 0, \quad \dots, \quad 0, \quad -1, \quad -X^{(2)}, \quad \dots, \quad -X^{(k+1)}, \\
 & \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_1}, \quad 0, \quad -\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad -\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x_1}, \\
 & \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_2}, \quad 0, \quad -\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad -\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x_2}, \\
 & \dots \\
 & \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial x^{(2)}}{\partial x_p}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_p}, \quad 0, \quad -\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_p}, \quad \dots, \quad -\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x_p},
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 & 1, \quad X^{(2)}, \quad \dots, \quad X^{(k+1)}, \quad 0, \quad \dots, \quad 0, \\
 & 0, \quad \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_1}, \\
 & 0, \quad \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_2}, \\
 & \dots \\
 & 0, \quad \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x_p}, \quad \dots, \quad \frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial x^{(1)}}{\partial x_p}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial x_p}.
 \end{aligned}$$

Liczba kolumn $2k+2$ jest równą albo mniejszą od liczby $p+1$ wierszy. Jeżeli $2k+2=p+1$, wyznacznik Δ_1 jest równy oczywiście:

$$\left| \frac{\partial (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k+1)})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1})} \right|^2,$$

i na skutek niezależności zmiennych x, X kształtu kanonicznego nie jest równy zeru. Jeżeli zaś $2k+2 < p+1$, to Δ_1 oczywiście równa się zeru ze swoimi minorami stopnia wyższego od $2k+2$. Co się tyczy minorów stopnia $2k+2$, to mogą być nierównymi zeru tylko te z nich, które zawierają elementy pierwszej kolumny i pierwszego wiersza wyznacznika Δ_1 , t. j. które możemy uważać za utworzone z dwu układów elementów, otrzymanych przez wykreślenie z układów powyżej napisanych po $p-(2k+1)$ jakichkolwiek wierszy prócz pierwszych. Każdy główny minor stopnia $2k+2$, zawie-

rający elementy pierwszej kolumny i pierwszego wiersza wyznacznika Δ_1 , na przykład:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \dots, & X_{2k+1} \\ -X_1, & (1, 1), & (2, 1), & \dots, & (2k+1, 1) \\ -X_2, & (1, 2), & (2, 2), & \dots, & (2k+1, 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_{2k+1}, & (1, 2k+1), & (2, 2k+1), & \dots, & (2k+1, 2k+1) \end{vmatrix},$$

jest równy oczywiście:

$$\left| \frac{\partial (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k+1)})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1})} \right|^2,$$

i na mocy tego, że nie wszystkie jacobiany zmiennych niezależnych x, X kształtu kanonicznego względem zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_p$ mogą być równe zeru. Więc nie wszystkie minory stopnia $2k+2$ wyznacznika Δ_1 są równe zeru.

W ten sposób dowiedliśmy, że jeżeli dane wyrażenie różniczkowe sprowadza się do postaci kanonicznej parzystej o $2k (\leq p)$ zmiennych niezależnych, to najwyższy stopień nierównych zeru wyznaczników Δ i Δ_1 jest jednakowy i równy $2k (\leq p)$; jeżeli zaś dane wyrażenie różniczkowe sprowadza się do postaci kanonicznej nieparzystej o $2k+1 (\leq p)$ zmiennych niezależnych, to najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest niejednakowy i równy odpowiednio $2k$ i $2k+2 (\leq p)$.

Na mocy tego twierdzenia możemy uzasadnić wypowiedzianą wyżej zasadę niezmienności kształtu kanonicznego danego wyrażenia różniczkowego. W samej rzeczy, przypuśćmy, że dane wyrażenie różniczkowe możemy sprowadzić do dwu kształtów kanonicznych o r i r_1 zmiennych niezależnych. Możemy dowiedzieć, że zawsze $r=r_1$. Istotnie przypuśćmy, że $r_1 > r$; niech r_1 będzie liczbą nieparzystą, r zaś liczbą parzystą.

Jeżeli dane wyrażenie różniczkowe sprowadza się do postaci kanonicznej nieparzystej o r_1 zmiennych niezależnych, to najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest równy odpowiednio $\frac{r_1-1}{2}$ i $\frac{r_1+1}{2}$;

z drugiej zaś strony, to samo wyrażenie sprowadza się do postaci kanonicznej parzystej o r zmiennych niezależnych, więc najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest $\frac{r}{2}$. Stąd wno-

simy, że $\frac{r}{2} = \frac{r_1-1}{2}$ i $\frac{r}{2} = \frac{r_1+1}{2}$, a więc $r_1-1=r_1+1$, co jest niedo-

rzecznością. Wnosimy przeto, że dane wyrażenie różniczkowe daje się sprowadzić do postaci albo tylko parzystej, albo tylko nieparzystej, t. j. charakter postaci kanonicznej nie zmienia się.

Przypuśćmy teraz, że r_1 i r są liczbami parzystymi. Najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznacznika Δ jest równy z jednej strony $r_1/2$, a z drugiej $r/2$. Więc $r_1=r$, t. j. jeżeli dane wyrażenie różniczkowe sprowadza się do postaci kanonicznej parzystej, to liczba zmiennych niezależnych tego kształtu jest niezmienną.

Przypuśćmy wreszcie, że r_1 i r są liczbami nieparzystymi. Najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ jest równy z jednej strony $\frac{r_1-1}{2}$, z drugiej $\frac{r-1}{2}$; więc $r_1=r$, t. j. jeżeli dane wyrażenie róż-

niczkowe sprowadza się do postaci kanonicznej nieparzystej, to liczba zmiennych niezależnych tej postaci jest niezmienną.

W ten sposób dowiedliśmy zasady niezmienności kształtu kanonicznego danego wyrażenia różniczkowego, która daje się krótko sformułować w ten sposób, że liczba zmiennych niezależnych kształtu kanonicznego danego wyrażenia jest niezmienną¹⁾.

Na mocy tego twierdzenia możemy wyznaczyć kryteria, określające liczbę zmiennych niezależnych kształtu kanonicznego danego wyrażenia. Mianowicie dowiedliśmy w poprzednich §§, że jeżeli najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest jednakowy i równy $2k (\leq p)$, to dane wyrażenie możemy sprowadzić do postaci kanonicznej parzystej o $2k (\leq p)$ zmiennych niezależnych; jeżeli zaś najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest niejednakowy i równy odpowiednio $2k$ i $2k+2 (\leq p+1)$, to dane wyrażenie możemy sprowadzić do postaci kanonicznej nieparzystej o $2k+1 (\leq p)$ zmiennych niezależnych. Uwzględniając udowodnioną zasadę niezmienności kształtu kanonicznego, twierdzimy:

Jeżeli najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest jednakowy i równy $2k$, to dane wyrażenie różniczkowe sprowadza się tylko do postaci kanonicznej parzystej o $2k (\leq p)$ zmiennych niezależnych; jeżeli zaś najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest niejednakowy i równy odpowiednio $2k$ i $2k+2 (\leq p+1)$, to dane wyrażenie różniczkowe sprowadza się tylko do postaci kanonicznej nieparzystej o $2k+1 (\leq p)$ zmiennych niezależnych²⁾.

¹⁾ Inny dowód podał Lie, Archiv. for Mathematik og Naturv., 1877, (str. 343-45).

²⁾ Frobenius (l. c.). Jeżeli oznaczmy przez μ i ν najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 , to liczba zmiennych niezależnych kształtu kanonicznego jest, jak widzieliśmy, $\frac{\mu+\nu}{2}$. Tę liczbę Frobenius nazywa „niezmiennikiem“

o $2k+1$ zmiennych, możemy przedstawić w jednym wzorze. Niech μ i ν oznaczają najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ_1 i Δ_2 ; w pierwszym z rozważanych przypadków $\mu = \nu = 2k$, więc tu liczba λ warunków jest:

$$\lambda = \frac{(\nu - \nu) (\nu - \mu + 1)}{1 \cdot 2};$$

w drugim zaś przypadku $\mu = 2k+2$, $\nu = 2k$ i $\nu - 2k - 1 = \nu - \mu + 1$, więc znowu:

$$\lambda = \frac{(\nu - \nu) (\nu - \mu + 1)}{1 \cdot 2}.$$

Najmniejsza przeto liczba warunków potrzebnych na to, by dane wyrażenie różniczkowe o p zmiennych niezależnych sprowadzało się do postaci kanonicznej o q zmiennych niezależnych, jest:

$$\lambda = \frac{(\nu - \nu) (\nu - \mu + 1)}{1 \cdot 2},$$

gdzie $\nu = \mu = q$ dla q parzystego; $\nu = q - 1$, $\mu = q + 1$ dla q nieparzystego.

Paryż, w lipcu, 1897 r.

TEORIA MOLEKULARNA PRZEWODNIKÓW ELEKTRYCZNYCH, PÓLPZEWODNIKÓW I DIELEKTRYKÓW.

NAPISAL

L. SILBERSTEIN.

W dwóch ostatnich zeszytach czasopisma „Elektrochemische Zeitschrift“ starałem się ¹⁾ wykazać trudności, jakie napotykamy, jeżeli chcemy zgodnie ze zwykłą teorią wyobrazić sobie prąd elektryczny, określony przez wzór

$$(a) \quad i = \lambda E \quad (\lambda = \text{spółcz. „przewodnictwa“, } E = \text{siła elektr.}),$$

wewnątrz substancji drutu „przewodzącego“. Trudności te są bezpośrednim wynikiem założenia ciągłości przestrzennej substancji „przewodzącej“, która przynajmniej *implicite* tkwi w odnośnych wzorach matematycznych każdej teorii prądów elektrycznych.

Czytelnicy mogą bez trudności poznać zasady mojej teorii z rozprawy, ogłoszonej w wymienionem wyżej czasopiśmie; sądzę przeto, że zbytecznem byłoby powtarzać w tem miejscu cały szereg roztrząsań, które naprowadziły mnie na myśl zbudowania teorii molekularnej tak zwanych „przewodników“ elektrycznych. Po ogłoszeniu wzmiankowanej rozprawy przekonałem się jednak, wbrew moim oczekiwaniom, że teoria ta daje się w bardzo prosty sposób zastosować nie tylko do przewodników I klasy, jakimi np. są metale, lecz również do dielektryków, jak szkło, gutaperka, benzol i t. d.

¹⁾ W artykule p. t. „Ein discontinuierliches Bild des sogen. elektr. Leitungsstromes“.