Ekspedycya, którą obserwatoryum berlińskie wysłać pragnęło do Norwegii w celu przeprowadzenia obserwacyj, dla których rachunki wyżej wymienione miały być podstawą, z powodu braku dostatecznych funduszów nie doszła do skutku. Rezultaty te jednakże zakomunikowane zostały jednej z ekspedycyj angielskich, która zajęła się tym przedmiotem i miała mu poświęcić specyalną uwagę; prócz tego centralne biuro meteorologiczne w Sztokholmie obiecało zakomunikować je rozmaitym nauczycielom, lekarzom, i t. p., osiedlonym w okolicach, objętych rachunkiem. Wszystkie usiłowania spełzły wszakże na niczem, gdyż, jak wiadomo, w czasie zaćmienia na całem terytoryum pasa całkowitości panowała niepogoda.

TEORYA PRZEKSZTAŁCENIA PFAFFA.

PODAŁ

C. RUSJAN.

Pfaff[1]), chcąc dać ogólny sposób całkowania równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, przedstawił to zadanie, jako szczególny przypadek ogólniejszego zadania o całkowaniu równania różniczkowego zwyczajnego o parzystej liczbie zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0, \tag{1}$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ są jakiekolwiek funkcye analityczne tychże zmiennych.

W przypuszczeniu, że spółczynniki tego równania X nie czynią zadość pewnym warunkom, Pfaff w celu znalezienia całek tego równania, używa specyalnego przekształcenia $2n$—1 zmiennych $x_2, \ldots, x_{2n}$ na nowe zmienne $y_2, \ldots, y_{2n}$, mającego tę własność, że w nowej postaci danego równania spółczynnik przy dx_1 jest równy zeru, a sama zmienna x_1 zawiera się w pozostałych spółczynnikach równania tylko we wspólnym ich czynniku μ; więc przekształcone równanie ma postać:

$$\mu\,(Y_2\, dy_2 + \ldots + Y_{2n}\, dy_{2n}) = 0,$$

[1]) Abh. der mathem. Klasse der Königlich-Preussischen Acad. der Wiss. aus der Jahren, 1814—15: „Methodus generalis, aequationes differentiarum particularium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis inter quotcunque variabiles complete integrandi" (str. 76—136).

gdzie $Y_2, \ldots, Y_{2n}$ nie zawierają zmiennej x_1, lub postać:

$$Y_2\, dy_2 + \ldots + Y_{2n}\, dy_{2n} = 0.$$

Co do tego ostatniego równania o nieparzystej liczbie zmiennych, Pfaff dowodzi, że zawsze można do całek równania:

$$Y_3\, dy_3 + \ldots + Y_{2n}\, dy_{2n} = 0,$$

o parzystej $2n-2$ liczbie zmiennych y dodać jeszcze jednę całkę tak, aby nowy układ całek czynił zadość danemu równaniu.

W ten sposób Pfaff za pomocą tego przekształcenia sprowadził sprawę całkowania równania o parzystej $2n$ liczbie zmiennych do całkowania równania także o parzystej $2n-2$ liczbie zmiennych. Postępując z tem ostatniem równaniem w sposób podobny, Pfaff dowiódł, że równanie (1) o $2n$ zmiennych x posiada n całek. Co się tyczy równania:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n+1}\, dx_{2n+1} = 0, \tag{2}$$

o nieparzystej $2n+1$ liczbie zmiennych x, Pfaff twierdzi, iż nie daje się ono traktować w powyższy sposób z tego powodu, że wyżej wspomniane przekształcenie wogóle nie daje się do niego stosować. Aby to było możliwem, trzeba, by spółczynniki równania x czyniły zadość pewnym warunkom, których Pfaff nie daje w ogólnej postaci, lecz tylko na przykładzie równań o 3 i 5-ciu zmiennych.

Równanie to można wszakże zcałkować w inny sposób: kładąc jednę ze zmiennych x, np. x_{2n+1} = stałej, całkujemy równanie:

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0,$$

o parzystej liczbie zmiennych, które ma n całek. Pfaff, jak wyżej wspomniano, pokazał, że można dodać jeszcze jednę całkę tak, że te $n+1$ całek czyni zadość danemu równaniu (2) o nieparzystej $2n+1$ liczbie zmiennych x. Równanie:

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_p\, dx_p = 0$$

posiada przeto $\frac{p}{2}$ całek, jeżeli p jest liczbą parzystą, i $\frac{p+1}{2}$ całek, jeżeli p jest liczbą nieparzystą, w przypuszczeniu, że spółczynniki równania X nie czynią zadość pewnym warunkom.

Tych rozumowań Pfaff nie przeprowadził w postaci ogólnej, lecz dla równań od 3-ch do 10-ciu zmiennych.

Co się tyczy wzorów powyższego przekształcenia, Pfaff dał bez dowodu dwa ogólne sposoby tworzenia tych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego:

$$\frac{dx_1}{M} = \frac{dx_2}{M_2} = \ldots = \frac{dx_{2n}}{M_{2n}},$$

z których możemy je wyznaczyć. Trudność przedstawienia tych równań w postaci ogólnej tłómaczy się tem, że $M_1, \ldots, M_{2n}$ są wyznacznikami, których teorya w owym czasie nie była dostatecznie znaną.

Pfaff nie bada przypadków, w których liczba całek, wskutek pewnych własności spółczynników równania bywa mniejszą od wskazanej.

Gauss[1]) przedstawił rezultaty badań Pfaffa w innej formie. Mianowicie, za pomocą kolejnego stosowania przekształceń Pfaffa można równaniu:

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_p\, dx_p = 0,$$

nadać kształt najprostszy:

$$X^{(1)}\, dx^{(1)} + \ldots + X^{(n)}\, dx^{(n)} = 0,$$

gdzie $n = \frac{p}{2}$, albo $n = \frac{p+1}{2}$. W tej ostatniej postaci daje się ono z łatwością zcałkować. W ten sposób Gauss, oddzieliwszy sprawę przekształcenia równania od sprawy jego całkowania, uwydatnił znaczenie przekształcenia Pfaffa.

Jacobi[2]) ma tę zasługę w teoryi przekształcenia Pfaffa, że dał w postaci ogólnej dla równania o parzystej liczbie zmiennych x:

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0,$$

układ równań różniczkowych zwyczajnych, którym czynią zadość zmienne $x_2, \ldots, x_{2n}$, wyrażone w funkcyi zmiennych $y_2, \ldots, y_{2n}$ wspomnianego przekształcenia.

Równania te mają postać:

$$X_s\, N\, dx_1 = (s, 1)\, dx_1 + (s, 2)\, dx_2 + \ldots + (s, 2n)\, dx_{2n}, \quad (s = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{3}$$

gdzie:

$$(s, m) = \frac{\partial X_s}{\partial x_m} - \frac{\partial X_m}{\partial x_s}; \quad N = \frac{\partial}{\partial x_1} \lg \mu.$$

1) Göttingische gelehrte Anzeigen, (1875, Juli I).

2) J. Crelle, Bd. 2, 1827: „Ueber Pfaffsche Intergrations-Methode."

Co się tyczy równania o nieparzystej liczbie zmiennych x, to przekształcenie może być stosowanem tylko w tym przypadku, gdy wyznacznik:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & \ldots, & X_{2n+1} \\ -X_1, & (1,1), & \ldots, & (2n+1,1) \\ -X_2, & (1,2), & \ldots, & (2n+1,2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -X_{2n+1}, & (1,2n+1), & \ldots, & (2n+1,2n+1) \end{vmatrix},$$

jest równy zeru.

J a c o b i dowiódł, że równanie:

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0,$$

posiadające n całek, może być sprowadzone do kształtu najprostszego:

$$U_1\,dA_1 + \ldots + U_n\,dA_n = 0,$$

gdzie $\frac{U_1}{U_n}, \ldots, \frac{U_{n-1}}{U_n}$, $A_1, \ldots, A_n$ czynią zadość równaniom różniczkowym P f a f f a (3)[1].

N a t a n i[2]) uogólnił rezultaty G a u s s a, wysnute na podstawie przekształceń P f a f f a, co do kształtu najprostszego danego równania, przypuszczając, że każde równanie:

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_p\,dx_p = 0,$$

sprowadza się do kształtu:

$$X^{(1)}\,dx^{(1)} + \ldots + X^{(n)}\,dx^{(n)} = 0, \qquad (2n \leqslant p),$$

gdzie wszystkie zmienne są oznaczone; albo do kształtu:

$$\lambda d\varphi + X^{(1)}\,dx^{(1)} + \ldots + X^{(n)}\,dx^{(n)} = 0, \qquad (2+1 \leqslant p),$$

gdzie φ jest funkcyą dowolną zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$. N a t a n i dowodzi, że dla $p = 2n$ równanie rzeczywiście za pomocą kolejnych przekształceń

[1]) J. C r e l l e, Bd. 17, 1837. „Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwichen irgend einer Zahl Variablen auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen".

[2]) „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen". J. C r e l l e, Bd. 58, 1861.

P f a f f a daje się sprowadzić do pierwszego i jeżeli $p = 2n + 1$, do drugiego kształtu najprostszego, gdy spółczynniki równania X nie czynią zadość żadnym specyalnym warunkom. Sposób ten różni się od sposobu G a u s s a tylko wprowadzeniem całek „głównych." Jeżeli liczba $2n$ zmiennych pierwszego kształtu najprostszego jest mniejszą od p, to w układzie równań P f a f f a (3) powinno być tylko $2n$ równań niezależnych i spółczynniki X danego równania powinny zadość czynić pewnym warunkom, które N a t a n i przedstawił w postaci wyznaczników. Jeżeli te warunki są spełnione, można z $2n$ równań (3) niezależnych P f a f f a oznaczyć takie wzory przekształcenia, że dane równanie różniczkowe w nowej postaci nie będzie zawierało $p-2n$ zmiennych x, i przekształcone równanie o $2n$ zmiennych można sprowadzić do kształtu najprostszego o n różniczkach.

C l e b s c h[1]) dowiódł, że równaniu postaci:

$$\lambda d\varphi + X^{(1)}\,dx^{(1)} + \ldots + X^{(n)}\,dx^{(n)} = 0, \qquad (2n+1 \leqslant p);$$

można nadać kształt jeszcze prostszy:

$$dx^{(0)} + X^{(1)}\,dx^{(1)} + \ldots + X^{(n)}\,dx^{(n)} = 0, \qquad (2n+1 \leqslant p).$$

Co do tych kształtów najprostszych („kanonicznych" według L i e g o[1])) danego równania:

$$X^{(1)}\,dx^{(1)} + \ldots + X^{(n)}\,dx^{(n)} = 0, \qquad (2n \leqslant p)$$

i

$$dx^{(0)} + X^{(1)}\,dx^{(1)} + \ldots + X^{(n)}\,dx^{(n)} = 0, \qquad (2n+1 \leqslant p).$$

C l e b s c h wyraźnie zaznacza, że zmienne ich są niezależne między sobą.

D a r b o u x[2]) zauważył, że przy pewnych warunkach można za pomocą równań P f a f f a, z dodatkiem równania $X_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial t} = 0$, sprowadzić dane równanie $X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_p\,dx_p = 0$ do jednej z trzech postaci prostszych:

$$\mu\,(Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_p\,dy_p) = 0,$$
$$dy_1 + Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_p\,dy_p = 0,$$
$$Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_p\,dy_p = 0,$$

[1]) Math. Ann., t. 8, 1875, str. 222.

[2]) „Sur le problème de Pfaff". Bull. de la Soc. math., 2-e série, t. VI, 1882. Rezultaty te D a r b o u x miał już w 1876 r.

gdzie $Y_2, \ldots, Y_p$ nie zawierają zmiennej y_1, która jest tylko w spółczynniku μ; zupełnej teoryi tych przypadków Darboux nie dał.

Jacobi zauważył, że sposób traktowania zagadnienia Pfaffa, podany przez samego Pfaffa, połączony jest z wieloma trudnościami, wynikającemi z konieczności przekształcenia danego równania, i miał zamiar przedstawić inny dogodniejszy sposób, czego wszakże nie wykonał. Późniejsi matematycy: Natani[1]), Clebsch[2]), Hamburger[3]), Frobenius[4]) badali inne metody, uwieńczone powodzeniem zupełnem w pracy Frobeniusa. Ten ostatni oparł swoją metodę na podstawach nowej algebry, wskutek czego nie może być ona uważana za naturalną w rachunku całkowym. Wzmiankowane metody dają możność utworzenia ze spółczynników danego równania równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, z których można oznaczyć zmienne $x^{(i)}$, $X^{(i)}$ kształtu kanonicznego. Kładąc $x^{(i)} =$ stałej, otrzymujemy całki danego równania. Tym sposobem metoda Pfaffa, nie zbadana dostatecznie, była porzucona. W ostatnich czasach Mayer[5]) zajął się badaniem warunków możliwości przekształcenia Pfaffa, oraz kwestyi dostateczności w tym celu jego równań różniczkowych.

Równania różniczkowe, dostateczne do wyznaczenia wzorów tego przekształcenia, otrzymamy, dołączając do równań Pfaffa:

$$(a) \qquad \begin{aligned} &(1,1)\frac{\partial x_1}{\partial t} + (2,1)\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + (p,1)\frac{\partial x_p}{\partial t} = X_1 N, \\ &(1,2)\frac{\partial x_1}{\partial t} + (2,2)\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + (p,2)\frac{\partial x_p}{\partial t} = X_2 N, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(1,p)\frac{\partial x_1}{\partial t} + (2,p)\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + (p,p)\frac{\partial x_p}{\partial t} = X_p N, \end{aligned}$$

jeszcze równanie:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial t} = 0,$$

1) „Ueber das Pfaffache Problem", J. Crelle, Bd. 60, 61.

2) l. c.

3) „Ueber das Pfaffsche Problem". Arch. der Mat. und Phys, J. Grunerta, T. 60, 1877.

4) „Ueber das Pfaffsche Problem", J. Crelle, Bd. 82, 1877.

5) A. Mayer „Zur Pfaffschen Lösung des Pfaffschen Problems." Math. Ann., t. 17, 1880.

które oznacza, że spółczynnik przy dy_1 jest równy zeru. Stąd wynika, że przekształcenie Pfaffa możliwe jest tylko wtedy, gdy wyznacznik:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_p \\ -X_1, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ -X_2, & (1,2), & (2,2), & \ldots, & (p,p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -X_p, & (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix},$$

jest równy zeru. Ponieważ wyznacznik ten dla $p = 2n + 1$ wogóle nie jest równy zeru i dla $p = 2n$ zawsze jest równy zeru, Mayer zajmuje się tylko równaniem o parzystej liczbie zmiennych x.

Co się tyczy równań Pfaffa, to są one dostatecznemi tylko wtedy, gdy wyznacznik:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1,1), & (2,1), & \ldots, & (2n,1) \\ (1,2), & (2,2), & \ldots, & (2n,2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (1,2n), & (2,2n), & \ldots, & (2n,2n) \end{vmatrix};$$

nie jest równy zeru. Mayer dowodzi tego sposobem następującym. Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie to można uważać za równanie różniczkowe względem X_1; więc minor stopnia $2n$ wyznacznika Δ_1:

$$\begin{vmatrix} (2,2), & \ldots, & (2n,2), & -X_2 \\ (2,3), & \ldots, & (2n,3), & -X_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (2,2n), & \ldots, & (2n,2n), & -X_{2n} \\ X_2, & \ldots, & X_{2n}, & 0 \end{vmatrix},$$

niezależny od X_1, wogóle nie jest równy zeru.

W takim razie $2n$ równań (a):

$$\begin{aligned} &X_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + X_{2n} \frac{\partial x_{2n}}{\partial t} = 0, \\ &(1,2)\frac{\partial x_1}{\partial t} + (2,2)\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + (2n,2)\frac{\partial x_{2n}}{\partial t} = X_2 N, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(1,2n)\frac{\partial x_1}{\partial t} + (2,2n)\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + (2n,2n)\frac{\partial x_{2n}}{\partial t} = X_{2n} N, \end{aligned}$$

są niezależne i równania Pfaffa są niedostateczne. Dowód ten jest mylny z tego powodu, że jeżeli $\Delta = 0$, to niekoniecznie minory $2n$-tego stopnia wyznacznika Δ_1 będą nierówne zeru. Frobenius dowiódł, że najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 może być i jednakowy. Więc wszystkie minory $2n$-tego stopnia wyznacznika Δ_1 mogą być równe zeru i równania Pfaffa, jak to niżej okażemy, mogą być dostatecznemi.

Wogóle w pracy swej Mayer niewyraźnie przypuszcza, że najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest niejednakowy. Wskutek tega wyniki badań jego, należycie zrozumiane, nie mają ogólnego charakteru. W pracach wyżej wymienionych autorów teorya przekształcenia Pfaffa jest mało zbadaną. Wszyscy matematycy zastosowywali je tylko do równania o parzystej liczbie zmiennych; ponieważ koniecznym warunkiem zastosowalności przekształcenia jest $\Delta_1 = 0$, który to wyznacznik dla równania o nieparzystej liczbie zmiennych x wogóle nie jest równy zeru, pozostawiali oni niezbadanym ten przypadek, w którym i dla równania o nieparzystej liczbie zmiennych warunek ten się spełnia. Wyjątek stanowi Natani, który, jak już powiedziano, stosował przekształcenie Pfaffa i do równania o nieparzystej liczbie zmiennych, przypuszczając, iż najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ i Δ_1 jest jednakowy. Mimo to, granice stosowalności przekształcenia Pfaffa nie są zadawalniająco wyjaśnione; kwestya zaś, o ile są dostatecznemi równania Pfaffa w teoryi tego przekształcenia, nie jest należycie zbadaną, ponieważ wyniki A. Mayera nie mają charakteru ogólnego.

Nie są zbadanemi przeto: teorya kolejnego stosowania przekształcenia Pfaffa i sprowadzania za jego pomocą danego równania do kształtu kanonicznego, oraz teorya tych przypadków, w których przekształcenie Pfaffa nie może być stosowane.

W artykule niniejszym mamy zamiar przedstawić zupełną teoryę przekształcenia Pfaffa, oraz teoryę tych przypadków, w których ono nie daje się stosować. W tym celu przedstawiamy przekształcenie Pfaffa, jako szczególny przypadek ogólniejszego przekształcenia, przez co wyjaśniamy istotny charakter i granice zastosowalności pierwszego. Za pomocą tego uogólnionego przekształcenia, które daje się zastosować do wyrażenia różniczkowego:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_p\,dx_p,$$

o dowolnej liczbie zmiennych niezależnych x, sprowadzamy to równanie do postaci kanonicznej o parzystej liczbie zmiennych:

$$X^{(1)}\,dx^{(1)} + \ldots, + X^{(n)}\,dx^{(n)},$$

albo do postaci o nieparzystej liczbie zmiennych:

$$dx^{(1)} + X^{(2)}\,dx^{(2)} + \ldots + X^{(n)}\,dx^{(n)}$$

i podajemy kryterya, określające charakter tej postaci.

Wykład ogólnej teoryi poprzedzimy kilkoma twierdzeniami pomocniczemi.

Twierdzenie I. Jeżeli w wyznaczniku p-tego stopnia wszystkie minory $m+1$-go stopnia są równe zeru i nie wszystkie minory m-go stopnia są równe zeru, to dwa minory m-tego stopnia, P i Q, złożone z elementów jakichkolwiek m wierszy, są w takim do siebie stosunku, w jakim są dwa odpowiednie minory, P_1 i Q_1, złożone z elementów m innych wierszy. (Odpowiedniemi minorami nazywają się minory jednakowego stopnia, złożone z elementów jednakowych kolumn). (Kronecker, Berl. Monatsber., 1874).

Twierdzenie II. Jeżeli w powyższem twierdzeniu wyznacznik p-tego stopnia jest skośny symetryczny, to przypuszczeniu, że wiersze i kolumny są wzięte w tym samym porządku, wspomniane dwa minory P i Q_1 będą głównemi i będzie: $P_1 = (-1)^m Q$. Jeżeli przypuścimy, że główny minor P jest równy zeru, otrzymamy według powyższego twierdzenia $Q = 0$, $P_1 = 0$, t. j.: Jeżeli w wyznaczniku skośnym symetrycznym p-tego stopnia wszystkie minory $m+1$-go stopnia są równe zeru i jeżeli jakikolwiek minor główny m-tego stopnia także jest równy zeru, to są równemi zeru wszystkie minory m-tego stopnia, złożone z elementów tych m wierszy, albo tych m kolumn, na których przecięciu znajduje się wspomiany równy zeru główny minor m-tego stopnia. (Frobenius, „Ueber das Pfaff'sche Problem, Crelle, Bd. 82, 1877).

Twierdzenie III. Jeżeli w wyznaczniku skośnym symetrycznym p-tego stopnia wszystkie minory $(m+1)$-go stopnia są równe zeru, to w liczbie ostatnich zawsze są minory główne. W przeciwnym razie, według twierdzenia II, byłyby równe zeru wszystkie minory m-go stopnia, co sprzeciwia się założeniu. (Frobenius, l. c.).

Twierdzenie IV. Jeżeli w wyznaczniku skośnym symetrycznym wszystkie minory $m+1$-go stopnia są równe zeru i nie wszystkie minory m-go stopnia są równe zeru, to m jest liczbą parzystą. W przeciwnym bowiem razie wszystkie główne minory m-go stopnia, jako skośne symetryczne stopnia nieparzystego, byłyby równe zeru, co przeczy twierdzeniu III.

Twierdzenie V. Jeżeli w wyznaczniku skośnym symetrycznym p-go stopnia minor główny $2n$-tego stopnia P, nie jest równy zeru, równemi zaś zeru są wszystkie główne minory $(2n+2)$-go stopnia, otrzymane przez dopisywanie do elementów wyznacznika P elementów pozostałych kolumn i wierszy po 2, to wszystkie minory $(2n+1)$-go stopnia są równe zeru. Według znanego twierdzenia Kroneckera, jeżeli minory $2n+1$ stopnia, otrzymane przez dopisywanie do elementów jakiegokolwiek nierównego zeru minora $2n$-tego stopnia elementów pozostałych kolumn i wierszy, są równe zeru, to są równemi zeru wszystkie minory $2n+1$ stopnia danego wyznacznika. Dla okazania więc powyższego twierdzenia, trzeba tylko dowieść, że są równemi zeru tylko te minory $2n+1$ stopnia danego wyznacznika skośnego symetrycznego, które otrzymują się przez dopisywanie do elementów głównego minora P $2n$-tego stopnia elementów z pozostałych kolumn i wierszy po 1. Przypuśćmy, że mamy minor $(2n+1)$-go stopnia M, którego elementy otrzymaliśmy przez dopisywanie do elementów głównego minora P elementów ϱ-tego wiersza i σ-tej kolumny. Jeżeli dopiszemy do elementów minora M jeszcze elementy ϱ tej kolumny i σ-tego wiersza, otrzymamy główny minor $(2n+2)$-go stopnia ze znakiem przeciwnym, który według założenia jest równy zeru. Ponieważ ten ostatni jest skośny symetryczny, według twierdzenia IV, to są równemi zeru wszystkie jego minory $2n+1$-go stopnia i jest $M=0$. (Frobenius, l. c.).

Twierdzenie VI. Jeżeli pierwszy minor elementu a_{00} wyznacznika Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{10}, & \dots, & a_{m0} \\ a_{01}, & a_{11}, & \dots, & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0m}, & a_{1m}, & \dots, & a_{mm} \end{vmatrix},$$

nie jest równy zeru i nie wszystkie elementy $a_{01}, \dots, a_{0m}$ pierwszej kolumny (albo też nie wszystkie elementy $a_{10}, \dots, a_{m0}$ pierwszego wiersza) są równe zeru, to nie wszystkie pierwsze minory względem elementów $a_{10}, \dots, a_{m0}$ pierwszego wiersza (albo elementów $a_{01}, \dots, a_{0m}$ pierwszej kolumny) są równe zeru. Niech Δ będzie wspomniany nierówny zeru minor elementu a_{00} i D_{kl} jego pierwszy minor elementu a_{kl} z odpowiednim znakiem. Gdyby wszystkie minory elementów pierwszego wiersza były równe zeru, mielibyśmy, rozkładając je według elementów pierwszej kolumny:

$$\begin{aligned} a_{01} D_{11} + a_{02} D_{12} + \dots + a_{0m} D_{1m} &= 0, \\ a_{01} D_{21} + a_{02} D_{22} + \dots + a_{0m} D_{2m} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{01} D_{m1} + a_{02} D_{m2} + \dots + a_{0m} D_{mm} &= 0. \end{aligned}$$

Według założenia, nie wszystkie elementy $a_{01}, a_{02}, \dots a_{0m}$ są równe zeru. Więc wyznacznik tych równań:

$$\begin{vmatrix} D_{11}, & D_{12}, & \dots, & D_{1m} \\ D_{21}, & D_{22}, & \dots, & D_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{m1}, & D_{m2}, & \dots, & D_{mm} \end{vmatrix} = \Delta^{m-1},$$

jest równy zeru. Skąd i $\Delta = 0$, co przeczy założeniu.

Twierdzenie VII. Jeżeli wyznacznik Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{10}, & \dots, & a_{m0} \\ a_{01}, & a_{11}, & \dots, & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0m}, & a_{1m}, & \dots, & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

nie jest równy zeru jego zaś pierwszy minor Δ względem elementu a_{00} jest równy zeru, to zawsze są przynajmniej dwa pierwsze minory wyznacznika Δ_1, D'_{r0} i D'_{0s} elementów a_{r0} i a_{0s} pierwszej kolumny i pierwszego wiersza są różnemi od zera. Istotnie, jeżeli wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, nie wszystkie pierwsze minory wyznacznika Δ są równe; w przeciwnym bowiem razie rozkładając wyznacznik Δ_1 według iloczynów elementów pierwszej kolumny i pierwszego wiersza, otrzymalibyśmy $\Delta_1 = 0$.

Niech nierówny zeru pierwszy minor wyznacznika Δ będzie D_{rs}. Niech D'_{kl} będzie pierwszy minor wyznacznika Δ_1 elementu a_{kl}. Według znanego twierdzenia mamy:

$$\begin{vmatrix} \Delta, & D'_{r0} \\ D'_{0s}, & D'_{rs} \end{vmatrix} = \Delta_1 D_{rs}.$$

Wskutek tego, że $\Delta = 0$, otrzymujemy:

$$- D'_{0s}, D'_{r0} = \Delta_1 D_{rs}.$$

Ponieważ Δ_1 i D_{rs} według przypuszczenia nie są równe zeru, więc D'_{0s} i D'_{r0} nie są równemi zeru.

Jeżeli w szczególnym przypadku $m = 2n+1$, Δ_1 zaś jest wyznacznikiem skośnym symetrycznym stopnia parzystego, to wyznacznik Δ skośny symetryczny stopnia nieparzystego jest równy zeru. W liczbie nierównych zeru pierwszych minorów wyznacznika Δ są główne; niech jeden z nich będzie $D_{2n+1,\,2n+1}$. Według tego twierdzenia nie są równemi zeru pierwsze minory wyznacznika Δ_1, $D'_{0,2n+1}$ i $D'_{2n+1,0}$. Ponieważ zaś $D'_{0,2n+1} = -D_{2n+1,0}$, więc:

$$D'_{0,\,2n+1} = \sqrt{\Delta_1\, D_{2n+1,\,2n+1}}\,.$$

Twierdzenie VIII. Jeżeli dwa wyznaczniki skośne symetryczne stopni $p+1$ i p:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{10}, & \dots, & a_{p0} \\ a_{01}, & a_{11}, & \dots, & a_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0p}, & a_{1p}, & \dots, & a_{pp} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \dots, & a_{p1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \dots, & a_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p}, & a_{2p}, & \dots, & a_{pp} \end{vmatrix},$$

z których drugi jest głównym pierwszym minorem pierwszego, są równe zeru ze swemi minorami pewnych stopni, to oznaczając najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznacznika Δ_1 przez 2μ, a wyznacznika Δ przez 2ν, możemy dowieść, że $2\mu = 2\nu$, albo $2\mu = 2\nu + 2$.

2μ nie może być mniejsze od 2ν; w przeciwnym bowiem razie wszystkie minory stopnia 2ν wyznacznika Δ byłyby równe zeru, co przeczy założeniu. Więc $2\mu \geqq 2\nu$. Jeżeli $2\mu > 2\nu$, koniecznie musi być $2\mu = 2\nu + 2$. Przypuśćmy, że $2\mu > 2\nu + 2$. Jeżeli 2μ jest większe od 2ν, to tylko te minory 2μ-tego stopnia wyznacznika Δ_1 są nierównemi zeru, które zawierają elementy pierwszej kolumny i pierwszego wiersza. Jeżeli $2\mu > 2\nu + 2$, to rozkładając te nierówne zeru minory 2μ-tego stopnia wyznacznika Δ_1 według iloczynów elementów pierwszego wiersza i pierwszej kolumny, otrzymalibyśmy, że spółczynniki przy wspomnianych iloczynach byłyby minorami stopnia $2\mu - 2 > 2\nu$, t. j. od stopnia wyznacznika Δ, te zaś minory według założenia są wszystkie równe zeru; więc wszystkie minory 2μ-tego stopnia wyznacznika Δ_1 byłyby równe zeru, co przeczy założeniu. Więc $2\mu = 2\nu$, albo $2\mu = 2\nu + 2$.

Twierdzenie IX. Układ m niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned} a_{11}\, dx_2 + a_{21}\, dx_2 + \dots + a_{p1}\, dx_p &= 0, \\ a_{12}\, dx_2 + a_{22}\, dx_2 + \dots + a_{p2}\, dx_p &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{1m}\, dx_1 + a_{2m}\, dx_2 + \dots + a_{pm}\, dx_p &= 0, \end{aligned}$$

o p zmiennych x $(m < p)$ posiada m całek niezależnych, jeżeli spółczynniki a równań czynią zadość następnym warunkom, wskazanym przez Frobenius'a (l. c.):

Oznaczmy przez:

$$\begin{matrix} \xi_1^{(1)}, & \xi_2^{(1)}, & \dots, & \xi_p^{(1)}, \\ \xi_1^{(2)}, & \xi_2^{(2)}, & \dots, & \xi_p^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{(p-m)}, & \xi_2^{(p-m)}, & \dots, & \xi_p^{(p-m)}, \end{matrix}$$

$(p-m)$ niezależnych układów pierwiastków równań:

$$\begin{aligned} a_{11}\, \xi_1 + a_{21}\, \xi_2 + \dots + a_{p1}\, \xi_p &= 0, \\ a_{12}\, \xi_1 + a_{22}\, \xi_2 + \dots + a_{p2}\, \xi_p &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{1m}\, \xi_1 + a_{2m}\, \xi_2 + \dots + a_{pm}\, \xi_p &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli:

$$(a) \qquad \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \xi_k^{(i)} \xi_\lambda^{(j)} \left(\frac{\partial a_{k\alpha}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial a_{\lambda\alpha}}{\partial x_k} \right) = 0,$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots, m, \quad i, j = 1, 2, \dots, p-m),$$

to m danych równań różniczkowych zwyczajnych posiada m całek niezależnych.

Przytoczymy dwa przykłady takich równań różniczkowych zwyczajnych, których spółczynniki zadość czynią tym warunkom.

I. Mamy p równań różniczkowych zwyczajnych o p różniczkach:

$$(b) \qquad \begin{aligned} (1, 1)\, dx_1 + (2, 1)\, dx_2 + \dots + (p, 1)\, dx_p &= 0, \\ (1, 2)\, dx_1 + (2, 2)\, dx_2 + \dots + (p, 2)\, dx_p &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ (1, p)\, dx_1 + (2, p)\, dx_2 + \dots + (p, p)\, dx_p &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $(i, k) = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i}$, $X_1, X_2, \dots, X_p$ są dowolnemi funkcyami analitycznemi zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_p$. Przypuśćmy, że w liczbie tych p równań mamy tylko $2k$ równań niezależnych:

$$\begin{aligned} (1, 1)\, dx_1 + (2, 1)\, dx_2 + \dots + (p, 1)\, dx_p &= 0, \\ (1, 2)\, dx_1 + (2, 2)\, dx_2 + \dots + (p, 2)\, dx_p &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ (1, 2k)\, dx_1 + (2, 2k)\, dx_2 + \dots + (p, 2k)\, dx_p &= 0. \end{aligned}$$

Warunkom (a) tych ostatnich równań można nadać nieco inną postać. Ponieważ bowiem:

$$\frac{\partial a_{k\alpha}}{dx_\lambda} - \frac{\partial a_{\lambda\alpha}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\lambda}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k, \lambda),$$

przeto warunki (a) można przedstawić tak:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_k^{(i)} \xi_\lambda^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k, \lambda) = 0,$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, 2k, \quad i, j = 1, 2, \ldots, p-2k).$$

Łatwo zauważyć, że:

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k^{(i)} (k, \lambda) = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p),$$

więc:

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k, \lambda) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \xi_k^{(i)} (k, \lambda),$$

i pierwszą stronę równań (a) otrzymamy w postaci:

$$-\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_\lambda^{(j)} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \xi_k^{(i)}}{\partial x_\alpha}(k, \lambda),$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, 2k \quad i, j = 1, 2, \ldots, p-2k).$$

albo w postaci:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \xi^{(i)}}{\partial x_\alpha} \Sigma\, \xi_\lambda^{(j)} (\lambda, k).$$

Lecz z drugiej strony:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_\lambda^{(j)} (\lambda, k) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

więc:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_k^{(i)} \xi_\lambda^{(j)} (k\, \lambda) = 0$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, 2k, \quad i, j = 1, 2, \ldots, p-2k)$$

i równania różniczkowe (b) mają $2k$ całek niezależnych.

II. Mamy $p+1$ równań różniczkowych zwyczajnych o p różniczkach:

$$(c)\qquad \begin{aligned} &X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_p\, dx_p = 0, \\ &(1, 1)\, dx_1 + (2, 1)\, dx_2 + \ldots + (p, 1)\, dx_p = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(1, p)\, dx_1 + (2, p)\, dx_2 + \ldots + (p, p)\, dx_p = 0, \end{aligned}$$

gdzie $(i, k) = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i}$. Pomiędzy temi równaniami niechaj będzie $2k+1$ niezależnych:

$$\begin{aligned} &X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_p\, dx_p = 0, \\ &(1, 1)\, dx_1 + (2, 1)\, dx_2 + \ldots + (p, 1)\, dx_p = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(1, 2k)\, dx_1 + (2, 2k)\, dx_2 + \ldots + (p, 2k)\, dx_p = 0. \end{aligned}$$

Warunki (a) dla tych równań mają postać:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_k^{(i)} \xi_\lambda^{(j)} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_k}\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_k^{(i)} \xi_\lambda^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k, \lambda) = 0,$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, 2k, \quad i, j = 1, 2, \ldots, p-2k).$$

Co się tyczy warunków:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_k^{(i)} \xi_\lambda^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k, \lambda) = 0,$$

to one, jak wyżej okazano, sprawdzają się.

Zostają warunki:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_k^{(i)} \xi_\lambda^{(j)} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_k}\right) = 0,$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, p-2k),$$

których stronę pierwszą można przedstawić w postaci:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_\lambda^{(j)} \sum_{k=1}^{p} \xi_k^{(i)} (k, \lambda);$$

ponieważ zaś:

$$\sum_{k=1}^{p} \overset{(i)}{\underset{k}{\xi}}(k, \lambda) = 0),$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, p), \quad (i = 1, 2, \ldots, p-2k),$$

więc:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \overset{(j)}{\underset{\lambda}{\xi}} \sum_{k=1}^{p} \overset{(i)}{\underset{k}{\xi}}(k; \lambda) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\lambda=1}^{p} \overset{(i)}{\underset{k}{\xi}} \overset{(j)}{\underset{\lambda}{\xi}}(k, \lambda) = 0,$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, p-2k)$$

równania (c) mają $2k+1$ całek niezależnych.

---

§ 1.

Uogólnione przekształcenie Pfaffa.

1. Przypuśćmy, że mamy wyrażenie różniczkowe:

(1) $$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_p\, dx_p\,,$$

którego spółczynniki X są dowolnemi funkcyami analitycznemi zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Jeżeli przekształcimy to wyrażenie za pomocą podstawień:

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_p),\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_p), \ldots, x_p = \varphi_p(y_1, y_2, \ldots, y_p),$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ są funkcyami niezależnemi nowych zmiennych niezależnych $y_1, y_2, \ldots, y_p$, to otrzymamy wyrażenie postaci:

$$dy_1 \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_1} + dy_2 \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \ldots + dy_p \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\,,$$

lub w skróceniu:

$$Y_1\, dy_1 + Y_2\, dy_2 + \ldots + Y_p\, dy_p\,,$$

gdzie nowe spółczynniki Y są funkcyami nowych zmiennych niezależnych $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Kształt tych spółczynników zależy od kształtu spółczynników X danego wyrażenia różniczkowego (1) i od podstawień.

Zagadnienie. Przekształcić wyrażenie różniczkowe (1) zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$ na wyrażenie nowych zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_p$ tak, żeby spółczynniki Y w nowej jego postaci zawierały jakąkolwiek z nowych zmiennych, np. y_1, tylko w czynniku wspólnym?

Rozwiązanie. Oznaczmy wspólny czynnik przez μ. Spółczynniki Y przekształconego wyrażenia różniczkowego powinny zadość czynić równaniom:

$$Y_1 = \mu U_1, \quad Y_2 = \mu U_2, \ \ldots, \ Y_p = \mu U_p,$$

gdzie $U_1, U_2, \ldots, U_p$ zawierają tylko zmienne $y_2, y_3, \ldots, y_p$, albo też równaniom.

$$\frac{\partial \log Y_1}{\partial y_1} = \frac{\partial \log Y_2}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial \log Y_p}{\partial y_1} = \frac{\partial \log \mu}{\partial y_1}\,.$$

Te ostatnie można przedstawić jeszcze w formie:

(2) $$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} = -\lambda Y_1, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} = -\lambda Y_2, \ldots, \frac{\partial Y_p}{\partial y_1} = -\lambda Y_p.$$

kładąc $\dfrac{\partial \log \mu}{\partial y_1} = -\lambda$.

Odwrotnie, jeżeli $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ czynią zadość równaniom (2), to zawierają zmienną y_1 tylko w spólnym ich czynniku μ, gdzie μ związane jest z λ przez równanie:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial y_1} = -\lambda\,.$$

W samej rzeczy, całkując każde z równań (2) względem zmiennej y_1, otrzymujemy:

$$\log Y_1 = \int -\lambda\, dy_1 + \log U_1,$$

$$\log Y_2 = \int -\lambda\, dy_1 + \log U_2, \ldots, \log Y_p = \int -\lambda\, dy_1 + \log U_p\,,$$

gdzie $\log U_1, \log U_2, \ldots, \log U_p$ są stałemi całkowania, t. j. ilościami niezależnemi od zmiennej y_1, lecz są funkcyami zmiennych $y_2, y_3, \ldots, y_p$.

Z tego układu całek wynika, że:

$$Y_1 = U_1\, e^{-\int \lambda\, dy_1}, \quad Y_2 = U_2\, e^{-\int \lambda\, dy_1}, \ \ldots, \ Y_p = U_p\, e^{-\int \lambda\, dy_1},$$

lub kładąc $e^{-\int \lambda\, dy_1} = \mu$:

$$Y_1 = \mu U_1, \quad Y_2 = \mu U_2, \; \dots, \quad Y_p = \mu U_p,$$

gdzie $U_1, U_2, \dots, U_p$ nie zawierają zmiennej y_1, i $-\lambda = \dfrac{\partial \log \mu}{\partial y_1}$.

W ten sposób zagadnienie sprowadza się do znalezienia wzorów przekształcenia takich, aby $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ zadość czyniły równaniom (2).

Zanim przejdziemy do tego pytania, wprowadzimy pewne równania, którym czynią zadość spółczynniki Y wyrażenia przekształconego przy dowolnych wzorach przekształcenia.

Spółczynniki Y_i wyrażenia przekształconego mają postać:

$$Y_i = \sum_{s=1}^{p} X_s \frac{\partial x_s}{\partial y_i}.$$

Różniczkując względem y_k, otrzymujemy:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial X_s}{\partial y_i} \sum_{t=1}^{p} \frac{\partial X_s}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_k} + \sum_{s=1}^{p} X_s \frac{\partial^2 x_s}{\partial y_i\, \partial y_k}$$

$$= \sum_{t=1}^{p} \frac{\partial x_t}{\partial y_k} \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial X_s}{\partial x_t} \frac{\partial x_s}{\partial y_i} + \sum_{s=1}^{p} X_s \frac{\partial^2 x_s}{\partial y_i\, \partial y_k}.$$

W ten sam sposób znajdujemy:

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} \frac{\partial X_s}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_i} + \sum_{s=1}^{p} X_s \frac{\partial^2 x_s}{\partial y_k\, \partial y_i},$$

a wykonawszy odejmowanie:

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} \frac{\partial X_s}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_i} - \sum_{t=1}^{p} \frac{\partial x_t}{\partial y_k} \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial X_s}{\partial x_t} \frac{\partial x_s}{\partial y_i},$$

lub

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} \frac{\partial X_s}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_i} - \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} \frac{\partial X_t}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial x_t}{\partial y_i}.$$

Stąd wynika:

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_t} - \frac{\partial X_t}{\partial x_s} \right) \frac{\partial x_t}{\partial y_i},$$

albo oznaczając $\dfrac{\partial X_s}{\partial x_t} - \dfrac{\partial X_t}{\partial x_s} = (s, t) = (t, s)$:

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_t}{\partial y_i}, \qquad (i, k = 1, 2, \dots, p),$$

co właśnie chcieliśmy otrzymać.

Za pomocą tych równań możemy znaleść żądane wzory sposobem następującym.

Połóżmy $i = 1$, to będzie:

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_t}{\partial y_1}, \qquad (k = 1, 2, \dots, p). \tag{3}$$

Z równań (2) wynika:

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_1} = -\lambda\, Y_k; \qquad (k = 1, 2, \dots, p),$$

więc:

$$-\frac{\partial Y_1}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_t}{\partial y_1} + \lambda\, Y_k, \qquad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Jeżeli zastąpimy Y_k przez:

$$\sum_{s=1}^{p} X_s \frac{\partial x_s}{\partial y_k}, \qquad (k = 1, 2, \dots, p),$$

otrzymamy:

$$-\frac{\partial Y_1}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \left\{ \sum_{t=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_t}{\partial y_1} + \lambda\, X_s \right\}, \qquad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Z drugiej strony, jeżeli Y_1 wyrazimy przez $x_1, x_2, \dots, x_p$, będzie:

$$-\frac{\partial Y_1}{\partial y_k} = -\sum_{s=1}^{p} \frac{\partial Y_1}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y_k}.$$

Przez odejmowanie znajdujemy:

$$\sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \left\{ \sum_{t=1}^{p} (t, s) \frac{\partial x_t}{\partial y_1} - \lambda\, X_s - \frac{\partial Y_1}{\partial x_s} \right\} = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, p),$$

Te równania w liczbie p $(k=1, 2, \ldots, p)$ są liniowemi jednorodnemi względem p wyrażeń:

$$\sum_{t=1}^{p} (t, s) \frac{\partial x_t}{\partial y_1} - \lambda X_s - \frac{\partial Y_1}{\partial x_s}, \qquad (s=1, 2, \ldots, p).$$

Wyznacznik tych p równań:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_p}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial x_p}{\partial y_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_p}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_p}, & \ldots, & \frac{\partial x_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} = \frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial (y_1, y_2, \ldots, y_p)},$$

nie może być równym zeru, ponieważ zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_p$ są niezależne od siebie. Więc:

$$\sum_{t=1}^{p} (t, s) \frac{\partial x_t}{\partial y_1} - \lambda X_s - \frac{\partial Y_1}{\partial x_s} = 0, \qquad (s=1, 2, \ldots, p),$$

albo w postaci rozwiniętej:

$$(1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} - \lambda X_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$(1, 2) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 2) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} - \lambda X_2 - \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1, p) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, p) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, p) \frac{\partial x_p}{\partial y_2} - \lambda X_p - \frac{\partial Y_1}{\partial x_p} = 0.$$

Ponieważ zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_p$, wyrażone przez $y_1, y_2, \ldots, y_p$, powinny zadość czynić równaniu:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = Y_1,$$

z którego poprzednio korzystaliśmy, przeto układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego, którym powinny zadość czynić zmienne

$x_1, x_2, \ldots, x_p$, wyrażone przez zmienne $y_1, y_2, \ldots, y_p$ wspomnianego przekształcenia, ma postać:

$$Y_1 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1},$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} = (1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} - \lambda X_1, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} = (1, 2) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 2) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} - \lambda X_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_p} = (1, p) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, p) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, p) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} - \lambda X_p. \end{cases}$$

Można dowieść, że te równania są wystarczające do rozwiązania powyżej postawionego zagadnienia.

Jeżeli zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_p$, wyrażone w funkcyi zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_p$, zadość czynią równaniom (4) wspólnie z funkcyami Y_1 i λ, to gdy do wyrażenia (1) wprowadzimy nowe zmienne $y_1, y_2, \ldots, y_p$, spółczynnik przy dy_1 będzie Y_1, a zmienna y_1 będzie zawierała się tylko we wspólnym czynniku μ spółczynników wyrażenia przekształconego, gdzie $\frac{\partial \log \mu}{\partial y_1} = -\lambda$.

W samej rzeczy, spółczynnik przy dy_1 w wyrażeniu przekształconem ma postać:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1};$$

i według pierwszego z równań (4) jest równy Y_1.

Dalej, zachodzi zawsze tożsamość:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_k} = \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial Y_1}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial y_k}. \qquad (k=1, 2, \ldots, p).$$

Zastępując w niej $\frac{\partial Y_1}{\partial x}$ przez drugie części równań (4), mamy:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \left\{ (1, s) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, s) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, s) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} \right\} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} - \lambda \sum_{s=1}^{p} X_s \frac{\partial x_s}{\partial y_k},$$

$$(k=1, 2, \ldots, p),$$

lub też:

$$-\lambda\, Y_k - \frac{\partial Y_1}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} (s,\, t)\, \frac{\partial x_t}{\partial y_1}, \qquad (k=1,2,\ldots,p).$$

Okazaliśmy poprzednio, że przy dowolnych wzorach przekształcenia zachodzą równania (3):

$$(3) \qquad \frac{\partial Y_k}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial y_k} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \sum_{t=1}^{p} (s,\, t)\, \frac{\partial x_t}{\partial y_1}, \qquad (k=1,2,\ldots,p).$$

Z porównania otrzymujemy:

$$\frac{\partial Y_k}{\partial y_1} = -\lambda\, Y_k, \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

t. j. że spółczynniki Y wyrażenia przekształconego czynią zadość równaniom (2), a więc, jak to było dowiedzione, zawierają zmienną y_1 tylko we wspólnym czynniku μ, związanym z λ przez równanie:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial y_1} = -\lambda.$$

2). Rozpatrzmy w ogólnych zarysach, w jaki sposób z $p+1$ równań różniczkowych (4) znaleść można wzory wspomnianego przekształcenia. Równania (4) zawierają $p+2$ niewiadomych: $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ $(i=1,2,\ldots,p)$, λ, Y_1; więc z równań tych nie można wyznaczyć wszystkich zmiennych: jedna przynajmniej zostaje dowolną. Jeżeli wyrugujemy z tych równań wszystkie pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$, otrzymamy równanie:

$$\begin{vmatrix} Y_1, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_p \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_p}, & (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_p \\ -X_1, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_p, & (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix} = 0$$

Jeżeli z tego równania wyznaczymy jednę z niewiadomych Y_1, λ, dowolnie wybrawszy drugą, to przy tak wyznaczonych Y_1 i λ, z pomiędzy $p+1$ równań (4) przynajmniej jedno będzie następstwem p innych równań. Przypuśćmy, że z tych ostatnich p równań wyznaczyliśmy p pochodnych $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ $(i=1,2,\ldots,p)$, w postaci:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \theta_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_p); \qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

tym sposobem dla znalezienia wzorów przekształcenia mamy p równań różniczkowych zwyczajnych, nie zawierających zmiennej niezależnej. Łatwo zauważyć, że p całek tych równań ma postać:

$$x_i = \varphi_i\,(y_1 + \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p), \qquad (i=1,2,\ldots,p),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ są stałe dowolne całkowania, t. j. ilości niezależne od y_1, ale które mogą być funkcyami zmiennych $y_2, y_3, \ldots, y_p$. Kładąc $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = y_2, \ldots, \alpha_p = y_p$, otrzymamy:

$$x_i = \varphi_i\,(y_1, y_2, \ldots, y_p), \qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

t. j. wzory żądane.

Za pomocą tego przekształcenia danemu wyrażeniu różniczkowemu można nadać kształt prostszy.

Jeżeli z równań różniczkowych (4) można wyznaczyć wzory przekształcenia, kładąc $Y_1 = 0$ i $\lambda \gtreqless 0$, to dane wyrażenie różniczkowe (1), po przekształceniu za pomocą tych wzorów, nie będzie zawierało dy_1, a tylko y_1 we wspólnym czynniku jego spółczynników. Jeżeli z równań (4) można znaleść wzory przekształcenia, kładąc $\lambda = 0$, t. j. $\frac{\partial \mu}{\partial y_1} = 0$ i $Y_1 \gtreqless 0$, to dane wyrażenie, po przekształceniu, będzie zawierało y_1 tylko w postaci różniczki dy_1. Jeżeli nakoniec z równań tych można wyznaczyć wzory przekształcenia, kładąc $\lambda = 0$, t. j. $\frac{\partial \mu}{\partial y_1}$ i $Y_1 = 0$, to dane wyrażenie różniczkowe, po przekształceniu, zupełnie nie będzie zawierało zmiennej y_1. Pierwszy i ostatni szczególny przypadek tego przekształcenia stanowią przekształcenia Pfaffa. Rozpatrzmy tu warunki zastosowalności przekształcenia Pfaffa i dostateczności równań różniczkowych Pfaffa. Żeby z równań (4) można było znaleść wzory przekształcenia przy $Y_1 = 0$, warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest, by wyznacznik:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_p \\ -X_1, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_p, & (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix},$$

był równy zeru.

W samej rzeczy, jeżeli $Y_1 = 0$, układ równań (4) ma postać:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(4') \qquad -\lambda X_1 + (1,1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\lambda X_p + (1,p) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,p) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,p) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0.$$

Ponieważ nie wszystkie pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ mogą być równe zeru, przeto koniecznym warunkiem ich istnienia, a więc i możliwości przekształcenia Pfaffa, jest $\Delta_1 = 0$. Okażemy, że ten warunek jest dostateczny, dowodząc, że przy warunku $\Delta_1 = 0$ zawsze można z równań (4') wyznaczyć pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$, które nie wszystkie będą równe zeru. Ostatnie p równań (4') stanowią układ równań Pfaffa.

Już teraz jest oczywistem; że równania Pfaffa nie zawsze bywają dostateczne do wyznaczenia wzorów przekształcenia; ma to miejsce tylko wtedy, gdy pierwsze równanie (4') jest następstwem reszty równań, co nie zawsze zachodzić musi. Wyznaczniki skośne symetryczne Δ_1 i Δ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_p \\ -X_1, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ -X_2, & (1,2), & (2,2), & \ldots, & (p,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_p, & (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ (1,2), & (2,2), & \ldots, & (p,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix},$$

mają tę własność (tw. IV), że najwyższy stopień nierównych zeru minorów ich jest parzysty, 2μ-ty i 2ν-ty; pomiędzy niemi są główne, przytem $2\mu = 2\nu$, albo $2\mu = 2\nu + 2$ (tw. VIII). Jeżeli $2\mu = 2\nu + 2$, to w liczbie nierównych zeru minorów 2μ-tego stopnia wyznacznika Δ_1 są tylko te minory, które zawierają elementy pierwszej kolumny i pierwszego wiersza wyznacznika Δ_1 (tw. VIII).

Rozpatrzmy przypadek, w którym $2\mu = 2\nu$ $(2\mu \leqq p)$.

Niech nierówny zeru główny minor 2μ-tego stopnia wyznacznika Δ będzie:

$$\delta = \begin{vmatrix} (1,1), & (2,1), & \ldots, & (2\mu,1) \\ (1,2), & (2,2), & \ldots, & (2\mu,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1,2\mu), & (2,2\mu), & \ldots, & (2\mu,2\mu) \end{vmatrix}.$$

Wtedy pomiędzy równaniami (4') jest tylko 2μ niezależnych i wskutek tego, że $\delta \neq 0$; niezależne równania w liczbie 2μ są:

$$-\lambda X_1 + (1,1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(4'a) \qquad -\lambda X_2 + (1,2) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,2) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,2) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\lambda X_{2\mu} + (1,2\mu) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,2\mu) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,2\mu) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0.$$

Jeżeli wyznacznik δ nie jest równy zeru, nie wszystkie pierwsze minory względem elementów pierwszego wiersza wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_{2\mu} \\ -X_1, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (2\mu,1) \\ -X_2, & (1,2), & (2,2), & \ldots, & (2\mu,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_{2\mu}, & (1,2\mu), & (2,2\mu), & \ldots, & (2\mu,2\mu) \end{vmatrix},$$

są równe zeru; niech nierówny zeru będzie δ_1. Równania (4'a) mają przynajmniej dwa nierówne zeru minory 2μ-tego stopnia δ i δ_1; wskutek tego nie wszystkie pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$, wyznaczone z tych równań, będą równe zeru. Więc w tym przypadku przekształcenie jest możliwe i równania Pfaffa są dostateczne.

Przypuśćmy teraz, że $2\mu = 2\nu + 2$, $(2\mu < p)$. Niech nierówny zeru główny minor 2μ-tego stopnia wyznacznika Δ_1 będzie:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_{2\mu-1} \\ -X_1, & (1, 1), & (2, 1), & \ldots, & (2\mu-1, 1) \\ -X_2, & (1, 2), & (2, 2), & \ldots, & (2\mu-1, 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_{2\mu-1}, & (1, 2\mu-1), & (2, 2\mu-1), & \ldots, & (2\mu-1, 2\mu-1) \end{vmatrix}.$$

Pomiędzy równaniami (4′) jest 2μ niezależnych:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(4'') \qquad -\lambda X_1 + (1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\lambda X_{2\mu-1} + (1, 2\mu-1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2\mu-1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 2\mu-1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0.$$

Liczba niewiadomych $p+1$ przewyższa liczbę równań 2μ; więc $p+1-2\mu$ niewiadomych jest dowolnych. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku zawsze $\lambda = 0$. Istotnie, jeżeli λ jest niewiadomą, mającą być wyznaczoną, to bezpośrednio otrzymujemy, że $\lambda = 0$, ponieważ $2\nu < 2\mu - 1$. Jeżeli zaś λ jest niewiadomą, wybieraną dowolnie, to mianownik w wyrażeniu 2μ wyznaczanych niewiadomych jest równy zeru, więc możemy wyznaczyć 2μ niewiadomych pochodnych tylko w przypuszczeniu $\lambda = 0$, albowiem w tym przypadku i licznik wspomnianych wyrażeń będzie równy zeru Jeżeli w równaniach (4″) położymy $\lambda = 0$, równania te będą miały postać:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(4''a) \qquad (1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1, 2\mu-1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2\mu-1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 2\mu-1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

Jeżeli wyznacznik δ_1 nie jest równy zeru, nie wszystkie pierwsze minory wyznacznika:

$$\delta = \begin{vmatrix} (1, 1), & (2, 1), & \ldots, & (2\mu-1, 1) \\ (1, 2), & (2, 2), & \ldots, & (2\mu-1, 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1, 2\mu-1), & (2, 2\mu-1), & \ldots, & (2\mu-1, 2\mu-1) \end{vmatrix},$$

są równe zeru. Niech nierówny zeru będzie:

$$\delta = \begin{vmatrix} (1, 1), & (2, 1), & \ldots, & (2\mu-2, 1) \\ (1, 2), & (2, 2), & \ldots, & (2\mu-2, 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1, 2\mu-2), & (2, 2\mu-2), & \ldots, & (2\mu-2, 2\mu-2) \end{vmatrix}.$$

Ostatnie $2\mu-1$ równań (4″a) są równaniami **Pfaffa**; pomiędzy niemi jest 2ν niezależnych:

$$(1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1, 2\mu-2) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2\mu-2) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 2\mu-2) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0.$$

i w układzie (4″a) będzie $2\mu-1$ równań:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(4''') \qquad (1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1, 2\mu-2) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2\mu-2) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p, 2\mu-2) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0.$$

Te równania są niezależne. W istocie, jeżeli wyznacznik δ_1 nie jest równy zeru, to—ponieważ jego minor względem elementu 0 jest równy zeru, a pierwszy minor ostatniego, oznaczony przez δ, nie jest równy zeru—na mocy twierdzenia VIII nie jest równym zeru minor wyznacznika δ_1 względem elementu jego $X_{2\mu-1}$, t. j. wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} X_1, & X_2, & \ldots, & X_{2\mu-1} \\ (1,1), & (2,1), & \ldots, & (2\mu-1,1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (1, 2\mu-2), & (2, 2\mu-2), & \ldots, & (2\mu-1, 2\mu-2) \end{vmatrix},$$

równań (4‴) nie jest równy zeru i równania Pfaffa są niedostateczne. Ponieważ $2\mu \leqslant p$, to przynajmniej jedna pochodna zostaje dowolną, więc nie wszystkie pochodne są równe zeru. Wnioskujemy tedy, że przekształcenie Pfaffa możliwe jest tylko w przypadku, gdy $\Delta_1 = 0$; równania zaś Pfaffa są dostatecznemi tylko wtedy, gdy przy warunku $\Delta_1 = 0$ najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ_1 i Δ jest jednakowy. Jeżeli najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznaczników Δ_1 i Δ jest niejednakowy, to równania Pfaffa są niedostateczne i trzeba do nich dodać równanie:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0;$$

Przytem w tym przypadku zawsze $\lambda = 0$, więc równania, rozstrzygające kwestyę przekształcenia Pfaffa, mają w tym przypadku postać:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$(1,1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1,p) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,p) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,p) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} = 0.$$

Pomiędzy temi równaniami jest tylko $2\mu-1$ niezależnych, jeżeli najwyższy stopień nierównych zeru minorów wyznacznika Δ_1 jest 2μ.

3) Równania różniczkowe (4) charakteryzuje własność niezmienności. Przypuśćmy, że wyrażenie różniczkowe (1):

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_p\, dx_p,$$

po przekształceniu go za pomocą przekształceń:

$$x_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_p), \qquad (i=1,2,\ldots,p),$$

gdzie f_i $(i=1,2,\ldots,p)$ są p niezależnemi funkcyami dowolnemi, ma postać:

$$Z_1\, dz_1 + Z_2\, dz_2 + \ldots + Z_p\, dz_p,$$

gdzie $Z_\lambda = \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial x_i}{\partial z_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, p)$ w przypuszczeniu, że po stronie prawej zastąpiliśmy x_i $(i=1,2,\ldots,p)$ przez $f_i(z_1, z_2, \ldots, z_p)$, $(i=1,2,\ldots,p)$.

Równania, podobne do równań (4), dla tego ostatniego wyrażenia różniczkowego, mają postać:

$$Y_1 = Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial y_1} + Z_2 \frac{\partial z_2}{\partial y_1} + \ldots + Z_p \frac{\partial z_p}{\partial y_1},$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial z_1} &= (1,1) \frac{\partial z_1}{\partial y_1} + (2,1) \frac{\partial z_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,1) \frac{\partial z_p}{\partial y_1} - \lambda Z_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial z_p} &= (1,p) \frac{\partial z_1}{\partial y_1} + (2,p) \frac{\partial z_2}{\partial y_1} + \ldots + (p,p) \frac{\partial z_p}{\partial y_2} - \lambda Z_p. \end{aligned} \qquad \left((m,n) = \frac{\partial Z_m}{\partial z_n} - \frac{\partial Z_n}{\partial z_m}\right),$$

Wspomniana wyżej własność niezmienności równań (4) zawiera się w następującem twierdzeniu: „Jeżeli zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_p$ czynią zadość równaniom (4), to zmienne $z_1, z_2, \ldots, z_p$, związane ze zmiennemi $x_1, x_2, \ldots, x_p$ za pomocą wzorów (5), czynią zadość równaniom (6), w których funkcye Y_1 i λ są te same, jak i w równaniach (4), wyrażone tylko przez $z_1, z_2, \ldots, z_p$ [1]). Odwrotne twierdzenie także jest prawdziwe.“

Wyżej dowiedliśmy, że przy dowolnych wzorach przekształcenia zachodzą równości:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial z_k} - \frac{\partial Z_k}{\partial z_i} = \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{p} (s,t) \frac{\partial x_s}{\partial z_i} \frac{\partial x_t}{\partial z_k}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p),$$

w przypuszczeniu, że strona prawa jest wyrażona przez zmienne $z_1, z_2, \ldots, z_p$ za pomocą wzorów (5). Przekształcimy równania (4) za pomocą równania (5). Pierwsze równanie (4), po przekształceniu za pomocą wzorów (5), ma postać:

$$Y_1 = X_1 \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_1}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y_1} + X_2 \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_2}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y_1} + \ldots + X_p \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_p}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y_1},$$

albo też:

$$Y_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial x_i}{\partial z_1} + \frac{\partial z_2}{\partial y_1} \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial x_i}{\partial z_2} + \ldots + \frac{\partial z_p}{\partial y_1} \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial x_i}{\partial z_p};$$

1) Porów. Darboux (l. c.).

skąd na mocy równania:

$$Z_\lambda = \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial x_i}{\partial z_\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, p),$$

otrzymujemy:

$$Y_1 = Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial y_1} + Z_2 \frac{\partial z_2}{\partial y_1} + \dots + Z_p \frac{\partial z_p}{\partial y_1},$$

pierwsze równanie (6).

Teraz przekształcimy pozostałe p równań (4).

Zastępując zmienne x_i przez $f_i(z_1, z_2, \dots, z_p)$ i $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ przez $\sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_i}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y_1}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$, otrzymujemy:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_t} = (1, t) \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_1}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y_1} + (2, t) \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_2}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y_1}$$
$$+ \dots + (p, t) \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial x_p}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y_1} - \lambda X_t,$$
$$(t = 1, 2, \dots, p),$$

albo też:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_t} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \sum_{s=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_s}{\partial z_1} + \frac{\partial z_2}{\partial y_1} \sum_{s=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_s}{\partial z_2}$$
$$+ \dots + \frac{\partial z_p}{\partial y_1} \sum_{s=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_s}{\partial z_p} - \lambda X_t,$$
$$(t = 1, 2, \dots, p).$$

Te ostatnie równania nie mają kształtu równań (6).

Jeżeli pomnożymy każde z tych równań $(t = 1, 2, \dots, p)$ przez $\frac{\partial x_t}{\partial z_a}$ $(t = 1, 2, \dots, p)$ i dodamy, znajdziemy:

$$\sum_{t=1}^{p} \frac{\partial Y_1}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial z_a} = \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \sum_{t=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_s}{\partial z_1} \frac{\partial x_t}{\partial z_a} + \frac{\partial z_2}{\partial y_1} \sum_{t=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_s}{\partial z_2} \frac{\partial x_t}{\partial z_a}$$
$$+ \dots + \frac{\partial z_p}{\partial y_1} \sum_{t=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_s}{\partial z_p} \frac{\partial x_t}{\partial z_a} - \lambda \sum X_t \frac{\partial x_t}{\partial z_a};$$

stąd na mocy równości:

$$\sum_{t=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (s, t) \frac{\partial x_s}{\partial z_i} \frac{\partial x_t}{\partial z_k} = \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} - \frac{\partial Z_k}{\partial z_i}, \qquad Z_\lambda = \sum_{t=1}^{p} X_t \frac{\partial x_t}{\partial z_\lambda},$$

otrzymujemy:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial z_a} = (1, a) \frac{\partial z_1}{\partial y_1} + (2, a) \frac{\partial z_2}{\partial y_1} + \dots + (p, a) \frac{\partial z_p}{\partial y_1} - \lambda Z_a,$$

gdzie

$$(s, a) = \frac{\partial Z_s}{\partial z_a} - \frac{\partial Z_a}{\partial z_s}.$$

Kładąc $a = 1, 2, \dots, p$, otrzymamy p ostatnich równań (6). Tak więc pierwsze równanie (6) jest przekształconem za pomocą wzorów (5) pierwszem równaniem (4), a każde z ostatnich p równań (6) jest kombinacyą liniową przekształconych p ostatnich równań (4). Stąd wynika, że jeżeli zmienne $x_1, x_2, \dots, x_p$ czynią zadość równaniom (4), to zmienne $z_1, z_2, \dots, z_p$ czynią zadość równaniom (6).

Jeżeli zwrócimy uwagę na tę okoliczność, że każde z p ostatnich równań (6) jest taką kombinacyą liniową p ostatnich równań (4), której wyznacznik

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_p)}{\partial (z_1, z_2, \dots, z_p)},$$

nie jest równy zeru, to będzie oczywistem, że każde z p ostatnich równań (4) jest kombinacyą p ostatnich równań (6).

Więc przypominając sobie, że pierwsze równanie (6) jest przekształconem pierwszem równaniem (4), wniesiemy, że odwrotne twierdzenie także jest prawdziwem.

Z tych dwóch twierdzeń wynika, że liczba niezależnych równań w układzie (4) i (6) jest jednakowa przy jednakowych funkcyach λ i Y_1.

Wyżej była zrobiona uwaga, że każde z p ostatnich równań (4) jest kombinacyą liniową p ostatnich równań (6) i odwrotnie. Stąd wynika, że liczba niezależnych równań w układzie p ostatnich równań (4) i (6) jest jednakowa przy jednakowych funkcyach λ i Y_1.

W n i o s e k I. Przypuśćmy, że w równaniach (4) i (6) $Y_1 = 0$. Otrzymamy dwa układy $p + 1$ równań liniowych i jednorodnych względem $p + 1$ ilości: λ, $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ $(i = 1, \dots, p)$ i λ, $\frac{\partial z_i}{\partial y_1}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$. Jeżeli wyznacznik równań (4):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_p \\ -X_1, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_p, & (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix}, \quad \left((m,n) = \frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m}\right),$$

jest równy zeru, to pomiędzy niemi jest mniej niż $p+1$ niezależnych. Więc i pomiędzy równaniami (6) przy $Y_1 = 0$ jest mniej niż $p+1$ równań niezależnych, a zatem wyznacznik Δ_1 tych ostatnich:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & Z_1, & Z_2, & \ldots, & Z_p \\ -Z_1, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -Z_p, & (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix}, \quad \left((m,n) = \frac{\partial Z_m}{\partial z_n} - \frac{\partial Z_n}{\partial z_m}\right),$$

także jest równy zeru, a ponieważ liczba równań niezależnych w (4) i (6) przy $Y_1 = 0$ jest jednakową, przeto najwyższy stopień nierównych zeru minorów obydwóch wyznaczników jest jednakowy. W ten sam sposób można dowieść, że jeżeli wyznacznik Δ_1 równań (6) przy $Y_1 = 0$ jest równy zeru, to wyznacznik Δ_1 równań (4) przy $Y_1 = 0$ jest także równy zeru i najwyższy stopień nierównych zeru minorów jest jednakowy. Stąd wynika, że jeżeli jeden z wyznaczników Δ_1 nie jest równy zeru, drugi także nie jest równy zeru.

W n i o s e k II. Przypuśćmy, że w p ostatnich równaniach (4) i (6) jest $Y_1 = 0$ i $\lambda = 0$. Ponieważ liczba równań niezależnych w układach p ostatnich równań (4) i (6) jest jednakowa, to można podobnym sposobem dowieść, że wyznaczniki tych równań:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ (1,2), & (2,2), & \ldots, & (p,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix}, \quad \left((m,n) = \frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m}\right),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ (1,2), & (2,2), & \ldots, & (p,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix}, \quad \left((m,n) = \frac{\partial Z_m}{\partial z_n} - \frac{\partial Z_n}{\partial z_m}\right),$$

są jednocześnie nierównemi zeru lub równemi zeru; w tym ostatnim przypadku najwyższy stopień nierównych zeru minorów ich jest jednakowy.

---

§ 2.

Zastosowanie uogólnionego przekształcenia Pfaffa do wyrażenia różniczkowego $X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_p\,dx_p$ w tym przypadku, gdy wyznaczniki Δ_1 i Δ nie są jednocześnie równe zeru.

Rozpatrzmy, jaki użytek można zrobić z wskazanego w poprzednim paragrafie przekształcenia w celu uproszczenia wyrażenia różniczkowego:

$$(1) \qquad X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_p\,dx_p.$$

W teoryi tego przekształcenia mają ważne znaczenie wspomniane w poprzednim paragrafie wyznaczniki danego wyrażenia różniczkowego:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_p \\ -X_1, & (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ -X_2, & (1,2), & (2,2), & \ldots, & (p,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_p, & (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} (1,1), & (2,1), & \ldots, & (p,1) \\ (1,2), & (2,2), & \ldots, & (p,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1,p), & (2,p), & \ldots, & (p,p) \end{vmatrix},$$

odpowiednio $(p+1)$-tego i p-tego stopnia. Ponieważ $(m,n) = \frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m} = -(n,m)$ i $(m,m) = \frac{\partial X_m}{\partial x_m} - \frac{\partial X_m}{\partial x_m} = 0$, przeto te wyznaczniki są skośne symetryczne.

Co do tych wyznaczników można zrobić dwa przypuszczenia: że one nie są jednocześnie równemi zeru, albo że są jednocześnie równemi zeru.

Zajmiemy się w tym paragrafie tylko pierwszym przypadkiem.

Więc wyznaczniki Δ_1 i Δ nie są jednocześnie równemi zeru. Liczba p zmiennych niezależnych danego wyrażenia różniczkowego (1) może być liczbą parzystą, albo nieparzystą.

Jeżeli p jest liczbą parzystą $2n$, to wyznacznik Δ_1 koniecznie jest tożsamościowo równy zeru, ponieważ jest skośnym symetrycznym wyznacznikiem stopnia nieparzystego. Wyznacznik zaś Δ jest skośnym symetrycznym stopnia parzystego $2n$ i według założenia nie jest równy zeru.

Jeżeli $p = 2n + 1$, wyznacznik Δ jest tożsamościowo równy zeru, ponieważ n jest skośnym symetrycznym stopnia nieparzystego $2n + 1$. Wyznacznik zaś Δ_1 skośny symetryczny stopnia parzystego $2n + 2$, według przypuszczenia, jest różny od zera.

1) Rozpatrzmy przypadek, w którym $p = 2n$.

Mamy wyrażenie różniczkowe:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_{2n}\,dx_{2n},$$

którego wyznacznik Δ nie jest równy zeru. Przypuśćmy, że mamy zamiar sprowadzić to wyrażenie do jednej z trzech postaci prostszych, wskazanych w poprzednim paragrafie.

Najdogodniejszą postać otrzymamy przy $\lambda = 0$ i $Y_1 = 0$; lecz łatwo zauważyć, że to przekształcenie w danym razie nie da się zastosować. W rzeczy samej, kładąc w równaniach (4) $Y_1 = 0$, $\lambda = 0$, otrzymujemy równania:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_{2n} \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1} = 0,$$

$$(1,1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (2n,1) \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1,2n) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,2n) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (2n,2n) \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1} = 0,$$

Z tych równań możemy oznaczyć wzory przekształcenia tylko w takim razie, gdy nie wszystkie pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ są równe zeru; w przeciwnym bowiem razie zmienne niezależne $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ nie zależą od y_1, a tylko od $y_2, y_3, \ldots, y_{2n}$; więc po wyrugowaniu ostatnich, otrzymujemy jedno albo kilka równań między zmiennemi $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$.

Jeżeli zaś nie wszystkie pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ powinny być równemi zeru, to każdy wyznacznik $2n$-tego stopnia tych $(2n + 1)$ równań powinien być równy zeru, co sprzeciwia się założeniu, ponieważ wyznacznik $2n$-tego stopnia Δ ostatnich $2n$ równań nie jest równy zeru. Możemy więc zastosować jedno z pierwszych dwóch przekształceń: kiedy $Y_1 = 0$, $\lambda \gtreqless 0$ i $Y_1 \gtreqless 0$, $\lambda = 0$.

W istocie, równanie, któremu powinny zadość czynić Y_1 i λ ma postać:

$$\begin{vmatrix} Y_1, & X_1, & X_2, \ldots, & X_p \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}, & (1,1), & (2,1), \ldots, & (p,p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_p}, & (1,p), & (2,p), \ldots, & (p,p) \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 0, & X_1, & X_2, \ldots, & X_p \\ -X_1, & (1,1), & (2,1), \ldots, & (p,1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -X_p, & (1,p), & (2,p), \ldots, & (p,p) \end{vmatrix} = 0.$$

W tym przypadku da się ono sprowadzić do postaci:

$$\begin{vmatrix} Y_1, & X_1, & X_2, \ldots, & X_{2n} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}, & (1,1), & (2,1), \ldots, & (2n.1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_{2n}}, & (1,2n), & (2,2n), \ldots, & (2n,2n) \end{vmatrix} = 0.$$

Y_1 powinno zadość czynić temu równaniu różniczkowemu o pochodnych cząstkowych. Jedna z całek tego równania może być $Y_1 = 0$. Kładąc w równaniach (4) przy $p = 2n$, $Y_1 = 0$, otrzymujemy:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_{2n} \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1} = 0,$$

$$(7) \quad -\lambda X_1 + (1,1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (2n,1) \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\lambda X_{2n} + (1,2n) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,2n) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (2n,2n) \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1} = 0.$$

Wyznacznik tych równań Δ_1 jest równy zeru, więc przynajmniej jedno z tych równań jest wynikiem innych. Ponieważ wyznacznik Δ, według założenia, nie jest równy zeru, pierwsze równanie jest wynikiem ostatnich $2n$ równań niezależnych.

Te ostatnie zawierają $2n + 1$ niewiadomych: λ, $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ $(i = 1, 2, \ldots 2n)$. Więc jedna z nich zostaje dowolną.

Wyznacznik Δ nie jest równy zeru, wskutek tego nie wszystkie pierwsze minory wyznacznika Δ_1 względem elementów $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ pierwszego jego wiersza są równe zeru (twierdz. VI). Oznaczmy te minory przez $W_1, W_2, \ldots, W_{2n}$; nierówny zeru niech będzie W_1. Z ostatnich $2n$ równań (7) możemy oznaczyć albo $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ przy dowolnem λ,— ponieważ wyznacznik Δ nie jest równy zeru,—albo $\lambda, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1}$, przy dowolnem $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$ — ponieważ wyznacznik W'_1 nie jest równy zeru. Ostatnie jest, oczywiście, dogodniejsze.

Ponieważ $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$ jest dowolne, połóżmy $\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 1$.

Wtenczas $\lambda, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \frac{\partial x_3}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1}$ wyznaczamy z równań (7) w postaci:

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{W_2}{W_1}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial y_1} = \frac{W_3}{W_1}, \ldots, \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1} = \frac{W_{2n}}{W_1}, \quad \lambda = \frac{\Delta}{W_1}.$$

Stąd widzimy, że $\lambda \gtrless 0$, ponieważ $\Delta \neq 0$. Całkując równania różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{W_2}{W_1}, \ldots, \frac{\partial x_{2n}}{\partial y_1} = \frac{W_{2n}}{W_1},$$

jak wskazano w paragrafie poprzedzającym, otrzymujemy $2n$ całek niezależnych:

$$x_1 = 1, \; x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}), \; \ldots, \; x_{2n} = \varphi_{2n}(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}),$$

albo rugując y_1:

$$x_2 = \varphi_2(x_1, y_2, \ldots, y_{2n}), \ldots, x_{2n} = \varphi_{2n}(x_1, y_2, \ldots, y_{2n}),$$

żądane wzory przekształcenia.

Jeżeli wyznacznik Δ wyrażenia różniczkowego:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n}\, dx_{2n},$$

o parzystej liczbie zmiennych nie jest równy zeru, to zawsze można go przekształcić tak, aby spółczynnik przy różniczce jednej ze zmiennych był równy zeru i aby ta zmienna zawierała się w reszcie spółczynników tylko we wspólnym ich czynniku.

O przekształceniu przy $Y_1 \neq 0$ i $\lambda = 0$, które także daje się zastosować w tym przypadku, mowa będzie niżej.

2) Przypuśćmy, że $p = 2n + 1$. Wtedy mamy wyrażenie różniczkowe o nieparzystej liczbie zmiennych niezależnych:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n+1}\, dx_{2n+1},$$

którego wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, według założenia.

Jak wyżej dowiedziono, w tym przypadku nie da się zastosować przekształcenie Pfaffa, które charakteryzuje się równaniem $Y_1 = 0$. Można tu zastosować przekształcenie przy $Y_1 \neq 0$ i $\lambda = 0$, t. j. wyrażenie różniczkowe o nieparzystej liczbie zmiennych niezależnych, którego wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, można tak przekształcić, że jedna z nowych zmiennych niezależnych, np. y_1, będzie zawierała się tylko w postaci swojej różniczki dy_1.

W istocie, równanie różniczkowe, któremu zadość czynią λ i Y_1 w przypuszczeniu, że $\lambda = 0$, ma postać:

$$\begin{vmatrix} Y_1, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_{2n+1} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}, & (1, 1), & (2, 1), & \ldots, & (2n+1, 1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_{2n+1}}, & (1, 2n+1), & (2, 2n+1), & \ldots, & (2n+1, 2n+1) \end{vmatrix} = 0.$$

To równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych nie zawiera Y_1, wskutek tego, że wyznacznik Δ nie jest równy zeru. Jedna z całek tego równania jest $Y_1 = \mathrm{const}$, np. $Y_1 = 1$.

Kładąc $Y_1 = 1$, otrzymujemy $2n + 2$ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_{2n+1} \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 1,$$

$$(8) \qquad (1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (2n+1, 1) \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1, 2n+1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2n+1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (2n+1, 2n+1) \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 0,$$

którym powinny czynić zadość pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$.

Jeżeli wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, nie wszystkie minory $2n$-tego stopnia wyznacznika Δ są równe zeru. Niech nierówny zeru główny minor $2n$-tego stopnia wyznacznika Δ będzie:

$$\delta = \begin{vmatrix} (1, 1), & (2, 1), & \dots, & (2n, 1) \\ (1, 2), & (2, 2), & \dots, & (2n, 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1, 2n), & (2, 2n), & \dots, & (2n, 2n) \end{vmatrix};$$

w takim razie minor wyznacznika Δ_1 względem elementu x_{2n+1} pierwszej kolumny jest nierówny zeru (twierdz. VII).

Stąd wynika że ostatnie równanie (8) jest wynikiem niezależnych $2n$ pierwszych równań:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + X_{2n+1} \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 1,$$

$$(1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + (2n+1, 1) \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(1, 2n) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 2n) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + (2n+1, 2n) \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 0.$$

Z ostatnich $2n+1$ równań liniowych i niejednorodnych możemy oznaczyć wszystkie pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ $(i = 1, 2, \dots, 2n+1)$. Całkując otrzymane $2n+1$ równań różniczkowych zwyczajnych, otrzymamy, jak powiedziano w paragrafie 1, żądany wzór przekształcenia:

$$x_1 = \varphi_1 (y_1, y_2, \dots, y_{2n+1}),$$
$$x_2 = \varphi_2 (y_1, y_2, \dots, y_{2n+1}), \dots, x_{2n+1} = \varphi_{2n+1} (y_1, y_2, \dots, y_{2n+1}),$$

który dane wyrażenie różniczkowe o nieparzystej liczbie zmiennych niezależnych w tym przypadku, gdy wyznacznik jego Δ_1 nie jest równy zeru, sprowadza do postaci prostszej:

$$dy_1 + Y_2\, dy_2 + \dots + Y_{2n+1}\, dy_{2n+1},$$

gdzie $Y_2, Y_3, \dots, Y_{2n+1}$ nie zawierają zmiennej niezależnej y_1.

(Dokończenie nastąpi).

Odesa, w listopadzie, 1896 r.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH WEDŁUG AMPÈRE'A I DARBOUX.

PODAŁ

T. RUDZKI.

Niniejsza praca ma za zadanie zestawić badania Ampère'a[1]) w dziedzinie równań różniczkowych 2-go stopnia z pracami nowszych matematyków, głównie zaś z teoryą całkowania p. Darboux[2]), która od roku 1870 stanowi najważniejsze dopełnienie klasycznych rozpraw Ampère'a i Monge'a. Niewątpliwie geometryczne zagadnienia były główną i najpierwszą pobudką w kierunku badania równań cząstkowych, dlatego też pierwsze odkrycia Eulera i Monge'a na tem polu dotyczą teoryi powierzchni.

Metoda Eulera polegała głównie na sumowaniu szeregów nieskończonych; Monge korzystał ze szczególnem upodobaniem z własności charakterystyk geometrycznych[3]), należących do powierzchni całkowych danego równania; Ampère zaś doprowadził w dwóch rozprawach, drukowanych w czasopiśmie „Journal de l'École polytechnique"[4]), teoryę całkowania równania:

---

[1]) Journal de l'École polytechnique, Cah. 17, 18.

[2]) Journal de l'École normale, r. 1870, tłómaczenie niemieckie w podręczniku: Mansion, Partielle Differentialgleichungen, Berlin, 1892.

[3]) Patrz „Prace mat.-fiz., t. VII: S. Lie, Rów. różn. czastk., § 2.

[4]) Zeszyt 17, 18.