

niezmienniczych występuje pewien rodzaj „zadania odwrotnego“, polegającego na tem, że pomyślwszy jeden albo więcej utworów, powstałych z form pierwotnych,—przy milczącym założeniu, że spełniają się zachodzące pomiędzy nimi ewentualnie związki — staramy się znaleźć należące do nich formy pierwotne. Zadanie to jest w ogóle wieloznaczne i dlatego przedewszystkiem idzie w niem o wyznaczenie za każdym razem liczb form pierwotnych, a następnie o wyznaczenie równań, od których rozwiązania formy te zależą. Ten drugi rodzaj zagadnień, jako dopełnienie konieczne teorii niezmienników wymiernych i ich syzygij, ma przyszłość przed sobą; lecz badano go dotąd tylko w kilku pojedynczych przypadkach.

O STANIE OBECNYM TEORII NIEZMIENNIKÓW.

NAPISAL

Fr. MEYER,

Przełożył za upoważnieniem autora

S. DICKSTEIN.

CZĘŚĆ II*).

POKREWIEŃSTWO FORM.

*(Ciąg dalszy). **

B. Pytania, odnoszące się do niewymierności.

W badaniach, o których dotychczas była mowa, szło przedewszystkiem o „wymierność“ lub „całkowitość“. Wprawdzie już od samego początku, zwłaszcza pod wpływem geometrii, nasuwały się pytania „niewymierne“, lecz dopiero w ostatnich czasach zaczęto systematycznie wprowadzać niezmienniki i spółzmienniki niewymierne. Wyrobionej zupełnie teorii tego przedmiotu dotąd nie mamy.

Historycznie można wyróżnić dwa prądy. Z jednej strony (jak przy formach kwadratowych) wysuwa się wywołane względami praktycznymi pytanie o pewnych postaciach niezmienniczych „kanonicznych“ form danych. Do rozstrzygnięcia tego pytania potrzebnem jest rozwiązanie równań algebraicznych pomocniczych. Z drugiej strony, wśród teorii utworów

a) *Formy kanoniczne.*

Zasady tej teorii¹⁾ należą do okresu najwcześniejszego. Dla form dwójkowych Sylvester i Cayley pokazali, w jaki sposób dają się one przedstawić przez kombinacje liniowe potęg wyrażeń liniowych $x - a$. Istnieją spółczynniki proste („kanonizanty“), których pierwiastki są szukanymi wartościami a ; w przypadkach pojedynczych można też było poznać, jakie występują modyfikacje, jeżeli niektóre z ilości a stają się równymi. Zakrąglenie tej teorii, obejmujące wszystkie przypadki wyjątkowe, pochodzi od Gundelfingera²⁾, który posługiwał się środkami analitycznymi. Przerobiwszy odpowiednio wyrażenie różniczkowe k -tego nasunięcia dwóch form dwójkowych, rozciągnął on na niezmienniki w sposób odpowiedni szeregi znanych twierdzeń z teorii równań różniczkowych liniowych³⁾. Rezultat ostateczny, do którego doszedł, można wypowiedzieć w ten sposób. Niechaj $a_0, a_1, \dots$ będą spółczynniki formy pierwotnej f_n . Utworzymy łańcuch spółzmienników „kanonicznych“ $C, C', C'', \dots$ z wyrazami głównymi

$$a_0, \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

Jeżeli forma f_n ma być przedstawiona jako suma k potęg n -tych, to musi najprzód $C^{(k)}$ (nie zaś $C^{(k-1)}$) znikać tożsamościowo. Wtedy istnieje forma I_k , której k -te nasunięcie na formę f jest tożsamościowo zerem, równanie $I_k = 0$ musi nadto posiadać same pierwiastki nierówne a . Odwrotnie

*1) Patrz „Prace matematyczno-fizyczne“ tom VII, str. 17—68; tom VIII, str. 139—177.

te dwa warunki wystarczają do tego, by forma f_n dała się przedstawić jako sumą potęg $(x-a)^k$. Jeżeli niektóre z pierwiastków równania $F_k=0$ są sobie równe, to przy pomocy rozkładu na ułamki cząstkowe otrzymujemy na formę f_n wyrażenie pod postacią sumy k_i ($k_i \leq n$) potęg, z których każda pomnożona jest przez formę dopełniającą rzędu $n-k_i$.

Odpowiednie twierdzenie istnieje dla jednoczesnego przedstawienia n form n -tego rzędu.

Jeżeli odwrócimy uwagę od przypadków wyjątkowych (w których wartości a zlewają się częściowo), to jądro powyższego kryterium, t. j. wprowadzenie formy F_k znajdujemy już u Rosanese ⁴⁾, który tę formę nazywa sprzężoną z formą f_n . Rosanes rozciągnął także swoje badania na n form dwójkowych oraz na formy dziedzin wyższych, Mówiąc geometrycznie, każda krzywa (powierzchnia) n -tego rzędu jest sprzężona z każdym z jej punktów liczonych n -krotnie. Przedstawienia potęgowe form pozostają tedy w najściślejszym związku z teorią tak zwanych wielokątów lub wielościągów „biegunowych”, która przez to istotnie się zbogaca.

Na innej zupełnie drodze doszedł do tego związku Reye ⁵⁾, który pierwotnie postawił pytanie, jaką możliwie najmniejszą liczbę osobnych punktów masowych można zastąpić dane ciało ze względu na jego momenty n -te, odniesione do płaszczyzny dowolnej. Przedstawienie równania $F_n=0$ powierzchni przez sumę R zupełnych potęg nazywa się tedy przedstawieniem powierzchni jako „powierzchni n -tych momentów” ciała, dającego się zastąpić k punktami, t. j. taką powierzchnią, że znika n -ty moment ciała odnośnie do jej płaszczyzny stycznych.

Przy pomocy tych środków Reye ⁶⁾ nie tylko podał prosty dowód geometryczny dla tak nazwanego „pięciościanu” powierzchni 3-go rzędu, t. j. dla przedstawienia jednoznacznie 7) formy sześcienniej czwórkowej przez sumę pięciu sześciągów, co zauważył już poprzednio Sylvester, lecz pokazał nadto, w jakim kierunku twierdzenie to nadaje się do uogólnienia ⁸⁾. Piszący te słowa wyłożył obszernie ⁹⁾, jakie zachodzi pokrewieństwo między punktami widzenia Rosanese a Reye’go, w szczególności zaś pokazał, że przedstawienia kanoniczne w dziedzinach wyższych, dzięki teorii funkcji symetrycznych, sprowadzić można do takichże przedstawień w dziedzinach niższych.

Wracając do form dwójkowych wspomniemy o tem, że w ostatnich czasach Bauer ¹⁰⁾, nawiązując badanie swe do prac Rosanese, wyprowadził dla form dwójkowych f_{2n} rzędu parzystego, piękne wyrażenie pod postacią sumy $n+1$ potęg; wszystkie funkcje, występujące w tem wyrażeniu, są prostymi spółzmiennikami formy f .

Hilbert ¹¹⁾, dzięki pewnemu procesowi różniczkowemu, mógł podać przejrzyste kryterium na to, aby dana forma dwójkowa była zupełną potęgą samej takiej formy. Hilbertowi ¹²⁾ również zawdzięczamy podpo-

rządkowanie najróżnorodniejszych przedstawień kanonicznych pod jedną zasadę ogólną z wyraźniejszym niż dotąd uwydatnieniem jądra niewymiernego całej teorii. Hilbert poszukuje wszystkich form φ , (rzędu ν), których odpowiednio wysokie nasunięcie na formę pierwotną f (rzędu parzystego) różni się od tej formy tylko czynnikiem stałym λ . Ten czynnik λ , będący niezmiennikiem niewymiernym formy f , zależy od równania pomocniczego rzędu $(\nu+1)$ -go z niezmiennikami wymiernymi, jako współczynnikami. Równanie to daje się sprowadzić do charakterystycznej postaci wyznacznikowej. Dalej autor ten znajduje wszystkie zniekształcenia formy pierwotnej f , powstające wtedy, gdy powyższe równanie ma pierwiastki λ równe. Formy φ są spółzmiennikami niewymiernymi.

Możemy tylko wspomnieć o rozmaitych formach kanonicznych, które ustanowiono w teorii równań przy tworzeniu rozwiązującej za pomocą przekształcenia Tschirnhausena, oraz o dwóch formach dla f_6 , otrzymanych przez Brilla ¹³⁾, a wynikających z pewnego specyficznego zagadnienia niezmienniczego.

Wspomnijmy wreszcie o charakterystycznym przedstawieniu pod postacią „sumy kwadratów” tak nazwanych form „określonych” n -tego rzędu o m zmiennych, t. j. takich form ze współczynnikami rzeczywistymi, które są jednego tylko znaku dla wszystkich układów rzeczywistych wartości zmiennych. Do znanych przypadków $n=2$ przy m dowolnym i $m=2$ przy n dowolnym, Hilbert ¹⁴⁾ dodał jeszcze trzeci: $n=4$, $m=3$, w którym istnieje przedstawienie (z trzema dowolnymi parametrami) w postaci sumy trzech kwadratów. Znaczenie tego rezultatu ujawniło się w prawdziwie świetle dopiero wtedy, gdy Hilbertowi udało się wykazać, że przy wszystkich pozostałych kombinacjach liczb n i m istnieją formy określone, których nie można przedstawić pod postacią sumy kwadratów.

b) *Powrót od spółzmienników do form pierwotnych. Niezmienniki i spółzmienniki niewymierne. Kanoniczne przedstawienie ciał eliptycznych i abelowych.*

Na początkowy rozwój teorii niezmienników wywarło niemały wpływ sławne zagadnienie o oznaczeniu liczby wszystkich nierównoważnych, t. j. nie dających się wzajemnie na siebie przekształcać za pomocą podstawień liniowych (całkowito-liczbowych), typów form kwadratowych dwójkowych o danym wyznaczniku. Hermite ¹⁵⁾, przystępując do uogólnienia tego

zadania dla form dwójkowych rzędu wyższego, był zmuszony wydoskonalić metody teorii form.

Z drugiej strony od takich „pytań powrotnych,” prowadziła geometrya Przykład pierwszy i najbardziej godny uwagi stanowi krzywa płaska trzeciego rzędu $C_3=0$, do której należy krzywa spółzmienna $H_3=0$, (wycinająca z pierwszej punkty zwrotne). Hesse odkrył tę ostatnią i znalazł nadto, że, odwrotnie, do danej krzywej H_3 należą trzy krzywe C_3 : odnośne równanie 3-go rzędu stanowi węzeł całej teorii.

Traktowanie systematyczne tych zagadnień w teorii form nastąpiło dopiero później.

W dziedzinie dwójkowej, zwłaszcza ze względu na liczne zastosowania geometryczne, wystąpiło przedewszystkiem zadanie o odnalezieniu wszystkich nierównoważnych typów form $f_n + kp_n$, których wyznacznik funkcyjny (f, φ) jest daną formą f_2 rzędu $2(n-1)$. Brill¹⁶⁾ pierwszy wykazał, że zagadnienie to ma istotnie skończoną liczbą rozwiązań, t. j. że pomiędzy współczynnikami form f_2 żadne związki nie zachodzą.

W badaniu najprostszego przypadku $n=3$ o dwóch rozwiązaniach nie napotkano wielkich trudności¹⁷⁾. Inaczej wszakże rzecz się ma już w przypadku najbliższym $n=4$, prowadzącym do pięciu rozwiązań¹⁸⁾. Równanie stopnia 5-go, od którego te rozwiązania zależą, przedstawił Stephanos¹⁹⁾ w postaci, właściwej teorii niezmienników. Brill²⁰⁾ badał związek wewnętrzny pięciu pęków $f + kp$ pomiędzy sobą oraz z teorią form kwadratowych i równań stopnia 6-go. Następnie piszący te słowa²¹⁾ badał związek tych utworów z teorią krzywych wymiernych C_4 i C_6 oraz z teorią krzywych sześciennych w przestrzeni. Dla dowolnej liczby n oznaczył on liczbę rozwiązań (za pomocą „metody rzutu”²²⁾, którą wkrótce potem stwierdził Stephanos²³⁾ bezpośrednio, Schubert²⁴⁾ zaś przy pomocy geometrycznej. Lecz dopiero Hilbert²⁵⁾, opierając się na zasadzie przytoczonej w rozdziale poprzedzającym, otrzymał w postaci gotowej równanie dla rozwiązań zagadnienia i rozwiązał zarazem zadanie pokrewne o pękach form z danym wyznacznikiem²⁶⁾.

W dziedzinie bezpośrednio wyższej dwóch zmiennych niezależnych pokonał Hurwitz²⁷⁾ za pomocą środków teorii funkcji trudne zadanie znalezienia form pierwotnych, ze znanego wyróżnika, lub, ściślej mówiąc, jego dzielników istotnych, lub jeszcze inaczej — że użyjemy słów autora — rozwiązał zadanie o wyznaczeniu powierzchni Riemanna w składowe, które mają dane punkty rozgałęzienia. Rezultat ten obejmuje w sobie poprzednie, jako przypadki szczególne.

Zwracamy w dalszym ciągu uwagę na szczególne zadanie odwrotne, charakteryzujące nowe metody rozwiązań wyższych²⁸⁾. Idzie tu o to, aby pomyśliwszy stałe (niesprzeczne ze sobą) wartości liczbowe dla form układu

zupełnego, można było zbudować równanie, od którego zależy wyznaczenie odnośnej formy pierwotnej.

W końcu wspomniemy jeszcze o postępie w teorii funkcji eliptycznych i abelowych skutkiem systematycznego wprowadzenia form niewymiernych.

Co się tyczy najprzód teorii funkcji eliptycznych, to Klein²⁹⁾ zaznaczył już, że całka eliptyczna pierwszego gatunku może przyjmować nieskończenie wiele postaci kanonicznych, stosownie do rozległości przestrzeni, w której przyjmujemy za podstawę „krzywą normalną” eliptyczną, wzdłuż której całka ma być rozciągnięta. „Modu” całki jest wtedy niezmiennikiem bezwzględny niewymiernym tej krzywej. Daleko bardziej urozmaiconą jest teoria dla rodzaju $p=2$ i dla $p=3$ ³⁰⁾. Jeżeli w ostatnim przypadku ograniczymy się na najprostszą „krzywą normalną”, t. j. na krzywej płaskiej C_4 , to charakter odnośnych całek i funkcji Θ , oraz ich równań różniczkowych, modyfikuje się odpowiednio do przyjętego za podstawę obszaru wymierności. Do takiego obszaru dojdzie się, jeżeli dołączymy odpowiednio za każdym razem dobraną składową niewymierną układów „krzywych stycznych”, związanych niezmienniczo z krzywą C_4 . Spółrzędne punktu płaszczyzny krzywej C_4 zlewają się tu z (trzema) funkcjami „ φ ” tak, że przekształcenie liniowe pierwszych jest równoważne z najogólniejszym (jednoznacznie) przekształceniem wymiernym funkcji algebraicznych rodzaju 3.

W szczególności Klein³¹⁾ zauważył, że zachodzące tu twory niezmiennicze posiadają w ogóle naturę „kombinantów”, t. j. odnoszą się do form o różnie rozciągłych szeregach zmiennych, podległych podstawieniom niezależnym.

Jest jasne, że badania tego rodzaju przyczyniły się zarazem do postępu czysto-geometrycznej teorii krzywej C_4 ³²⁾.

PRZYPISY.

¹⁾ Tekst nasz jest zwięzły, ponieważ ten przedmiot jest obszernie traktowany w podręcznikach Clebscha, Salmona, Bruuo, Cayley'a. Le Paige pokazał szczegółowo, w jaki sposób przedstawienia Sylwestera i Cayley'a rozciągnąć na formy wielokrotnie liniowe. Belg B. (3) II, s. 40—53. C. K. XCII, s. 1048—1049, 1103—1105; XCIII s. 264—265, 569—512 (1812); C. K. XCIV s. 31—32, 69—71, 424—426. Tor; Atti, XVII, s. 299—320 (1882). Rom. Acc. P. N., XXXV, s. 54—84, 140—141. Lisboa Jor. de sciencias math. . . IX. 1883.

²⁾ Gött. Nachr., 1883, s. 115—121; obszerniej w Journ. f. Math. C., s. 413—424.

²⁾ Tożsamością tą dla k -tego nasunięcia dwu form f_n i φ_m o zmiennych niejednorodnych x jest:

$$\frac{1}{k!} (f, \varphi)^k = \binom{n}{k} f \frac{d^k \varphi}{dx^k} - \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{m-k+1}{1} \right) \frac{df}{dx} \frac{d^{k-1} \varphi}{dx^{k-1}} + \dots (-1)^k \binom{m}{k} \frac{d^k f}{dx^k} \varphi.$$

⁴⁾ Journ. f. Math. LXXV, s. 172—176 (1873), LXXXVI, s. 312—330 (1873). Math. Ann., s. 264—312 (1873). Związek form kanonicznych i teorii apolarności przedstawia my bliżej w rozdziale o kombinantach II, D. 6.

⁵⁾ Journ. f. Math. LXXII, s. 293—326 (1870).

⁶⁾ Journ. f. Math. LXXXVIII, s. 114—122 (1874).

⁷⁾ Patrz uwagi historyczne w biografii Clebscha, Math. Ann., VII, s. 17.

⁸⁾ Journ. f. Math., LXXXV, II, s. 123—129 (1874).

⁹⁾ „Apolartät und rationale Curven“, Tybinga, 1883.

¹⁰⁾ Münch. Ber., 1892, s. 3—20.

¹¹⁾ Math. Ann., XXVII, s. 158—160 (1886). O metodzie, patrz II, C. b. 2.

Dla przypadków prostych *Maisano* podał (1883) spółmienniki, których znikanie tożsamościowe stanowi kryterium będącego w mowie przedstawienia potęgowego; Rom. Acc. L (3), VII, s. 231—233. Tak, dla f_n jako potęgi n -tej mamy:

$$H_{2n-4} = (ab)^2 a_{2n-2} b_{2n-2} \equiv 0,$$

dla f jako potęgi $\frac{n}{2}$ -ej:

$$T = (aH) a_{2n-1} H_{2n-5} \equiv 0, \text{ i t. d.}$$

¹²⁾ Leipz. Ber., 1885, s. 427—438; Math. Ann., XXVIII, s. 381—446 (1887). Co do związku z normowaniem równań różniczkowych liniowych patrz II, Cb. Jeżeli rząd formy f jest $n = 2i$, to w badaniu równania pomocniczego należy koniecznie odróżnić cztery przypadki główne, stosownie do tego, czy liczby c i v są parzyste lub nieparzyste. W trzech z tych przypadków równanie pomocnicze posiada w ogóle $v+1$ różnych pierwiastków λ , w ostatnim zaś (i parzyste, v nieparzyste) $\frac{v+1}{2}$ par równych pierwiastków λ . Należące

tu formy φ , których jest $v+1$ liniowo-niezależnych we wszystkich czterech przypadkach dają się otrzymać za pomocą wyznaczników obniżonych. Odwrotnie, dla danego układu $v+1$ form liniowo-niezależnych rzędu v -go można ustanowić kryteria tego, że stanowią układ form φ ; kryteria te polegają na istnieniu pewnej liczby związków liniowych pomiędzy niezmiennikami kwadratowymi i spółmiennikami dawnych układów form. *Hilbert* w Journ. de Math. (4) IV, s. 249—256 (1886) pokazał na odpowiednich przykładach (form trzeciego rzędu), że zasada jego daje się z powodzeniem stosować do dziedziny trójkowej i dwójkowej.

¹³⁾ Math. Ann., XX, s. 330—357 (1882). Temi formami kanonicznymi są: $x^6 + 2px^2 + 3qx^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2px + q$ i $x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1$. Dochodzimy do nich w sposób następujący:

Pomiędzy formami, powstającymi przez kombinacje liniowe trzech form dwójkowych dwukwadratowych, znajdując się trzy iloczyny form kwadratowych gatunku $\varphi_1 \varphi_2, \varphi_2 \varphi_3, \varphi_3 \varphi_1$, dalej cztery kwadraty $\varphi_1^2, \dots, \varphi_3^2$. Jeżeli x_i, y_i są wartościami, przy których znika φ_i , e_i i η_i takimiż wartościami dla φ_k, f_i , „wyznacznik funkcyjny“ W_6 , t. j. wyznacznik drugich pochodnych trzech form danych za pomocą podstawień $x' = \frac{x - x_i}{y - y_i}$ i odpowiednio

$x' = \frac{x - x_k}{x - \eta_k}$ przechodzi na tamte postacie kanoniczne (patrz cytow. w przypisku 9-ym pracę referenta s. 312). *Brill* stosuje formę kanoniczną między innymi do przejrzystej dyskusji pytania o rzeczywistości pierwiastków równania rzędu 6-go. Inna forma kanoniczna („typowa“) form f_6 znajduje się u *Maschkego* i *Brioschi'ego*, mianowicie $x^6 + \alpha x^4 + \beta x^3 + \frac{\alpha^2}{4} x^2 + \gamma x + \delta$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są czterema niezmiennikami formy f_6 .

Pierwiastki równania $f_6 = 0$ wyrażają się wtedy za pomocą prostych funkcji całkowitych czterech funkcji θ , należących do f_6 (p. *Maschke*, Gött. Nachr. 1887, s. 421—424, Math. Ann. XXX, s. 496—515, 1887, Rom. Acc. L. Rend. (4), IV, s. 181—184 (1888), i *Brioschi'ego* uwagi do ostatniej pracy o obszerniej w Acta Math. XII, s. 88—101 (1888). Inny kształt typowy form f_6 , w którym znikają spółczynniki potęgi 5-ej i 6-ej niewiadomej, rozważał już wcześniej *Brioschi* i przy pomocy syzygii: Annali du Matem. (2), XI, s. 291—304 (1883).

W przypadku szczególnym, gdy f_6 jest spółmiennikiem *Hessego* formy f_6 , można pierwszą z nich za pomocą podstawienia liniowego sprowadzić do formy kanonicznej rzędu 6-go, nie zaś do formy odpowiedniego równania modułowego (*Lindemann*, Math. Ann. XXI, s. 71—109, 1883). Niezmienniki formy f_6 wyraził *Bozsa* za pomocą wartości zerowych funkcji θ tu należących (Math. Ann. XXX, str. 478—495.)

¹⁴⁾ Math. Ann. XXXII, s. 332—350 (1888).

¹⁵⁾ Patrz Wstęp do niniejszego referatu.

¹⁶⁾ Math. Ann. XX, s. 330—357 (1882) i dzieło referenta, cytow. w przypisku 9-ym s. 320.

¹⁷⁾ N. p. *Caporali* Nap. Rend. XXII, s. 95—114 (1883).

¹⁸⁾ W szczególnym przypadku, gdy pęk form f_i staje pękiem biegunowym formy f_6 istnieje jedno tylko rozwiązanie. Wyznacznik funkcyjny w tym razie zlewa się ze spółmiennikami *Hessego* formy f_6 (*Lindemann*, Math. Ann. XXI, s. 71—109, 1883).

¹⁹⁾ C. R. XCIII, s. 994—997 (1881). Jest to wyciąg z większej pracy premiowanej, ogłoszonej w 1883 w Sav. étr.

²⁰⁾ Math. Ann. XX, s. 330—357 (1882).

²¹⁾ „Apolartät“ etc. (1883).

²²⁾ I. c. 391. Istnieje $\frac{2 \cdot (2n-1)!}{(n+1)! (n-1)!}$ pękom form f_{n+1} przy danym wyznaczniku funkcyjnym $2n$ -tego rzędu.

²³⁾ These, 1884.

²⁴⁾ Acta Math. VIII, s. 97—117 (1886). To zagadnienie, o którym mowa w tekście występuje jako przypadek daleka ogólniejszego zagadnienia, należącego do teorii wyższych przestrzeni liniowych.

²⁵⁾ Leipz. Ber. s. 112—122 (1887), Math. An. XXXIII, s. 217—236 (1888).

²⁶⁾ Math. Ann. XXXI, s. 482—492 (1888). Dla $n=4$ zadanie sprowadza się do innego o przekształceniu formy f_6 na formę kanoniczną $\varphi_1^2 - \varphi_2^2$, zależy przeto od tego samego równania pomocniczego rzędu 40-go, które podał *Clebsch* w zadaniu dzielenia na 3 równe części funkcji hypereliptycznych (Gött. Abh. XV, 1869, Math. Ann. II, s. 193—197 (1870)).

²⁷⁾ Math. Ann. XXXIX, s. 1—61 (1891). Tu zebrana jest też odnośna literatura. Inne uogólnienie, odnoszące się do form kwadratowych o dwu szeregach ilości zmiennych podał *Frobenius* (Journ. f. Math. CVI, s. 125—139, 1890). Forma f posiada dwa wyróżniki (t. j. formy dwukwadratowe dwójkowe o równych niezmiennikach; odwrotnie szuka się formy f , gdy te wyróżniki są dane. Otrzymujemy w ogóle co^2 rozwiązań tego zagadnienia.

²⁸⁾ Patrz *Klein* „Vorlesungen über die Ikosaeder etc“ oraz poprzednio cytowane prace *Kleina* i *Gordana* o równaniach rzędu 5-go i 6-go (I, B. 6). O innym rodzaju

zagadnień odwrotnych, postawionych przez Gordan a i dopuszczających tylko jedno dyne rozwiązanie, mowa jest wyżej w przypiskach do II, A c.

²⁹⁾ Math. Ann. XVII, s. 133—138 (1880); Leipz. Abh. 1885, s. 339—399. Porówn. Pick, Math. Ann. XXVIII, s. 309—318 (1887). Wien. Ber., czerwiec 1888, Marzec 1889.

³⁰⁾ Co do rodzaju $p=2$ patrz prace Kleina, Burkhardta i Wiltheissa w Math. Ann. począwszy od t. 27. Co do $p=3$ patrz Pick, Math. Ann. XXIX, s. 259—271 (1887), notę Kleina w Gött. Nachr. 1888, s. 191—194, Math. Ann. XXXVI, s. 1—83, (1880), Wiltheiss tamże XXXIII, s. 1—23 (1890), Pascal cztery rozprawy w Annali di Matem. (2), XVII, XVIII (1889, 1890).

³¹⁾ Gött. Nachr. 1888, s. 191—194. Dalsze rozwinięcie u Wirtingera, Math. Ann. XL, s. 361—412 (1892).

³²⁾ Porów. Frobenius Journ. f. Math. IC, s. 275—314 (1886), CIII, s. 139—183 (1888).

A. Metodyka. Symbolika i procesy niezmiennicze.

Przychodzimy do ścisłej dziedziny teorii niezmienników, do procesów w niej stosowanych. Dzielią się one naturalnie na dwie klasy główne: na procesy symboliczne i realne; te składają się z procesów różniczkowych, wykonywanych na formach, tamte zaś są właściwie algebraicznymi. W rzeczy samej widać od razu, że zasada symboliki teorii form co do swej istoty zgadza się ¹⁾ z zasadą „liczb idealnych“ Kummera, polegającą na tem, że algebraiczne liczby i formy nieprzystawne w danym obszarze wymierności rozkładamy przy pomocy „dołączenia“ odpowiednich niewymierności na czynniki idealne (pierwsze) prostsze w ten sposób, że te czynniki czynią zadość zwykłym prawom działań arytmetyki.

Dopiero w pewnych połączeniach (mnożnościowych) te elementy idealne stają się wielkościami obszaru pierwotnego.

a) Symbolika i przedstawienie graficzne.

a) Kierunek niemiecki.

Metoda symboliczna, wprowadzona przez Clebscha i Aronholda ²⁾, doprowadzona do pewnego zakończenia przez Gordana i jego szkołę, ma na celu sprowadzenie teorii niezmienników form dowolnego rzędu do teorii form liniowych i wyrobienie odpowiedniego, łatwego w mani-

pulacji algorytmu. Algorytm taki, jak to odrazu zaznaczamy, ma wyłącznie odtwarzać zależności lub niezależności liniowe pomiędzy współczynnikami form danych.

Niechaj J będzie niezmiennikiem pojedynczej formy pierwotnej f , którego stopień względem współczynników formy f jest p ; do tego niezmiennika J dobierzmy ³⁾ jednoznacznie inny niezmiennik J_1 , liniowy względem p szeregów form $f_2, f_1, \dots, f_p$, analogicznych z formą f . Stosując tę samą zasadę do współczynników p formy pierwotnej f (lub jej równoważnych przedstawicieli $f_1, f_2, \dots, f_p$), która niechaj będzie rzędu ν -go względem pojedynczego szeregu zmiennych x , rozłożymy formę f na ν form liniowych idealnych:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_ny_n, \dots, n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_n\omega_n.$$

Pokazuje się wszakże, że bez utraty możności powrotu jednoznacznego do form realnych, można utożsamiać pomiędzy sobą tak n szeregów współczynników, jak i szeregi zmiennych $x, y, \dots, \omega$, w ten sposób, że p form f_i przechodzi na p analogicznych potęg form liniowych $a'_x, a''_x, \dots$

Skutek bezpośredni i niezmiennie ważny tego przedstawienia jest następujący. Jeżeli zmienne x poddamy przedstawieniu liniowemu, przez które przechodzą one na nowe zmienne y , formy zaś f_i na nowe formy F_i , i jeżeli formy przekształcone F napiszemy znów symbolicznie jako potęg n -te form liniowych $A_1y_1 + A_2y_2 + \dots + A_ny_n$ it.d., to grupa podstawień współczynników f_i , powstała dzięki grupie podstawień zmiennych x , przyjmuje postać prostą tak, że ilości A zależą od a it.d. zupełnie w ten sam sposób, w jaki ilości x zależą od y , z możliwym tylko przedstawieniem współczynników podstawienia.

Stąd wynika wprost, że można napisać ilekolwiek niezmienników formy f ; w tym celu dość z n szeregowych wyznaczników ilości $a', a'' \dots$ utworzyć takie iloczyny, aby każdy z szeregów symbolicznych zachodził wszystkiego ν razy. Względem całej teorii jest, jak to pierwszy wykazał Clebsch ⁴⁾, odwrócenie twierdzenia, „że każdy niezmiennik (całkowito-wymierny) formy f może być wyrażony jako funkcyja (całkowito-wymierna) tych iloczynów.

To twierdzenie zasadnicze można bez trudności zastosować do szeregu form pierwotnych, pomiędzy którymi w szczególności może się znajdować pewna liczba form liniowych ⁵⁾. Udało się wprowadzić Clebschowi ⁶⁾ scharakteryzować symbolicznie i takie niezmienniki jednocześnie, w których zachodzą realiter współczynniki form liniowych, tylko w zupełnie określonych połączeniach wyznacznikowych (mianowicie dwu, trój i $n-2$ szeregowych); lecz już dla $n > 3$ nie można przejrzyć wszystkich możliwych utworów. Przeciwnie formy pierwotne mogą zawierać więcej szeregów zmiennych współpodstawieniowych (x), (x'), $\dots$ jakoteż przeciwpodstawieniowych

(u), (u')... Przy pomocy procesu i „rozwinęcia szeregowego“ będzie można ostatecznie dojść do form pierwotnych o jednym tylko szeregu ilości x i jednym tylko szeregu ilości u ; dla tych form powyższe twierdzenie zasadnicze utrzymuje się z niewielką tylko zmianą.

Uzasadnienie naukowe ⁸⁾ w mowie będącej symboliki opiera się głównie na jednej jej własności, którą dopiero niedawno ⁹⁾ podali: Gordan dla form dwójkowych, Study dla trójkowych, Pascal dla form o n zmiennych. Wyżej wspomniane wyznaczniki n -szeregowie symbolów a' , a'' ... są sobą połączone układem związków algebraicznych $R_1=0$, $R_2=0$,...

Okazuje się również odwrotnie, że jakkolwiek tożsamość, zachodząca pomiędzy niezmiennikami, F o ile nie sprawdza się przez to, że jej niezmienniki wzajemnie same się znoszą, lecz przez to, że wyobrażamy je sobie obliczone przy pomocy realnych współczynników form pierwotnych—że tożsamość ta daje sprowadzić do takiej postaci, iż strona lewa jej staje się agregatem wyrazów symbolicznych, z których każdy zawiera przynajmniej jedno z wyrażen R jako czynnik. Do tego wystarcza w zupełności pięć takich czynników R .

Zresztą stosuje się tu to samo ograniczenie, co wyżej. Tak np. w dziedzinie czwórkowej ¹⁰⁾ nie posiadamy dotąd przeglądu tych związków, w których zachodzą nie tylko współrzędne punktu i płaszczyzny, ale i współrzędne prostej.

Mówiliśmy już o symbolice Gordana ¹¹⁾, związanej z pojęciami „reducentu“, układów zupełnych, względnie zupełnych“, „układów rozszerzonych“; o innych punktach widzenia, a mianowicie o „fałdowaniu“, będzie mowa w rozdziale o procesach niesymbolicznych.

Tu wspomnimy jeszcze o pewnej symbolicznej „zasadzie przeniesienia“ ¹²⁾, którą stosował Gordan przy konstrukcji zupełnych układów form. Aby pokazać to zaraz na dziedzinie trójkowej, weźmy układ form niezmienniczych φ formy pierwotnej $f=a_x^n=\sigma_x^n=...$ ($m-1$)-go stopnia względem współczynników; za pomocą tego układu można wyrazić liniowo wszystkie inne utwory tego samego stopnia. Idzie o znalezienie odpowiedniego układu, ale stopnia bezpośrednio wyższego m . Czynniki symboliczne formy φ są trójkowego typu: b_{xx} , c_{xx} , d_{xx} ,..., (bcd), (bdu), (cdx),..., (bcd), (bce),... Zastąpmy λ czynników b_{xx} , c_{xx} ,..., odpowiednio przez (bau), (cau),... i równocześnie k czynników (bcd), (bdu),... odpowiednio przez (bca), (bda),..., dołączmy wreszcie czynnik $a_x^{n-(k+\lambda)}$ ($\lambda+k \leq n$). Dla danej pary „modułów“ λ, k można otrzymać zupełnie oznaczony szereg nowych form ψ (stopnia m). Rozważmy kolejno wszystkie możliwe kombinacje, biorąc $\lambda+k=1, 2, \dots$, a następnie w każdej pojedynczej grupie $k=0, 1, 2, \dots$. Jeżeli wyłączymy wszystkie formy ψ , znikające i przywiedlnie, dojdziemy do rezultatu głównego, że wszystkie formy ψ stopnia m , pozyskane za pomocą powyższego procesu

z układu „liniowo-zupełnego“ form ψ stopnia $m-1$, tworzą również układ liniowo-zupełny.“

Zwracamy się teraz do godnego uwagi uogólnienia lub uproszczenia symboliki Clebscha-Aronholda, które zapoczątkował w najnowszym czasie Stroh ¹³⁾. Idzie tu praktycznie o możliwe zmniejszenie liczby czynników symbolicznych, z jakich buduje się niezmiennik. Ograniczymy się tu na przeprowadzonym istotnie przez autora przypadku dziedziny dwójkowej ¹⁴⁾.

Jeżeli $f_n = (a_1x_1 + a_2x_2)^n$, ($\lambda=1, 2, \dots$) jest formą pierwotną n -go rzędu w transkrypcji symbolicznej, to wolno najprzód uczynić symbole a równymi sobie, np. równymi jedności, bez obawy wieloznaczności przy rekonstrukcji utworów realnych. Jeżeli przez C rozumiemy będziemy spótmniennik formy f stopnia i -tego względem współczynników i wagi g (o jednym tylko szeregu zmiennych), to wyraz główny C_0 formy C , jako forma g -tego rzędu wielkości jednorodnych $a_1, a_2, \dots, a_n$, czyni zadość jeszcze tylko równaniu różniczkowemu charakterystycznemu:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial C_0}{\partial a_i} = 0,$$

Szukamy rozwiązania całkowito-wymiernego C_0 tego równania; znajdziemy je, według Hessego ¹⁵⁾, jako najogólniejszą formę $i-1$ argumentów:

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_i - a_1 \quad 16)$$

rzędu $g \leq n$... Jeżeli γ jest liczbą stałych dowolnych takiej formy, to można C_0 napisać w postaci funkcji γ (liniowo-niezależnych) g -tych potęg w ten sposób:

$$C_0(a_1, a_2, \dots, a_i) = \sum_{k=1}^{\gamma} c_k (\lambda_{1k}a_1 + \lambda_{2k}a_2 + \dots + \lambda_{ik}a_i)^g,$$

gdzie

$$\lambda_{1k} + \lambda_{2k} + \dots + \lambda_{ik} = 0.$$

Ten wynik można przedstawić jeszcze symetryczniej. Rozważanie najprostsze naszego równania, owe $i-1$ różnic $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_i - a_1$, można zastąpić tyluż „symbolami zasadniczymi“ $A_2 - \lambda_1a_1 + \lambda_2a_i + \dots + \lambda_1a_i$, ($\sum \lambda = 0$). Aby więc mieć przedstawienie symboliczne wyrazu głównego spótmniennika formy f , dość z g symbolów zasadniczych utworzyć iloczyn, w którym każdy symbol a zachodzi najwyżej w potęgze n -tej“.

Oczywiście czynniki klamrowe Clebscha $a_r a_s - a_r a_s$ są właśnie najprostszymi takimi symbolami zasadniczymi; łatwo więc przejść od jednej symboliki do drugiej i odwrotnie.

Tak np. spółzmiennik

$$(ab)^2 (ac) a_x^{n-2} b_x^{n-3} c_x^{n-1}$$

można napisać w postaci prostszej $(a+b-2c)^3$, zawierającej tylko jeden symbol zasadniczy.

Jeżeli rząd n formy pierwotnej jest dowolnie wysoki, tak że $n > g$, wtedy wielkości C_0 przechodzą na tak nazwane „późniemienniki“ i mamy wtedy płodne twierdzenie: „wszystkie późniemienniki stopnia i i wagi g dają się wyrazić *liniowo* za pomocą potęg symbolicznych $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i a_i$ “¹⁷⁾.

I w innym kierunku nasuwa się uogólnienie symboliki, jeżeli mamy do czynienia z formami szeregów ilości zmiennych, podlegających różnym podstawieniom. Pomiędzy nimi grają rolę szczególną „kombinanty“, t. j. takie utwory p form pierwotnych f równego rzędu o r zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_r$, pozostające niezmiennymi przy przekształceniu liniowym tak ilości x jak i form f . Tu wprowadza Stroh¹⁸⁾ pary symbolów a i α (b i β i t. d.), tak że iloczyn n symbolów a i jednego symbolu α ma znaczenie realne. Jeżeli zbudujemy formę

$$F = (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_p \xi_p) (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r)^n$$

to ta jedna forma pierwotna zastępuje poprzednie formy f , corocznie należy w ten sposób, że kombinantem formy f jest każda forma, mająca własność niezmienniczą względem F dla obu szeregów zmiennych ξ, x i nie zawierająca przytem zmiennych ξ .

Study¹⁹⁾ rozciągnął tę symbolikę na kombinanty takich form f , które, oprócz od zmiennych x , zależą jeszcze od przeciwstawieniowych zmiennych u .

zupełnie podobną zasadę stosować można, jak to łatwo widzieć, i do bardziej skomplikowanych utworów niezmienniczych form pierwotnych rodzaju $a_s^m a_x^n$ i t. d., które w istocie zawierają różne szeregi zmiennych $x, \xi, \dots$

W przypadku, gdy te ostatnie należą do dziedziny dwójkowej, Gordan²⁰⁾ podał symbolikę prostszą, zawierającą tylko jeden rodzaj symbolów, o czym była już mowa.

Nakoniec powiedzmy jeszcze, że oba symbole główne Liego teorii grup przekształceń, mianowicie symbol X' przekształcenia nieskończenie małego i symbol (X, X') wyrażenia klamrowego z powodzeniem zastosował

Study²⁰⁾ do naszej specjalnej dziedziny przekształceń rzutowych, tak że już zewnętrznie poznać w nich można procesy niezmiennicze.

β . Kierunek angielski. Późniemienniki i funkcje symetryczne.

Omówione dotąd dążenia miały charakter jednolity, gdy tymczasem zjawiska pokrewne, tu i owdzie rozproszone, zwłaszcza u autorów angielskich późniejszego okresu²¹⁾, składają się z momentów różnorodnych. Można tu rozróżnić trzy główne punkty widzenia. Po pierwsze, próby uzmysłowienia wyrażenia teorii form za pomocą odpowiednich przedstawień graficznych; następnie scharakteryzowanie w odwrotnym kierunku dziedziny naszej, jako gałęzi abstrakcyjnej (powszechnej) algebry „macierzy“ (matryce); wreszcie związanie (symboliczne) „późniemienników“ z nauką o funkcjach symetrycznych.

Sylvester²²⁾ w r. 1878 wychodzi ze spostrzeżenia, że istnieje analogia głębsza pomiędzy wzorami konstrukcyjnymi nowej teorii atomistycznej, a używaną zwykle symboliką niezmienników i spółzmienników dwójkowych. Jeżeli elementy chemiczne przedstawimy w postaci form dwójkowych:

$$H = h_x = h'_x = \dots; O = o_x^2 = o'_x^2 = \dots; C = c_x^4 = c'_x^4 = \dots;$$

$$N = n_x^5 = n'_x^5 = \dots \text{ i t. d.}$$

gdzie „wartościowości“ elementu odpowiada „rzędowi“ formy, to związki „nasycone“ wyrażą nam niezmienniki, „nienasycone“ zaś spółzmienniki. Przykładami pierwszych są np.:

$$2O = (oo')^2; HO = (ho) (h'o); NO_5H = (no)^2 (no')^2 (no'') (o'h).$$

Jeżeli więc, jak w chemii, elementom odpowiadać będą punkty, związkom zaś (ho i t. d.) kreski łączące te punkty, będziemy mieli obraz naoczny symboliki niezmienników form dwójkowych. Liczba kresek między punktami (t. j. liczba związanych jednostek wartościowych), będzie wagą odnośnej formy: związek niezmienniczy jest równoważny z możliwością przekształcenia jednych na drugie obrazów rozmaitych form.

Sylvester²³⁾ podał zastosowanie powyższej metody do procesów wzajemności Hermite'a, do form stowarzyszonych Clebscha i t. p.

Clifford²⁴⁾ w 1879 r. zastosował metodę do form pierwotnych dwójkowych, liniowych względem pewnej liczby szeregów ilości zmiennych. Jeżeli np. (x, y, z) jest taką formą, to obrazem niezmiennika $(xyz) (xyu) (zvu)$

(uvw) będzie kwadrat, w którym dwa boki przeciwległe są podwójnie nakreślone.

Oczywiście możliwe są różne modyfikacje tej grafiki. Podamy jedną z nich dla niezmiennika dwójkowego, wyrażonego przez różnice pierwiastków form pierwotnych. Wyrażenie to jest sumą (symetryczną) iloczynów takich:

$$(x_1 - x_2)^a (x_1 - x_3)^b (x_2 - x_3)^c \dots (x_{n-1} - x_n)^e$$

gdzie wykładniki są ≥ 0 , a stopnie względem $x_1, x_2 \dots x_n$ są wszystkie równe. Każde x zastąpmy punktem, każdą różnicę $x_i - x_k$ linią dowolną od x_i do x_k ; wtedy w każdym z n punktów zbiega się jednakowa liczba linii. Tak up.

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_1 - x_3) (x_2 - x_4) (x_1 - x_4) (x_2 - x_3)$$

prowadzi do kwadratu z przekątnymi, którego dwa boki przeciwległe są podwójnie nakreślone.

W tej metodzie ważne znaczenie ma pytanie o „przywiedlności” ²⁵⁾ obrazu, t. j. czy obraz nie daje się utworzyć przez nałożenie na siebie obrazów „stopnia niższego”.

Petersen ²⁶⁾ na tej podstawie nie tylko udowodnił twierdzenie G'ordana ²⁷⁾, że (przy danem n) można utworzyć skończoną liczbę takich iloczynów, z których wszystkie dają się utworzyć przy pomocy mnożenia, lecz pokazał nadto, jak tamte iloczyny istotnie wyznaczyć można.

W jaki sposób teorię niezmienników można podporządkować pod algabrę wielkości rozciągłych, pokażemy na przykładzie nasunięcia.

Niechaj będą dane dwie formy dwójkowe dwuliniowe:

$$f = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2,$$

$$\varphi = b_{11} x_1 y_1 + b_{12} x_1 y_2 + b_{21} x_2 y_1 + b_{22} x_2 y_2,$$

i dajmy, że mamy utworzyć ich nasunięcie drugie, pozostające niezmiennem przy podstawieniach niezależnych obu szeregów zmiennych. Pomnożmy f przez φ , a iloczyny dwójkowe jedności x_1, x_2, y_1, y_2 poddajmy prawom:

$$x_1^2 = x_2^2 = y_1^2 = y_2^2 = 0; x_1 x_2 = -x_2 x_1 = y_1 y_2 = -y_2 y_1 = 1;$$

wtedy będzie:

$$(f\varphi)^2 = a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12} + a_{22} b_{11}.$$

Uogólnienie nie przedstawia istotnych trudności. Rachunki takie napotyka się u Clifforda ²⁸⁾, jakkolwiek jądro teorii znajduje się już u Grassmanna ²⁹⁾.

Przechodzimy wreszcie do symboliki w teorii niezmienników dwójkowych, opartej na teorii funkcji symetrycznych.

Wyraz główny C_0 niezmiennika formy pierwotnej f , jest funkcją izobaryczną współczynników $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$, czyniącą zadość równaniu różniczkowemu:

$$\Omega = a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_0}{\partial a_3} + \dots = 0;$$

C_0 pozostaje przeto takim wyrazem głównym dla każdej formy pierwotnej rzędu wyższego $f_{n+1}, \dots f_{n+2} \dots$. W tym sensie C_0 jest „półniezmiennikiem” (podniezmiennikiem) dowolnie przedłużonego szeregu $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$.

Aby uwidocznic niezależność półniezmienników od rzędu n formy pierwotnej, wyobrażamy sobie rozwinięcie tej ostatniej według potęg rosnących zmiennych x i wprowadzamy pierwiastki „odwrotne”

$$1 + \frac{b}{1} x + \frac{c}{1 \cdot 2} x^2 + \dots = (1 - ax)(1 - \beta x)(1 - \gamma x) \dots$$

Wtedy stosuje się następujące twierdzenie zasadnicze Mac-Mahona ³⁰⁾:

„Każda funkcja symetryczna (całkowita) ilości $a, \beta, \gamma, \delta \dots$, która jest „nieunitarna”, t. j. zawiera te zmienne w stopniu wyższym od pierwszego, przedstawia półniezmiennik ze względu na współczynniki $a = 1, b, c, d \dots$ ”.

Można np. łatwo sprawdzić, że dla jakkolwiek przedłużonego szeregu $a, \beta, \gamma, \delta \dots$ zachodzą zawsze związki:

$$\Sigma a^2 = -(c - b^2); \Sigma a^3 = \frac{1}{2}(d - 2bc + 2b^3) \dots$$

gdzie wyrażenia klamrowe po stronie prawej są znanymi wyrazami głównymi spółzmienników. Mac-Mahon i Cayley posługują się przeto „symboliką rozkładu”, ³¹⁾ pisząc:

$$2 = \Sigma a^2; 3 = \Sigma a^3; 6552 = \Sigma a^6 \beta^5 \gamma^5 \delta^2$$

i stosują bezpośrednio do teorii półniezmienników znane prawa połączeń funkcji symetrycznych ³²⁾, które brzmią teraz wprost:

$$l, m = (l + m) + (lm) \quad (l \leq m)$$

$$l, l = (2l) + 2 \cdot (1l) \quad (l = m) \text{ i t. d.}$$

Algorytm na tem oparty pozwala głębiej wniknąć w związek pomiędzy syzygiami. Każda taka syzygia między spółzmiennikami, albo równoważna jej syzygia pomiędzy powyższymi symbolami, jest zarodkiem nieograniczono-

nej liczby dalszych syzygij; tak np. symbol 552 można kolejno przekształcić na: 5552, 6552, 7552 i t. d.

Przy pomocy tej symboliki Cayley³³⁾ wyprowadził dla niezmienników „funkcję tworzącą“

$$\frac{x^j}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^j)}$$

Gdy rozwiniemy tę funkcję według potęg rosnących zmiennej x , to współczynnik przy x^w wyznaczy liczbę półzmienników liniowo-niezależnych stopnia j i wagi w .

Trudniejsze pytanie o funkcję tworzącą dla „perpetuantów“, t. j. takich półzmienników, których nie można złożyć w sposób całkowity i wymierny z półzmienników stopnia niższego rozwiązał Mac-Mahon za pomocą tej samej symboliki; ta funkcja tworząca ma postać:

$$\frac{x^{2j-1}-1}{x} \\ 2.3.4.\dots j$$

Na tej podstawie Cayley i Mac-Mahon ułożyli obszerne tablice półzmienników, perpetuantów i ich syzygij.

PRZYPISY.

¹⁾ Inny obraz istoty symboliki daje nam chemia, gdyż pojęcie cząsteczki odpowiada pojęciu formy algebraicznej, pojęcie zaś atomu—pojęciu elementu formy. Mówimy o tem dalej w tekście.

²⁾ Odsyłamy czytelnika, pragnącego poznać tę symbolikę, do pierwszego rozdziału wielokrotnego cytowanego dzieła Gordana - Kerschena. Szereg zastosowań symboliki wyjaśnia zresztą następne rozdziały, gdzie mówić będziemy o niej w połączeniu z procesami realnymi.

³⁾ Patrz Study w „Methoden etc“ I § 5, II §§2, 5, 6, gdzie szczegółowo wyjaśniono istotę symboliki.

⁴⁾ Journ. f. Math. LiX, s. 1—62 (1861), „Binäre Formen“ § 12. Twierdzenia te i konsekwencje z niego zapewniły symbolice niemieckiej wyższość nad angielską Cayley'a.

Inne dowody twierdzenia u Dahla (Zeuthen, Tidsskr. (4), IV, s. 154—158), dwa u Gordana („Vorlesungen etc.“ § 9) i u Study'ego („Methoden etc.“ § 5).

⁵⁾ N. p. niezmiennik jednoczesny formy dwójkowej $a^n = (a_1x_1 + a_2x_2)^n = b_1x_1^n + \dots + b_nx_2^n = \dots$ i formy dwójkowej $a_1x_1 + a_2x_2 = ax$ zestawia się z „czynników kłamrowych“ obu typów (ab) , (ac) , (bc) , ...; $(a\alpha)$, $b\alpha$, $c\alpha$... Ponieważ a_1, a_2 są spółpodstawieniami $z = y_2, y_1$ (t. j.

przekształcają się tak samo liniowo jak te ostatnie), to czynniki kłamrowe drugiego gatunku zastąpić można czynnikami liniowymi $a_y, b_y, c_y, \dots$. Pojęcie zaś niezmiennika jednoczesnego form $a^2x + x_1y_2 - x y_1$ zlewa się z pojęciem „spółzmiennika“ pojedynczej formy a_yx .

⁶⁾ Gött. Abh. XVII, s. 1—62 (1872). Jeżeli f jest formą pierwotną, zawierającą różne szeregi nie tylko pojedynczych zmiennych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, lecz i ich wyznaczników dwu, trój, i t. d. szeregowych $p_{ik}, p_{ikl}, \dots$, to rozkłada się ona symbolicznie na czynniki, z których każdy podporządkowuje się pod jeden tylko szereg jednego typu zmiennych, np. p_{ikl} . Czynniki takie można wtedy przedstawić jako potęgę formy liniowej ilości $p_{ikl}, \dots$ z powodu tożsamości zachodzących pomiędzy ilościami p i ze względów dualistycznych tamto przedstawienie może podlegać modyfikacyom.

Dla „kompleksów liniowych“ te przedstawienia podał Clebsch w Math. Ann. II, s. 1—8 (1868). Waelsch uprościł tę rzecz i rozwinął przy pomocy symbolów Grassmanna (Math. Ann. XXXVII, s. 141—152. 1890). Na tem opiera się odpowiednia zasada przeniesienia.

⁷⁾ Patrz uwagi Gordana, Program. 1875, Dodatek.

Trudności stosowania rachunku symbolicznego w dziedzinach wyższych ilustruje dostatecznie takie zadanie: „Podać w spórzędnych punktowych równanie hyperboloidy, wspólnej trzem kompleksom liniowym.“ Patrz Waelsch l. c.

⁸⁾ O wartości praktycznej i pedagogicznej rachunku symbolicznego matematyce różnego są zdania. Nie można zaprzeczyć, że pod tym względem teoria form w okresie najnowszym bywała nieraz rodzajem sportu, w którym pod nawałem mnogości form znikła myśl kierownicza. Na szczęście, temu kierunkowi przeciwdziała prąd zdrowy, w którym występuje coraz bardziej rachunek myślowy procesów niezmienniczych.

⁹⁾ Gordan, „Vorlesungen etc“ II, (1887), N° 117. Study, Math. Ann. XXX s. 120—126 (1887), „Methoden etc.“ (1889), § 6. Pascal (1888), Giorn. di Mat. XXVI s. 33—38, 102—103. Rom. Acc. L. Rend. (4), IV, s. 119—124. Rom. Acc. L. Mem. (4), V s. 375—387. Tożsamości, do których u Pascala sprowadzają się wszystkie pozostałe, są

$$\Sigma \pm (a_1a_2\dots a_n) (a_{n+1}b_1b_2\dots b_{n-1}) = 0.$$

$$\Sigma \pm (a_1a_2\dots a_n) a_{n+1}, x = 0.$$

$$(a_1a_2\dots a_n) (x_1x_2\dots x_n) - \Sigma \pm a_1x_1a_2x_2\dots a_nx_n = 0.$$

$$\Sigma \pm (x_1x_2\dots x_n) a_{n+1}, x = 0.$$

$$\Sigma \pm (a_1a_2\dots a_n) (x_{n+1}y_1y_2\dots y_{n-1}) = 0.$$

Sumy tworzymy, przedstawiając symbole a i x na wszelkie możliwe sposoby i zmieniając znak jak w zwykłym prawie do wyznaczników.

W dziedzinie dwójkowej jest jedna tylko tożsamość zasadnicza:

$$a_xb_y - a_yb_x - (ab)(xy) = 0.$$

¹⁰⁾ Patrz Study „Methoden etc.“ s. 204.

¹¹⁾ Patrz wyżej II, A. a.

¹²⁾ Math. Ann. I, s. 90—101 (1869); XVII, s. 217—234 (1880). Rozdz. I.

Tej zasady przeniesienia nie należy mieszać ze znaną zasadą przeniesienia Clebscha, która w zastosowaniu do form dziedziny dwójkowej i w szacie geometrycznej brzmi tak: Jeżeli prosta ma przecinać krzywą n -tego rzędu w grupie punktów, mających pewną własność rzutową, to równanie krzywej, której ta prosta jest obwiednią, otrzymujemy w ten spo-

sób: przedstawmy symbolicznie niezmiennik formy f_n , którego znikanie wyraża tę własność, i zastąpmy zachodzący w nim wyznacznik (ab) wyznacznikiem (abu) , gdzie u są współrzędne liniowe, zaś $a, b, \dots$ oznaczają symbole danej formy trójkowej. (Porów. Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen etc.“ I, s. 274 i dalsze).

Tak np. równanie krzywej trzeciego rzędu $a^3 = 0$, otrzymujemy bezpośrednio w współrzędnych liniowych w postaci:

$$(a b u)^2 (c d u)^2 (a a u) (b c u) = 0.$$

Dalej: „Proste przecinające krzywą czwartego rzędu $a^4 = 0$ w dwustosunku harmonicznym są obwiedniami krzywej klasy szóstej:

$$(a b u)^2 (b c u)^2 (c a u)^2 = 0, \text{ it. d.}$$

Patrz rozwinięcia dalsze u Gundelfingera Math. Ann. VI, s. 16—22 (1872) i „Studye“ Methoden etc.“ II, § 19.

O innych zasadach przeniesieniach patrz w tekście II, D. b.

¹³⁾ Math. Ann. XXXVI, s. 262—303 (1890), § 7 i nast.

¹⁴⁾ Co do dziedziny trójkowej patrz l. c. § 12

¹⁵⁾ Journ. f. Math. XLII, s. 117—124 (1851).

¹⁶⁾ Tu poznać wyrażenie związek z syzygiami, od których autor doszedł do symboliki, opisanej w tekście. Aby mianowicie sprawdzić syzygię $[f, \varphi, \psi, \chi] = 0$, bierzemy 4 formy f, φ, ψ, χ , jako cztery realne potęgi form liniowych, np. $f = (x-a)_1 n_1, \varphi = (x-b)_1 n_2, \psi = (x-c)_1 n_3, \chi = (x-d)_1 n_4$ i w każdym nasunięciu ograniczamy się do wyrazu głównego. Tak np. zamiast $(f, \varphi)^2$ $(f, \varphi)^2$ należy wziąć $(a-b)^2, (a-c)^2, (a-b)^2$. Lewa strona syzygii $[f, \varphi, \psi, \chi]$ staje się funkcją

$F(a, b, c, d)$, czyniącą zadość równaniu $\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial d} = 0$; F zależy przeto

od trzech współrzędnych: $a-b = -b', a-c = -c', a-d = -d'$. Ponieważ wszakże równocześnie $b-c = b'-c', b-d = b'-d', c-d = c'-d'$, dość przeto wziąć $a=0$ w F , aby widzieć z łatwością znikanie tożsamościowe funkcji F . Odwrotnie, można otrzymać syzygie z każdej takiej tożsamościowo znikającej funkcji trzech zmiennych.

¹⁷⁾ § 10. Wynikiem bezpośrednim jest wyznaczenie półniezmienników nieprzywiedlnych danego stopnia i i danej wagi g ; liczba ich jest równa liczbie rozwiązań całkowito-liczbowych równania

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \dots + i\mu_i = g - 2i - 1 + 1,$$

a same utwory można napisać symbolicznie.

Odpowiednią symbolikę posługiwali się przedtem Capelli i Le Paige dla prostych form o kilku szeregach ilości zmiennych, podległych różnym podstawieniom; pierwszy z nich dla formy kwadratowej o dwu szeregach dwójkowych (Giorn. di Mat. XVII, s. 69—148. 1879), drugi dla form wielokrotnie liniowych (Belg. Bull. (3), II, s. 40—53. 1881).

¹⁸⁾ „Methoden etc.“ II, § 13.

¹⁹⁾ Math. Ann. XXXIII, s. 372—389 (1889).

²⁰⁾ „Methoden etc.“ II, § 15.

²¹⁾ Sam Cayley, twórca symboliki, w późniejszych pracach innych dawał pierwszeństwo rachunkowi na istotnych wyrażach głównych i na funkcjach tworzących.

²²⁾ Am. J. I, s. 63—125 (1878). Porównaj uwagi Clifforda tamże s. 126—129. Malet tamże s. 277—282. Clifford pierwszy wykazał wzajemną odpowiedniość obu sposobów przedstawiania.

²³⁾ Patrz dodatki do wymienionej wyżej rozprawy Sylwestera.

²⁴⁾ Lond. M. S. Proc. X, s. 124—129, 214—221 cf. Spottiswoode tamże str. 204—214.

²⁵⁾ Porówn. Buchheim London M. S. Proc. XVII, s. 80—106 (1886). Tak zwane „twierdzenie o rozkładzie“ Clebscha: „każdy niezmiennik formy dwójkowej można rozłożyć na dwie części, u których jedna jest utworem przejętym z formy f_{i-1} , druga zaś zawiera czynnik symboliczny $(ab)^i$ ($i \geq \frac{n}{2}$)” wynika tu stąd, że każdy obraz geometryczny

może być sprowadzony do sumy najprostszych wielokątów. K em p e (tamże s. 107—121) wykazuje, że odpowiednia interpretacja związków tożsamościowych pomiędzy symbolami umożliwia rachunek istotny na geometrycznych obrazach niezmienników.

²⁶⁾ Acta math. XV, s. 193—220 (1891). Porów. wyżej II. A. a.

²⁷⁾ Porów. II, A. a.

²⁸⁾ l. c.

²⁹⁾ Porówn. biografii Grassmanna w Math. Ann. XI V, s. 9 i nast.

³⁰⁾ Am. J. VII, s. 26—47 (1887). Porówn. Cayley, tamże s. 1—25. 59—73, Quart. J. XX, s. 212—213 (1884).

³¹⁾ Aby otrzymać półniezmiennik stopnia l , dość liczbę l przedstawić wszelkimi możliwymi sposobami jako sumę liczb mniejszych. Sylvester tę symbolikę rozkładu zestawiał z zasadami swojej „algebry powszechnej“ (Universal Algebra). Am. J. V, s. 79—137 (1883). Porówn. Am. J. VI, s. 270—280 (1883), oraz Peirce tamże IV, s. 97—229 (1881).

³²⁾ MacMahon później odwrotnie oparł na tem teoryę funkcji symetrycznych. Nadto zastosował on symbolikę, o której mowa w tekście, do teoryi perpetuantów i pierwszych operatorów różniczkowych liniowych cząstkowych.

³³⁾ l. c.

³⁴⁾ l. c.