

Z powodu wielkiej obfitości, a ponieważ różnorodności treści musieliśmy w streszczeniu ograniczyć się do przedstawienia metodycznego tylko najbardziej zasadniczych teorii, inne traktując bądź w formie krótkich wzmianek, bądź też pomijając zupełnie te, które nie są w ścisłym związku z główną treścią dzieła. Zaznaczamy również, że niektóre twierdzenia z ogólnej teorii przekształceń, tam podane, choć niekiedy potrzebne do zrozumienia tekstu, w streszczeniu tem nie są zamieszczone, a to ze względu na to, że teorie te w części już były, a w części zapewne jeszcze będą poruszone w osobnych artykułach w wydawnictwie niniejszem.

STRESZCZENIE DZIEŁA LIE'GO

„GEOMETRYA PRZEKSZTAŁCEŃ STYCZNOŚCIOWYCH“.¹⁾

PODAŁ

E. WIERZBICKI.²⁾

Książka, której streszczenie zamieszczamy w niniejszym artykule, zawiera zestawienie badań Liego w zakresie geometrii elementów liniowych na płaszczyźnie i w przestrzeni, jakoteż elementów powierzchniowych w przestrzeni, a na tej zasadzie oparty jest podział całej książki na trzy obszerne części. Rozwinięta przez Liego teoria przekształceń, którą tenże tak znakomicie wyzyskał dla teorii równań różniczkowych, odgrywa tutaj także pierwszorzędną rolę, a umieszczone w tej książce teorie są prawie wszędzie w związku z pewnymi kategoriami równań różniczkowych. W geometrii elementów liniowych na płaszczyźnie i elementów powierzchniowych w przestrzeni mają pierwszorządne znaczenie przekształcenia stycznościowe. Teorię tych przekształceń na płaszczyźnie rozwinął Lie w zupełności w pierwszej części książki, natomiast teorię ich w przestrzeni nie zajmuje się w pierwszym tomie; co do elementów liniowych w przestrzeni, to dla nich analogicznego pojęcia utworzyć nie można.

¹⁾ Sophus Lie, *Geometrie der Berührungstransformationen*, darg. v. S. Lie u G. Scheffers, 1 Band, Leipzig, 1896.

²⁾ Referat ten wykonany został w seminarium matematycznym prof. K. Żorawskiego w Krakowie

I. Przekształcenia stycznościowe na płaszczyźnie.

1. Definicja i wyznaczanie przekształceń stycznościowych.

Pojęcie przekształcenia stycznościowego, przed ukazaniem się pierwszych prac Liego w zakresie badań nad teorią przekształceń i ich zastosowaniami do równań różniczkowych, nie było znane matematykom dawniejszym. Niektóre szczególne przypadki przekształceń stycznościowych znane już wprawdzie były oddawna, ale nawet Lagrange i Plücker, których niektóre badania stoją bardzo blisko teorii tych przekształceń, tak że ich można według Liego uważać za poprzedników tej teorii, nie sformułowali przecież jej pojęć zasadniczych.

Przed definicją przekształcenia stycznościowego podajemy dwie definicje następujące:

Element liniowy jest to punkt wraz z przechodzącą przez niego linią prostą. Za spółrzedne elementu liniowego można przyjąć wielkości x, y, y' , z których dwie pierwsze są spółrzednymi prostokątnymi punktu elementu liniowego, y' zaś oznacza kierunek prostej elementu (styczna kąta między osią Ox a tą prostą). Wszystkich elementów liniowych jest więc ∞^3 .

Zjednoczenie elementów (Elementverein) jest to gromada elementów liniowych, posiadająca tę własność, że każdy element gromady ma punkt na prostej sąsiedniego elementu gromady; czyli, jak się wyrażamy: taka gromada elementów liniowych, w której każde dwa sąsiednie elementy są zjednoczone (vereinigt liegen). Dwa sąsiednie elementy (x, y, y')

i $(x+dx, y+dy, y'+dy')$ są zjednoczone, jeżeli dla nich zachodzi związek:

$$(1) \quad dy - y' dx = 0.$$

Na płaszczyźnie istnieją tylko, jak to można analitycznie okazać, złączenia¹ elementów liniowych takie, że miejsce geometryczne ich punktów jest zarazem obwiednią ich linii prostych; są to linie krzywe albo punkty (ostatnie, uważane jako obwiednie przechodzących przez nie ∞^1 prostych).

Przekształceniem stycznościowym na płaszczyźnie nazywa się przekształcenie trzech współrzędnych x, y, y' elementów liniowych na płaszczyźnie na nowe współrzędne x_1, y_1, y_1' , tego rodzaju, że każde zjednoczenie elementów (x, y, y') przechodzi znowu na zjednoczenie elementów (x_1, y_1, y_1') . Takie przekształcenie przeprowadza elementy liniowe wspólne krzywym stycznym na płaszczyźnie (x, y) na elementy liniowe, wspólne krzywym stycznym na płaszczyźnie (x_1, y_1) . Ogólną zatem charakterystyczną własnością przekształceń stycznościowych jest to, że na skutek nich krzywe styczne przechodzą na krzywe styczne.

Jakiegokolwiek przekształcenie elementów liniowych przedstawia się zapomocą trzech równań kształtu:

$$(2) \quad x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y').$$

Aby te równania określały przekształcenie stycznościowe, musi istnieć jako skutek tych równań i równania (1) związek:

$$dy_1 - y_1' dx_1 = dY - PdX = 0,$$

a to być może tylko wtenczas, jeżeli:

$$(3) \quad dY - PdX = q(dy - y'dx).$$

Chcąc wyznaczyć wszystkie przekształcenia stycznościowe na płaszczyźnie, postępować można dwiema drogami. Jedna z nich jest następująca: Rugując z równań (2) y', y_1' , otrzymujemy równanie postaci:

$$(4) \quad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0;$$

zapomocą tego równania dowolnie danego z każdego zjednoczenia elementów (x, y, y') otrzymuje się pewne określone zjednoczenie elementów (x_1, y_1, y_1') , np. krzywa c przejdzie na krzywą c' , obwiednią wszystkich krzywych, na jakie równanie (4) przeprowadza każdy punkt krzywej c ; tylko krzywe

$\Omega(x, y, a, \beta)$ przechodzą na punkty (a, β) . Równanie (4) zatem określa zupełnie przekształcenie stycznościowe. Aby je wyznaczyć analitycznie, różniczkujemy równanie (4) i następnie porównujemy z równaniem (3); wtedy między współczynnikami różniczek w obu równaniach otrzymamy związki, z których po wyrugowaniu q dostajemy:

$$(4') \quad \Omega_x + y' \Omega_y = 0, \quad \Omega_{x_1} + y_1' \Omega_{y_1} = 0. \quad ^1)$$

Równania (4) i (4') określają najzupełniej przekształcenie stycznościowe, jeżeli można je rozwiązać zarówno względem zmiennych x_1, y_1, y_1' , jak i względem x, y, y' ; a warunkiem tego jest, żeby wyznacznik funkcyjny:

$$\begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial \Omega}{\partial x}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x_1}, & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x_1} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y_1}, & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y_1}, & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial y_1} \end{vmatrix}$$

nie zniknął wskutek $\Omega = 0$.

Druga metoda polega na ustanowieniu pewnej zależności między funkcyjami X, Y, P, Z warunku (3) dla równań (2) wynikają związki:

$$(3') \quad Y_x - X_x P + p q = 0, \quad Y_y - X_y P - q = 0, \quad Y_{y'} - X_{y'} P = 0,$$

w których jest $p=y'$. Rugując z nich P, q , znajdujemy między funkcyjami X, Y związek:

$$(5) \quad X_{y'}(Y_x + p Y_y) - X_y(X_x + p X_y) = 0,$$

czyli, jeżeli lewą stronę przedstawimy za pomocą symbolu $[XY]$,

$$(5') \quad [XY] = 0.$$

Warunek (5) jest wystarczający, aby równania (2) przedstawiały przekształcenie stycznościowe, gdyż wskutek niego równania (3') nie są sprzeczne i dają dla funkcyj F, q wzory:

$$P = \frac{Y_{y'}}{X_{y'}} = \frac{Y_x + p Y_y}{X_x + p X_y}, \quad q = \frac{X_x Y_y - X_y Y_x}{X_x + p X_y} = \frac{X_y Y_y - X_y Y_x}{X_y}$$

¹⁾ Ω_x oznacza $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ i t. d.; podobnych oznaczeń używać będziemy i w dalszym ciągu.

Używając tej metody, X możemy wybrać dowolnie, a wówczas Y określę się przez całkowanie równania cząstkowego (5), z którego należy otrzymać rozwiązanie, niezależne od X .

Z równań (3') wyprowadzić można jeszcze związki:

$$(6) \quad [PX] = \varrho, [PY] = \varrho, P.$$

Zbierając otrzymane rezultaty, możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Równania:

$$x_1 = X(x, y, y'), y_1 = Y(x, y, y'), y'_1 = P(x, y, y')$$

przedstawiają wtedy i tylko wtedy przekształcenie stycznościowe, jeżeli zachodzą związki:

$$[XY] = 0, [PX] = \varrho, [PY] = \varrho P,$$

przyczem ϱ może być jakąkolwiek różną od zera funkcją zmiennych x, y, y' .

O funkcjach X, Y , związanych równaniem $[XY] = 0$, mówi się, że są w inwolucyi. Przy szukaniu ilorazu $\frac{dY}{dX}$ dla funkcji, będących w inwolucyi, okazuje się łatwo, że ten nie zależy od dy' , tudzież że funkcja P w przekształceniu stycznościowym ma kształt: $P = \frac{dY}{dX}$.

Z samego określenia przekształcenia stycznościowego wynika, że dwa po sobie wykonane przekształcenia stycznościowe dają, jako rezultat, znowu przekształcenie stycznościowe.

2. Nieskończenie małe przekształcenia stycznościowe.

Taksamo, jak w teorii przekształceń, mówi się o grupach przekształceń punktowych i o nieskończeniu małych przekształceniach punktowych można i w teorii przekształceń stycznościowych uważać grupy przekształceń stycznościowych i nieskończenie małe przekształcenia stycznościowe. Te ostatnie można przedstawić przez równania:

$$(7) \quad x_1 = x + \xi(x, y, p) \delta t, y_1 = y + \eta(x, y, p) \delta t, p_1 = p + \pi(x, y, p) \delta t,$$

które muszą zadość czynić warunkowi:

$$dy_1 - p_1 dx_1 = \varrho (dy - p dx).$$

czyli po wstawieniu wartości z (7):

$$dy + d\eta \delta t - (p + \pi \delta t) (dx + d\xi \delta t) = \varrho (dy - p dx).$$

Z tego równania wynika, że ϱ musi mieć kształt: $\varrho = 1 + \sigma \delta t$, tak iż przez porównanie współczynników przy δt otrzymujemy:

$$d\eta - p d\xi - \pi dx = \sigma (dy - p dx).$$

Wprowadzając nową funkcję: $\eta - p\xi = -W(x, y, p)$, rozłożyć można ostatni warunek przez [porównanie] współczynników przy dx, dy, dp na trzy następujące:

$$W_x + \pi = \sigma p, W_y = -\sigma, W_p - \xi = 0;$$

tak, iż po wyugowaniu σ , otrzymuje się następujące nieskończenie małe przyrosty:

$$(8) \quad \delta x = W_p \delta t, \delta y = (p W_p - W) \delta t, \delta p = -(W_x + p W_y) \delta t.$$

Najogólniejsze zatem nieskończenie małe przekształcenie stycznościowe na płaszczyźnie określone jest w zupełności przez jedną tylko funkcję $W(x, y, p)$ nie poddaną żadnemu ograniczeniu. Funkcja W zowie się funkcją charakterystyczną nieskończenie małego przekształcenia stycznościowego (8). Posiada ona następujące znaczenie geometryczne: odległość punktu elementu l_1 , powstałego z elementu l przez przekształcenie (8), od prostej elementu l wyraża się:

$$\frac{p \delta x - \delta y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{W \delta t}{\sqrt{1+p^2}} = W \cos(lx) \delta t;$$

a przeto $W \delta t$ jest długością odcinka na osi Oy między prostą elementu l a równoległą do niej, przez punkt elementu l_1 poprowadzoną.

Symbol nieskończenie małego przekształcenia stycznościowego określa się podług (8) wzorem:

$$(9) \quad Bf = \frac{\delta f}{\delta t} = W_p \frac{df}{dx} + (p W_p - W) \frac{df}{dy} - (W_x + p W_y) \frac{df}{dp} = [Wf] - W \frac{df}{dp}.$$

Jeżeli do pewnego przekształcenia stycznościowego;

$$(a) \quad x_1 = X(x, y, p), y_1 = Y(x, y, p), p_1 = P(x, y, p)$$

wprowadzamy za x, y, p zmienne $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}$ za pomocą przekształcenia stycznościowego:

$$(b) \quad \bar{x} = \bar{X}(x, y, p), \bar{y} = \bar{Y}(x, y, p), \bar{p} = \bar{P}(x, y, p)$$

i odpowiednio:

$$\bar{x}_1 = \bar{X}(x_1, y_1, p_1), \bar{y}_1 = \bar{Y}(x_1, y_1, p_1), \bar{p}_1 = \bar{P}(x_1, y_1, p_1),$$

to otrzymane z tych 9 równań trzy równania między $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{p}$ i $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, $\bar{p}_1$, kształtu:

$$\bar{x}_1 = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}), \bar{y}_1 = \Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}), \bar{p}_1 = X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$$

określają nowe przekształcenie stycznościowe.

Powiadamy, że w przekształcenie stycznościowe (a) wprowadziliśmy nowe zmienne na mocy przekształcenia stycznościowego (b), albo, że na danym przekształceniu stycznościowym (a), wykonaliśmy przekształcenie stycznościowe (b). W szczególności przechodzi nieskończenie małe przekształcenie.

$$Bf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \pi \frac{\partial f}{\partial p},$$

przez wprowadzenie nowych zmiennych $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{p}$ zapomocą przekształcenia (b), na nowe nieskończenie małe przekształcenie:

$$\bar{B}f = \bar{B}\bar{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \bar{B}\bar{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + \bar{B}\bar{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{p}}$$

dla tych nowych zmiennych.

Jeżeli W jest funkcją charakterystyczną nieskończenie małego przekształcenia stycznościowego Bf , to z niej, jak uczy prosty rachunek, określa się funkcję charakterystyczną nowego nieskończenie małego przekształcenia stycznościowego $\bar{B}f$ przez równanie:

$$(10) \quad \bar{W} = \varrho W,$$

w którym ϱ jest znaną funkcją ze związku (3) w zastosowaniu do przekształcenia stycznościowego (b).

Najprostszym przypadkiem przekształcenia stycznościowego jest t. zw. uzupełnione przekształcenie punktowe (erweiterte Punkttransformation). To przekształcenie otrzymuje się ze zwykłego przekształcenia punktowego, jeżeli do jego dwu równań dodamy jeszcze trzecie dla $y_1' = \frac{dy_1}{dx_1}$ obliczone na mocy tamtych równań. Równania uzupełnionego przekształcenia punktowego są tedy:

$$(11) \quad x_1 = X(x, y), y_1 = Y(x, y), y_1' = \frac{Y_x + Y_y y'}{X_x + X_y y'}.$$

Z pomiędzy licznych przykładów przekształceń stycznościowych wymieniamy tutaj jeszcze dwa następujące:

Dylatacja jest to takie przekształcenie elementów liniowych, które

każdy element liniowy przeprowadzamy na element liniowy równoległy do pierwotnego w stałej odległości n na prostopadłej, z punktu tego elementu na niej wystawionej. Krzywa c_1 , otrzymana z krzywej danej c przez wykonanie dylatacji, jest krzywą równoległą tej krzywej c taką, że jej normalne są także normalnymi krzywej c w odpowiadających sobie punktach obu krzywych. Do analitycznego przedstawienia dylatacji służą następujące równania, wynikające z jej określenia:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = n^2; x_1 - x + (y_1 - y) y' = 0; y_1' = y'.$$

Z nich znajdujemy szukane równania dylatacji:

$$(12) \quad x_1 = x - \frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}}, y_1 = y + \frac{n}{\sqrt{1+y'^2}}, y_1' = y'.$$

Punkt, uważany jako zjednoczenie elementów, wskutek dylatacji przechodzi na koło, którego środkiem jest on sam, a którego promień jest równy n .

Nieskończenie małą dylatację otrzymamy, nadając funkcji kształt szczególny: $W = \sqrt{1+p^2}$; wtedy punkt przekształconego elementu l_1 ma stałą odległość δl od pierwotnego elementu l , mamy tu więc rzeczywiście dylatację o długość δl .

Przekształcenie stycznościowe, które każdemu punktowi podporządkowuje linię prostą, a każdej prostej znowu punkt, znane jest pod nazwą dwoistości (Dualität). Ogólnie można je przedstawić przez równanie kształtu (4), liniowe zarówno w x, y , jak i x_1, y_1 :

$$(13) \quad \Omega = (a_1 x + b_1 y + c_1) x_1 + (a_2 x + b_2 y + c_2) y_1 + a_3 x + b_3 y + c_3 = 0.$$

Jeżeli to równanie jest symetryczne względem obu par zmiennych x, y i x_1, y_1 , to przekształcenie sprowadza się do t. zw. przekształcenia przez biegunowe wzajemne (durch reciproke Polaren) względem pewnego przecięcia stożkowego. Przy przekształceniu takim każdej krzywej c odpowiada krzywa c_1 tego rodzaju, że punkty jednej krzywej są biegunami stycznych do drugiej względem przecięcia stożkowego, i mianowicie ta przynależność jest całkowicie odwracalna.

3. Niektóre zastosowania do teorii równań różniczkowych. Niezmienniki różniczkowe.

Uważamy dwa od siebie niezależne równania różniczkowe 1-go rzędu między dwiema zmiennymi x, y , postaci:

$$(14) \quad X(x, y, y') = \text{const.}; Y(x, y, y') = \text{const.},$$

w których funkcje X, Y są w inwolucyi. Różniczkując oba te równania względem x , otrzymamy dwa równania różniczkowe zwyczajne 2-go rzędu, np. z pierwszego:

$$X_x + X_y y' + X_{yy} y'' = 0;$$

ale związek inwolucyjny $[X Y] = 0$, który można napisać w formie:

$$\frac{X_x + X_y y'}{Y_x + Y_y y'} = \frac{X_y}{Y_y},$$

jest warunkiem, aby oba owe równania 2-go rzędu były jednym i tem samem równaniem. A zatem okazaliśmy, że dwa równania (14) przedstawiają całki pośrednie tego samego równania różniczkowego 2-go rzędu, jeżeli funkcje X, Y są w inwolucyi.

Z tego twierdzenia wynika, że każda para równań (14) posiada jedną krzywą całkową wspólną, której równanie znajdziemy, rugując y' z obu tych równań. Na mocy tego możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcje X, Y są w inwolucyi, wówczas każde równanie różniczkowe 1-go rzędu postaci:

$$Y - \varphi(X) = 0$$

można całkować przez eliminację. Wystarczy w tym celu wyrugować y' z równania danego i równania $X = \text{const.}$

Jeżeli dane są dwa równania różniczkowe 2-go rzędu:

$$(15) \quad y'' - \omega(x, y, y') = 0; \quad y_1'' - \Omega(x_1, y_1, y_1') = 0,$$

których dwie od siebie niezależne całki pośrednie są odpowiednio: $u(x, y, y')$, $v(x, y, y')$ i $U(x_1, y_1, y_1')$, $V(x_1, y_1, y_1')$, to przy zastosowaniu twierdzeń poprzednich dochodzimy do wniosku, że równania:

$$(16) \quad U = \varphi(u, v), \quad V = \psi(u, v), \quad \frac{dV}{dU} = \frac{\psi_u du + \psi_v dv}{\varphi_u du + \varphi_v dv},$$

zawierające funkcje dowolne φ, ψ , określają najogólniejsze przekształcenie stycznościowe (jeżeli z nich wyrazimy x_1, y_1, y_1' przez x, y, y'), które pierwsze z równań (15) przemienia na drugie, a zatem:

Każde zwyczajne równanie różniczkowe 2-go rzędu można przekształcić na jakiekolwiek inne równanie tego rodzaju zapomocą nieskończenie wielu przekształceń stycznościowych.

Taka funkcja zmiennych x, y, y' , która nie zmienia się przy pewnem nieskończeniu małym przekształceniu stycznościowem, zowie się niezmiennikiem różniczkowym 1-go rzędu tego przekształcenia. Rozważania

o jednoczesiowych grupach przekształceń, wytworzonych przez takie nieskończenie małe przekształcenia, doprowadzają do następujących rezultatów:

Każde nieskończenie małe przekształcenie stycznościowe posiada, jako najogólniejszy niezmiennik różniczkowy 1-go rzędu, funkcję dowolną $\Omega(u, v)$ dwu od siebie niezależnych całek u, v układu równań różniczkowych:

$$(17) \quad \frac{dx}{W_x} = \frac{dy}{p W_y - W} = - \frac{dp}{W_x - p W_y},$$

które to niezmienniki u, v nigdy nie są oba razem wolne od p . Równanie $\Omega(u, v) = 0$ przedstawia najogólniejszy zbiór ∞^2 elementów liniowych, którego to przekształcenie nie zmienia; $\Omega(u, v) = 0$ jest przeto najogólniejszem równaniem różniczkowym 1-go rzędu, które zezwala na nieskończenie małe przekształcenie stycznościowe (8).

Aby znaleźć równanie różniczkowe, względem którego dane nieskończenie małe przekształcenie stycznościowe jest trywialne (trivial), t. j. które każdej krzywej całkowej równania z osobna nie zmienia, zauważyć należy, że każdy elementliniowy tego równania przejść musi na element z nim zjednoczony, jest tedy: $\delta y - p \delta x = 0$: a więc według (8) szukaniem równaniem różniczkowym jest: $W(x, y, p) = 0$.

Wreszcie bez bliższego uzasadnienia przytaczamy dwa twierdzenia następujące:

Jeżeli równanie różniczkowe zwyczajne rzędu 1-go zezwala na nietrywialne nieskończenie małe przekształcenie stycznościowe $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$, $\delta y' = \pi \delta t$, to można je całkować zapomocą kwadratury; całka ta mianowicie tak się wyraża:

$$(18) \quad \Psi = \int \frac{dy - \omega dx}{\eta(x, y, \omega) - \omega \xi(x, y, \omega)} = \text{const.}$$

gdy równanie różniczkowe dane jest w formie: $y' - \omega(x, y) = 0$. Wyrażenie pod znakiem całki jest różniczką zupełną.

Znając jeden niezmiennik różniczkowy 1-go rzędu nieskończenie małego przekształcenia stycznościowego otrzymuje się najogólniejszy niezmiennik przez kwadraturę. I tak:

Jeżeli $u(x, y, p)$ jest niezmiennikiem znanym, i jeżeli po rozwiązaniu względem p równania $u(x, y, p) = a$ otrzymamy jako jego całkę: $\Psi(x, y, a) = \text{const.}$ z tożsamości (18) i następując tak utworzymy funkcję $v(x, y, p)$, że w $\Psi(x, y, a)$ za a położymy $u(x, y, p)$. t. j. $v = \Psi(x, y, u)$; natenczas u, v będą w inwolucyi, a $\frac{dv}{du}$ będzie nowym, od u niezależnym niezmiennikiem różniczkowym 1-go rzędu.

Pojęcie przekształcenia stycznościowego na płaszczyźnie można przenieść na jakiegokolwiek powierzchnie. Jeżeli x, y przyjmiemy za współrzędne krzywoliniowe (Gaussa) punktu na powierzchni, to współrzędnymi elementów liniowych na powierzchni są: $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$. Wszystkie twierdzenia o przekształceniach stycznościowych na płaszczyźnie stosują się także do przekształceń stycznościowych na dowolnej powierzchni.

W ostatnim rozdziale części I rozwiązuje Lie zagadnienie, dotyczące nieskończenie małych przekształceń stycznościowych, na które zezwalają gromady wszystkich ∞^3 kół geodezyjnych na powierzchniach, i dochodzi do następujących rezultatów:

Jeżeli powierzchnie posiadają stałą krzywiznę (Gaussa), to koła geodezyjne zezwalają na dziesięć niezależnych takich przekształceń, których funkcje charakterystyczne można przy odpowiednim doborze współrzędnych x, y przedstawić, jak następuje:

$$1, y, y^2, y', xy', x^2y', \sqrt{y'}, y\sqrt{y'}, x\sqrt{y'}, xy\sqrt{y'}.$$

Jeżeli układ kół geodezyjnych zezwala tylko na nieskończenie małe przekształcenia punktowe, to powierzchnie są rozwijalne, albo na takie powierzchnie obrotowe, których element łuku wyrazić można równaniem:

$$ds^2 = \frac{dx dy}{\left[A(x+y)^{\frac{1}{2}+\pi} + B(x+y)^{\frac{1}{2}-\pi} \right]^2}$$

albo na powierzchnie spiralne, dla których jest:

$$ds^2 = \omega(x+y) e^{ax} dx dy;$$

w pierwszym przypadku zachodzą dwa niezależne nieskończenie małe przekształcenia: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$, w drugim tylko jedno: $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$.

Wreszcie traktowane jest zagadnienie stereograficznego odwzorowania dwu powierzchni na siebie, t. j. takiego odwzorowania, przy którym kołom geodezyjnym jednej powierzchni odpowiadają koła geodezyjne drugiej. Jeżeli dwie powierzchnie można w ten sposób na siebie odwzorować, to albo jedno jest rozwijalne na drugą, lub na powierzchnię do drugiej podobną, albo obie powierzchnie są rozwijalne na pewne powierzchnie obrotowe.

II. Geometria elementów liniowych w przestrzeni.

1. Równania Monge'a i Plückerowskie kompleksy linii prostych.

Za współrzędne elementów liniowych w przestrzeni przyjmiemy pięć wielkości zmiennych: $x, y, z; dx:dy:dz$, z których trzy pierwsze są współrzędnymi prostokątnymi punktu elementu liniowego, pozostałe zaś dwa stosunki przyrostów tych trzech współrzędnych określają kierunek prostej elementu liniowego. Wszystkich zatem elementów liniowych w przestrzeni jest ∞^5 . Jeżeli między ich współrzędnymi ustanowimy pewien związek, to on określi pewną gromadę ∞^4 elementów liniowych. Związek taki musi być jednorodny w różniczkach dx, dy, dz ; wyraża go ogólnie równanie różniczkowe między trzema zmiennymi x, y, z , kształtu:

$$(19) \quad \Omega(x, y, z; dx, dy, dz) = 0,$$

zwane równaniem Monge'a.

Przez każdy punkt w przestrzeni przechodzi ∞^4 elementów liniowych z gromady ∞^4 elementów liniowych równania Monge'a. Te ∞^4 elementy liniowe tworzą w tym punkcie stożek kierunków ($dx:dy:dz$), t. zw. stożek elementarny (Elementarkegel) w punkcie (x, y, z) .

Krzywe całkowe równania Monge'a w swoich równaniach skończonych zawierają funkcje dowolne. Geometrycznie wynika to z takiego rozważania: Obierając dowolną powierzchnię w przestrzeni i prowadząc w każdym punkcie p tej powierzchni płaszczyznę styczną, tudzież przynależny do niego w skutek (19) stożek elementarny, otrzymujemy jako ich przecięcie jedną lub więcej prostych, stycznych do powierzchni w punkcie p . Wybierając jeden z tych kierunków i idąc ciągle po nim, otrzymamy krzywą na powierzchni, która jest widocznie krzywą całkową równania Monge'a. Na każdej powierzchni znajduje się więc, wrazie gdy równanie (19) jest jednorodne n -tego stopnia w dx, dy, dz , — ogólnie n gromad po ∞^1 krzywych całkowych. Ponieważ powierzchnia obrana być może dowolnie, więc istotnie w równaniach krzywych całkowych zachodzić muszą funkcje dowolne.

Miedzy krzywymi całkowymi równania Monge'a zawierać się mogą także gromady ∞^3 prostych. Ale wtedy równanie Monge'a musi mieć kształt szczególny. Teoria takich równań Monge'a stoi w ścisłym związku z Plückerowską geometrią kompleksów linii prostych.

Do tych badań używa Plücker sześciu współrzędnych jednorodnych

linii prostej¹⁾. Spółrzędne p_{ik} można przez spółrzędne niejednorodne dwu punktów przedtawić w następujący sposób:

$$p_{12} = x'y'' - y'x'', \quad p_{23} = y'z'' - z'y'', \quad p_{31} = z'x'' - x'z'', \\ p_{41} = x'' - x', \quad p_{42} = y'' - y', \quad p_{43} = z'' - z'.$$

Za spółrzędne jednorodne prostej elementu liniowego $(x, y, z; dx: dy: dz)$ można zatem przyjąć wielkości:

$$(20) \quad p_{12} = xy' - yx', \quad p_{23} = yz' - zy', \quad p_{31} = zx' - xz', \quad p_{41} = x', \quad p_{42} = y', \quad p_{43} = z',$$

jeżeli x', y', z oznaczają pochodne zmiennych x, y, z względem pewnego parametru t .

Jeżeli między spółrzędnymi p_{ik} utworzymy równanie jednorodne, to ono z pomiędzy ∞^4 wszystkich prostych w przestrzeni określi pewien układ ∞^3 prostych. Takie układy ∞^3 prostych w przestrzeni mają wprowadzoną przez Plückera nazwę kompleksów linii prostych (Linienkomplexe). Wprowadzając w równanie kompleksu prostych:

$$(21) \quad \Phi(p_{ik}) = 0$$

wyrażenia różniczkowe z równań (20) dostajemy najogólniejsze równanie Monge'a, posiadające ∞^3 prostych jako krzywe całkowite, w postaci:

$$(21') \quad \Phi(ydz - zdy, zdx - xdz, xdy - ydx, dx, dy, dz) = 0;$$

¹⁾ Wprowadził je pierwszy Grassmann, następnie niezależnie od niego Cayley i Plücker. Ten ostatni wyprowadza te spółrzędne, uważając proste raz, podobnie jak tamci, jako linie łączące dwa punkty, drugi raz jako przecięcie dwu płaszczyzn. W pierwszym przypadku warunek, żeby punkt biegnący o spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2, x_3, x_4 , leżał na prostej dwu danych punktów (y_1, y_2, y_3, y_4) i (z_1, z_2, z_3, z_4) , wymaga, żeby zniknęły

wszelkie wyznaczniki 3-go stopnia uacierzcy: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$; w ten sposób otrzymane równania prostej w spółrzędnych punktu x_1, x_2, x_3, x_4 zawierają przy tych spółrzędnych spółczynniki kształtu: $p_{ik} = \begin{vmatrix} Y_i & Y_k \\ Z_i & Z_k \end{vmatrix}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$) i te przyjmuje się za spółrzędne linii prostej. Jest ich sześć, gdyż $p_{ii} = 0, p_{ki} = -p_{ik}$; między nimi zachodzi związek, podany przez Cayleya: $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$. Analogicznym sposobem otrzymuje się spółrzędne jednorodne 2-go rodzaju: $q_{ik} = \begin{vmatrix} v_i & v_k \\ w_i & w_k \end{vmatrix}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$), gdzie v_i, w_k są spółrzędnymi jednorodnymi dwu danych płaszczyzn. Spółrzędne p_{ik} i q_{ik} są do siebie proporcjonalne.

to równanie musi być jednorodne względem wszystkich sześciu argumentów funkcji Φ .

Kompleks, przedstawiony przez równanie $\Phi=0$ algebraiczne n -tego stopnia w p_{ik} , nazywa się kompleksem prostych n -tego stopnia. Przez dany punkt (y_1, y_2, y_3, y_4) przechodzi ∞^1 prostych kompleksu, które tworzą stożek z wierzchołkiem w punkcie (y) . Podstawiając każde $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, otrzymujemy równanie tego stożka w spółrzędnych jednorodnych punktu:

$$\Phi(x_i y_k - x_k y_i) = 0,$$

które jest algebraiczne n -tego stopnia i jednorodne w biejących spółrzędnych punktu: x_1, x_2, x_3, x_4 . W dowolnej płaszczyźnie leży także ∞^1 prostych kompleksu; posiadają one obwiednię, której równanie w spółrzędnych jednorodnych płaszczyzny u_1, u_2, u_3, u_4 , jeżeli $\Psi(q_{ik}) = 0$ jest równaniem kompleksu w spółrzędnych jednorodnych q_{ik} prostej, jest także jednorodne algebraiczne n -tego stopnia: $\Psi(u_i v_k - u_k v_i) = 0$, przyczem v_i są spółrzędnymi jednorodnymi danej płaszczyzny. Ta obwiednia jest tedy krzywą n -tej klasy. A zatem okazało się twierdzenie:

Stopień n kompleksu linii prostych jest równy liczbie prostych kompleksu, które przechodzą przez dany punkt i zarazem leżą w danej płaszczyźnie, przez ten punkt przechodzącej.

Stopnia n kompleksu prostych nie zmienia rzutowe przekształcenie punktowe w przestrzeni:

$$(22) \quad x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}, \quad z_1 = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4},$$

które w spółrzędnych jednorodnych punktu przedstawiają równania:

$$(22') \quad x'_i = a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + a_{i3}x'_3 + a_{i4}x'_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Wyznaczniki p_{ik} przejdą wskutek tego przekształcenia na wyznaczniki p'_{ik} , liniowo i jednorodnie złożone z p_{ik} ; mianowicie otrzymujemy:

$$(23) \quad p'_{ik} = \sum_{\mu, \nu} a_{i\mu} a_{k\nu} p_{\mu\nu} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

a stąd wynika powyższe twierdzenie.

2. Kompleksy liniowe prostych.

Równanie jednorodne liniowe w p_{ik} , a więc kształtu:

$$(24) \quad \sum_{i, k} a_{ik} p_{ik} = 0,$$

ze stałymi współczynnikami a_{ik} , przedstawia kompleksy prostych 1-go stopnia, czyli kompleksy liniowe prostych. Równania liniowe Monge'a dla tych kompleksów, które jest szczególnym przypadkiem równania Pfaffa:

$$X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = 0,$$

ma postać:

$$(24') \quad A(ydz - zdy) + B(zdx - xdz) + C(xdy - ydx) + Ddx + Eddy + Gdz = 0.$$

Stożki prostych w punkcie dowolnym w kompleksie liniowym stają się płaszczyznami, krzywe zaś obwiednie ∞^1 prostych kompleksu na płaszczyźnie punktami.

Kompleksy liniowe prostych zowią się także układami zerowymi (Nullsysteme), ich proste prostymi zerowymi, a punkt, przez który przechodzi ∞^1 prostych w pewnej płaszczyźnie punktem zerowym tej płaszczyzny, ta płaszczyzna zaś płaszczyzną zerową owego punktu.

Warunkiem, żeby wszystkie proste kompleksu liniowego przechodziły przez jedną prostą, jest, żeby współczynniki a_{ik} w równaniu (24) były spójrzdnymi jednorodnymi pewnej prostej, czyli żeby spełniały związek kwadratowy:

$$(25) \quad a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0^1).$$

Taki kompleks liniowy prostych, którego wszystkie proste przechodzą przez jedną prostą, zowie się specjalnym liniowym kompleksem prostych, albo specjalnym układem zerowym (speciell).

Do rzutowych przekształceń układów zerowych odnosi się twierdzenie następujące:

Równanie Pfaffa układu zerowego (24') można zapomocą rzutowego przekształcenia przekształcić albo w równanie: $x dy - y dx + dz = 0$ dla układów nie-specjalnych, albo w równanie: $x dy - y dx = 0$ dla układów specjalnych; ostatnie równanie jest równaniem takiego kompleksu liniowego, które go wszystkie proste przecinają oś Oz .

Prostymi kompleksu liniowego nie-specjalnego:

$$(26) \quad x dy - y dx + dz = 0$$

są wszystkie ∞^3 proste, przecinające prostopadłe ∞^2 linii śrubowych: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = t + b$. Niezmienna oś skręceń śrubowych, oś Oz , nazywa się osią centralną układu zerowego.

Zastępując nieskończenie małe skrócenie śrubowe: $\delta x = -y \delta t$, $\delta y = x \delta t$, $\delta z = \delta t$ przez nieskończenie mały obrót około osi Oz : $\delta x = y \delta t$, $\delta y = x \delta t$, $\delta z = 0$, otrzymujemy zamiast linii śrubowych—koła, a zamiast ogólnego układu zerowego specjalny, którego równanie Pfaffa jest:

$$(27) \quad x dy - y dx = 0.$$

Krzywemi kompleksu prostych (Complexcurven) nazywają się krzywe, które w każdym punkcie mają jedną z prostych kompleksu za styczną; są to więc krzywe całkowite szczególnego równania Monge'a (21'), określającego kompleks prostych.

Lie wyprowadza następujące własności, wspólne wszystkim krzywym kompleksu:

Każda krzywa kompleksu ma w każdym punkcie p za płaszczyznę ściśle styczną tę płaszczyznę styczną do stożka kompleksu w punkcie p , dla której prosta tworząca stożka jest styczną do krzywej w punkcie p . A zatem dwie krzywe kompleksu, które mają punkt, a w nim styczną, t. j. liniowy element wspólny, mają w tem miejscu także tę samą płaszczyznę ściśle styczną.

W odniesieniu do kompleksu liniowego twierdzenie to opiewa:

Wszystkie krzywe układu zerowego, przechodzące przez pewien punkt określony, mają tam wspólną płaszczyznę ściśle styczną, mianowicie płaszczyznę zerową punktu.

Wszystkie krzywe całkowite równania Pfaffa nie-specjalnego układu zerowego (26) znaleźć można, wykonywając na tem równaniu przekształcenie:

$$(28) \quad \xi = x, \eta = z + xy, \pi = 2y.$$

Wtedy mamy w nowych zmiennych:

$$(29) \quad d\eta - \pi d\xi = 0.$$

Jeżeli ξ, η, π uważać będziemy za spójrzdnę elementów liniowych na płaszczyźnie, to w ten sposób jest określone odtworzenie tych elementów na punkty w przestrzeni. W tem odtworzeniu odpowiada widocznie każdemu zjednoczeniu elementów liniowych pewna krzywa całkowita równania (26). Gdy tem zjednoczeniem elementów jest punkt ξ, η , to odtworzoną krzywą całkowitą jest krzywa:

¹⁾ Równanie bowiem:

$$P_{12}P'_{14} + P_{13}P'_{43} + P_{24}P'_{23} + P_{23}P'_{14} + P_{43}P'_{13} + P_{32}P'_{12} = 0,$$

które jest kształtu tego samego, co (24), wyraża warunek przecinania się prostych.

(30)

$$x = \text{const.}, z + xy = \text{const.},$$

a więc pewna prosta; ogólna zaś krzywa całkowa otrzymuje się przez rugowanie ξ, η, π z równań (28) i określających dowolną krzywą jako zjednoczenie elementów, równań:

(31)

$$\omega(\xi, \eta) = 0, \pi = -\frac{\omega_\xi}{\omega_\eta}.$$

Do każdej prostej, która nie należy do specjalnego liniowego kompleksu, znaleźć zawsze można taką drugą prostą, również nie należącą do tego kompleksu i nie przecinającą pierwszej, że wszystkie proste, które przechodzą przez obie te proste, należą do kompleksu, a wszystkie punkty jednej z nich są punktami zerowymi płaszczyzn, przechodzących przez drugą. Te dwie proste zowią się biegunowymi wzajemnymi względem kompleksu liniowego (reciproke Polaren hinsichtlich des linearen Complexes).

Kompleks liniowy prostych ustanawia pewną przynależność między elementami powierzchniowymi. Definicja tych ostatnich jest następująca:

Element powierzchniowy oznacza punkt w przestrzeni wraz z przechodzącą przez ten punkt płaszczyzną.

Jeżeli do punktu i płaszczyzny pewnego elementu zbudujemy płaszczyznę zerową i punkt zerowy dla danego kompleksu liniowego, to te ostatnie wyznaczają drugi element powierzchniowy tak, że linia przecięcia się obu płaszczyzn jest identyczna z prostą, łączącą punkty obu elementów i jest prostą kompleksu. Takie dwa elementy powierzchniowe określa się jako wzajemne względem kompleksu liniowego.

Stosując powyżej określone własności wzajemnych biegunowych i elementów powierzchniowych do punktów, prostych i płaszczyzn stycznych do powierzchni, otrzymujemy twierdzenie:

Punkty zerowe płaszczyzn stycznych do pewnej nierozwijalnej powierzchni ω_1 tworzą drugą powierzchnię ω_2 , której płaszczyzny styczne są płaszczyznami zerowymi punktów powierzchni ω_1 . Wzajemne biegunowe prostych stycznych do powierzchni ω_1 są stycznymi do powierzchni ω_2 . Te proste kompleksu liniowego, które łączą punkty p_1 jednej powierzchni z tymi punktami p_2 drugiej, które są punktami zerowymi płaszczyzn stycznych w punktach ω_1 pierwszej, są wspólnymi stycznymi do obu powierzchni, jest ich ogółem ∞^2 . Obie powierzchnie ω_1, ω_2 są wzajemne względem kompleksu liniowego,

To twierdzenie można uzupełnić, biorąc pod uwagę pewną własność gromady ∞^3 prostych, czyli t. z. układu promieni (Strahlensystem), a mianowicie: Na każdej prostej układu promieni znajdują się dwa punkty (niekiedy tylko jeden), przez które przechodzą sąsiednie promienie układu.

Stąd wynika, że w układach promieni można proste w dwojaki sposób złożyć w ∞^1 rozwijalnych powierzchni, tak, iż obwiednie tworzących tych powierzchni tworzą dwie powierzchnie, t. zw. powierzchnie ogniskowe układu promieni (Breunflächen), a proste układu są wspólnymi stycznymi do obu powierzchni ogniskowych. Na podstawie tych określeń twierdzenie poprzednie możemy tak sformułować:

Obie powierzchnie ogniskowe pewnego układu promieni, którego promienie należą do kompleksu liniowego prostych, są wzajemne względem tego kompleksu.

Powierzchnie ogniskowe redukują się w szczególnych przypadkach do krzywych ogniskowych. Do każdej krzywej powierzchnią wzajemną jest pewna powierzchnia rozwijalna, której tworzące, w razie gdy to nie jest krzywa kompleksu, nie należą do kompleksu, do krzywej kompleksu zaś są stycznymi.

3. Kompleksy czworosienne.

Pomiędzy kompleksami linii prostych szczególnie ważne są, oprócz kompleksów liniowych, także kompleksy czworosienne (tetraedrale Komplexe). Kompleks czworosieniczny nazywa się kompleks prostych, utworzony przez wszystkie proste, których punkty przecięcia się ze ścianami pewnego czworoscianu tworzą dany stosunek podwójnego podziału, czyli (na mocy twierdzenia v. Staudta) które z wierzchołkami czworoscianu tworzą cztery płaszczyzny o stałym stosunku podwójnego podziału. Do danego czworoscianu należy ∞^1 kompleksów czworosienicznych.

Proste czworosienicznego kompleksu, położone w dowolnie obranej płaszczyźnie e , przecinają cztery proste przecięcia płaszczyzny przez ściany czworoscianu w punktach, które tworzą charakterystyczny dla kompleksu stosunek podwójnego podziału k ; obwiednią więc tych prostych jest przecięcie stożkowe, mające wspomniane proste za styczne. Na zasadzie dwiistości opiera się analogicznie do poprzedniego wniosek, że proste czworosienicznego kompleksu, przechodzące przez dowolnie obrany punkt p tworzą stożek 2-go stopnia, który zawiera proste, z p do wierzchołków czworoscianu poprowadzone.

Kompleks czworosieniczny jest zatem kompleksem prostych 2-go stopnia. Wszystkie proste, leżące na ścianach czworoscianu, i wszystkie proste, przechodzące przez wierzchołki tegoż, należą do tego kompleksu.

Uważać będziemy kompleksy czworosienne, należące do czworoscianu, utworzonego przez trzy płaszczyzny spórzędnych prostokątnych i nieskończenie daleką płaszczyznę, przez co jednak ogólność wyprowadzonych twierdzeń nie dozna uszczerbku.

Prosta: $x=rz+q$, $y=sz+\sigma$ przecina trzy płaszczyzny współrzędnych w punktach a , b , c , których współrzędne z są: $z_a=-\frac{q}{r}$, $z_b=-\frac{\sigma}{s}$, $z_c=0$, czwartą w punkcie d , dla którego: $z_d=\infty$. Jeden ze stosunków podwójnego podziału tych czterech punktów wyraża się tak:

$$\frac{ac}{bc} \cdot \frac{ad}{bd} = \frac{z_c - z_a}{z_c - z_b} = \frac{sq}{r\sigma}.$$

Nadając mu stałą wartość k , znajdujemy równanie kompleksu czworosciennego w współrzędnych niejednorodnych prostej w postaci:

$$(32) \quad \frac{sq}{r\sigma} = k.$$

Aby otrzymać równanie Monge'a, określające taki kompleks czworoscienny, należy r , s , q , σ wyrazić przez współrzędne prostej elementu liniowego. Wyrażając owe wielkości przez współrzędne p_{ik} przy pomocy równań poprzedzających (20), następnie podstawiając w otrzymane wyrażenia za p_{ik} wartości z równań (20), otrzymujemy:

$$\frac{dx}{r} = \frac{dy}{s} = \frac{dz}{1} = \frac{ydz - zny}{\sigma} = \frac{zdx - xdz}{-q} = \frac{xdy - ydx}{sq - r\sigma}.$$

Równanie Monge'a dla kompleksu czworosciennego ma zatem kształt:

$$(33) \quad (b-c)xdydz + (c-a)ydzdx + (a-b)zdx dy = 0,$$

przyczem zachodzi tylko jedna istotna stała: $k = \frac{a-c}{b-c}$.

Krzywe kompleksu czworosciennego, czyli krzywe całkowe równania Monge'a (33), wyznaczyć można w sposób następujący:

Jeżeli obierzemy parametr t , za którego funkcje uważamy x , y , z wzdłuż pewnej krzywej całkowej tak, iżby zachodził wzdłuż tej krzywej związek: $\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} = \frac{1}{a+t} : \frac{1}{b+t}$, to wskutek (33) uzupełnia się on do dwu równań:

$$(34) \quad \frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{1}{a+t} : \frac{1}{b+t} : \frac{1}{c+t},$$

a z tych przez kwadraturę wyznaczają się równania krzywych kompleksu w formie:

$$(35) \quad \log x = \int \frac{F(t)dt}{a+t}, \quad \log y = \int \frac{F(t)dt}{b+t}, \quad \log z = \int \frac{F(t)dt}{c+t},$$

gdzie $F(t)$ jest funkcją dowolną.

Oprócz powyższych istnieją jeszcze krzywe kompleksu, wzdłuż których stosunki różniczek w (34) są stałe; dla tych krzywych mamy równania:

$$(36) \quad x^a : y^b : z^c = A : B : C,$$

w których a , β , γ i A , B , C są stałe dowolne, a między a , β , γ zachodzi związek:

$$(36') \quad (b-c)a + (c-a)\beta + (a-b)\gamma = 0.$$

Pomiędzy przekształceniami punktu, które nie zmieniają danego kompleksu czworosciennego, na główną uwagę zasługują przekształcenia rzutowe, nie zmieniające czworoscianu w ten sposób, że wszystkie jego wierzchołki pozostają w spoczynku. Takich rzutowych przekształceń jest ∞^3 . Przy uważanym wyborze czworoscianu przekształcenia te przedstawiają się w postaci:

$$(37) \quad x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z.$$

Każde przekształcenie grupy ∞^3 przekształceń rzutowych, przy których wierzchołki pewnego czworoscianu pojedynczo nie ulegają zmianie, nie zmienia każdego z ∞^1 przynależnych do tego czworoscianu kompleksów czworosciennych, a więc i ich równań Monge'a—i to tak, że w tej grupie znajduje się zawsze jedno przekształcenie, które dowolnie daną prostą kompleksu zamienia na jakąkolwiek inną prostą tegoż kompleksu. Każdy element liniowy przechodzi przy tej grupie na ∞^3 elementów liniowych, a tak powstała gromada ∞^3 elementów jest niezmienną przy wszystkich przekształceniach grupy. Elementy takiej gromady określamy jako elementy tego samego gatunku (gleicher Gattung). Według (37) elementy tego samego gatunku charakteryzują się równaniami:

$$(38) \quad \frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{dx_1}{x_1} : \frac{dy_1}{y_1} : \frac{dz_1}{z_1}.$$

Jak widać z równań (34), należą te z pomiędzy ∞^4 elementów liniowych równania Monge'a (33), które mają ten sam gatunek, do równych wartości parametru t ; parametr t można tedy przyjąć za wielkość, wyznaczającą gatunek elementu w równaniu (33).

Gromada ∞^3 krzywych, na jakie przechodzi pewna krzywa wskutek przekształceń (37), jest także przy tej grupie niezmienną. Krzywe tej gro-

mady określamy jako krzywe tegosamego gatunku. Najogólniejszą gromadę takich krzywych przedstawiają równania:

$$\log x = \varphi(t) + \text{const.}, \log y = \psi(t) + \text{const.}, \log z = \chi(t) + \text{const.}$$

Równania (35) przy określonym $F(t)$ mogą przedstawiać ∞^3 krzywych tego samego gatunku, gdy stałe całkowania pozostają w nich nieokreślone. Przeto funkcja $F(t)$ wyznacza gatunek krzywej kompleksu czworociennego. Krzywe (36) składają się z samych elementów tegosamego gatunku.

Równanie Monge'a, nie zawierające zmiennych x, y, z w postaci skróconej, a więc kształtu:

$$(39) \quad \frac{dy}{dz} - \varphi\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0,$$

posiada w każdym punkcie (x, y, z) w przestrzeni stożki elementarne przystające i taksamo położone; określa więc kompleks prostych, którego wszystkie ∞^3 proste przecinają pewną krzywą w nieskończoności, te mianowicie, w której wszystkie ∞^3 stożki elementarne przecinają nieskończenie daleką płaszczyznę. Równanie tej krzywej można przedstawić w formie równania kompleksu (39), jeżeli dx, dy, dz obierzemy za współrzędne jednorodne punktu na nieskończenie dalekiej płaszczyźnie, jako określające kierunki wszystkich równoległych do siebie prostych, które się przecinają w jednym punkcie na tej płaszczyźnie.

Przekształcenie logarytmowe

$$(40) \quad \xi = \log x, y = \log y, \zeta = \log z$$

przeprowadza równanie Monge'a czworociennego kompleksu (33) na równie Monge'a:

$$(41) \quad (b - c) d\eta d\zeta + (c - a) d\zeta d\xi + (a - b) d\xi d\eta = 0,$$

określające kompleks prostych, którego wszystkie proste przecinają pewne nieskończenie dalekie przecięcie stożkowe, przechodzące w nieskończoności przez trzy osi współrzędnych i prostą $\xi = \eta = \zeta$.

Zapomocą równań (40) określone jest odtworzenie punktów w przestrzeni (x, y, z) na punkty w przestrzeni (ξ, η, ζ) , t. zw. odtworzenie logarytmowe, które ustanawia między obiema przestrzeniami następującą przynależność:

Elementy liniowe tegosamego gatunku w przestrzeni (x, y, z) przechodzą na elementy o tym samym kierunku w przestrzeni (ξ, η, ζ) ; zatem krzywe (36) na linie proste. Krzywymi tego samego gatunku odpowiadają krzywe

kongruentne i taksamo położone; zatem powierzchnie translacyjne, t. j. powierzchnie, utworzone (najmniej), przez dwie rodziny takich ∞^1 krzywych, odpowiadają powierzchniom, na których leżą (najmniej) dwie rodziny ∞^1 krzywych tego samego gatunku. Przekształceniom rzutowym (37) odpowiadają wszystkie translacje w przestrzeni (ξ, η, ζ) .

4. Problematy całkowania, związane z równaniami Monge'a.

Z każdym równaniem Monge'a wiąże się szereg problemów, których analitycznym wyrażeniem są pewne równania różniczkowe cząstkowe. Zajmiemy się trzema takimi problemami.

Problem pierwszy. Wyznaczyć wszystkie takie powierzchnie, które w każdym punkcie dotykają stożka elementarnego. przynależnego do punktu wskutek równania Monge'a.

Na takich powierzchniach schodzą się z sobą dwa kierunki, w jakich płaszczyzna styczna do stożka elementarnego, w każdym punkcie powierzchni przecina tę powierzchnię tak, iż wrazie gdy równanie Monge'a jest n -tego stopnia, na tej powierzchni leży nie n , tylko $n-1$ rodzin krzywych całkowych równania Monge'a. Ponieważ równanie Monge'a z pomiędzy wszystkich ∞^3 elementów powierzchniowych określa ich ∞^4 , każdy bowiem stożek elementarny ma ∞^1 płaszczyzn stycznych, a tych stożków jest ∞^3 , obecne zatem zadanie polega na wyszukaniu wszystkich powierzchni, których ∞^3 elementy powierzchniowe należą do ∞^4 elementów, równaniem Monge'a określonych.

Za współrzędne elementów powierzchniowych przyjmujemy pięć wielkości x, y, z, p, q , z których trzy pierwsze są współrzędnymi punktu elementu powierzchniowego, zaś p, q wyznaczają kierunek płaszczyzny elementu:

$$(\zeta - z) - p(\xi - x) - q(\eta - y) = 0,$$

takież $p, q, -1$ są proporcjonalne do jej dostaw kierunkowych.

Oznaczając przez x', y', z' wielkości proporcjonalne do dostaw kierunkowych prostych tworzących stożka elementarnego, tak, iż równanie tego stożka w punkcie (x, y, z) przedstawić można w postaci równania Monge'a:

$$\Omega(x, y, z; x', y', z') = 0,$$

otrzymujemy dla elementów powierzchniowych stożków elementarnych:

$$p = -\frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{x'}}, \quad q = -\frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{y'}}.$$

Przez rugowanie x', y', z' z jednorodnych względem nich trzech ostatnich równań znajdujemy równanie:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

które określa wszystkie ∞^4 elementy powierzchniowe, należące do równania Monge'a, a że na szukanych powierzchniach $z = \omega(x, y)$ elementy powierzchniowe mieszczą się wśród tamtych, czyli jest:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

przeto uważany problemat jest równoważny z problemem całkowania cząstkowego równania różniczkowego 1-go rzędu:

$$(42) \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Stożki elementarne równania Monge'a dotyczą powierzchni całkowych tego równania wzdłuż ∞^1 krzywych, które się nazywają charakterystykami. Są one widocznie krzywymi całkowymi równania Monge'a. Oba odpowiadające sobie równania, tak Monge'a: $\Omega = 0$, jak różniczkowe cząstkowe: $F = 0$, nie mogą być liniowe (drugie w p, q). Jeżeli dane równanie Monge'a określa kompleks linii prostych (nieliniowy), to, jak wynika z twierdzenia o krzywych kompleksu, charakterystyki odpowiadającego mu równania $F = 0$ mają jako płaszczyzny ściśle styczne wszędzie płaszczyzny styczne do powierzchni całkowych, są przeto krzywymi głównych stycznych na powierzchniach całkowych.

Problemat drugi. Wyznaczyć powierzchnie, na których krzywe głównych stycznych jednej rodziny należą do danego kompleksu prostych. Analitycznie sprowadza się to do całkowania pewnego cząstkowego równania różniczkowego 2-go rzędu, które ma pośrednie równanie całkowite; jest niemianowicie równanie (42) poprzedniego problemu.

Szukanymi powierzchniami są: 1) każda powierzchnia prostoliniowa, której proste należą do danego kompleksu; 2) każda powierzchnia, która w każdym punkcie dotyka stożka kompleksu.

Problemat trzeci. Wyznaczyć powierzchnie, na których leżą dwie sprzężone rodziny krzywych kompleksu, czyli powierzchnie, sprzężone z danym kompleksem prostych.

Ten problemat rozwiązuje Lie dla kompleksów, których proste przechodzą przez pewną nieskończoność daleką krzywą, i dla kompleksów czworosciennych. Dla pierwszych analitycznym wyrażeniem problemu jest równanie różniczkowe cząstkowe 2-go rzędu, kształtu:

$$(43) \quad R(p, q)r + 2S(p, q)s + T(p, q)t = 0;$$

w drugim kształtu:

$$(44) \quad (b-c)xq \cdot r - \left[(b-c)xp + (c-a)yq + (a-b)z \right] \cdot s + (c-a)yp \cdot t = 0.$$

W szczególnym wypadku, gdy obie rodziny krzywych sprzężonych na powierzchniach ze sobą się schodzą i tworzą jedną rodzinę krzywych głównych stycznych, problemat redukuje się do poprzedniego. W ogólnym przypadku mamy twierdzenie:

Powierzchniami sprzężonymi do kompleksu (39), są powierzchnie translacyjne, których krzywe tworzące są obwiedniami prostych tworzących powierzchni rozwijalnych, które zawierają nieskończoność daleką krzywą, określającą ten kompleks.

Dla kompleksu czworosciennego można otrzymać analogiczne twierdzenie na mocy własności odtworzenia logarytowego, a mianowicie:

Powierzchnie, sprzężone do czworosciennego kompleksu, otrzymuje się tak: Obyramy dwie dowolne, przecinające się w punkcie p krzywe kompleksu, c i γ , i na jednej z nich, np. na γ , wykonywamy wszystkie rzutowe przekształcenia, które nie zmieniają wierzchołków czworoszczanu, a punkt p przeprowadzają w dowolne punkty krzywej c . Powierzchnia, którą w ten sposób tworzy swym ruchem krzywa γ , jest powierzchnią szukanej kategorii.

Powierzchnie translacyjne, które są powierzchniami całkowymi równania (43), przedstawiają się za pomocą równań:

$$z = \Phi_1(\xi_1) + \Phi_2(\xi_2), \quad y = \Psi_1(\xi_1) + \Psi_2(\xi_2), \quad x = X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2);$$

rodziny krzywych $\xi_1 = \text{const.}$, $\xi_2 = \text{const.}$, są na tych powierzchniach sprzężone. Powierzchnie całkowite równania (44), sprzężone do czworosciennego kompleksu (33), otrzymujemy w postaci:

$$\log x = \int \frac{U(u)du}{a+u} + \int \frac{V(v)dv}{a+v}, \quad \log y = \int \frac{U(u)du}{b+u} + \int \frac{V(v)dv}{b+v},$$

$$\log z = \int \frac{U(u)du}{c+y} + \int \frac{V(v)dv}{c+v},$$

na których krzywe kompleksu $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ są sprzężone.

5. Odtworzenie linii prostych na kule.

Ostatni rozdział części drugiej zawiera badania nad pewnym odtworzeniem przestrzeni, przy którym elementy powierzchniowe prostej przechodzą

na elementy powierzchniowe kuli w drugiej przestrzeni. Do tego odwzorzenia dochodzi się w sposób następujący:

Przecinając kulę zerową (Nullkugel), której równanie w bieżących współrzędnych x, y, z jest:

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = 0,$$

płaszczyzną $z=0$, otrzymujemy na tej płaszczyźnie koło:

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + Z^2 = 0,$$

którego środek ma współrzędne: $x=X, y=Y$, a którego promień $r=iZ$. Można tedy uważać równania

$$x = X, y = Y, r = iZ$$

jako określające odwzorzenie punktów (X, Y, Z) w przestrzeni na koła na płaszczyźnie $Z=0$, t. zw. płaszczyźnie odwzorzenia.

Kula zerowa jest stożkiem kompleksu prostych minimalnych:

$$(45) \quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Przy powyższym odwzorzeniu odpowiadają widocznie wszystkim punktom prostej minimalnej wszystkie ∞^1 koła, styczne do siebie w punkcie przecięcia się tej prostej z płaszczyzną $Z=0$, a więc mające tam jeden element liniowy wspólny. Prosta tego elementu jest prosta, która z prostą minimalną wyznacza płaszczyznę styczną do nieskończonego dalekiego koła kuli zerowej (Kugelkreis). Obrazem krzywej minimalnej (krzywej kompleksu (45)) M na płaszczyźnie odwzorzenia jest krzywa c , w której powierzchnia rozwijalna stycznych do M przecina tę płaszczyznę; elementy liniowe bowiem krzywej c są obrazami prostych minimalnych, stycznych do M .

Aby płaszczyzna

$$UX + VY + WZ + T = 0.$$

była minimalną, t. j. w każdym punkcie dotykała przynależnego stożka elementarnego (45), musi zachodzić związek: $U^2 + V^2 + W^2 = 0$; ten warunek jest spełniony przy dowolnej wartości parametru s , jeżeli przyjmujemy:

$$U = 1 - s^2, \quad V = i(1 + s^2), \quad W = 2s.$$

Zatem obierając T jako pewną funkcję s , czyli z pośród ∞^2 płaszczyzn minimalnych wybierając ∞^1 , i tak otrzymamy równanie różniczkując względem s , przedstawiamy minimalną powierzchnię rozwijalną, powłóczącą tych ∞^1 płaszczyzn, dwoma równaniami:

$$(46) \quad \begin{aligned} (1 - s^2)X + i(1 + s^2)Y + 2sZ + T(s) &= 0, \\ 2sX - 2isY - 2Z - T(s) &= 0 \end{aligned}$$

z parametrem s ; jeżeli zaś s obierzemy w sposób określony, to równania (46) przedstawiają pewną prostą minimalną. Uważając s, T, T' za stałe, dowolne, niezależne od siebie parametry, można je przyjąć za współrzędne prostej minimalnej. Krzywe minimalne, jako obwiednie prostych tworzących minimalnej powierzchni rozwijalnej, dane są przez równania (46) oraz równanie, powstałe przez różniczkowanie ich względem s :

$$(46') \quad 2X - 2iY - T''(s) = 0.$$

Krzywe minimalne przy szczególnym wyborze funkcji $T(s) = a + bs + cs^2$ redukują się do punktów; wtedy minimalne powierzchnie rozwijalne są kulami zerowymi.

Jeżeli będziemy uważali parametry s, T za współrzędne prostokątne punktu na pewnej płaszczyźnie, i poprzednio określoną przynależność między przestrzenią (X, Y, Z) i płaszczyzną $Z=0$, przeniesiemy na pomienioną płaszczyznę, to ją można tak zcharakteryzować: Każdej prostej minimalnej o współrzędnych s, T, T' odpowiada na płaszczyźnie (sT) element liniowy (s, T, T') ; wszystkim ∞^1 prostym minimalnym w pewnym punkcie odpowiadają wszystkie ∞^1 elementy liniowe jednej z krzywych: $T = a + bs + cs^2$; krzywym minimalnym zjednoczenia elementów na płaszczyźnie (sT) i na odwrót. Jeżeli płaszczyznę (sT) identyfikować będziemy z płaszczyzną (ξ, η) , na którą zapomocą równań (28):

$$\xi = x, \quad \eta = z + xy, \quad \pi = 2y$$

odtworzyliśmy punkty (x, y, z) w przestrzeni na elementy liniowe, przyczem każda krzywa kompleksu liniowego (26) odtwarza się jako zjednoczenie elementów na płaszczyźnie (ξ, η) , a w szczególności ∞^2 proste kompleksu jako ∞^3 parabole: $\eta = a + b\xi + c\xi^2$; to z połączenia obu odwzorzeń wyniknie przynależność między przestrzeniami (x, y, z) i (X, Y, Z) , której wyrażenie analityczne otrzymuje się przez rugowanie wielkości ξ, η, π, s, T, T' z ośmiu równań (46), (28) i $\xi = s, \eta = T, \pi = T'$, w formie dwu równań:

$$(47) \quad \begin{aligned} X + iY + xZ + z &= 0, \\ x(X - iY) - Z - y &= 0. \end{aligned}$$

W ten sposób określone jest owo odwzorzenie, którego własności mamy tutaj podać. Przynależność, jaką ono ustanawia między elementami linowymi w obu przestrzeniach, jako wynik obu poprzednich, łatwo jest określić.

Ale oprócz tego ta przynależność rozciąga się i na powierzchnie i elementy powierzchniowe w obu przestrzeniach, tę ostatnią można określić przez zastosowanie twierdzeń, podanych na końcu ustępu o kompleksach liniowych, z uwzględnieniem okoliczności, że na każdej powierzchni leży jedna tylko rodzina krzywych liniowego kompleksu, a dwie rodziny krzywych kompleksu prostych minimalnych. I tak dochodzimy do następującego twierdzenia:

Równania (47) ustanawiają obustronnie jednowartościową przynależność między elementami liniowymi, czyniącymi zadość równaniu P f a f f a.

$$x dy - y dx + dz = 0.$$

liniowego kompleksu w przestrzeni (x, y, z) , a elementami liniowymi kompleksu wszystkich prostych minimalnych w przestrzeni (X, Y, Z) , tak iż ∞^1 elementom liniowym pewnej prostej kompleksu w jednej przestrzeni odpowiada ∞^1 liniowych elementów jednego punktu w drugiej przestrzeni; jak również jedno-dwuwartościową przynależność między elementami powierzchniowymi i powierzchniami w obu przestrzeniach taką, że wszystkie elementy powierzchniowe pewnej powierzchni ω_1 i do niej wzajemnej powierzchni ω_2 w powierzchni (x, y, z) odtwarzają się jako elementy powierzchniowe tej przestrzeni Ω w przestrzeni (X, Y, Z) , na której obie rodziny krzywych kompleksu (45) odpowiadają rodzinom krzywych kompleksu liniowego odpowiednio na powierzchniach ω_1, ω_2 . W szczególności wszystkim ∞^2 parom wzajemnych elementów o powierzchniowych dwu wzajemnych biegunowych względem kompleksu w przestrzeni (x, y, z) odpowiadają wszystkie ∞^2 powierzchniowe elementy pewnej kuli w przestrzeni (X, Y, Z) , której punkty są obrazami prostych, przechodzących przez obie biegunowe¹⁾.

Z określenia krzywych głównych stycznych, jako krzywych na powierzchni, wzdłuż których każde dwa sąsiednie elementy powierzchni należą do tej samej prostej, linii zaś krzywiznowych jako krzywe, wzdłuż których każde dwa sąsiednie elementy powierzchni należą do tej samej kuli (kula krzywiznowa), wynika na mocy poprzedniego następujące twierdzenie:

Każdej krzywej głównych stycznych na powierzchni ω_1 wraz z wzajemną krzywą głównych stycznych na powierzchni ω_2 w przestrzeni (x, y, z) , odpowiada wskutek przynależności ustanowionej przez równania (47), pewna linia krzywiznowa na przynależnej powierzchni Ω w przestrzeni (X, Y, Z) .

Zjednoczenia elementów liniowych w przestrzeni, które się definiują

¹⁾ Opisaną przynależność między elementami liniowymi i powierzchniowymi w obu przestrzeniach można analitycznie otrzymać wprost z równań (46).

taksamo jak na płaszczyźnie, składają się albo z ∞^1 albo z ∞^2 elementów. Do pierwszego rodzaju należą: zjednoczenia, składające się ze wszystkich elementów liniowych pewnej krzywej, tudzież zjednoczenia, utworzone przez wszystkie elementy liniowe pewnego stożka elementarnego: do drugiego: zjednoczenia z ∞^2 elementów w pewnym punkcie.

Aby jakieś przekształcenie elementów liniowych w przestrzeni przeprowadzało każde zjednoczenie elementów znowu w zjednoczenie, to musi w szczególności każde zjednoczenie ∞^2 elementów liniowych przeprowadzić w zjednoczenie tegoż rodzaju, a więc każdy punkt w inny jakiś punkt. Stąd się okazuje, że takim przekształceniem może być tylko przekształcenie (uzupełnione) punktowe. A zatem pojęcie przekształcenia stycznościowego na płaszczyźnie nie ma analogicznego mu pojęcia w geometrii elementów liniowych w przestrzeni.

III. Wstęp do geometrii elementów powierzchniowych.

1. Teoria równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu, jako część geometrii elementów powierzchniowych.

Jedno równanie między pięcioma współzrzednieniami elementów powierzchniowych:

$$(48) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

określa pewną gromadę ∞^4 elementów powierzchniowych w przestrzeni. Teoria takich gromad, która jest równoznaczna z teorią równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu między trzema zmiennymi:

$$(49) \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

zajmuje całą trzecią część streszczanej książki, a jest tylko częścią rozwiniętej przez Liego w dawniejszych pracach geometrii elementów powierzchniowych.

Takie pojmowanie teorii tych równań nie jest wprawdzie podstawą nowego jej rozwoju, ale przez wprowadzenie nowych pojęć elementarnych pozwala dawne teorie Lagrange'a i Monge'a przedstawić zwięźle i z ogólniejszego punktu widzenia.

Najważniejszym z tych pojęć jest: zjednoczenie elementów powierzchniowych. Podobnie jak dla elementów liniowych, mamy określenia następujące:

Dwa elementy sąsiednie są zjednoczone, jeżeli punkt jednego leży na płaszczyźnie drugiego elementu, czyli analitycznie: jeżeli dla elementów (x, y, z, p, q) i $(x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq)$ zachodzi związek:

$$(50) \quad dz - p dx - q dy = 0.$$

Zjednoczeniem elementów powierzchniowych zowie się taka gromada elementów, w której każdy pojedynczy element ze wszystkimi sąsiednimi elementami gromady jest zjednoczony.

Zjednoczenia elementów powierzchniowych składają się albo z ∞^2 elementów, albo tylko z ∞^1 elementów. Zjednoczenia ∞^2 elementów tworzą: 1) wszystkie elementy powierzchniowe powierzchni; 2) wszystkie elementy, leżące wzdłuż pewnej krzywej i dotykające tej krzywej; 3) wszystkie elementy w pewnym punkcie; zjednoczenia ∞^1 elementów tworzą: 1) gromady ∞^1 elementów z pośród ∞^2 elementów krzywej, czyli t. zw. wstęgi elementarne (Elementestreifen); 2) stożek elementarny, złożony z ∞^1 elementów w pewnym punkcie: $x = a, y = b, z = c: \omega(p, q) = 0$. Inne zjednoczenia nie istnieją, jak tego analitycznie dowieść można.

Zadanie całkowania równania różniczkowego cząstkowego 1-go rzędu (49) uogólnia się w następujący sposób: Szukamy wszystkich zjednoczeń elementów powierzchniowych, które należą do gromady ∞^4 elementów powierzchniowych, określonej równaniem (48). Takie zjednoczenie nazywamy utworem całkowym równania (48) (Integralgebilde).

Wyznaczenie wszystkich zjednoczeń ∞^1 elementów skutecznia się bez żadnych trudności; każde bowiem zjednoczenie ∞^2 elementów wraz z równaniem $F = 0$ przedstawia utwór całkowity tego równania, złożony z ∞^1 elementów.

Natomiast wyznaczenie zjednoczeń o ∞^2 elementach nastęrcza znaczne trudności i może być istotnie dokonane tylko w szczególnych przypadkach. Tutaj okażemy twierdzenie Lagrange'a o rozwiązaniach zupełnych, któremu można nadać taką formę:

Jeżeli znamy ∞^3 różnych zjednoczeń o ∞^2 elementach, które zadość czynią pewnemu cząstkowemu równaniu różniczkowemu 1-go rzędu, czyli jego t. zw. zupełne rozwiązanie, to zadanie znalezienia ogólnego rozwiązania wymaga jeszcze tylko operacji różniczkowania i eliminacji.

Jakoż w takim rozwiązaniu zupełnym zawarte są wszystkie elementy powierzchniowe, określone przez dane równanie $F = 0$. Gdy to równanie

nie jest względem p, q liniowe, to jego rozwiązanie zupełne składa się z ∞^2 powierzchni. Wszystkie inne utwory całkowite muszą mieć z każdą powierzchnią pewnego układu ∞^1 powierzchni z zupełnego rozwiązania pewną wstęgę elementarną wspólną, a więc są powłóczącymi owych ∞^1 powierzchni; w szczególnych przypadkach może to być krzywa, wspólna wszystkim tym powierzchniom. Powłócząca wszystkich ∞^2 powierzchni zupełnego rozwiązania stanowi szczególny utwór całkowity.

Równanie w p, q liniowe:

$$(51) \quad X(x, y, z)p + Y(x, y, z)q - Z(x, y, z) = 0.$$

określa w każdym punkcie (x, y, z) pęk ∞^1 elementów powierzchniowych którego oś przedstawiają równania:

$$(52) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Elementy zatem równania (51) leżą wzdłuż ∞^2 krzywych całkowych układu zwyczajnych równań różniczkowych (52): $u(x, y, z) = \text{const.}$, $v(x, y, z) = \text{const.}$, tak, iż te krzywe można uważać za zupełne rozwiązanie równania cząstkowego (51). Każda powierzchnia, utworzona przez ∞^1 z pomiędzy tych ∞^2 krzywych, jest oczywiście powierzchnią całkową tego równania. Więć całką ogólną równania różniczkowego liniowego cząstkowego (51) jest:

$$(53) \quad f(u, v) = 0.$$

Jeżeli równanie:

$$(54) \quad z = \Phi(x, y, a, b)$$

przedstawia rozwiązanie zupełne pewnego równania $F = 0$, to powierzchnie ogólnego rozwiązania, jako powłóczące ∞^1 powierzchni z pomiędzy powierzchni (54), otrzymuje się przez rugowanie parametru a z dwu równań:

$$(55) \quad z = \Phi(x, y, z, a, \varphi(a)), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \varphi'(a) = 0,$$

w których $b = \varphi(a)$ jest funkcją dowolną parametru a . Gdy w nich parametrowi a nadamy dowolną oznaczoną wartość, a funkcję $\varphi(a)$ wybieramy dowolnie tak, iż $a, \varphi(a), \varphi'(a)$ oznaczają stałe dowolne, natenczas równania (55) przedstawiają pewne krzywe, wzdłuż których dotykają się powierzchnie całkowite. Przez każdą z tych krzywych przechodzi widocznie nieskończenie

wiele powierzchni całkowych. Te krzywe nazwał Monge charakterystykami. A zatem równania:

$$(56) \quad z = \Phi(x, y, z, a, b), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} c = 0$$

przedstawiają ogół wszystkich charakterystyk, jeżeli w nich a, b, c oznaczają stałe dowolne parametry. Każde równanie różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu ma tedy najwyższej ∞^3 charakterystyk. Na każdej powierzchni całkowej leży ∞^1 charakterystyk.

Każde równanie nieliniowe $F=0$ podporządkowuje każdemu punktowi w przestrzeni pewien stożek elementarny, którego dotykać musi każda powierzchnia całkowita tego równania. Jeżeli tedy uważamy dwie sąsiednie powierzchnie z zupełnego rozwiązania, to ich płaszczyzny styczne w punkcie p dotykają przynależnego stożka wzdłuż dwu prostych tworzących tego stożka, które się z sobą schodzą w jedną prostą tworzącą g ; ale że te dwie sąsiednie powierzchnie przecinają się wzdłuż pewnej charakterystyki, przeto kierunek prostej q jest kierunkiem tej charakterystyki w punkcie p . Tak więc ∞^1 powierzchnie z zupełnego rozwiązania, które przechodzą przez dowolny punkt p , dotykają stożka elementarnego po jego ∞^1 prostych tworzących, a te wyznaczają kierunki wszystkich charakterystyk, przechodzących przez p , w tymże punkcie; zatem charakterystyk z jednego punktu wychodzi zawsze dokładnie ∞^1 . Z tego wynika, że każde nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu ma zawsze ∞^3 charakterystyk.

Kierunek $(dx:dy:dz)$ tworzącej stożka elementarnego, a więc i charakterystyki równania $F=0$ w pewnym punkcie p , jako kierunek prostej przecięcia się płaszczyzn dwu sąsiednich elementów powierzchniowych (x, y, z, p, q) i $(x, y, z, p + dp, q + dq)$, spełniających równanie $F=0$, tak, iż oprócz $F=0$ jest:

$$F_p dp + F_q dq = 0,$$

wyznacza się z dwóch warunków:

$$dz - p dx - q dy = 0, \quad dp dx + dq dy = 0,$$

z których przy uwzględnieniu poprzedniego równania otrzymuje się równanie, spełniane przez kierunki charakterystyk:

$$(57) \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q}.$$

Stąd łatwo znaleźć przynależne do równania różniczkowego cząstkowego 1-go rzędu równanie Monge'a, t. j. takie równanie Monge'a którego stożki elementarne są identyczne ze stożkami elementarnymi tamtego równania. Powstaje ono przez rugowanie p, q z obu równań (57) i z równania $F=0$, w postaci:

$$\Omega(x, y, z; dx:dy:dz) = 0.$$

To równanie Monge'a ma widocznie między krzywymi całkowymi charakterystyki równania $F=0$. Wszystkie inne krzywe całkowite są odpowiedniemi ∞^1 charakterystyk na powierzchniach całkowych równania $F=0$.

Podstawiając do równania, powstałego przez różniczkowanie względem x równania $F=0$.

$$F_x + F_z p + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

któremu czynią zadość elementy na powierzchniach całkowych, wartości:

$$dx = q F_p, \quad dy = q F_q, \quad dz = q (F_p p + F_q q)$$

z równań (57), okazuje się przy uwzględnieniu, że $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$,

$$q (F_x + F_z p) + \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) = 0,$$

czyli:

$$dp = -q (F_x + F_z p)$$

i analogicznie:

$$dq = -q (F_y + F_z q).$$

Z tego widzimy, że elementy powierzchniowe wzdłuż charakterystyk spełniają układ czterech zwyczajnych równań różniczkowych:

$$(58) \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{F_x + F_z p} = \frac{dq}{F_y + F_z q}.$$

Układ (58) jest, jak wiadomo, równoważny równaniu różniczkowemu liniiowemu jednorodnemu cząstkowemu 1-go rzędu dla f , kształtu:

$$(59) \quad F_p \frac{\partial f}{\partial x} + F_q \frac{\partial f}{\partial y} + (F_p p + F_q q) \frac{\partial f}{\partial z} - (F_x + F_z p) \frac{\partial f}{\partial p} - (F_y + F_z q) \frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

którego najogólniejszym rozwiązaniem jest funkcja dowolna czterech niezależnych rozwiązań. Jednym z rozwiązań jest widocznie sama funkcja $F(x, y, z, p, q)$. Jeżeli Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 są trzema od F i między sobą niezależnymi całkami równania (59), to skończone równania charakterystyk wyznaczają się według tego przez rugowanie p i q z czterech równań:

$$(60) \quad \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \quad \Psi_1(x, y, z, p, q) = c_1, \\ \Psi_2(x, y, z, p, q) &= c_2, \quad \Psi_3(x, y, z, p, q) = c_3 \end{aligned}$$

i wyrażają się w formie:

$$(61) \quad \Psi_1(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0, \quad \Psi_2(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0,$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są stałe dowolne.

Wstęgę elementarną, złożoną z ∞^1 elementów wzdłuż pewnej charakterystyki, należącą do danego równania $F=0$, nazywamy wstęgą charakterystyczną tego równania (charakteristischer Streifen). Elementy wstęgi charakterystycznej czynią zadość równaniom różniczkowym (58), a równania (60) są jej skończonymi równaniami. Każde równanie różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu ma ∞^3 wstęg charakterystycznych.

Ze sposobu wyprowadzania równań różniczkowych (58) dla wstęg charakterystycznych jest widocznym, że każdy utwór całkowy równania $F=0$ składa się z ∞^1 wstęg charakterystycznych, a przez każdą wstęgę charakterystyczną przechodzi nieskończenie wiele utworów całkowych. Przez każdą krzywą, która nie jest charakterystyką, przechodzi tylko jedna powierzchnia całkowa.

Charakterystykami równania cząstkowego liniowego 1-go rzędu są owe ∞^2 krzywe, stanowiące utwory całkowe rozwiązania zupełnego, gdyż tylko przez nie przechodzi nieskończenie wiele powierzchni całkowych. Wyznaczają one jednakowoż ∞^3 wstęg charakterystycznych, gdyż do każdej z tych krzywych należy ∞^1 wstęg charakterystycznych.

Oznaczając lewą stronę równania (59) symbolem klamrowym $[F]$, definiujemy związek inwolucyjny w następujący sposób:

Dwie funkcje F, Ψ zmiennych x, y, z, p, q są w inwolucji, jeżeli ich wyrażenie klamrowe jest tożsamościowo równe zeru:

$$[F\Psi] = 0.$$

Dwa równania różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \Psi(x, y, z, p, q) = 0$$

są w inwolucji, jeżeli klamrowe wyrażenie Poissona $[F\Psi]$ znika wskutek $F=0$ i $\Psi=0$.

Jeżeli dwa równania $F=0$ i $\Psi=0$ są w inwolucji, wtedy one mieszczą się w rozwiązaniach układu zwyczajnych równań różniczkowych (58), równoważnego cząstkowemu równaniu $[F]=0$, a zatem te równania przedstawiają taką gromadę ∞^3 elementów powierzchniowych równania $F=0$ która utworzona jest przez ∞^2 charakterystycznych wstęg tego równania; te wstęgi zaś łączą się w ∞^1 utworów całkowych tegoż równania. To samo dotyczy oczywiście także równania $\Psi=0$. Z tego wynika, że dwa równania: $F=a, F=b$, będące dla wszelkich wartości stałych a, b w inwolucji, mają zawsze ∞^1 wspólnych utworów całkowych o ∞^2 elementach. Jeżeli rozwiążemy owe dwa równania względem p, q :

$$p = P(x, y, z, a, b), \quad q = Q(x, y, z, a, b),$$

to otrzymamy wspólne utwory całkowe przez całkowania równania Pfaffa

$$dz - Pdx - Qdy = 0,$$

które musi być całkalne w formie:

$$\omega(x, y, z, a, b) = c.$$

Możemy tedy wypowiedzieć twierdzenie:

Jeżeli funkcje F, Ψ zmiennych x, y, z, p, q są w inwolucji, to wtedy i tylko wtedy cząstkowe równania różniczkowe 1-go rzędu: $F=a, F=b$ mają tę własność, że dla każdego układu wartości stałych a, b mają ∞^1 wspólnych utworów całkowych o ∞^2 elementach. Wspólne powierzchnie całkowe znajduje się przez całkowanie pewnego całkalnego równania Pfaffa w x, y, z .

Z trzech równań:

$$F=a, \quad \Psi=b, \quad \omega(x, y, z, a, b)=c$$

można wyrugować a i b , przez co otrzymujemy:

$$\omega(x, y, z, F, \Psi) = c, \quad \text{czyli} \quad \Omega(x, y, z, p, q) = c;$$

tak, iż trzy równania:

$$(62) \quad F=a, \quad \Psi=b, \quad \Omega=c$$

mają dla każdego układu wartości stałych a, b, c tę własność, że każde dwa

z nich mają ∞^1 utworów całkowych wspólnych. Przeto według poprzedniego twierdzenia jest:

$$(63) \quad [F\Phi] = 0, [F\Omega] = 0, [\Psi\Omega] = 0.$$

Okazać można, że każda od F i Ψ niezależna funkcja Φ , która jest z niemi w inwolucji, jest funkcją samych tylko F, Ψ, Ω ; z tego wynika, że trzy równania: $F=a, \Psi=b, \Phi=\gamma$, jako równoważne równaniom (62), dają przez eliminację p, q , dla każdego równania $F=a$ zupełne rozwiązanie:

$$(64) \quad \varphi(x, y, z, a, b) = \gamma$$

o dwu dowolnych stałych b, γ . W ten sposób dowiedliśmy twierdzenia.

Problem całkowania ∞^1 równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu: $F(x, y, z, p, q) = a$ jest rozwiązany, skoro znane są dwie, od F i między sobą niezależne funkcje Φ, Ψ zmiennych x, y, z, p, q , które z F i między sobą są w inwolucji, gdyż wtedy trzy równania: $F=a, \Phi=b, \Psi=c$ przedstawiają rozwiązanie zupełne równania $F=a$ z parametrami b, c .

2. Definicja przekształceń stycznościowych w przestrzeni. Uzupełnione przekształcenia punktowe.

Przekształceniem stycznościowym w przestrzeni nazywa się takie przekształcenie współrzędnych x, y, z, p, q elementów powierzchniowych w nowe współrzędne x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 , które każde zjednoczenie elementów (x, y, z, p, q) przeprowadza w zjednoczenie elementów $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$. Przekształcenie:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q).$$

jest przekształceniem stycznościowym, jeżeli skutek tego przekształcenia zachodzi związek kształtu:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \varrho (dz - p dx - q dy),$$

w którym ϱ oznacza pewną funkcję zmiennych x, y, z, p, q .

Przekształcenie stycznościowe w przestrzeni przemienia każde równanie różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu: $F(x, y, z, p, q) = 0$ na nowe takie równanie: $F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$; każdy utwór całkowy danego równania $F=0$ na utwór całkowy równania $F_1=0$. W szczególności przechodzą

przy tem przekształceniu charakterystyczne wstęgi na takież wstęgi drugiego równania. Także związek inwolucyjny tak dwu równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu, jak i dwu funkcji, jest przy przekształceniach stycznościowych niezmienny.

Przykład przekształcenia stycznościowego w przestrzeni mieliśmy przy odwzorzeniu prostych na kule; tam każdemu elementowi powierzchniowemu odpowiada inny element powierzchniowy, a każda powierzchnia, pojmowana jako zjednoczenie elementów, przechodzi znowu w powierzchnię.

Przekształcenie punktowe, rozciągnięte na współrzędne elementów powierzchniowych, jest szczególnym przypadkiem przekształcenia stycznościowego. Nazywamy je uzupełnionem przekształceniem punktowym w przestrzeni. Zajmować nas będą tylko nieskończenie małe uzupełnione przekształcenia punktu.

Dane jest nieskończenie małe przekształcenie punktowe:

$$(65) \quad x_1 = x + \xi(x, y, z) \delta t, \quad y_1 = y + \eta(x, y, z) \delta t, \quad z_1 = z + \zeta(x, y, z) \delta t,$$

którego symbolem jest wyrażenie:

$$(65') \quad Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Z niego mamy otrzymać uzupełnione nieskończenie małe przekształcenie punktowe

$$(66) \quad U'f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \pi \frac{\partial f}{\partial p} + \kappa \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Funkcje π, κ wyznaczamy z warunku:

$$d(z + \zeta \delta t) - p_1 d(x + \xi \delta t) - q_1 d(y + \eta \delta t) = \varrho (dz - p dx - q dy),$$

przyczem jest:

$$p_1 = p + \pi(x, y, z, p, q) \delta t, \quad q_1 = q + \kappa(x, y, z, p, q) \delta t,$$

zaś ϱ musi mieć kształt:

$$\varrho = 1 + \sigma(x, y, z, p, q) \delta t.$$

Zapomocą działań widocznych otrzymujemy:

$$(67) \quad \begin{aligned} \pi &= \zeta_x + p \zeta_z - p (\xi_x + p \xi_z) - q (\eta_x + p \eta_z), \\ \kappa &= \zeta_y + q \zeta_z - p (\xi_y + q \xi_z) - q (\eta_y + q \eta_z). \end{aligned}$$

3. Całkowanie równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu, które zezwalają na nieskończenie małe przekształcenia punktowe.

Równanie różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zezwała na nieskończenie małe przekształcenie punktu Uf , jeżeli wszystkie elementy powierzchniowe, otrzymane z ∞^4 elementów gromady $F=0$ przez uzupełnienie nieskończenie małe przekształcenie punktu $U'f$, należą do tej samej gromady elementów, czyli spełniają równanie $F=0$, zatem musi równanie:

$$(68) \quad U'F = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + \pi \frac{\partial F}{\partial p} + \kappa \frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

stać jako skutek równania $F=0$.

W dalszym ciągu stosować będziemy twierdzenie: Każde nieskończenie małe przekształcenie punktu można, przez wprowadzenie odpowiednich nowych zmiennych sprowadzić do nieskończenia małej translacji: $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Równanie $F=0$, zezwalające na nieskończenie małą translację $\frac{\partial f}{\partial z}$, wiodocześnie nie zawiera x . Między powierzchniami całkowymi tego równania:

$$F(y, z, p, q) = 0$$

znajdują się takie, które wskutek translacji wzdłuż osi Ox przechodzą na siebie same. Są to powierzchnie walcowe: $z=Y(y)$, dla których $Y(y)$ czyni zadość zwyczajnemu równaniu różniczkowemu:

$$F(y, Y, 0, Y') = 0$$

między Y i y . Zatem ∞^1 powierzchni: $z=Y(y, a)$ są wspólnymi powierzchniami całkowymi uważanego cząstkowego równania i równania cząstkowego $p=0$, któremu zadość czynią wszelkie powierzchnie walcowe o tworzących równoległych do osi Ox .

Równanie $F=0$, zezwalające na dwie nieskończenie małe translacje: $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$, a więc kształtu:

$$F(z, p, q) = 0,$$

posiada ∞^2 powierzchni walcowych: $z=\Phi(y+ax, b)$ jako powierzchnie całkowite, przyczem Φ musi spełniać zwyczajne równanie różniczkowe:

$$F(\Phi, a\Phi', \Phi'') = 0;$$

te powierzchnie stanowią zupełne rozwiązanie, tak iż problemat całkowania owego równania sprowadza się do kwadratury.

Ponieważ powierzchnie $z=\Phi(y+ax)$ są powierzchniami całkowymi równań $\frac{p}{q}=a$, zatem równanie $F(z, p, q)=0$ jest z każdym z tych równań w inwolucji.

Otrzymane właśnie wyniki można uogólnić. Jeżeli pewne równanie $F(x, y, z, p, q)=0$ zezwala na jedno znane przekształcenie nieskończenie małe $U'f$, to sprowadzenie tego przekształcenia za pomocą nowych zmiennych $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ do nieskończenia małej translacji: $\bar{U}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, doprowadza na

mocy poprzednich rezultatów do wniosku, że dane równanie $F=0$ ma ∞^1 powierzchni całkowych wspólnych z równaniem: $\xi p + \eta q - \zeta = 0$, z którym jest przeto w inwolucji; to można analitycznie okazać przy pomocy równań (59), (68). Owe powierzchnie całkowite określają się pewnym równaniem między $\bar{x}(x, y, z)$ i $\bar{y}(x, y, z)$ z jedną stałą dowolną, są bowiem utworzone przez pewne z pośród ∞^2 torów grupy, należącej do $U'f$, czyli krzywych całkowych dwu równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Całkowanie równania $F(x, y, z, p, q)=0$ znacznie się upraszcza, jeżeli znamy dwa niezależne od siebie nieskończenie małe przekształcenia punktowe, które nie zmieniają tego równania. Tu zachodzić mogą następujące przypadki:

I. Wrazie, gdy równanie $F=0$ zezwala na dwa niezależne i przemienne (vertauschbar) nieskończenie małe przekształcenia punktowe, t. j. takie, dla których jest:

$$(69) \quad U_1(U_2f) - U_2(U_1f) = 0,$$

można zawsze wprowadzić takie nowe zmienne $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, w których $U_1f = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}$, $U_2f = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$, a równanie $F=0$ przechodzi na równanie $\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{q})=0$.

Ponieważ przekształcenie: $\frac{\partial f}{\partial x}$ zmienia każdą z ∞^1 powierzchni całkowych

ostatniego równania: $\omega(\bar{x}, \bar{y} - a\bar{x}) + \text{const}$, na jedną z tychże, zatem jest widocznie $\bar{U}_1\omega$ funkcją samego ω . Stąd wyciągamy wniosek, że wspólne powierzchnie całkowe równań $\bar{F} = 0$ i $\frac{\bar{p}}{q} = a$ można przedstawić przez takie równanie:

$$W(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, a) = \text{const}, \text{ iz } \bar{U}_1 W = 1. \text{ Mamy bowiem:}$$

$$\bar{U}_1 W = W'(\omega) \bar{U}_1 \omega = W'(\omega) \varphi(\omega).$$

Po przejściu do pierwotnych zmiennych okazuje się na podstawie tego co następuje: Równanie $F=0$ ma z każdym równaniem:

$$(70) \quad \frac{\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1}{\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2} = a \quad (a = \text{const.})$$

takich ∞^1 powierzchni całkowych: $\Omega(x, y, z, a) = \text{const.}$ wspólnych, dla których jest: $U_1 \Omega = 1$.

Do wyznaczenia tych powierzchni służą tedy trzy równania:

$$F\left(x, y, z, -\frac{\Omega_x}{\Omega_z}, -\frac{\Omega_y}{\Omega_z}\right) = 0,$$

$$\frac{\xi_1 \Omega_x + \eta_1 \Omega_y + \zeta_1 \Omega_z}{\xi_2 \Omega_x + \eta_2 \Omega_y + \zeta_2 \Omega_z} = a,$$

$$\xi_1 \Omega_x + \eta_1 \Omega_y + \zeta_1 \Omega_z = 1,$$

z których obliczyć można $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$; poczem przez kwadratury wyznacza się stąd Ω jako funkcja zmiennych x, y, z i parametru a .

Ponieważ równanie

$$\Omega(x, y, z, a) = \text{const.}$$

przedstawia zupełne rozwiązanie równania $F=0$, zatem udowodnione zostało twierdzenie:

Całkowanie równania różniczkowego nieliniowego cząstkowego 1-go rzędu, które zezwala na dwa znane niezależne od siebie przemienne nieskończenie małe przekształcenia punktowe sprowadzić zawsze można do kwadratury.

II. Gdy znane dwa nieskończenie małe przekształcenia punktu, które nie zmieniają równania $F=0$, nie są przemienne, wtedy stosuje się z korzyścią następujące twierdzenie:

Jeżeli $I(x, y, z, p, q)$ jest całką układu równań różniczko-

wych dla wstęg charakterystycznych, to także $U'I$ jest całką tego układu, jeżeli Uf nie zmienia równania $F=0$.

Ponieważ równanie $F=0$, zezwalające na $U_1 f$ i $U_2 f$, jest w involucji z każdym równaniem (70), które można także przedstawić w postaci:

$$(70) \quad I = \frac{\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2}{\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1} = a,$$

czyli więc $[FI] = 0$ wskutek $F=0$, przeto I jest całką owego układu. Przez wprowadzenie nowych zmiennych $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, w których jest:

$$\bar{U}_1 f = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{U}_2 f = a(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + \gamma(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

całka I przybiera kształt:

$$\bar{I} = a \bar{p} + \beta \bar{q} - \gamma,$$

jest tedy

$$\bar{U}_1 \bar{I} = \frac{\partial a}{\partial \bar{x}} \bar{p} + \frac{\partial \beta}{\partial \bar{x}} \bar{q} - \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}}.$$

Rozróżnić tu należy jeszcze następujące przypadki:

1) $U_1 I$ jest od I całką niezależną; wtedy pozostaje do znalezienia jeszcze tylko jedna całka, którą podług teorii mnożnika Jacobi'ego znajduje się przez kwadraturę.

2) $U_1 I$ jest albo tożsamościowo, albo wskutek $F=0$ zerem, wtedy są $U_1 f$ i $U_2 f$ przemienne.

3) $U_1 I$ jest tożsamościowo, albo wskutek $F=0$ równe różnej od zera stałej. Bez ograniczenia ogólności można założyć: $U_1 I = 1$. Wtedy w powyższym wyrażeniu dla $\bar{U}_2 f$, na mocy wyrażenia na $\bar{U}_1 I$, muszą być a, β niezależne od $\bar{z}$; poczem otrzymujemy łatwo związek, który w pierwotnych zmiennych musi być zachowany, mianowicie:

$$(71) \quad U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f) = U_1 f.$$

$U_2 I$ nie daje wtedy także żadnej nowej całki. Jednakże można znowu takie nowe zmienne wprowadzić, że w nich równanie $F=0$ przyjmuje kształt:

$$F_1\left(\frac{x_1}{y_1}, p_1, q_1\right) = 0.$$

Całkowanie takiego równania następuje dokładnie takie same trudności, jak całkowanie równania:

$$\Omega\left(x, y, \frac{p}{q}\right) = 0.$$

To jednorodne równanie cząstkowe, które możemy zawsze uczynić liniowym, określa pęki elementów powierzchniowych na płaszczyznach $z = \text{const.}$, których elementy liniowe czynią zadość równaniu:

$$\Omega(x, y, -y') = 0;$$

tak, iż do całkowania tego równania różniczkowego zwyczajnego redukuje się całkowanie tamtych równań różniczkowych cząstkowych.

Nie wprowadzając nowych zmiennych, możemy p, q wyznaczyć z równań $F=0$ i (70') jako pewne funkcje P, Q zmiennych x, y, z i parametru a , następnie całkować równanie Pfaffa:

$$dz - Pdx - Qdy = 0,$$

którego czynnik całkujący, na mocy poprzedniego, musi się otrzymać przez całkowanie pewnego zwyczajnego równania różniczkowego 1-go rzędu.

4) $U_1 I$ jest funkcją samego I . Można okazać, iż ten przypadek daje się do poprzedniego przypadku sprowadzić. Przytem okazuje się twierdzenie, obejmujące oba te przypadki:

Jeżeli równanie różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu nie liniowe zezwala na dwa znane niezależne od siebie nieskończenie małe przekształcenia punktowe: $U_1 f, U_2 f$, dla których zachodzi związek:

$$(72) \quad U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f) = \text{const. } U_1 f + \text{const. } U_2 f,$$

to całkowanie takiego równania można zawsze sprowadzić do całkowania zwyczajnego równania różniczkowego 1-go rzędu.

3. Niektóre kategorie równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu, zachodzące w geometrii.

W ostatnim rozdziale swej książki zajmuje się Lie wyznaczeniem trzech kategorii równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu, których charakterystyki są na wszystkich powierzchniach całkowych: a) krzywymi głównymi stycznymi, b) liniami krzywiznowymi, c) liniami geodezyjnymi.

Co do pierwszej kategorii, to ta wyznacza się geometrycznie wprost przez zestawienie badań, zawartych w ustępie 4 rozdz. II, a uzupełnionych w ustępie 1 rozdz. III, w formie następującego twierdzenia:

Równanie różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu ma wtedy własność, że na każdej jego powierzchni całkowej ∞^1 charakterystyki są krzywymi głównymi stycznymi, jeżeli to jest albo równanie różniczkowe cząstkowe pewnego nieliniowego kompleksu prostych, albo równanie liniowe cząstkowe, którego charakterystyki tworzą układ promieni.

Warunek analityczny, jaki spełniać musi funkcja F w takim równaniu $F(x, y, z, p, q) = 0$, otrzymujemy z tego, że elementy na powierzchniach całkowych muszą spełniać jednocześnie równania różniczkowe wstęg charakterystycznych (58) i warunek dla stycznych głównych:

$$dpdx + dqdy = 0;$$

tak, iż szukany warunek jest:

$$(F_x + F_z p) F_p + (F_y + F_z q) F_q = 0$$

wskutek $F = 0$.

Wszystkie takie równania $F = 0$ można, na mocy poprzedniego twierdzenia, otrzymać przez różniczkowanie i eliminację.

Równania $F = 0$, których charakterystyki wszystkie są liniami prostymi, mają kształt:

$$F(p, q, z - px - qy) = 0.$$

Od tej pierwszej kategorii równań cząstkowych przejść można do drugiej z powyżej wyszczególnionych kategorii przez wykonanie owego przekształcenia stycznościowego w przestrzeni, które poznaliśmy w ustępie 5 rozdz. II. Na zasadzie własności tego przekształcenia, wyprowadzamy z poprzedniego twierdzenia wprost twierdzenie następujące:

Jeżeli charakterystyki równania różniczkowego cząstkowego 1-go rzędu są na wszystkich powierzchniach całkowych liniami krzywiznowymi, to albo zupełne rozwiązanie składa się z ∞^2 kul dowolnie wybranych, albo równanie cząstkowe jest analitycznym wyrażeniem problemu: „znaleść wszystkie powierzchnie, których ∞^2 kule krzywiznowe jednej gromady należą do dowolnie danego kompleksu kul.” Wszystkie równania tego rodzaju można otrzymać przez różniczkowanie i eliminację.

Analityczny warunek dla tej kategorii równań otrzymujemy z równań (58) i z warunku dla wstęg elementarnych wzdłuż linii krzywiznowych:

$$(dx + p dz) dq - (dy + q dz) dp = 0,$$

w postaci:

$$(F_y + F_z q) F_x - (F_x + F_z p) F_y + (F_y p - F_x q + F_z p q) (F_x p + F_y q) = 0$$

wskutek $F = 0$.

Do tej kategorii równań należą te równania liniowe, których charakterystyki są albo ∞^2 prostymi minimalnymi, albo krzywymi ortogonalnymi pewnej dowolnej gromady ∞^1 kul.

Z tej kategorii można wyprowadzić pewną kategorię równań cząstkowych 1-go rzędu, których charakterystyki są liniami geodezyjnymi na powierzchniach całkowych, na podstawie twierdzenia, że normalne do powierzchni, wystawione wzdłuż pewnej linii krzywiznowej, mają obwiednię, która jest linią geodezyjną na jednej powierzchni środków. Mianowicie otrzymuje się twierdzenie następujące:

Powierzchnie środków jednej gromady, należące do powierzchni całkowych takiego równania cząstkowego 1-go rzędu, którego charakterystyki są liniami krzywiznowymi, są powierzchniami całkowymi takiego równania różniczkowego cząstkowego 1-go rzędu, którego charakterystyki są na wszystkich powierzchniach całkowych liniami geodezyjnymi. Takie równanie cząstkowe ma zawsze formę:

$$(p H_x + q H_y - H_z)^2 - (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - 1) (p^2 + q^2 + 1) = 0,$$

gdzie H jest funkcją dowolną zmiennych x, y, z .

Warunek analityczny, jaki spełniać musi funkcja F w równaniach $F(x, y, z, p, q) = 0$, posiadających pominiętą własność, zawiera także drugie pochodne funkcji F ; z tego wynika, że równania, w ostatnim twierdzeniu wyszczególnione, nie wyczerpują całego zasobu owej kategorii równań.

PRZYSZYBY DO TEORII FUNKCJI O OBSZARACH OSOBLIWYCH.

NAPISAL

Z. KRYGOWSKI.

Punkty istotnie osobliwe funkcji analitycznych i jednowartościowych jeśli są w liczbie nieskończonej, tworzą albo tak zwane mnogości doskonałe (perfecte Mengen), albo linie osobliwe, albo wreszcie mogą zajmować całe obszary. W tym ostatnim razie mnogości punktów nieistotnie osobliwych funkcji mogą być albo odliczalne, albo nieodliczalne; występują one wewnątrz obszaru osobliwego wszędzie gęsto, gdyż pochodną mnogości punktów nieistotnie osobliwych funkcji jest mnogość punktów istotnie osobliwych. Poincaré pierwszy podał metodę tworzenia takich funkcji w przypadku, gdy obszar punktów osobliwych funkcji jest wielobokiem wypukłym, i pierwszy raz wyprowadził wyrażenie ogólne dla mnogości punktów odliczalnej dla takiego wieloboku. Metoda ta jednak uważania „środków mas“ nie da się prawdopodobnie przenieść do ogólnego przypadku jakiegokolwiek obszaru, to też istnienie takich funkcji dla jakichkolwiek obszarów nie może być a priori w ten sposób rozstrzygnięte. Można jednak w inny sposób *) przez wprowadzenie zasady odwzorowania mnogości punktów skutecznie to i dowieść identityczności tego zadania z rozwiązaniem problemu Dirichleta. Poniżej podaję inną zasadę szukania wyrażenia mnogości odliczalnych i wszędzie gęstych dla pewnych obszarów dość ogólnych; wpro-

*) Por. w Bulletin de la Société Mathématique t. XXV pracę: Z. Krygowski „Sur les fonctions à espaces lacunaires.“