(3) $\varrho^m \cdot v_m(t_1, t_2, \ldots, t_n) + \varrho^{m-1} \cdot v_{m-1}(t_1, t_2, \ldots, t_n) + \ldots + v_0 = 0.$

Przyjmijmy, że kładąc w (3):

$$t_1 = \tau_1, \quad t_2 = \tau_2, \quad t_3 = \tau_3, \ \ldots, \ t_n = \tau_n,$$

gdzie $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n$ są dowolnie dane liczby, otrzymamy:

$$\varrho = \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n,$$

to w takim razie:

$$x_1 = \varrho_\alpha \tau_1, \ x_2 = \varrho_\alpha \tau_2, \ \ldots, \ x_n = \varrho_\alpha \tau_n, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

są niezawodnie m miejscami zerowemi danego równania $f = 0$. Stąd twierdzenie: „Gdy dany jest dowolny system n liczb $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n$, to w nieograniczonym obszarze n zmiennych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ znajdziemy zawsze m miejsc zerowych równania $f = 0$ o spółrzędnych proporcyonalnych do liczb $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n$“

O STANIE OBECNYM TEORYI NIEZMIENNIKÓW.

NAPISAŁ

Fr. MEYER,

Przełożył za upoważnieniem autora

S. DICKSTEIN.

CZĘŚĆ II*).

POKREWIEŃSTWO FORM.

A. Pytania, odnoszące się do skończoności.

a). Wiadomości ogólne o obszarach całkowitości. Najważniejsze dowody skończoności.

Po załatwieniu się z pytaniami, odnoszącemi się do zagadnienia o równoważności, zwracamy się do rozpatrzenia różnorodnych związków algebraicznych pomiędzy utworami niezmienniczemi, powstającemi z danej formy pierwotnej lub ze szeregu takich form.

Jeżeli zwrócimy najprzód uwagę na utwory całkowito-wymierne, to okres nowszy (od 1868) daje się scharakteryzować przez to, że w nim wysunięto na plan pierwszy określone „zadanie o skończoności“, (Endlichkeitsproblem). Z istoty algebry nowszej wynika, że najcelniejszem pytaniem w niej jest, czy obszar form, dających się wyprowadzić z pewnych form pierwotnych za pomocą procesów niezmienniczych, jest „obszarem całkowitości“ [1]) (Integritätsbereich), t. j. czy można z niego wydzielić liczbę skończoną indywiduów w ten sposób, by każde

*) Wstęp i Część I w tomie VII-ym „Prac matematyczno-fizycznych.“

inne indywiduum tego obszaru dało się przedstawić liniowo przez potęgi i iloczyny tamtych, przy pomocy spółczynników liczbowych wymiernych; jeżeli ten przypadek zachodzi, to za pomocą jakich środków otrzymać można konkretnie w przypadkach pojedyńczych te indywidua, stanowiące podstawę lub układ zupełny form zasadniczych?

Pytania te mają początek już w badaniach Cayley'a[2]) w rozprawie [(II Memoir, 1856)]. Już Cayley i Sylvester dowiedli przedtem, że forma dwójkowa, aż do rzędu czwartego włącznie, posiada układ zupełny form zasadniczych; w tej zaś rozprawie rozpatruje Cayley ogólnie formy dwójkowe. Za pomocą rozważań, opierających się na wyrażeniu „wagi“ niezmiennika i spółzmiennika, czyni Cayley rozwiązanie tego pytania zależnem od pewnego układu diofantowych równań liniowych. Przyjąwszy, że te równania są niezależne, dochodzi on do wniosku, że wyżej określona skończoność, w odniesieniu do form rzędu wyższego nad czwarty, nie istnieje. Później okazało się, że twierdzenie to nie jest prawdziwem (Porów. II A, d).

P. Gordan[3]) wykazał (1868) skończoność obszaru form, należących do ogólnej formy dwójkowej f. Dowód Gordana (nawet w późniejszych uproszczonych postaciach) jest zawiły; daje natomiast bezpośrednio praktyczne metody w celu otrzymania lub ograniczenia istniejących układów zupełnych. Wogólności, w układach tych występują jeszcze indywidua zbyteczne; atoli dla form piątego i szóstego rzędu można doprowadzić redukcyę aż do możliwie małego układu, złożonego z 23 i odpowiednio 26 form zasadniczych[4]). (Porówn. niżej II A, b).

Siła metody dowodzenia Gordana tkwi co do istoty swej w przedstawieniu symbolicznem Aronholda i Clebscha dla niezmienników i spółzmienników formy f, oraz w roli zasadniczej, którą pomiędzy spółzmiennikami odgrywają wprowadzone przez Cayley'a nasunięcia. Pokazuje się to odrazu na prawie zwrotnem[5]), będącem podstawą całego wywodu. Według tego prawa, każdy iloczyn symboliczny jakiegokolwiek stopnia m względem spółczynników formy f, a więc i każda istotna forma niezmiennicza tegoż stopnia jest funkcyą liniową o spółczynnikach liczbowych takich form, które są utworzone przy pomocy nasunięcia form $(m-1)$ go stopnia z formą f. Można te nasunięcia uporządkować tak, aby na czele stały nasunięcia drugie formy f na siebie samą, aby powstałe tym sposobem wyrażenia były nasunięte na formę f, 0, 1, 2, ... razy i t. d. Jeżeli w tym nieograniczonym szeregu form opuścimy wszystkie wyrażalne liniowo przez formy już napisane a pozostałe nazwiemy T, to można wykazać, że każda forma w jeden jedyny sposób jest funkcyą całkowitą liniową takich utworów T[6]). Zadanie sprowadza się tedy do oznaczenia układu zupełnego dla form T[7]).

Przyjmijmy, że znaleźliśmy taki układ zupełny dla formy początkowej f' rzędu $(n-1)$-go, wtedy łatwo widzieć, że każdej formie, należącej do f', odpowiada zupełnie określona forma, należąca do f; można przeto ograniczyć się na nowo na pozostałych jeszcze formach, należących do f. O tych formach dowodzi się, że pozostają one bez zmiany, jeżeli nasunięcia drugie formy f samej na siebie nasuwamy dostateczną liczbę razy na formy, pochodzące od f'[8]). Stosownie do wysokości tych drugich nasunięć, dzielą się one na różne klasy; dla każdej z klas, za pomocą subtelnych rozważań charakteru kombinatoryjnego, uzasadnia Gordan istnienie układu zupełnego.

Gordan rozciągnął wkrótce twierdzenie na układ form dwójkowych pierwotnych[9]) na „kombinanty“ takiego układu form równego rzędu, jakoteż na najniższe formy trójkowe[10]) i pracował odtąd nieustannie nad uproszczeniem sposobu dowodzenia.

Wprowadzenie jednoczesne wielu form pierwotnych pozwala na ważne ułatwienia. Środkami stosunkowo prostemi można uzasadnić daleko sięgające twierdzenie, że jeżeli każdy z dwóch układów form posiada podstawę skończoną, to też własność posiada też układ „skombinowany“[11]). Taki układ powstaje wtedy, gdy na jakiekolwiek iloczyny indywiduów pierwszego układu nasuniemy jakiekolwiek iloczyny z drugiego. Twierdzenie to można zastosować bezpośrednio do obu wyżej wspomnianych układów (form pochodzących od f' i nasunięć drugich formy f samej na siebie).

Program Gordana z r. 1875[12]) przedstawia postęp w wielu kierunkach. Wyłączne używanie procesu nasunięcia miało tę niedogodność, że pociągało za sobą wprowadzenie znacznej liczby nowych symbolów. Niedogodność tę zmniejszyło znacznie przyjęcie za podstawę procesu „fałdowanie“ (Faltung), stanowiącego symboliczne uogólnienie nasunięcia i umożliwiającego bardziej organiczną konstrukcyę układu form[13]).

Obok wyrobionej symboliki postawić należy proces niesymboliczny „rozwijania na szeregi“[14]). Forma o dwóch niejednorodnych spółrzędnych x, y daje się rozwinąć według potęg skończonych różnicy $x-y$ w ten sposób, że spółczynniki rozwinięcia stają się biegunowemi form, zawierających tylko zmienną x. Przy dwukrotnem stosowaniu tego postępowania do formy z trzema zmiennemi x, y, z możliwą jest zmiana kolei; przyrównanie zaś otrzymanych wyników daje bardzo płodne związki pomiędzy iloczynami symbolicznemi. Związki te z trudnością otrzymaćby można za pomocą rachunków czysto symbolicznych. Szukany „układ zupełny“ rozkłada się na szereg układów znacznie prostszych, które w dalszym ciągu wzajemnie kombinować należy. Z form, powstałych przez kombinowanie, można pozostawić na boku wszystkie; nie spełniające pewnego układu równań diofantowych. Wszystkie zaś rozwiązania tego układu równań (w liczbach całkowitych dodatnich) można otrzymać ze skończonej liczby takich rozwiązań za pomocą dowolnych czynników dodatnich i całkowitych (Porówn. dowód graficzny Petersena w II, C, a). Dla form rzędu wyższego nad szósty działania te doprowadzono już do tego stopnia, że później von Gall[15]), celem oznaczenia form zasadniczych, należących do form siódmego i ósmego rzędu, mógł się oprzeć bezpośrednio na układzie Gordana.

Większość użytych środków, a zwłaszcza rozwinięcie na szereg, przy odpowiedniej modyfikacyi, stosować można i do form trójkowych i wyższych[16]. Jeżeli mimo to dowód skończoności dla dowolnych form wyższych połączony jest z nieprzezwyciężonemi trudnościami, pochodzi to stąd, że wyrażeń symbolicznych w całej ich zupełności przejrzeć nie podobna; nadto począwszy od form czwórkowych, występują pewne czynniki symboliczne wyznacznikowe, które łączą w sobie wiele „pni symbolicznych", których zależność wzajemna z trudnością uwidocznić się daje.

Dowód, podany w książce G o r d a n a[17] dla formy dwójkowej f, jest bardziej przejrzystym, dlatego, że ponad pojęciem układu zupełnego umieszczono pojęcie układu „względnie zupełnego". Z układu takiego, przy dowolnem „fałdowaniu" (nasunięciu)[18], wynikają tylko takie formy, które po za wyrazami, pomnożonemi przez pewną potęgę „czynnika klamrowego", zależą w sposób całkowity i wymierny od form układu. Dzięki temu, wszystkie poprzednie zawiłe rozwinięcia na szereg stają się zbytecznemi. Obok tego w praktyce używane są tak zwane „reducenty"[18], t. j. takie czynniki iloczynów symbolicznych, które wskazują bezpośrednio możność sprowadzenia tych iloczynów do utworów niższego charakteru. Środek ciężkości dowodu leży w następującem rozważaniu:

Spółzmiennik lub niezmiennik formy $f = a_x^n = b_x^n = \ldots$ daje się zawsze napisać jako iloczyn symboliczny tak, że najwyższa potęga czynnika klamrowego; np. czynnika $(a\ b)$ jest p a r z y s t a. Następnie można wszystkie formy, wyprowadzone z formy f, podzielić na $g+1$ klas $A_0, A_1, \ldots, A_g$, gdzie $g = \frac{n}{2}$ lub $\frac{n-1}{2}$, stosownie do tego, czy n jest parzyste lub nieparzyste, przytem każda k l a s a o b e j m u j e w s z y s t k i e p o p r z e d z a j ą c e. Pierwsza klasa A_0 zawiera tylko samą formę f, następna A_1 wszystkie[19] formy, w których żaden z czynników klamrowych nie zachodzi w potędze wyższej nad drugą; dla trzeciej klasy A_2 ta najwyższa potęga jest czwartą i t. d., aż do ostatniej klasy A_g, która oczywiście obejmuje wszystkie formy, należące do formy f. Idzie tedy o to, aby kolejno okazać, że każda z klas jest w sobie s k o ń c z o n ą, t. j. że posiada układ zupełny. Uskutecznia się to przez utworzenie g układów s k o ń c z o n y c h pomocniczych $B_0, B_1, \ldots, B_g$, odpowiadających układom $A_0, A_1, \ldots, A_{g-1}$ i mających tę własność, że otrzymujemy zawsze układ A_{k+1}[20], n a s u w a j ą c układ poprzedzający A_k na odpowiadający mu układ B_k. Przy uwzględnieniu skończoności układu $A_0 = f$ wypływa stąd skończoność układów $A_1, A_2, \ldots$ i ostatecznie skończoność układu A_g.

T e u k ł a d y p o m o c n i c z e o t r z y m u j e m y z a p o m o c ą g n i e z m i e n n i k ó w φ_i s t o p n i a d r u g i e g o f o r m y f, gdzie $\varphi_i = (f, f)^{2i+2}$. D o p ó k i r z ą d t a k i e j f o r m y φ_i n i e j e s t j e s z c z e n i ż s z y m o d l i c z b y n, t w o r z y m y i n d y w i d u a u k ł a d u B_i z f o r m φ_i s y m b o l i c z n i e, t a k s a m o j a k i n d y w i d u a A_i z f o r m y f. G d y w s z a k ż e r z ą d f o r m y φ_i s t a j e s i ę n i ż s z y m o d n (t. j. g d y t a m t e n p r o c e s j e s t j u ż n i e w y k o n a l n y), u k ł a d B_i s k ł a d a s i ę w p r o s t z (p r z y j ę t e g o z a s k o ń c z o n y) u k ł a d u z u p e ł n e g o f o r m φ_i.

Posiadamy już obecnie elegancką konstrukcyę dla form piątego i szóstego rzędu[21].

Ponieważ w tych wszystkich dowodach formy pierwotne są wypisane w postaci symbolicznej, to i tamte przyjmuje się za „o g ó l n e" swego rodzaju, t. j. za takie, których spółczynniki są uważane za zmienne niezależne. Toż samo stosuje się i do wykonywanych podstawień.

Pozyskane wyniki można zastosować bezpośrednio do form dwójkowych, zawierających więcej szeregów zmiennych (jednorodnych), w założeniu, że te ostatnie poddano tym samym podstawieniom, gdyż według zasady rozwinięcia na szereg należy tylko oznaczyć układ zupełny, należący do zwiększonej liczby form pierwotnych, które zawierają tylko jeden pojedyńczy (i ten sam) szereg zmiennych.

P e a n o w r. 1881[22] pokazał, że nie uciekając się do nowych środków pomocniczych, można dowód skończoności przeprowadzić i dla przypadku ogólniejszego, w którym podstawienia, mające być wykonanemi na różnych szeregach zmiennych x_1, x_2; y_1, y_2; ..., są całkowicie lub częściowo n i e z a l e ż n e m i. Niechaj dane formy pierwotne $f, g, \ldots$, rozwinięte według x_1, x_2 mają za spółczynniki formy: $f_i, g_k, \ldots$ Przyjmujemy, że te ostatnie formy (w których liczba szeregów ilości zmiennych jest o 1 mniejsza) mają podstawę i mamy to samo okazać dla form pierwotnych $f, g, \ldots$ Niechaj F będzie formą niezmienniczą form $f, g, \ldots$, która będąc uporządkowaną według x_1, x_2, ma spółczynniki F_i; wtedy nie trudno poznać, że spółczynniki F_i należą do układu form $f_i, g_k, \ldots$ Zastosujmy teraz do każdej z form pierwotnych $f, g, \ldots$ proces biegunowy $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2$ dostateczną liczbę razy; wtedy powstanie układ utworów: $f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots$; $g, \Delta g, \Delta^2 g$; ..., mogący c a ł k o w i c i e z a s t ą p i ć układ form $f_i, g_k, \ldots$, w ten sposób, że każda forma zasadnicza P tego ostatniego układu służy za model określonej formy zasadniczej P' pierwszego układu. Przy zwykłem rozwinięciu formy P' według potęg różnicy $x_1 y_2 - x_2 y_1$, spółczynniki będą biegunowemi form $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ Porównanie form P z formami P' wskaże, że i ogół form $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ posiada podstawę. Ponieważ wreszcie w sensie form dwójkowych, t. j. względnie do x_1, x_2, forma F daje się przedstawić jako forma niezmiennicza form $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, przeto okazuje się, że i układ form F jest skończony.

Twierdzenie to znajduje ważne zastosowanie do tak nazwanych „o d p o w i e d n i o ś c i"[23].

W ostatnich czasach G o r d a n doszedł bezpośrednio do tego samego rezultatu przez wprowadzenie ważnego pojęcia u k ł a d u f o r m „r o zszerzonego"[24]). Aby otrzymać ten układ dla najprostszego przypadku jednej formy (dwójkowej) f, wyobraźmy sobie już utworzony układ zupełny dowolnej liczby form $f_1, f_2, \ldots$, wszystkich rzędu równego rzędowi formy f, a mianowicie w postaci nasunięć formy f na siebie (dostateczną liczbę razy powtórzonych). Stąd, przez proste opuszczenie wskaźników $i, k, \ldots$ powstaje układ rozszerzony formy f. Na podstawie swego powstania, układ ten może służyć bezpośrednio do wyprowadzenia układów jednoczesnych szeregu pierwotnych form dwójkowych, tak z jednym szeregiem, jak i z większą liczbą szeregów ilości zmiennych, podległych podstawieniom niezależnym. Tak np. dla form kwadratowych z dwoma niespółpodstawieniowemi szeregami zmiennych x_1, x_2, y_1, y_2 można obliczyć i wypisać układ zupełny z 38 utworów złożony.

W innym kierunku Peano (1882)[25]) rozwinął tę teoryę. Według Clebscha[26]) niezmienniki i spółzmienniki szeregu form liniowych i kwadratowych posiadają tę własność, że mogą być podzielone na „typy" tak, że indywidua jednego i tego samego typu można otrzymywać jedne z drugich wyłącznie za pomocą procesu Aronholdowego, t. j. przez biegunowanie względem spółczynników. Liczba typów pozostaje przytem skończoną przy jakiejkolwiek liczbie form danych. Otoż Peano uogólnia tę własność dla szeregów form dowolnego (jednego) stopnia. Dowód jego opiera się głównie na tem, że według pewnego twierdzenia Capelli'ego[27]) jakakolwiek funkcya jednorodna całkowita $Fn+1$ szeregów o $n+1$ spółczynnikach zmiennych, należących do $n+1$ form n-go stopnia, daje się rozwinąć według potęg ich wyznacznika, przyczem występują czynniki, które są biegunowemi form, wyprowadzonych z formy F zawierają o jeden mniej układów spółczynnikowych. Rachunek ten, przeprowadzony w przypadku form sześciennych, wykazuje dziesięć typów; przytem podano sposób, w jaki według tych typów rozkładają się formy układu zupełnego.

Doszliśmy już do punktu zwrotnego w rozwoju teoryi. Gdy w dotychczasowych dowodach skończoności miano zarazem na widoku istotne tworzenie odpowiedniego układu zupełnego, to obecnie ten bardziej praktyczny punkt widzenia zostawia się na uboczu, a główną uwagę zwraca się na czystą teoryę skończoności[28]). Z tą zmianą wiąże się okoliczność, że nowe metody mają wybitny charakter niesymboliczny, przez co wyraźniej odznacza się ich moment pojęciowy. Pierwszą pobudkę w tym kierunku dał podany przez Mertensa[29]) dowód skończoności układu form dwójkowych z jednym szeregiem zmiennych. Ponieważ szereg form liniowych posiada zawsze układ zupełny form pochodnych, to wymagany dowód można przeprowadzić dla dowolnego szeregu form początkowych $(g, f, f', \ldots)$, przy przyjęciu, że twierdzenie, w mowie będące, jest prawdziwem dla szeregu $(f, f', f'', \ldots)$, w którym rząd formy f jest o jedność niższy od rzędu formy g. Najprzód z powyższego założenia wypływa wniosek, że i szereg $(p, f, f', f'', \ldots)$, rozszerzony za pomocą formy liniowej p, posiada układ zupełny. W tym ostatnim układzie zawiera się jako „podukład" (Untersystem) ogół wszystkich utworów, osiągających ten sam stopień w spółczynnikach form p i f. Albowiem utwory te oznacza się za pomocą ogółu rozwiązań dodatnich pewnego równania diofantowego[30]); rozwiązania te można zresztą utworzyć liniowo ze skończonej liczby z pomiędzy nich, przy pomocy spółczynników dodatnich (i całkowitych). Jeżeli wyobrazimy sobie formę f rozszczepioną na jej czynniki liniowe $q, r, s, \ldots$ i zastąpimy formę liniową p kolejno formami $q, r, s, \ldots$, wtedy przez kombinowanie symetryczne powstałych w ten sposób układów zupełnych, otrzymamy nowy układ, zupełny należący do form pierwotnych:

$$(p, q, r, s, \ldots; f', f'', \ldots)$$

i zarazem symetryczny względem spółczynników form $p, q, r, s, \ldots$ Dość tylko wprowadzić znanym sposobem spółczynniki iloczynu g form $p, q, r, s, \ldots$, aby otrzymać żądany układ zupełny szeregu $(g, f', f'', \ldots)$.

Hilbert[31]), zachowując myśl zasadniczą powyższego dowodu, uczynił go bardziej przejrzystym.

Niechaj będzie forma pierwotna $f = f(x, y)$ rzędu n-go, rozpadająca się na czynniki liniowe $\alpha_i x + \beta_i y$. Niezmiennik J (w znaczeniu ściślejszem) formy f jest agregatem symetrycznym różnic pierwiastków równania $f = 0$, a więc po sprowadzeniu go do postaci jednorodnej, jest iloczynem utworów:

$$\omega = (1, 2)^{e_{12}} . (1, 3)^{e_{13}} . (2, 3)^{e_{23}} \; \ldots \; (n-1, n)^{e_{n-1,n}} = \prod_{k,l} (k, l)^{e_{k,l}},$$

gdzie (k, l) oznacza różnicę $\alpha_k \beta_l - \alpha_l \beta_k$, $e_{k,l} = e_{l,k}$ jest wykładnikiem całkowitym dodatnim i gdzie każda z liczb $1, 2, \ldots, n$ zachodzi jednakową liczbę razy. Ostatnio wspomniany warunek zamienia się na układ równań liniowych diofantowych, mianowicie:

$$e_{12} + e_{12} + \ldots + e_{1n} = e_{21} + e_{23} + \ldots + e_{2n} = \ldots$$
$$= e_{n,1} + e_{n,2} + \ldots + e_{n-1,n}.$$

Wszystkie rozwiązania dodatnie tego układu otrzymać znów można liniowo ze skończonej liczby m z pomiędzy nich, przy pomocy spółczynników dodatnich całkowitych p, a mianowicie:

$$e_{k,l} = p_1 e_{k,l}^{(1)} + p_2 e_{k,l}^{(2)} + \ldots + p_m e_{k,l}^{(m)}.$$

Jeżeli więc ω_r oznacza niezmiennik (niewymierny) $\omega_r = \prod_{k,l} (k, l)^{e^{(r)}_{k,l}}$, to ω_r czyni zadość równaniu wymiernemu stopnia $n!$ i na zasadzie znanego twierdzenia z teoryi równań algebraicznych, jakakolwiek potęga niezmiennika ω_r np. p_r-ta może być przedstawiona jako forma liniowa, jednorodna potęg 0-ej, 1-ej, ..., $(n-1)$-ej ilości ω_r, o spółczynnikach, które są funkcyami całkowitemi wymiernemi odpowiednich sum potęgowych $\omega_r + \dots$, $\omega_r^2 + \dots$, $\omega_r^{n!} + \dots$ Uwzględniając powyższe wyrażenia ilości $e_{k,l}$ przez wybrane ilości $e_{k,l}^{(r)}$, można niezmiennikowi J nadać postać sumy symetrycznej:

$$J = \Sigma\, \omega_1^{p_1},\ \omega_2^{p_2}, \dots, \omega_m^{p_m}.$$

Podstawiając tu podane wartości potęg $\omega_r^{p_r}$, poznamy bezpośrednio, że J jest funkcyą całkowitą skończonej liczby analogicznie zbudowanych niezmienników, *w których żaden z wykładników ilości* ω_r *nie może przekroczyć* liczby n! Uogólnienie tej metody dla niezmienników szeregu form pierwotnych $f, \varphi, \dots$ uskutecznia się za pomocą łatwych do zrozumienia modyfikacyj; w szczególności wynika stąd, że szereg form niezmienników i spółzmienników posiada układ zupełny.

W pracy zasadniczej z r. 1890 wykazał Hilbert[32]) ogólnie—*i przy wyłącznem użyciu procesów wymiernych*[33])—skończoność układu niezmienników, pochodzącego od szeregu zupełnie dowolnych (a nawet i zniekształtnionych w jakikolwiek sposób) form o n zmiennych. Rezultat ten osiągnął, oddzieliwszy jądro pytania od ściślejszej dziedziny teoryi niezmienników[34]) i ugruntowawszy je jako własność podstawową nieskończonej liczby układów form algebraicznych.

Dajmy sobie z góry prawo[35]), według którego postępuje nieprzerwany szereg form $F_1, F_2, \dots$, o n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Rzędy form F i ich spółzmienniki nie mają podlegać żadnym ograniczeniom, spółczynniki zaś niechaj należą do pewnego obszaru wymierności R. „Można wtedy z szeregu form F wybrać zawsze skończoną liczbę m takich form $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_m}$, że każda forma F_s szeregu jest ich kombinacyą liniową, t. j., że jest:

$$F_s = A_{s,1}\, F_{i_1} + A_{s_2}\, F_{i_2} + \dots + A_{s_m}\, F_{i_m},$$

gdzie spółczynniki A są także formami ilości x o spółczynnikach, należących do tego samego obszaru wymierności R."

Oczywiście, należy spółczynniki A wybrać w ten sposób, aby suma iloczynów była znowu formą jednorodną co do zmiennych x.

Wybierzmy mianowicie z danego szeregu dowolne indywiduum F wymiaru r względem ilości x. Możliwem jest założenie (w razie potrzeby osiągnąć się to daje przez odpowiednie podstawienie), że spółczynnik ilości x_n^r w formie F nie znika. Wtedy można najprzód sposobem znanym zniżyć stopień ilości x_n w każdej z form F_s, tak aby był mniejszy od r; dość w tym celu od formy F_s odjąć formę F, pomnożoną przez formę pomocniczą B_s. Przez to otrzymuje F_s postać:

$$F_s = B_s\, F + g_{s_1}\, x_n^{r-1} + g_{s_2}\, x_n^{r-2} + \dots + g_{s_r},$$

gdzie formy g po stronie prawej zależą tylko od zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, zresztą zaś mogą być dowolnie wysokiego wymiaru. Jeżeli więc przyjmiemy, że twierdzenie w mowie będące jest już dowiedzione dla form o $n-1$ zmiennych i zastosujemy je do kolumny spółczynników g_{s_1}[36]), to będzie możliwem z powyższego przedstawienia form F wydzielić skończoną ich liczbę μ (np. dla $s = 1, 2, \dots, \mu$) tak, aby po pomnożeniu obustronnem przez dobrane formy pomocnicze ilości $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, przez dodanie i przez odjęcie wreszcie od wyrażenia każdej dalszej formy F_s, ta ostatnia okazała się złożoną liniowo z form $F, F_1, F_2, \dots, F_\mu$ i innej jeszcze formy, która co do zmiennej x_n dochodzi najwyżej do stopnia $r-2$.

Do kolumny spółczynników najwyższej potęgi ilości x_n tych nowych przedstawień form $F_{\mu+1}, F_{\mu+2}, \dots$ zastosujmy ponownie to samo postępowanie i t. d.; jest rzeczą jasną[37]), że najwyżej po r krokach dojdziemy do skończonej liczby m form F, które stanowią szukaną podstawę szeregu pierwotnego. Pozostaje jeszcze bezpośrednie załatwienie przypadku najprostszego $n = 1$. Tu wyrazami szeregu są, po za czynnikami stałemi, potęgi całkowite dodatnie zmiennej x_1, a jest rzeczą widoczną, że wtedy wszystkie wyrazy szeregu muszą być podzielne przez x_1 z wykładnikiem najmniejszym.

Przedstawiony tu dowód naszego twierdzenia pomocniczego[38]) pozwala nam poznać zarazem, że spółczynniki form mnożących A, należą do tego samego obszaru wymierności, co i spółczynniki formy F.

Aby przejść do zastosowania do teoryi niezmienników, przyjmijmy, że mamy do czynienia z pojedyńczą pierwotną formą trójkową f. Układ niezmienników całkowitych wymiernych $i_1, i_2, \dots$ tej formy f daje się łatwo uporządkować na szereg[39]), do którego stosuje się twierdzenie powyższe. Jeżeli $A_1, A_2, \dots, A_m$ oznaczają pewne funkcye pomocnicze całkowite i wymierne formy f, to jakikolwiek niezmiennik i formy f można wyrazić liniowo przez m takich niezmienników w ten sposób:

$$i = A_1\, i_1 + A_2\, i_2 + \dots + A_m\, i_m.$$

Drugi krok stanowi zastąpienie form A przez niezmienniki $J_1, J_2, \dots, J_m$, które znowu są funkcyami całkowitemi niezmienników $i_1, i_2, \dots, i_m$. Jeżeli $i, i_1, i_2, \dots, i_m$ są odpowiednio stopnia $r, r_1, r_2, \dots, r_m$ względem spółczynników, to forma A_s może być uważa za formę jednorodną stopnia $r-r_s$ względem tych spółczynników. Do formy f zastosujmy dowolne podstawienie T zmiennych o spółczynnikach a_{ikl} i wyznaczniku a. Jeżeli przez f_a oznaczymy spółczynniki przekształconej formy pierwotnej f, przez $p, p_1, p_2, \dots, p_m$ wagi niezmienników $i, i_1, i_2, \dots, i_m$, to na podstawie własności zasadniczej niezmienników równanie powyższe zamienia się na następujące:

$$a^p\, i = a^{p_1}\, A_1\, (f_a)\, i_1 + a^{p_2}\, A_2\, (f_a)\, i_2 + \dots + a^{p_m}\, A_m\, (f_a)\, i_m.$$

Stosujemy tu w dalszym ciągu inne twierdzenie pomocnicze (w ogólniejszej postaci), dowiedzione przez Gordana i Mertensa[40]). Niechaj $A(f_a)$ oznacza wogóle dowolną formę jednorodną, izobaryczną, należącą do form f_a o wadze g; q liczbę całkowitą dodatnią (z włączeniem zera), Ω_a — Cayley'owski proces różniczkowania:

$$\Omega_a = \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}\,\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{23}\,\partial a_{32}} \pm \ldots - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\,\partial a_{22}\,\partial a_{31}}.$$

„Jeżeli iloczyn $a^q\,A(f_a)$ poddamy procesowi Ω_a tyle razy, np. p razy, póki nie usuną się zupełnie spółczynniki podstawienia, to otrzymamy nowy niezmiennik J formy f, o wadze $g = p - q$."

Wykonanie p-krotne procesu Ω_a po obu stronach tożsamości dla $a^p i$ sprawia, że po stronie lewej odtwarza się i z czynnikiem dodatnim całkowitym i nieznikającym, po stronie zaś prawej wszystkie czynniki form $i_1, i_2, \ldots, i_m$ przechodzą na niezmienniki formy f. Po podzieleniu przez tamten czynnik otrzymujemy przedstawienie postaci:

$$i = J_1\, i_1 + J_2\, i_2 + \ldots + J_m\, i_m,$$

w którem stopnie i wagi niezmienników J są niższe niż dla niezmiennika pierwotnego i. Wystarcza przenieść toż samo na niezmienniki J i t. d., aby po skończonej liczbie działań dojść do żądanego celu.

Podane tu rozważania zastosować można prawie wprost do przypadku n zmiennych, jakoteż do układu form pierwotnych, do spółzmienników, przeciwzmienników, kombinantów i t. d. Dalej podlega prawu głównemu i ogólniejszy przypadek większej liczby szeregów o równej lub różnej liczbie zmiennych, poddanych dowolnym jednakowym lub różnym podstawieniom. Nawet i wtedy, gdy stosowane podstawienia stanowią tylko część (podgrupę) grupy wszystkich podstawień, metoda dowodzenia pozostaje w swojej mocy dopóty, dopóki z dwóch podstawień tego samego typu daje się złożyć typ trzeci w ten sposób, iż parametry nowe są funkcyami dwuliniowemi dawnych i jeżeli prócz tego istnieje proces różniczkowy, analogiczny do procesu Ω.

Wpływ twierdzenia pomocniczego o obszarze całkowitości nieskończonego szeregu form na naukę o połączeniach niezmienniczych sięga jeszcze dalej. By znieść ograniczenie, jakie sprawia jednorodność, przyjmijmy najprzód, że jedna z n zmiennych jest jednością. Pomiędzy niezmiennikami jednej lub więcej form pierwotnych zachodzi tedy nieograniczona liczba związków, spełniających się tożsamościowo pomiędzy spółczynnikami pierwotnemi. Strony lewe (syzyganty) tych „syzygij"[41]) można uważać za formy niejednorodne, których zmienne są właśnie układem zupełnym m niezmienników $i_1, i_2, \ldots, i_m$. A więc i nieskończony układ syzygantów posiada podstawę skończoną. Syzyganty znów łączą się znów ze sobą za pomocą nieskończonej mnogości związków, spełniających się tożsamościowo względem $i_1, i_2, \ldots, i_m$. A więc i nieskończony układ syzygantów posiada podstawę skończoną. Strony lewe tych „syzygantów drugiego rodzaju" mają więc także podstawę skończoną i t. d.

Za pomocą dość zmudnego zresztą postępowania, w którem twierdzenie pomocnicze za każdym razem na nowo się stosuje, stwierdził Hilbert fakt ważny, że proces kolejnego tworzenia syzygij przerywa się po skończonej liczbie kroków, najwyżej zaś po m krokach[42]). Dopiero tworzenie wszystkich podstaw nietylko dla niezmienników pierwotnych, ale i dla syzygantów kolejnych rzędów, pozwala bliżej wniknąć w zupełności[43]) w strukturę niezmienników całkowitych wymiernych, pochodzących od danego utworu algebraicznego (l. c. str. 534). W najnowszym czasie[44]) Hilbert wysnuł jeszcze ze swych ogólnych twierdzeń o skończoności dalsze konsekwencye, zbliżające nas bardziej do pytania, za pomocą jakich zadań pomocnicznych można w istocie otrzymać odpowiednie układy zupełne.

Istotną pomoc w tym względzie daje twierdzenie, że z rozmaitości niezmienników utworu algebraicznego można wydzielić zawsze skończoną liczbę σ niezmienników, algebraicznie niezależnych $J_1, J_2, \ldots, J_\sigma$, w ten sposób, że wszystkie pozostałe będą funkcyami „całkowitemi algebraicznemi" tamtych, i tem samem znikają, jeżeli ilości J znikają. Odwrotnie, ta własność (i algebraiczna niezależność) charakteryzuje w zupełności niezmienniki J.

Pyzjmijmy, że znaleźliśmy taki układ σ niezmiennikow; stąd wnioskując wstecz, można, według twierdzeń Kroneckera[45]), uzasadnić na nowo nietylko skończoność całego obszaru niezmienników, lecz zarazem podać określoną drogę arytmetyczną do znalezienia ich podstawy. Podstawa ta składa się z niezmienników J, oraz z tych niezmienników i, które stanowią podstawę „ciała" algebraicznego, określonego przez niezmienniki J.

Przedewszystkiem idzie tu o oznaczenie „stopnia" g tego ciała.

Dla formy pierwotnej dwójkowej f rzędu n-go dał odpowiedź na to pytanie Hilbert[46]). Tu liczba σ równa się $n-2$; szukana liczba g jest prostą funkcyą teoretyczno-liczbową, która, gdy odwrócimy uwagę od n, zależy wyłącznie od stopni niezmienników $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ (względem spółczynników). Zastosowania, poczynione w celu otrzymania form z pewnemi z góry danemi niezmiennikami, pomijamy[47]).

W przypadku formy pierwotnej dwójkowej f, można za pomocą tworzenia rugowników otrzymać układ niezmienników, przez które wszystkie inne niezmienniki dają się wyrazić całkowicie i algebraicznie. Niechaj np. rząd n formy f będzie nieparzysty; utwórzmy spółzmienniki drugiego stopnia $F_1, F_2, \ldots, F_{\frac{1}{2}(n-1)}$ i z odpowiednio dobranych potęg form f i F zbudujmy przy pomocy dowolnych parametrów u, v dwie kombinacye liniowe jednorodne U, V. Znikanie tożsamościowe rugownika form U i V jest równożne μ równaniom $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \ldots, J_\mu = 0$. Ilości J stanowią żądany układ niezmienników. Toż samo stosuje się i do rzędu parzystego n.

Od tych ilości J, przy pomocy procesu Aronholda, dochodzimy do analogicznego układu niezmienników jednoczesnych. I dla form o większej liczbie zmiennych można za pomocą skończonej liczby procesów wymiernych, z góry danych, otrzymać taki układ niezmienników, których znikanie pociąga za sobą znikanie wszystkich pozostałych. Do tego potrzebne jest kryteryum, pozwalające rozstrzygnąć, czy forma dana ze spółczynnikami liczbowemi posiada niezmiennik różny od zera. Ostatnia okoliczność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik podstawienia jest funkcyą całkowitą algebraiczną spółczynników formy liniowo-przekształconej. To daje środek otrzymania zupełnych układów niezmienników i granic wyższych[48]) dla ich liczby i wagi (zależnych tylko od n).

---

b) *Szczegóły o układach zupełnych.*

Powiemy krótko o układach zupełnych, jakie dotąd obliczone in extenso dla danych form pierwotnych. Z istoty stosowanych metod tworzenia, uzasadnionych głównie przez Clebscha i Gordana, wynika, że liczby odnośnych form mają cechę granic wyższych; w rzeczy samej późniejsza rewizya[49]) wykazała niejednokrotnie, że niektóre z dawniej otrzymanych układów były zbytecznemi, t. j. dały się sprowadzić do innych,

Dopiero porównanie z angielskim kierunkiem badań[50]) wskaże, której z tych liczb należy przypisać dokładność bezwzględną.

Zaczynamy od pojedyńczej formy dwójkowej f_n. Dawniej już Cayley i Sylvester rozwiązali zagadnienie dla $n = 2, 3, 4$; Gordanowi zaś w r. 1868 udało się dopiero rozwiązać je dla form f_5 i f_6[51]). Dowód zupełności otrzymanego układu zupełnego o 23 i odpowiednio 26 „formach zasadniczych", mógł Gordan podać w ten sposób, że rozszerzenie tego dowodu na układ dowolnej formy f_n nie wymagało już istotnie nowych środków pomocniczych. Przy pomocy uproszczonego przedstawienia „programu" Gordana zbudował v. Gall in concreto układ zupełny dla formy f_9[52]), później (przedstawiający więcej trudności) układ dla formy f_7[53]), korzystając zręcznie przy tym rachunku z pewnych syzygij celem wydzielenia form zbytecznych.

Co się tyczy jednoczesnych układów dwóch form dwójkowych f_n, to traktowanie przypadków (2, 2), (2, 3), (3, 3) zawdzięczamy Salmonowi i Clebschowi; układ (3, 4) znajduje się u Gundelfingera[54]); (2, 5) u Wintera[55]); (2, 6) u v. Galla[56]).

Studyum systematyczne tym układom poświęcił Gordan[57]) w pracy, na której końcu znajduje się tablica wszystkich przypadków, w których żadna z obu form pierwotnych nie jest rzędu wyższego nad czwarty.

Inny wywód układu (4, 4), zgodny pod względem wyników z wywodem Gordana, zawdzięczamy Bertini'emu[58]).

Dla układów jednoczesnych więcej niż dwóch form dwójkowych nie posunięto tej rzeczy o wiele więcej, niż to uczynił Clebsch[59]), który rozstrzygnął przypadek dowolnego szeregu form liniowych i kwadratowych. Perrin[60]) zbadał bliżej układ czterech form, z których dwie są liniowe, dwie zaś kwadratowe.

Co się tyczy form trójkowych C_n, to pierwszy przypadek takiej pojedyńczej formy, przedstawiający istotne trudności, mianowicie przypadek $n = 3$, załatwił Gordan[61]). Do utworów, otrzymanych dawniej przez Aronholda, Cayley'a, Hermite'a, Brioschi'ego, trzeba było dodać stosunkowo niewiele; dla zapewnienia się wszakże o zupełności otrzymanego układu (razem 34 form) Gordan w sposób oryginalny przeprowadził rozszerzenie metod symbolicznych z dziedziny dwójkowej na dziedzinę trójkową.

Dopiero później Mertens[62]) otrzymał ten sam rezultat na drodze niesymbolicznej, używając jedynie procesu Ω.

W przypadku $n = 4$ bogactwo występujących form jest tak wielkie, że Gordan wołał ograniczyć się na typie szczególnym[63]) (z okoliczności równań 7-go rzędu z 168 podstawieniami na same siebie), który można scharakteryzować za pomocą zachodzącej tożsamościowo pewnej prostej równości spółzmienniczej.

Z utworów, należących do ogólnej formy C_4, obliczył Maisano[64]) wszystkie, dochodzące aż do stopnia 5-go włącznie.

Układ dwóch C_2 został podany także najprzód przez Gordana[65]), następnie w związku ze wspomnianemi specyalnemi C_4. Niedawno zaś Perrin[66]) zbadał bliżej wzajemny związek algebraiczny i geometryczny pomiędzy formami tego układu.

Znajomość układu zupełnego trzech C_2 zawdzięczamy Ciamberlini'emu[67]).

W dziedzinie czwórkowej, oprócz zmiennych x formy $F_n(x)$ i ich przeciwpodstawieniowych u, należy uwzględnić jeszcze wyznaczniki dwuszeregowe, tworzące się z dwóch szeregów zmiennych spółpodstawieniowych x, y. Za pomocą odpowiedniej modyfikacyi procesu Ω udało się w ostatnim czasie Mertensowi[68]) znaleść dla F_2 układ zupełny 20 form i zarazem podać drogę, na jakiej, za pomocą łatwo przewidzieć się dających procesów różniczkowych, można z układów pojedyńczych dla form F_2 zbudować układ jednoczesny dla tychże form. Za pomocą podobnych środków badał Mertens i „układy zerowe" (Nullsysteme)[69], t. j. formy znakozmienne dwuliniowe o dwóch spółpodstawieniowych czwórkowych szeregach zmiennych x, y, do których można dołączyć dowolnie wiele form liniowych względem x lub u. Dla pięciu (i mniej) układów zerowych wynik daje się ugrupować w sposób przejrzysty.

Co się wreszcie tyczy form o większej liczbie niekongruentnych szeregów zmiennych, to już wyżej wspomnieliśmy o układzie zupełnym dla formy pierwotnej dwójkowej kwadratowo-kwadratowej, otrzymanym przez Study'ego i Gordana[70]).

W dziedzinie trójkowej tylko przypadek formy liniowej względem dwóch spółpodstawieniowych szeregów x, u rozpatrzyli Clebsch i Gordan[71]). Analogiczne zadanie w dziedzinie czwórkowej zostało niedawno posunięte przez Mertensa[72]) o tyle, że potrzeba jeszcze pewnych kombinacyj jego rozmaitych form grupowych, aby pozyskać układ zupełny.

Nakoniec należy wspomnieć jeszcze o pewnych podukładach zupełnych (t. j. stanowiących część składową ogólnych układów zupełnych). Odwracając uwagę od takich układów, których istnienie jest odrazu widocznem[73]), możemy ograniczyć się na przytoczeniu dwóch zjawisk. Pierwsze należy do gatunku kombinantów dwójkowych, które już w r. 1872 Gordan[74]) rozważał jako układ zupełny formy pojedyńczej w większej liczbie (spółpodstawieniowych) szeregów zmiennych. Najprostszym przypadkiem, wymagającym oddzielnego badania, jest przypadek dwóch form f_4. Według metody Gordana, otrzymanie zupełnego układu kombinantów sprowadza się do znalezienia zwykłego układu jednoczesnego dwóch „spółzmienników elementarnych" stopnia 6-go lub odpowiednio 2-go, związanych ze sobą pewnym związkiem tożsamościowym. Odnośny rachunek wykonał Stephanos[75]).

Wiltheiss, wychodząc z teoryi funkcyj hypereliptycznych, doszedł do godnego uwagi podukładu formy dwójkowej f_6[76]). Niechaj A_i będą spółczynnikami, x_1, x_2 — zmiennemi formy f_6; niechaj dalej φ_6 oznacza pewien spółzmiennik 6-go rzędu i 2-go stopnia, w którego spółczynnikach B_i zachodzą jeszcze w rzędzie drugim dwie zmienne y_1, y_2, spółpodstawieniowe ze zmiennemi x_1, x_2. Jeżeli przez $\underset{y=x}{\delta}$ rozumieć będziemy proces Aronholdowy $\Sigma B_i \dfrac{\partial}{\partial A_i}$, wraz z następnem przyrównaniem ilości x i y, to można wykazać istnienie układu 9 spółzmienników, które przez zastosowanie działania δ dają znowu spółzmienniki układu.

Niżej uwzględnimy badanie, odnoszące się do zupełnych układów form zasadniczych, związane z tak nazwanemi „funkcyami tworzącemi" i także badania, dotyczące zupełnych układów syzygij. Układy zupełne, związane z grupami podstawień liniowych, już omówiliśmy w rozdziale I, A. b.

c). *Układy stowarzyszone i przedstawienie typowe.*

Należy obecnie omówić dążenia, mające na celu objęcie rozmaitośc utworów niezmienniczych, powstających z danych form pierwotnych, w jednym obszarze wymierności z podstawą skończoną, zamiast w jednym obszarze całkowitości[77]).

Początek tym dążeniom dał Hermite[78]), który już w r. 1852 pokazał, w jaki sposób z niezmienników i spółzmienników formy dwójkowej $f_n(x_1, x_2) = f$ wydzielić można rozmaitemi sposobami skończoną ich liczbę tak, aby wszystkie pozostałe zależały od poprzednich wymiernie. Jeżeli chcemy mieć najprostsze takie przedstawienie, przy którem wszystkie indywidua podstawy są od siebie algebraicznie niezależne, wprowadzamy nowe zmienne ξ, η o wyznaczniku $f_n(x_1, x_2)$ za pomocą „spółzmiennika":

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \qquad \eta = x_1 y_2 - x_2 y_1 ,$$

gdzie zmienne pomocnicze y są spółpodstawieniowemi ze zmiennemi x. Wtedy forma $f_n(y_1, y_2)$, pomnożona przez $(n-1)$-ą potęgę formy $f_n(x_1, x_2)$ przechodzi na nową formę $\Phi_n(\xi, \eta)$, której pierwszy spółczynnik jest równy 1, drugi 0, pozostałe zaś $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ razem z $f_n(x_1, x_2)$ stanowią żądaną podstawę, albo mówiąc z Hermitem, przedstawiającą „układ stowarzyszony" z formą f.

Aby wyrazić jakikolwiek spółzmiennik formy f za pomocą form $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, f$, dość w jej wyrazie głównym zastąpić spółczynniki formy f przez spółczynniki formy Φ i następnie przy pomocy formy f uczynić je jednorodnemi, przez co potęga formy f wystąpi w mianowniku.

Można wszakże, jak to wypowiedział Clebsch[79]) w r. 1870, sprowadzić formy stowarzyszone do jeszcze prostszych, a mianowicie do spółzmienników ψ stopnia 2-go formy f i do wyznaczników funkcyjnych form χ i f (t. j. spółzmienników 3-go stopnia formy f). Formy φ za pomocą wzorów zwrotnych dają się wyrazić wymiernie przez formy ψ, χ, f, tak że tylko potęga formy f może występować jako mianownik, który zresztą w przy padkach najniższych, obliczonych przez Clebscha, $n=2, 3, \ldots, 7$, sprowadza się do jedności.

W roku następnym Gundelfinger[80]) nietylko udowodnił na drodze symbolicznej twierdzenie Clebscha, ale prócz tego uzasadnił ogólnie, że formy φ są funkcyami całkowitemi wymiernemi form ψ, χ, f. Jednocześnie rozszerzył twierdzenie do układu jednoczesnego dwóch form f_n i φ_m. Niechaj n będzie niewiększa z dwu liczb m i n, wtedy do powyższych form ψ, χ, f dołącza się jeszcze m nasunięć formy f na formę φ. Sylvester[81]), wychodząc z wyrazów głównych niezmienników, rozszerzył ten rezultat na dowolny szereg pierwotnych form dwójkowych.

Ciekawe zastosowanie form stowarzyszonych podał Kohn[82]). Wprowadziwszy zamiast form φ ich równoważniki niewymierne, mianowicie pierwiastki równania $\Phi_n\left(\frac{\xi}{\eta}, 1\right)=0$, podległe przejrzystemu prawu tworzenia, potrafił określić podzielność przez potęgę wyróżnika formy pierwotnej rugowników i wyróżników, do spółzmienników się odnoszących. Łatwo już wtedy zastosować tę metodę do form pierwotnych jednoczesnych.

Wyrazy główne form stowarzyszonych, wprowadzonych przez Clebscha, posłużyły Perrinowi[83]) do uogólnienia twierdzenia głównego dla form pierwotnych F z p zmiennemi $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Uważajmy formę F, uporządkowaną według potęg ilości x_1:

$$F = a\, x_1{}^n + \binom{n}{1} F_1\, x_1{}^{n-1} + \binom{n}{2} F_2\, x_1{}^{n-2} + \ldots + F_n,$$

za formę dwójkową ze zmiennemi niejednorodnemi x_1 i utwórzmy wyrazy główne $n-1$ form $\psi\,(x_2, x_3, \ldots, x_p)$, $\chi\,(x_2, x_3, \ldots, x_p)$, t. j.:

$$v_2 = a\, F_2 - F_1{}^2,\quad v_3 = a^2 F_3 - 3a\, F_2\, F_1 + 2F_1{}^3,$$
$$v_4 = a\, F_4 - 4\, F_3\, F_1 + 3\, F_2{}^2, \ldots;$$

wtedy każdy niezmiennik formy F lub odpowiednio spółczynnik najwyższej potęgi ilości x_1 w każdym spółczynniku formy F, po pomnożeniu przez odpowiednio dobraną potęgę ilości a, staje się funkcyą całkowitą ilości a i spółzmienników układu wyrazów v (i odwrotnie). Przy przejściu od wyrazów głównych do samych utworów, zamiast a wchodzi sama forma F.

Jeżeli chcemy uwzględnić i te formy, które zależą także od zmiennych u, spółpodstawieniowych ze zmiennemi x, to należy dołączyć jeszcze prostą formę pomocniczą, liniową względem u, oraz względem $x_2, x_3, \ldots, x_p$.

Toż samo zachodzi i dla szeregów form pierwotnych F. W sposób bardziej bezpośredni i ogólny traktował toż samo zagadnienie Forsyth[84]), który przeprowadził je całkowicie dla pewnej liczby pojedyńczych przypadków w dziedzinie trójkowej i czwórkowej.

Niechaj $F = F_n\,(x_1, x_2, x_3)$ będzie formą trójkową i, jak wyżej, uporządkowaną według potęg ilości x_1; niechaj $\Phi\,(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^{m};\ \overbrace{u_1, u_2, u_3}^{p})$ oznacza pewien utwór niezmienniczy („ternaryant“) formy F, którego rozwinięcie, według malejących potęg ilości x_1 i u_1, rozpoczyna się od wyrazu $\Phi_{00}\, x_1{}^m\, u_1{}^p$. Wtedy spółczynnik główny Φ_{00} formy Φ czyni zadość dwóm charakterystycznym (liniowym, cząstkowym) równaniom różniczkowym; „są one zarazem równaniami charakterystycznemi dla wyrazów głównych spółzmienników szeregu form (dwójkowych) $F_1, F_2, \ldots, F_n$“.

Po za spółzmiennikiem tożsamościowym u_x układ ternaryantów stowarzyszonych z formą F składa się z $\frac{1}{2}(n+4)(n-1)$ indywiduów. Jeżeli zaś forma pierwotna F zależy, oprócz od ilości x, jeszcze od ilości u, to liczba tych indywiduów dochodzi do $\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n'+1)(n'+2)-3$, gdzie n' oznacza rząd formy F względem zmiennych u.

Przy czterech[85]) zmiennych x rozważa się podobnie wyraz główny Φ_{000} „kwaternaryantu“, uporządkowanego według potęg zmiennych x_1, u_1, p_1, gdzie p_1 jest jedną z sześciu zmiennych pośrednich $p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & x_k \end{vmatrix}$; Φ_{000} czyni zadość sześciu równaniom charakterystycznym.

Początkową metodę Hermite'a, polegającą na uzasadnieniu układów stowarzyszonych na przekształceniach (liniowych) pierwotnych form dwójkowych, wkrótce rozszerzył Brioschi[86]) na formy o większej liczbie zmiennych. Istotne przeprowadzenie tej metody znamy dla dwóch pojedyńczych przypadków form trójkowych, mianowicie dla ogólnej formy C_3 i dla specyalnej C_4.

Pierwszy przypadek zbadali Clebsch i Gordan[87]); przekształcenie liniowe zmiennych x przeprowadza się za pomocą trzech „form pośrednich“, liniowych względem u i liniowych co do x, odpowiednio rzędów 1, 4, 7,... Każda forma, wyprowadzalna z formy C_3, może być pomnożona przez taką potęgę pewnego spółzmiennika G, że przechodzi na funkcyę całkowitą 7 form stowarzyszonych, które składają się z powyższych trzech form pośrednich i jeszcze z czterech spółzmienników. Obok tego mamy drugie równorzędne przedstawienie, przy którem 7 form stowarzyszonych, odpowiadających sobie dualistycznie, składa się z trzech form pośrednich liniowych co do x i czterech „form przynależnych,“ (zugehörige Formen) (przeciwzmienników). Blizko spokrewnionem z tem badaniem form C_3 jest inne wielokrotnie już wspomniane badanie Gordana[88]), odnoszące się do formy C_4 z 168 podstawieniami.

Omówione do tej pory przedstawienie wymierne form niezmienniczych możnaby nazwać „typiką spółzmienników“. W rzeczy samej jądro metody tkwi w tem, że forma pierwotna $F\,(x)$ (albo szereg takich form) mnoży się przez potęgę odpowiednio dobranego spółzmiennika, napisanego w zmiennych spółpodstawieniowych y, aby iloczyn dał się rozwinąć według potęg funkcyj całkowitych ξ, η zmiennych x, y, jako nowych zmiennych, i aby nowe spółczynniki były spółzmiennikami formy $F(x)$. Ograniczamy się wszakże przytem na przypadku, w którym podstawienie względem zmiennych y jest liniowem.

Temu przedstawieniu przeciwstawia się „typika niezmienników". Forma pierwotna $F(x)$ (lub szereg takich form, po pomnożeniu przez pewną potęgę niezmiennika R formy F i rozwinięciu według potęg funkcyj całkowitych ξ, η zmiennych x, (które są wtedy spółzmiennikami formy F), przyjmuje postać, w której nowe spółczynniki są niezmiennikami formy F. Pośredniczące w tem przejściu przekształcenie jest zwyczajnem przekształceniem „Tschirnhausenowskiem"; należy wszakże zaznaczyć, że w niektórych przypadkach można ominąć bezpośrednio jego stosowanie (połączone z trudnościami) i że wogóle przekształcenie występuje całkowicie na plan dalszy.

Wielki szereg zagadnień algebraicznych, geometrycznych i teoretyczno-funkcyjnych prowadzi, jak łatwo widzieć a priori, do upostaciowania „niezmienniczego", sprawiającego, że już same formy pierwotne lub ich funkcye dane okazują się w świetle niezmienniczem.

I tu pierwszy Hermite[89]) w r. 1851 uzasadnił taką typikę dla form dwójkowych f_{2n+1} rzędu nieparzystego (w szczególności piątego), wprowadziwszy jako nowe zmienne dwa spółzmienniki liniowe. Clebsch i Gordan[90]) w r. 1867 na drodze, wskazanej przez Hermite'a, rozwinęli w szczegółach typikę formy f_5, z uwzględnieniem rozmaitych przypadków wyjątkowych, występujących skutkiem znikania pewnych niezmienników. Tu pokazuje się wyraźnie, w jaki sposób przy użyciu tożsamości symbolicznych, ominąć można bezpośrednie wykonywanie podstawienia. Jeżeli mianowicie a_x, β_x oznaczają dwie dowolne formy liniowe o nieznikającym rugowniku $R = (a, \beta)$, a_x — czynnik liniowy symboliczny formy pierwotnej $f_l = f_{2n+1}$, to iloczyn $(a, \beta)\, a_x$ można napisać jako kombinacyę liniową form a_x i β_x. Jeżeli obie strony podniesiemy do potęgi l-ej, to iloczyn $R^l f_l$ przedstawia się już przez to typowo, lubo w formie surowej; a_x, β_x są wtedy nowemi zmiennemi, a nowe spółczynniki—niezmiennikami jednoczesnemi form f_l, a_x, β_x. Stają się one niezmiennikami samej formy f, jeżeli za a_x, β_x wybierzemy dwa spółzmienniki liniowe formy f. Rachunek dalszy sprowadza się do tego, aby nowe spółczynniki, występujące przedtem w postaci symbolicznej, wyrazić przez niezmienniki najprostsze układu zupełnego formy f. W rozprawie tej wskazano, że tożsamo postępowanie stosować można i do przedstawienia typowego form f_{2n} rzędu parzystego; potrzeba tylko operować na odpowiednich formach kwadratowych, zamiast na liniowych; przekształcenie Tschirnhausenowskie staje się kwadratowem. Niechaj a^2_x, β^2_x, γ^2_x będą trzy dowolne formy kwadratowe o nieznikającym rugowniku $R = (a, \beta, \gamma)$ i a^2_x czynnik symboliczny kwadratowy form f_{2n}; wtedy $(a, \beta, \gamma)\, a^2_x$ jest kombinacyą liniową trzech form powyższych. Przez podniesienie do potęgi n-ej przechodzi $R^n f_{2n}$ na postać typową C_n z trzema zmiennemi a^2_x, β^2_x, γ^2_x, za które znowu wziąć można spółzmienniki formy f. Clebsch i Gordan wykonali całkowicie rachunek w przypadku formy f_6.

Lindemann[91]) wykazał, że forma C_n, uważana jako trójkowa jakichkolwiek trzech zmiennych, cechuje się znikaniem tożsamościowem pewnego spółzmiennika, a interpretacya geometryczna tych stosunków doprowadziła go przytem do elementów tak zwanej „teoryi apolaryzacyi"[92]). Typowem przedstawieniem najprostszych jednoczesnych form dwójkowych zajmowali się Bessel[93]) i Harbordt[94]). Na ciekawy przypadek tego rodzaju zwrócił już był przedtem uwagę Hermite[95]), spostrzegłszy, że dwom formom dwójkowym sześciennym można nadać proste wyrażenie typowe w postaci pierwszych pochodnych formy dwukwadratowej; na tem oparł Cayley[96]) przekształcenie 3-go rzędu całki eliptycznej 1-go gatunku.

Clebsch[97]) poświęcił obszerne studyum spostrzeżeniu Hermite'a; postępowanie zaś jego znacznie uprościł Gundelfinger[98]). Lindemann[99]) pierwszy zauważył, że trzy formy dwójkowe kwadratowe uważać można za pochodne drugie formy 6-go rzędu. Hermite'owi[100]) też zawdzięczamy pierwszy przykład analogiczny z dziedziny trójkowej. Pokazał on, w jaki sposób z trzech form kwadratowych otrzymać można formę sześcienną ze spółczynnikami, będącemi niezmiennikami jednoczesnemi trzech form danych; pierwsze pochodne tej formy sześciennej są właśnie formami danemi. Wtedy dopiero wystąpiło w prawdziwem świetle Sylvesterowskie[101]) wyrażenie rugownika trzech form kwadratowych, jako „kombinantu" tych form.

Przejrzysty dowód twierdzenia Hermite'a podał Gundelfinger[102]). Niezmienniki jednoczesne trzech form okazały się wymiernie zależnemi od jedenastu takich form; niezmienniki kombinantowe od dwóch tylko. Gundelfinger[103]) zastosował swoje wyniki do przekształcenia kwadratowego całki eliptycznej 1-go gatunku, rozciągniętej wzdłuż krzywej trzeciego rzędu.

Dla teoryi rozwiązania wielokrotnie już wspomnianych równań rzędu 7-go z 168 podstawieniami w siebie ma znaczenie przedstawienie typowe, podane przez Gordana[104]) dla układu jednoczesnego przyporządkowanej formy trójkowej C_4 i dowolnej formy C_2 („stożkowej"). Ze spółzmienników układu wydzielają się dwie dalsze formy C_2 i wyróżniona forma C_1 („prosta"): „bieguny" formy C_1 względem trzech form C_2 tworzą wierzchołki „typowego trójkąta spółrzędnych."

Rolę godną uwagi odgrywa, według Stroha[105]), typika niezmienników dla zupełnego układu kombinantów dwóch form dwójkowych f_n i φ_n:

indywidua takiego układu, po pomnożeniu przez odpowiednio dobraną potęgę rugownika form f_n i φ_n zamieniają się na indywidua układu zupełnego pojedyńczej formy dwójkowej rzędu 2 $(n-1)$. Znaczenie typiki dla teoryi syzygij wyjaśnimy bliżej w rozdziale następnym.

---

d) *Syzygie.*

Obszary całkowitości oraz wymierności układów form niezmienniczych pozwalają bliżej wniknąć w pokrewieństwo algebraiczne tych form.

Jest to, oczywiście, dopiero krok pierwszy. Znowu bowiem dążyć należy do tego, by ogół istniejących związków algebraicznych lub „syzygij“ objąć ze stanowiska teoryi niezmienników, t. j. by strony lewe syzygij (syzyganty) połączyć w obszary całkowitości lub wymierności o podstawie skończonej (syzygantów zasadniczych) i aby przytem spółczynniki były formami zasadniczemi pierwotnego układu form. Od tych syzygij 1-go rodzaju można się wznieść do syzygij rodzaju wyższego.

Że zadanie to jest określonem, t. j. że w rzeczy samej syzygie każdego rodzaju tworzą układ zupełny i że łańcuch syzygij przerywa się po skończonej liczbie kroków, tego dowiódł niedawno, jak już wspomniano, pierwszy Hilbert[106].

Bieg historyczny zagadnienia był taki, że szukano najprzód możliwie największej liczby syzygij dla najprostszych form pierwotnych (lub grup podstawień). Doświadczalny charakter tych badań sprawia, że czytelnik niełatwo je rozumie, gdyż osiągnięcie rezultatów ostatecznych zależy przedewszystkiem od indywidualnej zręczności autora. Dlatego to ograniczymy się tu na przytoczeniu kilku bardziej zasadniczych „motywów głównych“. Najbliższy środek do zbudowania syzygij 1-go rodzaju daje Hermite'owska teorya układów stowarzyszonych, gdyż znajomość wyrazu głównego jakiejkolwiek formy pochodnej pozwala już na otrzymanie bezpośrednie wyrażenia wymiernego przez formy stowarzyszone.

Cayley[107]) i Brioschi[108]) zastosowali tę drogę z powodzeniem do formy dwójkowej f_5: gdy według tej metody traktujemy indywidua układu zupełnego, to do dalszego postępowania wystarczają już procesy eliminacyjne. Cayley otrzymał w ten sposób tablicę syzygij 1-go rodzaju formy f_5, którą później w kilku punktach uzupełnił[109]).

Dalszy rozwój tej metody, nie pozwalającej wejrzeć należycie w konstrukcyę układu syzygij, jest połączony z wielkiemi trudnościami rachunkowemi.

Inną metodę zaproponował Stephanos[110]). Wśród form dwójkowych istnieje dziedzina, w której takie związki można przejrzyście grupować; jest to dziedzina wyznaczników funkcyjnych (pierwszych nasunięć). Jeżeli utworzymy je dla każdych dwóch form szeregu danego $f, \varphi, \ldots$, to według Clebscha[111]) nietylko pierwsze nasunięcia tych nowych form „F“ na formy $f, \varphi, \ldots$, ale i iloczyny każdych dwóch form F dają się sprowadzić do utworów prostszych, t. j. do pierwszych i drugich nasunięć form pierwotnych $f, \varphi, \ldots$

Aby to zastosować do syzygij formy np. f_6, postępuje Stephanos w ten sposób. Układ zupełny formy f_6 składa się z 4 niezmienników i 8 spółzmienników charakteru parzystego, oraz z 1 niezmiennika (ten w dalszym ciągu pozostawia się na uboczu) i 13 spółzmienników charakteru nieparzystego. Ostatnie 13 form można zastąpić trzynastoma z pomiędzy 28 wyznaczników funkcyjnych, do których dochodzi się z 8 spółzmienników parzystych; pozostałe zaś 15 można wyrazić łatwo, jako funkcye całkowite 25 form zasadniczych. Z tych 15 wzorów dochodzi się za pomocą twierdzeń Clebscha do zbioru syzygij pomiędzy formami parzystemi, dalsze zaś można otrzymać za pomocą eliminacyi. Podobnież dochodzimy do syzygij pomiędzy prostemi i skośnemi formami zasadniczemi. v. Gall[112]) rozwinął „zasadę wyznaczników funkcyjnych“ i związał ją z procesem Aronhold'a, przez co nietylko osiągnął znaczne skrócenia rachunku, lecz i pozyskał zarazem środek wydzielenia syzygij nieprzywiedlnych lub zasadniczych z bogatej rozmaitości związków. Opierając się na pracach przedwstępnych kierunku „liczącego“ badaczy angielskich poddał on szczegółowemu badaniu formę f_6, dwie formy f_3 i dwie formy f_4.

Metodą bardziej bezpośrednią posługuje się Perrin[113]). Już Cayley dla wyprowadzenia syzygij wychodził z głównych wyrazów spółzmienników, pomiędzy któremi zachodzą ściśle te same związki, co i między samemi spółzmiennikami. Perrin poszedł nieco dalej, gdyż zakłada, że w wyrazach głównych pierwszy spółczynnik formy pierwotnej f_n jest zerem i pokazuje, że wtedy residuum charakteryzuje jednoznacznie wyraz główny (i sam spółzmiennik). Perrin łączy tę zasadę z zasadą form stowarzyszonych i objaśnia płodność swego postępowania na przykładach form f_5 i f_6.

Ponieważ jedna syzygia (1-go rodzaju) jest związkiem pomiędzy formami zasadniczemi $A, B, \ldots$ układu, przeto jest ona z pewnością nieprzywiedlną, jeżeli pomiędzy jej wyrazami znajduje się iloczyn postaci AB.

Hammond[114]) zwrócił uwagę na to, że istotnie wszystkie dotychczas znane syzygie (1-go rodzaju) wykazują przynajmniej jeden taki wyraz „dwójkowy“, tak że ten właśnie wyraz służyć może do scharakteryzowania syzygii. To twierdzenie doświadczalne pozwoliło już na znaczne uproszczenia przy tworzeniu nowych syzygij. Tymczasem v. Gall[115]) napotkał przykład: — związek pomiędzy ośmiu niezmiennikami dwóch form f_6, — którego, mimo wszelkich usiłowań, nie udało się podciągnąć pod twierdzenie Hammonda. Za pomocą odpowiedniej specyalizyi spółczynników Stroh[116]) stwierdził bezpośrednio rezultat v. Galla, przez co ostatecznie obalono ogólną prawdziwość wyżej wzmiankowanego twierdzenia.

Uogólniając metodę wyznaczników funkcyjnych Stephanosa i v. Galla, znalazł Stroh[117]) źródło wszystkich syzygij (1-go rodzaju) w związkach pomiędzy wyższemi nasunięciami pewnej liczby form. Wszystkie podobne związki są wypływem jednej zasady (l. c. § 3), pewnego rodzaju prawa „łącznościowego", które jest ogólnie prawdziwem dla połączenia (działania), określonego przez proces nasunięcia. W dziedzinie dwójkowej można się przytem ograniczyć na czterech (lub trzech) formach, stanowiących punkt wyjścia f_1, f_2, f_3, f_4; otrzymujemy wtedy dla każdej (dodatniej) wartości „wagi" i ($= 1, 2, 3, \ldots$) tożsamość (względem spółczynników form f):

$$[f_1, f_2, f_3, f_4]_i = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1, f_2)^\lambda (f_3, f_4)^{i-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1, f_4)^\lambda (f_3, f_2)^{i-\lambda} = 0,$$

która przy wszystkich 24 przemianach form f przedstawia tylko istotnie różne „typy" (l. c., § 18). Przez odpowiednią specyalizacyę form f, już to skutkiem równości niektórych z nich, już to przez obniżenie ich rzędu, powstają typy dalszé. Mając więc układ zupełny form zasadniczych, dość przedstawić je kolejno, jako nasunięcia możliwie najmniejszej liczby z pomiędzy nich. Do każdej formy zasadniczej można tym sposobem dobrać oznaczoną syzygię. Konstrukcya możliwie zupełnego układu syzygij przedstawia się tedy w sposób taki. Jeżeli weźmiemy dla przykładu formę pierwotną f_6 z układem zupełnym 26 indywiduów, to otrzymamy przedewszystkiem zbiór 20 syzygij zasadniczych (lub stowarzyszonych), które zawierają już w sobie zupełny związek algebraiczny pomiędzy 26 formami zasadniczemi. Widzimy w nich w rzeczy samej istotnie rozwinięcie Hermite'owskiego wyrażenia stowarzyszonego dla form zasadniczych (przez sześć z pomiędzy nich). Każdy dalszy syzygant, po za potęgą formy pierwotnej w mianowniku, można wyrazić całkowicie, a nawet liniowo, za pomocą rzeczonych 20 syzygantów z formami zasadniczemi jako spółczynnikami[118]). Tych dalszych syzygantów nieprzywiedlnych otrzymano 184, dzięki usiłowaniom Cayley'a, Sylvestera, Hammonda, Perrina, v. Galla.

Zbiór ogólny tych 204 syzygij, który zdaje się sprawiać zamieszanie swą mnogością, podporządkowuje się tedy pod 11 różnych typów[119]) $[f_1, f_2, f_3, f_4]_i = 0$. Odwrotnie, wyprowadzenie 204 syzygij z tych 11 typów udało się urządzić w ten sposób, że każdą z nich można było obliczyć niezależnie od każdej innej, co dało możliwie największą gwarancyę pewności rezultatów.

Z podziałem na typy związał Stroh[120]) dogodną metodę sprawdzania syzygij.

Reasumując to wszystko i uwzględniając jeszcze rezultaty otrzymane, przy pomocy funkcyj tworzących, musimy, mimo całego bogactwa rachunkowego, uważać teoryę syzygij za będącą jeszcze w zaczątku swego rozwoju[121]).

Rozległe próby w przypadkach f_5, f_6, oraz w przypadku układów jednoczesnych (f_2, φ_3), (f_3, φ_3), (f_3, φ_4), (f_4, φ_4) dały pozornie bardzo dobre granice niższe na liczbę syzygantów zasadniczych, lecz — pomijając przypadki pospolite f_2, f_3 i dwóch form f_2[122])—zupełność układu syzygantów nie jest nawet dostatecznie stwierdzona dla rzędu 1-go. Do tej pory nie uwzględniono prawie dziedzin wyższych i nie przystąpiono też dotąd wcale w praktyce do zasadniczego badania, kiedy w danym przypadku przerywa się łańcuch syzygij.

---

e) *Kierunek liczący.*

Funkcya tworząca. Oznaczenie przybliżone i dokładne liczb form zasadniczych, syzygij, perpetuantów i utworów liniowo-niezależnych.

Omówione wyżej badania, odnoszące się do obszaru całkowitości utworów niezmienniczych, powstałe przeważnie w szkole Clebscha-Gordana, znajdują, teoretycznie biorąc, swe uwieńczenie w „dowodach skończoności", praktycznie zaś w oznaczeniu granicy wyższej dla form zasadniczych układu zupełnego, związanem z każdorazową konstrukcyą tego układu.

Jeżeli prócz tego udaje się ustalenie granicy niższej, to w przypadkach, gdy obie granice zlewają się, otrzymujemy liczbę dokładną.

Znaczenie prac angielskich[123]), zainaugurowanych przez Cayley'a i Sylvestera, polega właśnie na wyznaczaniu tych granic niższych (i istotnej konstrukcyi odnośnych form), do czego posłużyły oryginalne metody, oparte na rozwinięciu „funkcyj tworzących."

Usiłowania te rozpoczynają się od artykułów Cayley'a[124]) w roku 1856; podamy je tu w późniejszej postaci, nadanej im przez samego Cayley'a[125]), a głównie przez Sylvestera[126]), począwszy od roku 1877.

Niechaj będzie pojedyńcza forma dwójkowa[127]) f_i o spółczynnikach a_i. Wyraz główny φ jakiegokolwiek spółzmiennika forma f, stopnia j rzędu g i wagi $w = \frac{1}{2}(ij - g)$, czyni zadość charakterystycznemu równaniu różniczkowemu:

$$\delta\varphi = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + i a_{i-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} = 0.$$

Zagadnienie zasadnicze brzmi: „Ile istnieje liniowo niezależnych spółzmienników (wraz z niezmiennikami) formy f, dla których stopień i waga (albo też stopień i rząd) mają wartości dane?“

Jeżeli liczbę spółczynników wyrazu głównego φ oznaczymy przez $(w : i, j)$, to dla otrzymania odpowiedzi na powyższe pytanie, dość oczywiście zmniejszyć tą liczbę o liczbę związków liniowych i liniowo-niezależnych, którym czynią zadość spółczynniki wyrazu φ skutkiem tożsamości $\delta\varphi = 0$.

Milczące założenie Cayley'a, że tych związków jest właśnie tyle, ile wyrazów w $\delta\varphi$, stwierdził jako ogólnie prawdziwe Sylvester[128]) w r. 1878. Ponieważ $\delta\varphi$ jest formą ilości a wagi $a-1$ i stopnia j, przeto szukana liczba, którą odjąć należy, wynosi $(w-1 : i, j)$, liczba zaś szukana jest dana za pomocą różnicy $\Delta(w : i, j)$[129]):

$$\Delta(w : i, j) = (w : i, j) - (w-1 ; i, j).$$

Liczbę $(w : i, j)$ napotykamy już w badaniach Eulera[130]), odnoszących się do zagadnień o „rozkładzie liczb“. Jeżeli jakikolwiek wyraz formy φ jest typu $C\, a_0^{\alpha_0}\, a_1^{\alpha_1}\, a_2^{\alpha_2} \ldots a_i^{\alpha_i}$, to wykładniki α są związane wyłącznie dwoma związkami diofantowemi:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i = j;\quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + i\,\alpha_i = w,$$

tj. „liczba $(w : i, j)$ wskazuje, ile razy liczba w może być utworzona jako suma j liczb szeregu $0, 1, 2, \ldots, i$ z powtórzeniami“. Według Eulera liczba ta jest spółczynnikiem przy $a^j x^w$ w rozwinięciu „funkcyi tworzącej“:

$$Z = \frac{1}{(1-a)(1-a\,x)(1-a\,x^2)\ldots(1-a\,x^i)},$$

według rosnących potęg ilości a. Podobnież liczbę $\Delta(\omega : i, j)$ otrzymać można z rozwinięcia iloczynu $Z(1-x)$. Euler rozwinięcia te otrzymuje wyraźnie, twierdzenia te wszakże przyjmują i inną postać przez to, że $(w : i, j)$ jest także spółczynnikiem przy z^w w rozwinięciu funkcyi Z':

$$Z' = \frac{(1-x^{j+1})(1-x^{j+2})\ldots(1-x^{j+i})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^i)},$$

z której przez opuszczenie w mianowniku czynnika $(1-x)$ wynika druga funkcya, tworząca dla liczby $\Delta(w : i, j)$.

Po tych przygotowaniach możemy wyjaśnić użytek funkcyj tworzących przy istotnem wypisywaniu form zasadniczych i syzygij; przyczem ograniczymy się na jednem z dwóch rozwinięć, np. na rozwinięciu funkcyi Z lub $Z(1-x)$.

Najprzód jest dogodnem wprowadzenie jako danych zamiast j i w liczb j i $g = ij - 2w$ (stopnia i rzędu spółzmiennika). Posługując się oznaczeniami $(i, j : g)$ i $\Delta(i, j : g)$, znajdziemy po łatwym rachunku drugą z tych liczb, jako spółczynnik przy $a^j x^g$ w rozwinięciu „funkcyi tworzącej pierwotnej“ (crude):

$$\varphi(x) = \frac{1-x^{-2}}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\ldots(1-ax^{-(i-2)})(1-ax^{-i})},$$

według rosnących potęg ilości a. Jeżeli uskutecznimy rozkład na ułamki cząstkowe, odpowiadające pojedyńczym czynnikom mianownika i przy redukcyi opuścimy wszystkie potęgi ilości x z wykładnikami ujemnemi, które dla niniejszego pytania nie mają znaczenia, to pozostanie rozwinięcie, zawierające tylko wykładniki dodatnie ilości a i dające się sprowadzić znowu do postaci ułamka skończonego nieprzywiedlnego:

$$\frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\ldots(1-a^k)(1-a^{k'})\ldots},$$

gdzie wykładniki $i, i-2, \ldots, k, k', \ldots$ w mianowniku są liczbami całkowitemi dodatniemi (> 0).

Tą „funkcyę tworzącą zredukowaną“[131]) można znowu w każdym konkretnym przypadku, przez pomnożenie jej licznika i mianownika przez odpowiednio dobrane czynniki pomocnicze, — wprawdzie często dopiero po zmudnych rachunkach — przerobić na „funkcyę tworzącą reprezentującą“. Licznik, pozostający skończonym, daje się uporządkować według potęg rosnących i dodatnich ilości a i x; trzy zaś rodzaje czynników w mianowniku są: $(1-a^k)$, $(1-a\,x^i)$ i $(1-a^2x^l)$ są tak dobrane, że przez swoje wykładniki przy a i x „reprezentują“ najprostsze, napewno nieprzywiedlne formy układu. Ta funkcya tworząca reprezentująca[132]) jest wspólnem źródłem liczby (i typu) form zasadniczych i syzygij wszelkich rodzajów.

Dla wyczerpania tego źródła, poczęto od stopnia 3-go względem a stosować rodzaj „postępowania sitowego“ (tamisage) w ten sposób, że dla pewnego stopnia-rzędu („degorder“) j, g, tworzy się najprzód wszystkie możliwe potęgi i iloczyny najniższych form zasadniczych (z wyłączeniem reprezentującej) i liczbę ich odejmuje się od spółczynnika przy $a^j x^g$ w liczniku funkcyi tw. repr. Różnica ta dla danego stopnia—rzędu daje liczbę form zasadniczych, zwiększoną o liczbę syzygij rodzaju parzystego, a przeciwnie, zmniejszoną o liczbę syzygij rzędu nieparzystego. Ponieważ licznik przerywa się, więc suma wszystkich spółczynników dodatnich, powiększona o liczbę form zasadniczych reprezentujących, daje we wszystkich przypadkach granicę niższą dla liczby form zasadniczych. Objaśnijmy to na przykładzie. Funkcya tw. repr. formy f_5 jest, podług F r a n k l i n a[133]):

$$\text{Mianownik:}\quad (1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})(1-ax^5)(1-a^2x^2)(1-a^2x^6).$$

$$\text{Licznik:}\quad 1+a^3(x^3+x^5+x^9)+a^4(x^4+x^6)+a^5(x+x^3+x^7-x^{11})$$
$$+a^6(x^2+x^4)+a^7(x+x^5-x^9)+a^8(x^2+x^4)+\ldots-a^{23}x^{11}.$$

Stąd czytamy najprzód, że kolejno dla stopni-rzędów (3, 3), (3, 5), (3, 9), (4, 4), (4, 6); (5, 1), (5, 3), (5, 7); (6, 2), (6, 4); (7, 1), (7, 5); (8, 2) i t. d. musi istnieć p r z y n a j m n i e j jedna forma zasadnicza. Formy zasadniczej (8, 4) niema, ponieważ można zbudować iloczyn dwóch niższych form zasadniczych (3, 3), (5, 1) i t. d. Wogóle dojdziemy przynajmniej do 23 form zasadniczych. Z drugiej strony, dawna metoda G o r d a n a daje najwyżej 23 formy zasadnicze (tych samych stopni-rzędów); tym sposobem pytanie, dotyczące liczby i typu form zasadniczych formy f_5 jest ostatecznie rozwiązane.

Przechodząc do syzygij 1-go rodzaju, zauważmy, że istnienie syzygii w przypadkach (5, 11), (7, 9) i t. d. jest widocznem wprost. Dla stopnia — rzędów (6, 6), (6, 8), (6, 10), (6, 12), (6, 14), (6, 18) ma $a^j x^g$ w liczniku spółczynnik zero; ponieważ wszakże dla trzech form zasadniczych (3, 3), (3, 5), (3, 9) iloczyn każdych dwóch daje właśnie jeden z poprzednich stopni-rzędów, więc istnienie 6 (i nie więcej) syzygij pierwszego rodzaju jest stwierdzone. Podobnież dla stopnia 7-go wyprowadza się 6 syzygij (7, 7), (7, 9), (7, 9), (7, 11), (7, 13), (7, 15) i t. d.

Pierwsza syzygia 2-go rodzaju występuje w przypadku (8, 14). Funkcya tw. repr. wraz z mianownikiem wskazuje tu na 5 form liniowo-niezależnych, gdy tymczasem proces sitowy daje 10 iloczynów form zasadniczych. Lecz wiadomo, że można bezpośrednio napisać sześć syzygij nieprzywiedlnych 1-go rodzaju, mnożąc otrzymane pierwej syzygie (5, 11), (6, 8), (6, 12), (7, 9), (7, 9), (7, 9) odpowiednio przez formy zasadnicze (3, 3); (2, 6), (2, 2), (1, 5), (1, 5), (1, 5). Liczba 5 jest większa od różnicy 10 — 6 = 4 o jedność, a zatem „6 s y z y g i j 1-g o r o d z a j u ł ą c z y j e d n a i t y l k o j e d n a s y z y g i a 2-g o r o d z a j u[134]).

Na tej drodze S y l v e s t e r[135]), na podstawie starannych rachunków F r a n k l i n a, podał granice niższe liczby syzygij 1-go rodzaju dla szeregu pojedyńczych i jednoczesnych form pierwotnych.

Według C a y l e y'a[136]) funkcya tw. repr. wymaga tylko niewielkiej modyfikacyi, aby dała nietylko liczbę form zasadniczych i syzygij lecz i same utwory.

H a m m o n d[137]) uczynił jeszcze krok dalszy w teoryi syzygij. Jeżeli dla pewnej formy pierwotnej znamy dokładnie układ zupełny form zasadniczych, wtedy funkcya tw. repr. dla form zasadniczych daje się przerobić na

takąż formę dla syzygij, mianowicie mnożąc licznik i mianownik przez takie czynniki, aby mianownik stał się właśnie iloczynem czynników $1-a^j x^g$, odpowiadających wszystkim formom zasadniczym. Stąd można już wyczytać granicę górną dla każdego dowolnego stopnia-rzędu przy syzygiach 1-go rodzaju; granicę tę należy porównać z granicą niższą S y l v e s t e r a. W przypadkach szczególnych (f_5 i f_6), z niewielkim wyjątkiem, w którym rozstrzyga rachunek bezpośredni, przekonano się o zgodności obu granic.

Zanim rozstaniemy się z funkcyą tw. repr. S y l v e s t e r a, wspomnijmy jeszcze o godnem uwagi zjawisku, występującem we wszystkich przypadkach, w których możliwem jest ostateczne oznaczenie form zasadniczych. Jest to tak nazwany „p o s t u l a t z a s a d n i c z y"[138]) S y l v e s t e r a, według którego dla każdego stopnia-rzędu występowanie form zasadniczych i występowanie syzygij mają się wzajemnie wyłączać, co oczywiście uprościłoby znacznie teoryę form. H o m m o n d[139]) napotkał wszakże przykład (przy stopniu-rzędzie (53) formy f_7), sprzeczny z postulatem, i poznał wkrótce potem, że powód tych wyjątków tkwi w pewnej tożsamości zwrotnej, bezpośrednio wypływającej z równania różniczkowego dla źródeł.

Wspomnijmy jeszcze w krótkości, że i dla szczególnych rodzajów utworów niezmienniczych zbudowano odpowiednie funkcye tworzące; tak np. „perpetuanty"[140]), wprowadzone przez M a c-M a h o n a. Tu funkcya tworząca pozwala wprost na wyznaczenie liczby utworów nieprzywiedlnych. S t r o h[141]) podał nietylko przejrzysty dowód na to przy pomocy oryginalnego uogólnienia symboliki A r o n h o l d a-C l e b s c h a, lecz wyprowadził nadto proste wyrażenie tych liczb i pokazał, że odnośne perpetuanty można wprost przedstawić symbolicznie.

J o r d a n i S y l v e s t e r zajmowali się wyprowadzeniem wzorów teoretycznych dla granic wyższych stopnia i rzędu tworów niezmienniczych w dziedzinie dwójkowej. J o r d a n[142]) wychodzi ze związków pomiędzy spółzmiennikami 3-go stopnia, jakich użył był G o r d a n w swoim dowodzie skończoności i opiera się w dalszym ciągu w gruncie rzeczy na metodzie G o r d a n a, przy pomocy której z dwóch układów zupełnych dla dwóch form dwójkowych wyprowadza ich układ jednoczesny. Nasunięcia, które należy pozostawić, są określone zapomocą rozwiązań najmniejszych (dodatnich) dwóch równań diofantowych. J o r d a n zbadał bliżej teoretycznie-liczbowo te rozwiązania i otrzymał kolejno coraz niższe liczby jako granice wyższe. Aby wypowiedzieć rezultat ostateczny, do którego doszedł[142]), wyobraźmy sobie dowolny szereg form pierwotnych, których rzędy są $\leqq n$. Każdy spółzmiennik układu zupełnego składa się liniowo z iloczynów typów form trojakiego gatunku; w każdym z nich istnieją granice górne dla stopnia i rzędu. Te granice są prostemi funkcyami całkowitemi liczby n, ale zawierają wszystkie czynniki $3^{\varrho+1}$, gdzie ϱ określa się przestępnie jako największa liczba całkowita, zawarta w ułamku $1+\dfrac{\log \frac{1}{4} n}{\log \frac{4}{3}}$. Np. w przypadkach od $n=1$ do 12 (z wyjątkiem 11) dla rzędu odnośnych spólzmienników otrzymujemy następujące granice wyższe: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 22, 26, 34; granice te nawet mogą być faktycznie osiągnięte, jak to pokazują tablice Sylvestera i Franklina dla układów pojedyńczej formy f_n [144]).

Sylvester[145]) podał bez dowodu podobne jeszcze prostsze wzory, zawierające tylko spółczynniki liczbowe wymierne, lecz za to prowadzące do liczb w istocie wyższych. Potem podał Sylvester[146]) metodę otrzymania granicy dostatecznie nizkiej na liczbę wszystkich utworów układu zupełnego formy pierwotnej rzędu parzystego. Granica ta zależy od sumy algebraicznej spółczynników jego funkcyi tw. repr.

Zamkniemy ten rozdział, podając uogólnienia twierdzenia Cayley'a-Sylvestera „dotyczącego liczby utworów liniowo-niezależnych (dziedziny dwójkowej) o danych stopniach-rzędach“ do form o większej liczbie szeregów n zmiennych.

Podstawy przygotowawcze do rozwiązania tego ważnego i trudnego zagadnienia położył Capelli[147]). Twierdzenie, z którego wychodzi, uczy, jak rozwinąć formę Fn szeregów o n zmiennych:

$$x_i', \ x_i'', \ x_i''', \ldots, x_i^{(n)}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

według potęg wyznacznika Δ ilości x, aby spółczynniki były biegunowemi form, zawierających o jeden szereg zmiennych mniej i powstających z formy F przez proste zastosowanie procesu biegunowego. Procesy biegunowe odnoszą się do zmiennych i otrzymują się z samych procesów postaci $D_{xy}=\Sigma y_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ za pomocą powtarzania i kombinacyi. Jeżeli to twierdzenie zasadnicze zastosujemy do pewnego utworu φ, zależnego niezmienniczo od szeregu form pierwotnych $f_1, f_2, \ldots$ z dowolną liczbą (spółpodstawieniowych) szeregów zmiennych, to φ da się przedstawić jako agregat iloczynów „$\Omega\Phi$“ spółzmienników tożsamościowych z utworami niezmienniczemi pewnych form (jednorodnych i izobarycznych) Φ, które zawierają co najwyżej $n-1$ szeregów zmiennych i czynią zadość $n-1$ równaniom różniczkowym charakterystycznym:

$$\text{I.} \qquad D_{x'x''}\Phi=0, \ D_{x'x'''}\Phi=0, \ \ldots, \ D_{x'x^{(n)}}\Phi=0'$$

lub następującym [148]):

$$\text{I}'. \qquad D_{x'x''}\Phi=0, \ D_{x''x'''}\Phi=0, \ \ldots, \ D_{x^{(n-1)}x^{(n)}}\Phi=0.$$

Zadanie pierwotne sprowadza się tedy do zadania prostszego: wyznaczyć liczbę liniowo-niezależnych form Φ, którym można jeszcze przez pomnożenie przez odpowiednio dobraną potęgę wyznacznika Δ nadać wagę stałą, np. zero; mianowicie takich form, aby miały z góry dane stopnie względem spółczynników formy f i z góry dane rzędy $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ w odnośnych szeregach zmiennych x.

Jeżeli $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ oznacza liczbę spółczynników dowolnych formy Φ, to, jak dowodzi autor, warunki stawiane jej przez pojedyńcze z równań I', np. przez pierwsze, są od siebie liniowo-niezależne, a liczba ich wynosi $\varphi(\vartheta_1-1, \vartheta_2+1, \vartheta_3 \ldots \vartheta_n)$. Jest to właśnie bezpośrednie uogólnienie twierdzenia Cayleya-Sylvestera[149]).

Przeciwnie, warunki stawiane przez dwa lub więcej równań I' nie są już liniowo-niezależnemi i dlatego Capelli ogranicza się na podaniu granicy niższej dla rzeczonej liczby.

Rozwiązanie zupełne tego zadania, a zatem i poprzedzającego, zawdzięczamy Deruyts'owi[150]). Obchodzi on pytanie bezpośredniego użytku równań różniczkowych, sprowadzając pytanie o liczbie form Φ do pytania, dotyczącego „wyrazów głównych“. Napisawszy te wyrazy symbolicznie, spostrzegamy, że odnośnie do niniejszego pytania, zastąpić je można przez „półniezmienniki“ form pierwotnych liniowych; w takim zaś razie wystarcza zbadanie układu równań liniowych i diofantowych. Autor stwierdza, że rozwiązania tych równań w liczbie ogólnej „Π“ są liniowo niezależne. Z drugiej strony dowodzi, że liczba pierwotnie szukanych form φ zgadza się z liczbą wyżej wspomnianych form iloczynowych $\Omega\varphi$. Jeżeli wydzielimy jakąkolwiek pojedyńczą taką formę Φ z oznaczonemi liczbami wagowemi, to celem oznaczenia odpowiedniej liczby „Π'“ form $\Omega\Phi$ stosować można postępowanie zupełnie analogiczne do użytego dla powyższej liczby Π. Jeżeli więc ostatecznie utworzymy sumę iloczynów biorąc po dwie z obliczonych liczb Π, Π' dla wszelkich możliwych kombinacyj liczb wagowych form Φ — te ostatnie charakteryzują znowu rozwiązania równania diofantowego, t. z. „równania wagowego“ — to będziemy mieli w ten sposób prawidło do wyznaczenia liczby utworów niezmienniczych liniowo niezależnych φ, posiadających stopnie dane co do spółczynników form pierwotnych i rzędy dane w dowolnej liczbie spółpodstawieniowych szeregów zmiennych. Ta ostatnia liczba może być mniejsza, równa lub większa, niż liczba szeregów zmiennych w formach pierwotnych.

PRZYPISY.

[1]) Porówn. Kronecker „Festschrift“ (1882), s. 14. Wyrazu „podstawa“ („Basis“), użyto w tekście w znaczeniu zmienionem. Wyrażenie „(zupełny) układ form zasadniczych“, lub krótko: „układ (zupełny)“ pochodzi od Gordana, Journ. f. Math., LXXIX, s. 343 (1868); na str. 346 tamże mowa jest o układzie wzorów „zasadniczych“ (System von

Fundamental formeln). Istnieją też obszary całkowitości bez podstawy skończonej (Porów. H i l b e r t, Göth. Nachr., 1891, s. 232, 233), te wszakże wyłączamy.

[2]) Collect. Papers, II, s. 250—275. Porówn do tego uwagi C a y l e y'a w IX-ym „Memoir", Phil. Trans., LCXI, s. 17—50 (1870).

[3]) Journ. f. Math., LXIX, s. 323—354 (1868). Według ustnej relacyi G o r d a n a do badania tej kwestyi pobudził go J o r d a n. Porówn. przedstawienie dowodu G o r d a n a przez C a y l e y'a, IX Mem. Transach., Lon. 1870, zwł. s. 45—50.

[4]) l. c., s. 343 i 346.

[5]) l. c., s. 327. W tem tkwi postęp w porównaniu ze skomplikowaną symboliką angielską.

[6]) l. c., s. 328.

[7]) l. c., s. 333.

[8]) l. c., s. 339.

[9]) Math. Ann., II, s. 227—280 (1870); V, s. 595—601 (1872). O kombinantach patrz tamże V, s. 95—122 (1872).

[10]) O formie sześciennej Math. Ann., I, s. 90—128 (1869), o dwukwadratowej w dziele C l e b s c h a-L i n d e m a n n a, I, s. 291 (1875). Porówn. szczegółowe wywody w Math. Ann., XIX, s. 529—551 (1882).

[11]) Math. Ann., V, s. 595. Zasadę „układów skombinowanych" zastosował później M e r t e n s do pojedyńczych klas form trojkowych i czwórkowych, Wien. Ber., XCV (1887) i nast. Porówn. uwagi w „Programie" G o r d a n a, s. 50.

[12]) Lipsk u Teubnera. Porówn. przejrzysty referat N ö t h e r a w Fortschr. d. Math., VII, s. 50—52.

[13]) Do tego celu służą zwłaszcza zawarte w pojęciu procesu fałdowania pojęcia pomocnicze: Stufe (gatunek), Rang (porządek), Dimension (wymiar).

[14]) l. c., s. 7.

[15]) Math. Ann., XVII, (1880), XXXI, (1888). Porówn., II. A. b.

[16]) l. c., § 19.

[17]) Dowód w t. II, § 20, 21. Reducenty stosowane są z korzyścią już w „Programie" (§ 8).

[18]) Fałdowanie jest w istocie swej nasunięciem, zastosowanem do iloczynów symbolicznych.

[19]) Klasa A_1 dla wszystkich rzędów składa się z utworów f, $(f,f)^2$, $[f, (f,f)^2]$. Jeżeli warunek $(f,f)^n = 0$ spełnia się tożsamościowo, to A_1 — po za przybywającym jeszcze niezmiennikiem,—przedstawia układ zupełny form f. Ma to ważność dla teoryi ciał foremnych. Porównaj I, B, b.

[20]) Przy dowodzie tego twierdzenia geometrycznego ujawnia się wartość pojęcia układów „względnie zupełnych", gdyż układ A_k według definicyi jest względnie zupełny mod. $(a\,b)^{2k+2}$, gdy tymczasem układ B_k jest takim mod. $(a\,b)^{2k+4}$. Przez nasunięcie obu układów—i tu właśnie tkwią ukryte właściwe trudności—otrzymuje się układ spółzmienników form f względnie zupełny mod. $(a\,b)^{2k+1}$, (który posiada jako moduł najniższy $(a\,b)^{2k+1}$), t. j. układ A_{k+1}.

[21]) Dla obu form jest $A_0 = f$, $B_0 = (f,f)^2$, $A_1 = f$, $(f,f)^2$, $[f, (f,f)^2]$. Dla f_5 jest $\varphi_1 = (f,f)^4$ formą kwadratową, a więc B składa się z φ_1 i z wyróżnika. Nasunięcia formy A_1 na B daje układ zupełny (porówn. l. c., s. 237).

Forma φ_1 formy f_6 jest dwukwadratową, a więc B_1 składa się z układu zupełnego φ_1. Nasunięcia formy A_1 na formę B_1 prowadzą do formy A_2, a ponieważ $\varphi_2 = (f,f)^6$ jest niezmiennikiem, przeto A_2 obok φ_2 jest zupełnym układem formy f_6 (porów. l. c, s. 275).

[22]) Torino Atti, XVI, t. 73—80.

[23]) Porówn. zwłaszcza pracę P e a n o w Giorn. Battag., XX, s. 79—101 (1882). Jeżeli przyrównamy do zera formę dwójkową o dwóch szeregach ilości zmiennych i określimy odpowiedniość dwóch elementów geometrycznych, szeregi zmiennych poddają się tu podstawieniom niezależnym od siebie.

[24]) Erlanger Ber., 1887; Math. Ann., XXXIII, s. 372—389 (1888). Dla form kwadratowych twierdzenie to i należący do niego układ podał najprzód S t u d y, pobudzony przez G o r d a n a do zbadania pytania ogólnego (por. S t u d y, Erlang. Ber., 1887, s. 385—388).

[25]) Torino Atti, XVII, s. 580—586.

[26]) Patrz np. C l e b s c h, Binäre Formen, § 58.

[27]) Batt. Giorn., XX, s. 293—301 (1882).

[28]) Zresztą najnowsze badania H i l b e r t a (patrz niżej) mają na celu wysnucie z ogólnych twierdzeń procesów wymiernych i przejrzystych, służących do istotnego obliczania układów zupełnych; obecnie nie można przewidzieć trudności rachunkowych, jakie nasunie to obliczanie.

[29]) Journ. f. Math., C, 223—230 (1886), w Wien. Ber., XCV, I, s. 1—6 (1889) uprościł on dowód o tyle, że nie potrzebuje już wnioskowania z n na $n+1$.

Należy tu wspomnieć o dwóch dowodach skończoności, pochodzących od J o r d a n a i S y l v e s t e r a, a podających odrazu granicę wyższą dla stopnia i rzędu utworów układu formy dwójkowej; pierwszy z tych dowodów ma punkt wyjścia w diofantowych równaniach G o r d a n a; drugi w modyfikacyi postępowania C a y l e y'owskiego. Porówn. J o r d a n, C. R., LXXXII (1876), LXXXVII (1878), L i o u v i l l e J. (3), II, s. 177—233 (1876), V, str. 345—379 (1879); S y l v e s t e r, Proc. of London, XXVII, s. 11—13 (1878), C. R., LXXXVI, s. 1437—1441, 1491—1492, 1519—1522 (1878). Porówn. wyżej II, A.

Zasługuje jeszcze na wspomnienie oryginalny dowód (dla form dwójkowych) C a y l e y'a, oparty na użyciu niezmienników niewymiernych, gdzie wszakże zasadnicze twierdzenie pomocnicze pozostało bez dowodu (Quarterly Journ., XVII, s. 137—147, 1882).

[30]) Twierdzenie to pochodzi od G o r d a n a, Math. Ann., VI, s. 23—28 (1875), Vorles. I, § 15.

[31]) Math Ann., XXXIII (1884), s. 223—226. Do tego odnosi się nota C a y l e y'a, (Math. Ann., XXIV (1889), s. 319—320, w której zaproponowaną jest odmiana procesu H i l b e r t owskiego. Popełniony tu błąd w rozumowaniu sprostował P e t e r s e n w Math. Ann., XXXV (1890), s. 110—112.

H i l b e r t w referacie o obu ostatnich notach (Fortschr. d. Math., XXI, s. 104) wyraźnie zastrzega się przeciwko mniemaniu, jakoby dowód jego wymagał rozszerzenia lub dopełnienia przy stosowaniu go do s p ó ł z m i e n n i k ó w.

[32]) Math. Ann., XXXVI, s. 473—534. Porówn. poprzednie komunikaty w Gött. Nachr., 1888, Nr. 16, s. 450—457; 1889, Nr. 2, s. 25—34 i Nr. 15, s. 423—430. W Math. Ann., XLI, s. 469—490, 1893 artykuł S t o r y'ego o teoryi H i l b e r t a. Dalej London M. S. Proc., XXIII, s. 265—277, 1892. Rozprawy H i l b e r t a, Math. Ann., XLII, s. 313—373, 1893 i G o r d a n a, tamże, 132—142.

[33]) Przyjęcie takiego „dowolnego" prawa dla szeregu nieskończonego występuje często w zasadach matematyki, porówn. np. szeregi zasadnicze G. C a n t o r a, wprowadzone celem uzasadnienia teoryi liczb niewymiernych. Jeżeli chcemy, to i szereg form H i l b e r t a przedstawia właśnie pewien rodzaj niewymierności, lecz ugruntowany zresztą na istocie samego pytania. Dodać wprawdzie należy, że istnieje kierunek w nauce, odrzucający wogóle procesy nieskończone tego rodzaju.

[34]) Istotna zaleta nowszych metod H i l b e r t a polega na tem, że wiążą one teoryę form najściślej z teoryą układów modułowych K r o n e c k e r a, oraz z teoryą ciał algebraicznych D e d e k i n d a i W e b e r a.

[35]) Porówn. przypisek 33-i.

[36]) Łatwo widzieć, że opisane wyżej procesy można wykonywać i w kierunku o d w r o t n y m, mianowicie, gdy od spółczynników, wolnych od x_n, przechodzimy do spółczynników, pomnożonych przez pierwszą potęgę zmiennej x_n i t. d. Lecz przytem można pominąć założenie, że najwyższą zachodzącą potęgą jest potęga $(r-1)$—a; można od tej

formy normalnej zupełnie odwrócić uwagę i pozwolić wykładnikowi zmiennej x_n przybrać wartość dowolnie wielką. Wypadnie tu wprawdzie najprzód szereg nieprzerwany form, przez które wszystkie formy danego szeregu dają się wyrazić liniowo. Jeżeli jednak zużytkujemy założenie, że twierdzenie, w mowie będące, stosuje się już do form o $n-1$ zmiennych, to każdy szereg nieskończony da się zastąpić skończonym.

Mimo, że ta zmiana pierwotnego postępowania jest bardziej skomplikowaną, ma ona tę wyższość, że zamiast procesów wymiernych wprowadza się jedynie połączenie całkowite i całkowito-liczbowe danych spółczynników, co daje możność bezpośredniego zużytkowania tych wyników dla teoryi liczb. Takiem jest jądro dowodu, wyłożonego w drugim rozdziale pracy Hilberta.

[37]) Przy stosowaniu tej metody w przypadku konkretnym należy zważyć, że prawo, według którego postępują formy w pojedyńczych kolumnach spółczynników wogóle jest całkiem odmiennej natury niż pierwotne prawo szeregu.

[38]) Kronecker w swojem piśmie jubileuszowem (Festschrift), s. 18, rozwija podobne twierdzenie dla jednej zmiennej niejednorodnej. Gdybyśmy wszakże jego wzór uczynili jednorodnym, to funkcya całkowita po prawej ręce otrzymałaby mianownik, mianowicie potęgę zmiennej, sprawiającej jednorodność. U Kroneckera nie ma tedy obszaru całkowitości, lecz jest tylko obszar wymierności.

[39]) Uporządkowanie niezmienników na szereg daje się według Hilberta ominąć. Z układu niezmienników formy f wyjmijmy dwie formy i_1, i_2, niepodzielne jedna przez drugą. Następnie wybierzmy trzecią formę i_3, która nie daje się wyrazić jako kombinacya liniowa $A_1 i_1 + A_2 i_2$ dwóch poprzednich, następnie czwartą, nie dającą się złożyć liniowo z form i_1, i_2, i_3, i t. d. Szereg tak powstających form i musi się przerwać według pierwszego twierdzenia pomocniczego (l. c., s. 522).

Postępowanie to, dające się bezpośrednio stosować do jakichkolwiek układów form (porówn. s. 478), jest w istocie swej związane z założeniem, że formy układu należą do określonego obszaru wymierności.

Dowód symboliczny Hilbertowskiej metody otrzymywania utworów niezmienniczych (w dziedzinie trójkowej) podał H. White (Am. J., XIV, s 253—290, 1892).

[40]) Twierdzenie to dla $q=0$ tkwi już implicite w dowodzie (drugim) twierdzenia głównego symboliki (Gordan, Vorlesungen, II, § 9), że każdy niezmiennik formy dwójkowej daje się przedstawić pod postacią iloczynu symbolicznego. Jest godnem uwagi, że jądro tego dowodu jest niesymbolicznem.

Mertens dowiódł tego samego twierdzenia w Wien. Ber., XCV, s. 942—991 (1887) i stosował je następnie systematycznie w szeregu prac w Wien. Ber., w celu otrzymania układów zupełnych na drodze niesymbolicznej, porówn. II, A, b.

Dla form pierwotnych nieliniowych twierdzenie w postaci podanej w tekście znajduje się już u Clebscha, Journ f. Math., LIX, s. 7 i nast.

[41]) Porówn. II, A. d.

[42]) l. c., s. 492. Porówn. notę Schönfliesa, Gött. Nachr., 1891, str. 339—344.

[43]) Z punktu widzenia teoryi form nie można nic powiedzieć przeciwko orzeczeniu Hilberta; jeżeli wszakże punkt widzenia grupowy będziemy uważali za równouprawniony, to za równanie zasadnicze pytania przyszłości należy uważać następujące: wyznaczyć wszystkie zupełne „podukłady" utworów niezmienniczych szeregu form pierwotnych, t. j. takich rozmaitości częściowych całego układu niezmienniczego, które same już mają charakter układu zupełnego. Porówn. II, A, b.

O dalszych rezultatach omawianej pracy Hilberta, a zwłaszcza o pojęciu zasadniczem „funkcyi charakterystycznej modułu", patrz obszerne sprawozdanie referenta w Fortschr. d. Math., t. XXII.

[44]) Gött. Nachr., 1891, s. 232—242; 1892, s. 2—12. W dalszym ciągu (Gött. Nachr., 1892, Nr. 12, s. 11) Hilbert rozwiązuje ogólnie ważne zadanie, podane w tekście a doty-

czące wyznaczenia układu utworów niezmienniczych dla szeregu form pierwotnych, przez które to utwory dają się wyrazić wszystkie inne, jako funkcye całkowite algebraiczne. Zadanie sprowadza on do znalezienia wszystkich form zerowych m-go rzędu o n zmiennych (t. j. form, których niezmienniki znikają tożsamościowo) i to się daje uskutecznić przy pomocy pewnej postaci kanonicznej tych form. (Przykładowo zostały obliczone wszystkie formy zerowe kanoniczne aż do rzędu szóstego).

Ustanowienie tedy „układów pełnych" nie przedstawia istotnych trudności.

[45]) Festschrift, § 6.

[46]) Wykład, miany w r. 1891 na zgromadzeniu przyrodników w Halli. Porówn. sprawozdanie urzędowe, str. 61—62.

[47]) Patrz II, B, b.

[48]) Dla ilustracyi Hilbert przytacza twierdzenie przygotowawcze: „Wszystkie niezmienniki zasadniczej formy trójkowej dają się przedstawić jako funkcye całkowite algebraiczne tych niezmienników, których waga nie przekracza liczby $9n(3n+1)^{2\cdot\cdot}$. (Gött. Nachr., 1892, s. 12). Z ustnych informacyj wiemy, że Gordan znalazł ogólne wyrażenie dla granic wyższych.

[49]) Najbardziej nauczające przykłady tego rodzaju dają układy jednoczesne, należące do (f_3, φ_3), (f_3, φ_4), (f_4, φ_4) i układ formy f_8.

Dla przypadku (f_3, φ_3) wypowiedział najprzód Sylvester, C. R., LXXXIX, s. 828, opierając się na metodzie liczącej (porów. II, A, e), że dwa spółzmienniki listy Salmona-Clebscha muszą być przywiedlnemi. Przy tem założeniu d'Ovidio podał w 1880 (Atti di Tor., XV, s. 267—270) ich zestawienie; wynik ten potwierdził Gerbaldi (tamże) za pomocą metody, niezależnej od powyższego założenia. Następnie znów Sylvester, C R., LXXXVII, s. 445—448, 477—481 (1878) zmniejszył układ Gordana-Gundelfingera (f_3, φ_4) o trzy formy. On także zapowiedział zmniejszenie układu Gordana-Bertini'ego (f_4, φ_4) o dwie formy w C. R., LXXXIV, s. 1285—1289 (1877), Am. J., II, s. 324—329 (1879). Rachunek ten wykonał d'Ovidio, Atti di Tor., XV, s. 301—304 (1880). Potwierdzenie znaleść też można u Stroha, Math. Ann., XXII, s. 290—296 (1883).

Co się wreszcie tyczy przypadku f_8, to v. Gall w Math. Ann., XVI, s. 456 (1880) udowodnił, że liczba indywiduów układu tej formy zgadza się z podaną przez Sylvestera (C. R., LXXXIV, s. 240—244, 532, 534, (1877)), prócz jednej formy, której nie udało mu się sprowadzić do innych, lecz której przywiedlność za pomocą długich rachunków, C. R., XCIII, s. 192—196, 365—369, Am. J., s. 62—85 (1881), wykazał. Dopiero Stroh, l. c., bezpośrednio pytanie to rozstrzygnął; metodę swoją, opierającą się na związkach pomiędzy nasunięciami pewnego rzędu (porówn. II, A, d), później uzasadnił ogólnie. Math. Ann., XYXI, s. 444—454 (1888).

[50]) Porówn. II, A, e.

[51]) Journ. f. Math., LXIX, s. 323—354. Porównaj też Maisano: rozprawy w Rom. Acc., L. Mem. (3), XIV, 1883; XIX, 1884.

[52]) Math. Ann., XVII, s. 31—52, 139—152, 456 (1880)

[53]) Math. Ann, XXXI, s. 318—334 (1888). Porów. Krey. Rozprawa, Striegau, 1874.

[54]) Program, Stuttgart, 1869, s. 1—43. Według uwagi tu uczynionej układ wzmiankowany pochodzi od Gordana.

[55]) Program, Darmstadt, 1880.

[56]) Program, Lemgo, 1873.

[57]) Math. Ann., II, s. 217—281 (1870).

[58]) Batt. Giorn., XIV, s. 1—14 (1876); przedrukowane w Math. Ann., XI, s. 30—41 (1877).

[59]) Patrz przedstawienie ogółu tych badań w Clebscha „Theorie der binären Formen", Lipsk, 1872 i uproszczenia w Gordana „Vorlesungen", II, Lipsk, 1887.

60) S. M. F. Bull., XV, s. 45—61 (1887).

61) Math. Ann., I, s. 90—128 (1869). Co do teoryi patrz jeszcze Math. Ann., I, str. 359—400, XVII, s. 217—233 (1880); porówn. wyczerpujące przedstawienie u Clebscha i Gordana, Math. Ann., VI, s. 436—512 (1873). Prostszą konstrukcyę układu zawdzięczamy Gundelfingerowi, Math. Ann. IV, str. 144—168 (1871), porówn. tamże, I, s. 442—447 (1872).

Cayley w przypadku normalnej formy Hessego dla $C_3: ax^3+by^3+cz^3+6dxyz$ podał wyrażenie utworów przy pomocy spółczynników, Am. J., IV, s. 1—16 (1881); tu znajduje się także zupełny przegląd dawniejszej literatury.

Nakoniec Dingeldey, Math. Ann., XXXI, s. 157—176 (1888), podał analogiczny przegląd dla układu (stosowanego w teoryi funkcyj eliptycznych) formy kanonicznej $xy^2-4z^3+g_2x^2y+g_3x^3$, oraz formy specyalnej axz^2-4by^3. Znikanie tej ostatniej odpowiada krzywej C_3 z punktem zwrotu.

62) Wien Ber., XCVII, s. 437—518 (1888). Co do metody stosowanej patrz poprzednią pracę tegoż autora w Wien. Ber., XCV, s. 942—991 (1887).

63) Math. Ann., XVII, s. 217—233. W tablicy końcowej spisane są 54 formy układu zupełnego. Skończoność układu ogólnej krzywej C_4, według Gordana, wskazaną już jest w Clebscha-Lindemanna „Vorlesungen", I, s. 174, nota (1875).

64) Batt. G., XIX, s. 197—237 (1881). Znajdują się tu także formy 6-go stopnia z wyłączeniem form, zawierających jednocześnie x i u. Porówn. artykuł tegoż autora w Pal. Rend., I, s. 54—56 (1886).

65) Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen etc.", I, s. 288 i nast. (1875). Tabelę 20 form układu znajdujemy na str. 291. Math. Ann., XIX, s. 529—552 (1880).

66) S. M. F. Bull., XVIII, s. 1—80 (1890). Zadanie o utworzeniu zupełnego układu dla dwóch C_2 sprowadza Perrin do zadania, poprzednio przez siebie rozwiązanego (patrz przypisek 60), mianowicie do utworzenia zupełnego układu czterech form dwójkowych, z których dwie są liniowe, dwie zaś kwadratowe.

Toż samo odnosi się do syzygij. Porówn. szczegółowe sprawozdanie referenta w Fortschr. d. Math., XXII. Zasadę tej metody zastosował najprzód Brioschi do formy C_4 (Annali di Mat. (2), VII, s. 202—216. 1876); występuje ona też jako podstawowa w badaniach Brilla i Forsytha. Można ją wprost sformułować w ten sposób, że gdy formę trójkową $C_n(x_1, x_2, x_3)$ uporządkujemy według potęg ilości x_3, to utwory niezmiennicze formy C_n są pewnemi agregatami utworów (dwójkowych) jednoczesnych niezmienniczych, należących do spółczynników rozwinięcia. Zresztą każdy z czterech wymienionych autorów przedstawia tę zasadę, niezależnie od innych.

Co do układu dwóch form C_2 patrz także Osgood, Am. J., XIV, s. 262—273 (1892).

Co do związków pomiędzy formami układu porówn. jeszcze Rosanes, Math. Ann., VI, s. 264 i nast. (1875), jako też Gerbaldi, Annali (2), XVII, s. 161—196 (1889); w ostatniej pracy dyskutowane jest szczegółowo związane z tem pytania o rzeczywistości.

67) Batt. G., XXIV, s. 141—157 (1886). Układ obejmuje 127 utworów.

68) Wien. Ber., XCVIII, s. 691—739 (1889). Mertens podał też wyraźnie zupełny układ (47 utworów), należący do trzech form F_2. Wien. Ber., 1896, s. 367—384.

69) Wien. Ber., XCVII, s. 519—536 (1888).

70) Math. Ann., XXXIII, s. 372—389 (1889). Układ jest złożony z 38 form. Porówn. poprzednie noty Study'ego i Gordana w Erl. Ber., 1889. Metoda daje się rozciągnąć na formy wyższe. Układ zupełny niezmienników podał już wcześniej Capelli, Batt. G., XVIII, s. 69—148 (1879).

Le Paige badał formy trójliniowe i czworoliniowe z pomiędzy form dwójkowych ze zmiennemi spółpodstawieniowemi, C. R., XCII, s. 1048—49; 1103—5; XCIII, s. 264—265, 509—512 (1881); C. R., XCIV, s. 69—71; Torino Atti, XVII, s. 299—326 (1882). Badania te miały przeważnie na widoku cel geometryczny i nie dążyły do zupełności.

71) Math. Ann., I, s. 359—400 (1869). Po obliczeniu forma pośrednia tożsamościowa u_x zawiera układ zupełny 7 form. (Patrz zwłaszcza str. 373). Metoda daje się zastosować do form wyższych.

72) Wien. Ber., XCVIII, s. 13—32 (1890).

73) Należą tu np. takie podukłady, których formy zawierają tylko część zmiennych odnośnej dziedziny, dalej klasy układów Gordanowskich $A_1, A_2, \dots$ („Vorlesungen, II, § 21) i inne. (Porówn. wyżej przypisek 43).

74) Math. Ann., V, s. 95—122 (1875). Według ustnej relacyi Gordan rozwinął w ostatnich czasach zupełny układ kombinantów dwu form C_2 („stożkowych"); liczba form okazała się względnie nieznaczną.

75) C. R., XCVII, s. 27—31 (1883). Otrzymano 26 form układu.

76) Math. Ann., XXXV, s. 433—456 (1889). Math. Ann., XXXVI, s. 134—153; XXXVII, s. 229—272 (1890).

77) Porówn. z tem równoległe pod pewnym względem grupowo-teoretyczne badania Lagrange'a, odnoszące się do wzajemnej zależności wymiernej funkcyj „podobnych". Dalsze rozwinięcia tych myśli u Königa, Math. Ann., XVIII, s. 69—77 (1881).

78) Porówn. podane we wstępie do tej pracy uwagi o badaniach Hermite'a. Igel (Wien. Gerold., 1889) uzasadnił innym sposobem teoryę form stowarzyszonych, mianowicie w związku bezpośrednim z rozwiązywaniem równań algebraicznych.

79) Gött. Nachr., 1870, s. 405—409, lub Math. Ann., III, s 265—267 (1871). Cayley szczegółowo badał przedstawienie typowe formy f_5 na podstawie form stowarzyszonych Clebscha. X. Mem. Phil. trans., 1878, s. 603—661.

80) Journ. f. Math., LXXIV, s. 87—91 (1861). Porów. przedstawienie uproszczone tegoż autora u „Salmona-Fiedlera", s. 459—463 (1877). Gordan w ostatnich czasach podał odwrócenie układu równań Clebscha-Gundelfingera, Math. Ann., s. 1—24 (1892), przedstawiwszy formy φ Hermite'a, jako funkcye całkowite wymierne form φ, χ. Można z góry poznać, w jaki sposób pierwsze formy dają się wyrazić jako iloczyny ostatnich; zadanieześrodkowuje się w szukaniu spółczynników wymiernych C tych iloczynów. Porówn. Bärthlein, Rozpr.. Erlangen, 1887, gdzie obliczanie kolejne spółczynników C poprowadzono dalej niż u Clebscha. Jest godnem uwagi, że zupełnie też same ilości C służą do rozwiązania dwu następujących zagadnień podstawowych: 1) Wyrazić spółczynniki formy pierwotnej dwójkowej, jako funkcye wymierne dwu pierwszych spółczynników, oraz głównych wyrazów form φ, χ. 2) Wyrazić te spółczynniki jako funkcye wymierne dwu pierwszych z nich, oraz obu pierwszych spółczynników formy φ.

Spółczynniki C zależą najprzód od pewnego specyalnego układu równań kwadratowych; Gordanowi udało się układ ten zmienić na liniowy względem spółczynników C.

Tym sposobem rozwiązano także i zadanie dalsze, dotyczące wyrażenia wymiernego wszystkich całkowito-wymiernych rozwiązań równania różniczkowego dla dwójkowych „niezmienników różniczkowych" przez najprostsze z tych rozwiązań. (Porów. Forsyth, Mess., Nr. 202, 1888).

81) C. R., LXXXVI, s. 448—450 (1878), Am. J., I, s. 118—124 (1878).

82) Wien. Ber., lipiec, 1891, 29 s., Paźdz., 1891, 5 s. Zdaje się, że wyrażenie $\Phi_n = 0$ zgadza się z wyrażeniem, podanem przez Hermite'a dla przekształcenia Tchirnhausenowskiego (porów. wyżej uwagi wstępne w niniejszym referacie).

83) C. R., CIV, s. 108—111; 220—223; 280—283 (1888).

84) Am. J., XII, s. 1—60; 115—160 (1887), (ternaryanty). Cambr. Phil. Trans., XIV, s. 409—466 (1888), (kwaternanianty). W dziedzinie trójkowej rozpatruje autor przypadki formy kwadratowej sześciennej, dwukwadratowej oraz układ trzech form kwadratowych; nadto zaj-

muje się jeszcze formami, które, prócz ilości x, zawierają jeszcze ilości u: formę liniowo-liniową, dwie formy liniowo-liniowe, formę dwukwadratowo-liniową, sześcienno-liniową, wreszcie formę sześcienno-sześcienną. W dziedzinie czwórkowej stosuje autor swoją teoryę ogólną do jednej i do dwu form kwadratowych (względem ilości x), następnie do formy (względem x i u) liniowo-liniowej, wreszcie do następnych kompleksów: liniowego, do układu dwu i trzech kompleksów liniowych, wreszcie do kompleksu kwadratowego.

85) Patrz pracę cytowaną poprzednio na drugiem miejscu.

86) Patrz początek niniejszego referatu.

Na innej drodze to uogólnienie uskutecznili Grassmann, Math. Ann., VII, s. 538—548 (1874) i Christoffel, Math. Ann, XIX, s. 280—290 (1892).

87) Math. Ann., I, s 57—89 (1869). Porównaj z tem poprzednio cytowaną metodę Forsytha.

88) Math. Ann, XVII, s. 359—379 (1880). Liczba form stowarzyszonych, włączając w nie formę pośrednią tożsamościową u_x wynosi 8, jak to zresztą wynika już z pracy Clebscha-Gordana, Math. Ann., I, 57—89.

89) Porów. referat niniejszy, przyp. 24 do „Wstępu".

90) Annali (2), I, s. 23—79. Porównaj przedstawienie u Gordana: „Vorlesungen etc.", II, § 24, 29. Rezultaty wspomnianej na pierwszem miejscu rozprawy stosuje Gordan, Annali (2), I, s. 367—372 (1867), do równania modułowego 6-go rzędu Jacobi'ego.

91) S. M. F. Bull., V, s. 113—126 (1877); VI, 195—208 (1878).

92) Porów. niżej, II, D, b.

93) Math. Ann., I, s. 173—194 (1869).

94) Math. Ann., I, s. 210—224 (1869).

95) Journ. f. Math., LVII, s. 371—375 (1860).

96) Patrz Clebscha „Binäre Formen", § 101.

97) Journ. f. Math., LXVII, s. 371—380 (1867).

98) Math. Ann., VII, s. 452—456 (1874). Tamże, VIII, s. 444—452 (1875), Wiederhold podaje w postaci znikającego niezmiennika warunek na to, aby dwie formy f_n były biegunowemi formy f_{n+1}.

99) Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen etc.", I, s. 900. Porówn. rozprawę Friedricha, Giessen (1886) i E. Meyera, Królewiec (1888). Trzy formy f_5, jako drugie pochodne formy f_5, badał Igel, Wien. Ber., LIII, s. 155—184 (1887) i zasosował to badanie do Jerrardowskiego przekształcenia równania rzędu 5-go.

100) Journ. f. Math., LVII, s. 371—375 (1860).

101) Patrz referat niniejszy, przyp. 18 do „Wstępu".

102) Journ. f. Math., LXXX, s. 73—85 (1875).

103) Math. Ann., VII, s. 449—451 (1874).

104) Math. Ann., XX, s. 529—552 (1882). Rozwiązanie wskazanego zadania (§ 14) wymaga uprzedniego rezwiązania szeregu zadań pomocniczych, mianowicie przedstawienia typowego: 1) dwu form C_2 i jednej C_1; 2) jednej formy C_2 przez pęki form C_2 i formę C_1; 3) trzech C_2. Patrz §§ 11, 12, 13.

105) Math. Ann, XXXIV, s. 321—331 (1889). O innym rodzaju przedstawienia typowego formy f wspomniał Klein w wykładach o równaniach algebraicznych (półrocze zimowe 1891/2); mianowicie forma f, po pomnożeniu jej przez wyróżnik, daje się przedstawić pod postacią $| a_{ik} + \lambda b_{ik} |$.

Nadmieniamy wreszcie o typowem przedstawieniu całek eliptycznych (i abelowych), wprowadzonem przez Weierstrassa i rozwiniętem w ostatnich czasach zwłaszcza przez Kleina i jego uczniów. Porów. zasadnicze prace Kleina w Math. Ann., XVII, s. 133—138 (1880) i Leipzig. Abh., 1885. Dalej Bruno, Am. J., V s. 1—25 (1882). Burkhardt, Rozprawa, Monachium, 1887, White, Nova Acta, LXII, Nr. 2, s. 43—128, dalej

tekst późniejszy w niniejszej rozprawie w II, B, b i wykład całości tej rzeczy w Halphena Traité des fonctions elliptiques, T. II, Paryz, 1888.

106) Math. Ann., XXXVI, s. 473—534 (1890), zwłaszcza na str. 534.

107) Rozprawy, III, IV, V zawierają syzygie (pierwszego rodzaju) formy f_5 aż do stopnia piątego co do spółczynników; w rozprawie, VIII, Memoir, 1867, formy szóstego stopnia; w X (1878) wreszcie na podstawie funkcyi tworzącej „realnej" rozwija metodę, za pomocą której dla każdego danego stopnia i rzędu otrzymuje się najmniejszy układ syzygantów, z którego powstają inne przez kombinacye liniowe. Jako zastosowanie podaje listę syzygij aż do stopnia 14-go.

108) Annali (2), XI, s. 291—304 (1883). Dla dziedziny trójkowej, Annali (2), XV 235—252 (1887) tenże autor stosuje swoje syzygie do wyprowadzenia pewnych form kanonicznych, ważnych przy rozwiązywaniu równań stopnia piątego (i szóstego).

109) Sylvester, Am. J., IV, 41—42 (1881), zwłaszcza s. 19—25. Hammond, tamże, VIII, s. 10—26 (1885).

110) C. R., XCVI, s. 232—235, 1564—1567 (1883).

111) Clebsch, „Binäre Formen", § 54. Porówn. Gordan, „Vorlesungen", II, § 4. W §§ 11 i 12 szerokie zastosowanie do syzygij układu form kwadratowych (dwójkowych).

112) Math. Ann., XXXI, s. 424—440—dwie formy f_3 (1888). Ib., XXXIII, s. 197—223, dwie f_4 (1888); Ib., XXXIV, s. 332—353—dwie f_4 (1889); Ib., XXXV, s. 63—81,—forma f_6 (1889).

113) S. M. F. Bull., XI, s. 88—107 (1883); C. R., XCVI, s. 426—430, 479—482, 563—565, 1717—1721, 1776—1779, 1842—185 (1883). Tąż samą metodą redukcyjną posługiwał się wcześniej Sylvester dla znalezienia wspólnych własności spółzmienników formy dwójkowej dowolnie wysokiego rzędu, Am. J., V, s. 79—137 (1882—1883). Formy f_5 i f_6 badał niedawno d'Ovidio, Palermo Rend., VI, s. 225—233; VII, s. 1—4 (1893) i Torino Atti, XXVII, s. 535—563 (1892); XXVIII, s. 118—133, 447—451 (1893).

114) Am. J., VII, s. 327—344; f_6 (1884); Ib., VIII, s. 19—25; f_5 (1885).

115) Math. Ann., XXXIV; patrz s. 332 (1889).

116) Tamże, XXXVI, s. 154—156 (1890).

117) Tamże, XXXIII, s. 61—108 (1888); forma f_5, jako przykład. Porów. tamże, XXXIV, s. 354—370 (1890). Jądro metody w Math. Ann., XXVI, s. 444—454 (1888); zastosowanie do f_6, tamże, XXXIV, s. 306—318 (1889) i XXXVI, s. 262—303.

118) Patrz twierdz. ogólne w Math. Ann, XXXIII, § 22.

119) Patrz Math. Ann., XXXVI, s. 262.

120) Porów. II, C, a.

121) Mac-Mahon poświęcił oddzielną rozprawę syzygiom pomiędzy perpetuantami, Am. J., X, s. 149—168 (1887).

122) Według relacyi prywatnej Hilbert utworzył układ 14 syzygij dla układu trzech form kwadratowych i wykazał, że pierwszy z nich jest układem zupełnym. Porów. Math. Ann., XXXVI, s. 534.

123) Porów. notę Sylvestera w Am. J., IV, s. 62, (1881).

124) Patrz „Wstęp" do pracy niniejszej.

125) Nowa teorya Cayle'a w IX, Mem. Phil. Trans., 1870, s. 17—50, X, Mem., ib. 1878, s. 603—661.

126) 1877. C. R., LXXXXIV, s. 240—244, 522—534, 974—975, 1113—16, 1207—11, 1285—89, 1350—62, 1427—30. C. R., LXXXV, s. 991—995, 1035—39, 1091—3.

1878. Phil. Mag., s. 1—12 i Lond. Proc.; Journ. f. Math., LXXXV, s. 89—114; C. R., LXXXVI, str. 1437—41, 1491—2, tamże LXXXVII, str. 242—4, 287—9, 445—8, 505—9, 899—903; Am. J., I, s. 370—378.

1879. Am. J., II, s. 71—84, 98—9; C. R., LXXXIX, s. 395—6.
1883. A. J., V, s. 241—250.

Obszerne tablice funkcyj tworzących, form zasadniczych i syzygij, opracowane przez Franklina na podstawie metod Sylvestera w Am. J., II, s. 223—251, 293—306 (1879), tamże, III. s. 221—329 (1880), V, s. 241—250 (1882). Franklin ogłosił też zwięzły wykład głównych twierdzeń Sylvestera i Cayley'a w Am. J., III, s. 128—154 (1880).

127) Porównaj przedstawienie w „Bruno", § 12, według metod Cayley'a.

128) Phil. Mag., 1878, s. 1—12; Journ. f. Math., s. 89—114 (1878).

Tegoż twierdzenia dowiedli różnemi metodami: Capelli, Rom. Acc. L. Mem., XII, s. 1—62 (1881), Hilbert, Math. Ann., XXX, s. 15—29 (1887), zwłaszcza s. 20, Stroh, ib. XXXI, s. 441—443 (1888). Study, „Methoden", § 9 (1887), Elliot rozszerzył granice twierdzenia w Lond. M. S. Proc., XXXIII, s. 298—304 (1892) i XXXIV, s. 21—36 (1893).

129) W Mess. (2), VIII, s. 1—8 (1878) Sylvester podał dogodne prawidło do obliczania liczby Δ. Por. Franklin, Am. J., II, s. 187—188 (1879).

130) „Introductio in Analysin.", I, § 304.

131) Cayley na przykładzie formy f_7 pokazał, jak najdogodniej sprawić, aby funkcya tworząca miała możliwie mało wyrazów. Am. J., II, s. 71—84 (1879). Liczniki funkcyi tworzącej reprezentacyjnej dla formy f_7 Sylvester i Franklin nie mogli zrazu przedstawić pod postacią skończoną; tę trudność rozwiązał Hammond (Math. Ann., XXXVI, s. 225—261, 1890), gdy przedtem v. Gall znalazł był niektóre nieprzywiedlne niezmienniki tej formy f_7, nie zauważone przez Sylvestera.

132) Anglicy używają skrócenia „Repr. G. F.".

133) Am. J., II, s. 224.

134) Cayley nie spostrzegł tych syzygij drugiego rodzaju z powodu błędnego wniosku (II. Mem., 1856), że forma f_5 nie posiada skończonego zupełnego układu form zasadniczych. Patrz Cayley, VIII. Mem. Phil. Trans., 1870, s. 513.

135) Am. J., IV, 41—61.

136) Toż samo zdziałać można za pomocą „realnej" funkcyi tworzącej Cayley'a (X. Mem.), powstającej z Repr. G. F., gdy występujące w niej formy zasadnicze zastąpimy literami $a, b, c, \ldots$ Porów. Sylvester, Am. J., IV, s. 57.

137) Am. J., VIII, s. 19—25 (1885); Hammond dla f_6, Am. J., VII, s. 327—344 (1885) i dla (f_2, φ_2), tamże, VIII, s. 138—155 (1886).

138) Patrz wykład Franklina w Am. J., VII, s. 130—132.

139) Lond. Proc., XIV, s. 85—88; Am. J., V, s. 218—228 (1883). Uwagi Cayley'a w Lond. Proc., XIV, s. 88—91. Hopk. Circ., II, s. 85—86—150, III, s. 13 (1883—1884).

140) Patrz pracę cytowaną na drugiem miejscu.

141) Am. J., VII, s. 26—47 (1884). Por. II, C, a. Dalej Hammond, Am. J., VIII, s. 104—126. Stroh rozwinął te badania za pomocą metody symbolicznej; jego wyniki są bardzo prostej postaci, Math. Ann., XXXVI, l. c., § 10, 11.

142) J. Liouville'a (3), II, s. 177—233 (1876); V, s. 345—79 (1879). Noty w C. R., LXXXI, s. 495—8 (1875); LXXXII, s. 269—70 (1876); LXXXVII, s. 202—4 (1878). W pierwszej rozprawie przegląd ogólny teoryi Gordana.

143) Patrz rozprawę cytowaną na drugiem miejscu.

144) Am J., II, s. 223—51.

145) Lon. Proc., XXVII, s. 11—13 (1878).

146) C. R., LXXXVI, s. 1437—41; 1491—2, 1519—22.

147) „Fondamenti di une teoria generale dello forme algebraiche", Mem. Rom. Acc. L., XII, s. 1—72 (1882); szersze rozwinięcie w Batt. G., XX, s. 293—301 (1882); pewne formy specyalne, np. niezmienniki jednego rzędu we wszystkich szeregach zmiennych, badał już wcześniej, Batt. G., XIX, s. 87—116 (1881). Rozszerzenie zagadnienia na formy o większej liczbie zmiennych spółpodstawieniowych, poddanych niezależnym od siebie podstawieniom, w Mem. Rom. Acc. L., XV (1883). I tu zadanie sprowadza się do znalezienia wszystkich rozwiązań całkowitych układów równań przy rozkładzie liczb. Twierdzenie pomocnicze są zebrane w Batt. G., XXI, s. 343—355 (1883).

148) Patrz pracę cyt. na drugiem miejscu.

149) Rozszerzenie tego twierdzenia także w Study'ego „Methoden", s. 100. Jeżeli mamy r form pierwotnych dwójkowych rzędów $n_1, n_2, \ldots, n_r$, to liczba wszystkich niezależnych spółczynników o stopniach $p_1, \ldots, p_r$ jest: $\binom{n_1+p_1}{p_1}\binom{n_2+p_2}{p_2}\cdots\binom{n_r+p_r}{p_r}$.

W dziedzinach wyższych istnieje odpowiednia liczba dla „spółzmienników normalnych". Por. Stroh, Math. Ann., XXII, zwłaszcza s. 405 (1883).

150) „Théorie générale etc.", 1891, Rozdz. VII. Tu liczenie uskutecznia się dla pewnego gatunku spółzmienników; ogólnie zaś w Bull. Belg. (3), XXI, s. 437—51 (1891). Por. II, D, a.