O PRZEBIEGU ZAĆMIENIA SŁONECZNEGO W WYŻSZYCH WARSTWACH ATMOSFERY.

PODAŁ

M. ERNST.

W czasie zaćmień słonecznych oś stożka cienia, rzucanego przez księżyc, ma w ogólności kierunek pochyły względem poziomu miejsca obserwacyi, skutkiem czego dla danego miejsca zaćmienie w warstwach atmosfery, rozmaicie od powierzchni ziemi odległych, następuje niejednocześnie. Zależnie od położenia i kierunku ruchu stożka cienia, pewna faza zaćmienia w pewnej pionowej odległości od ziemi zachodzi nieco później lub wcześniej, aniżeli taż sama faza na samej powierzchni. Łatwo zrozumieć, iż niekiedy zaćmienie może być widzialnem na powierzchni ziemi w jakimś punkcie obserwacyi, gdy w pewnej wysokości nad powierzchnią zaćmienia już niema. Oczywiście, może zachodzić i przypadek odwrotny, t. j. stożek cienia nie dotyka powierzchni ziemi w danym jej punkcie, gdy, wzniósłszy się na wysokość jakich kilkuset kilometrów nad powierzchnię ziemi, moglibyśmy obserwować całkowite zaćmienie słońca.

Jeżeli w warstwach atmosfery, oświetlonych w tym czasie, gdy na powierzchni ziemi odbywa się całkowite zaćmienie słońca, znajdują się przedmioty, odbijające w ilości dostatecznej światło słoneczne, to mogą one być obserwowane lub też fotografowane w tym krótkim czasie, jaki upływa pomiędzy początkiem zaćmienia na powierzchni ziemi, a początkiem zaćmienia w tej wysokości, w której badany przedmiot się znajduje.

Zjawiska, zachodzące w wyższych warstwach atmosfery, dotychczas jeszcze bardzo mało są zbadane, głównie z tego powodu, iż są one z niektóremi wyjątkami dla obserwacyi niedostępne. Można jednakże się spodziewać, iż skorzystanie z wymienionej okoliczności, zachodzącej w czasie zaćmień całkowitych, okaże się pożytecznem w badaniach nad tym przedmiotem. W tym celu zająłem się rozwiązaniem nastręczających się tu kwestyj rachunkowych, mianowicie: 1) oznaczyć dla danego punktu ziemi, z uwzględnieniem elementów danego zaćmienia słonecznego, różnicę pomiędzy momentem, w którym jakakolwiek faza zaćmienia widzialną jest na powierzchni ziemi, a momentem, gdy taż sama faza widzianą jest w danej wysokości nad powierzchnią; 2) oznaczyć dla danego punktu powierzchni ziemi, leżącego w pasie całkowitości, wysokość, w której całkowite zaćmienie przestaje być widzialnem.

Ponieważ spółrzędne słońca i księżyca zmieniają się niejednakowo, więc punkty przecięcia prostej, łączącej środki tych dwóch ciał niebieskich, albo punkty przecięcia osi stożka cienia z jakąś płaszczyzną, zajmującą w przestrzeni położenie niezmienne, nie mogą nigdy leżeć na linii prostej, t. j. droga owego punktu przecięcia — nazwijmy go rzutem osi stożka cienia — w płaszczyźnie nieruchomej musi być linią krzywą. Jeżeli jednakże wprowadzimy płaszczyznę rzutu zmienną, jak to w swej teoryi zaćmień słonecznych uczynił Hansen[1]), to można drogę, zakreśloną na płaszczyznie rzutu w czasie nieskończenie krótkim, któremu odpowiada pewne określone położenie tej płaszczyzny w przestrzeni, uważać za prostą. Jeżeli za płaszczyznę rzutu (płaszczyzna XY spółrzędnych cieniowych) obierzemy płaszczyznę, przechodzącą przez środek ziemi prostopadle do każdorazowego kierunku osi stożka cienia, to położenie tej płaszczyzny zmieniać się będzie tylko bardzo mało. Zmiana położenia płaszczyzny XY jest tak powolną, iż można to położenie w ciągu kilku minut uważać za niezmienne i drogę cienia, zakreśloną w tym samym czasie, za prostą.

Przystępując do rozwiązania 1-go punktu, przypuśćmy, iż danym jest czas, w którym pewna faza zaćmienia ma miejsce na powierzchni ziemi w jakimś punkcie, leżącym w pasie całkowitości; znaleść moment odpowiedni dla odległości pionowej g' od powierzchni ziemi.

Niechaj ϱ, φ', λ będą spółrzędnemi geocentrycznemi miejsca obserwacyi. Na fig. 1 XCY jest płaszczyzną, przechodzącą przez środek ziemi C, prostopadle do osi stożka cienia; D — rzutem miejsca obserwacyi na tę płaszczyznę; CD — rzutem promienia wodzącego miejsca obserwacyi; prosta AB oznacza kierunek drogi osi cienia w płaszczyznie XY w momencie, któremu odpowiada przedstawione na rysunku położenie płaszczyzny XY. Kierunek linii AB określony jest przez kąt N, który linia ta tworzy z dodatnim kierunkiem osi Y, położenie zaś jej — przez jej najmniejszą odległość γ od środka ziemi.

[1]) Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandter Erscheinungen. Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. der Wissenschaften IV. Patrz szczególnie ustępy 1, 21 i 22.

Rozwiążmy zadanie nasze przedewszystkiem dla największej fazy. W miejscu obserwacyi największa faza (środek całkowitości) ma miejsce wtedy, gdy rzut osi cienia znajduje się w spodku linii prostopadłej, spuszczonej z punktu D na AB. Niechaj owym rzutem będzie O, wtedy koło

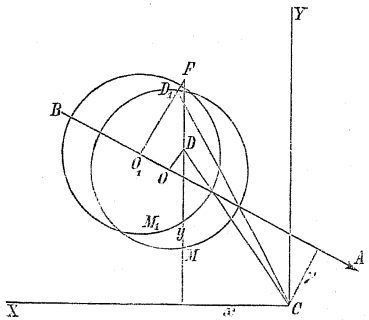

Fig. 1.

OM jest rzutem na płaszczyznę XY koła, które stożek cienia w momencie odpowiednim wycina w płaszczyznie, przechodzącej przez miejsce obserwacyi i równoległej do płaszczyzny XY. Wielkość promienia koła OM niech będzie u.

Niechaj na powierzchni ziemi największa faza ma miejsce w momencie t, w wysokości zaś g' nad powierzchnią ta sama faza niech zachodzi w momencie $t + \Delta t$. Niech będzie D_1 rzutem punktu w wysokości g' nad powierzchnią ziemi na płaszczyznę XY i O_1 M_1 — rzut odpowiadającego temu punktowi koła cieniowego. Promień tego koła niech będzie u_1. Gdy za oś Z obierzemy prostą, przechodzącą przez środek ziemi równolegle do osi cienia, wtedy spółrzędne prostokątne miejsca obserwacyi mają wartości następujące:

$$x = \varrho \cos \varphi' \sin (a' - \omega);$$

$$y = \varrho \left[\sin \varphi' \cos d' - \cos \varphi' \sin d' \cos (a' - \omega)\right];$$

$$z = \varrho \left[\sin \varphi' \sin d' + \cos \varphi' \cos d' \cos (a' - \omega)\right].$$

W tych wyrażeniach a' i d' oznaczają selenocentryczne wznoszenie proste i zboczenie środka słońca, ω—wyrażony w stopniach czas gwiazdowy miejsca obserwacyi. Zamiast a', d' można jednakże w większości wypadków, bez narażenia się na większy błąd, napisać a' i δ', t. j. geocentryczne spółrzędne słońca, ponieważ $d' - \delta'$ i $a' - a'$ dosięgnąć może najwyżej 16″. Gdy

tę zamianę uczynimy, wtedy we wzorach powyższych zamiast $a' - \omega$ będziem mieli $a' - \omega = t$, czas prawdziwy miejsca obserwacyi, stąd:

$$x = \varrho \cos \varphi' \sin t;$$

$$y = \varrho (\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos t);$$

$$z = \varrho (\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos t).$$

Ponieważ w wysokości g' największa faza przypada po upływie czasu Δt, a promień wodzący ma w tej wysokości wartość $\varrho (1 + g')$, a więc spółrzędne prostokątne punktu w wysokości g' w czasie $t + \Delta t$ mają wartości:

$$x_1 = \varrho (1 + g') \cos \varphi' \sin (t + \Delta t);$$

$$y_1 = \varrho (1 + g') \left[\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos (t + \Delta t)\right];$$

$$z_1 = \varrho (1 + g') \left[\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos (t + \Delta t)\right].$$

Albo też, gdy Δt jest ilością małą,—który to przypadek wyłącznie ma być rozważany—:

$$x_1 = \varrho (1 + g') \cos \varphi' \sin t + \varrho (1 + g') \cos \varphi' \cos t \, \Delta t;$$

$$y_1 = \varrho (1 + g') (\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos t) + \varrho (1 + g') \cos \varphi' \sin \delta' \sin t \, \Delta t;$$

$$z_1 = \varrho (1 + g') (\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos t) - \varrho (1 + g') \cos \varphi' \cos \delta' \sin t \, \Delta t.$$

Różnice spółrzędnych są zatem:

$$x_1 - x = \Delta x = \varrho g' \cos \varphi' \sin t + \varrho (1 + g') \cos \varphi' \cos t \, \Delta t;$$

$$y_1 - y = \Delta y = \varrho (1 + g') \cos \varphi' \sin \delta' \sin t \, \Delta t + \varrho g' (\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos t; \tag{1}$$

$$z_1 - z = \Delta z = \varrho g' (\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos t) - \varrho (1 + g') \cos \varphi' \cos \delta' \sin t \, \Delta t.$$

W punkcie (x_1, y_1, z_1) największa faza przypada w chwili, gdy środek cienia znajduje się w punkcie O_1; odcinek OO_1 zatem jest drogą, przebieżoną przez oś cienia w czasie Δt. Niechaj ruch cienia na godzinę będzie n, to (ponieważ Δt wyrażamy w częściach promienia) będzie:

$$OO_1 = \Delta t . \frac{12}{\pi} n = \Delta t . n',$$

gdzie $\frac{12}{\pi} n = n'$; $\log \frac{12}{\pi} = 0.5820313$.

Aby znaleść Δt, trzeba wyprowadzić związek pomiędzy zmianami spółrzędnych Δx, Δy, Δz w czasie Δt a odcinkiem $\Delta tn'$. Z figury widać, że:

$$OO_1 = DF \cos N = (\Delta y + \Delta x \operatorname{tg} N) \cos N,$$

albo:

$$\Delta x \sin N + \Delta y \cos N = n' \Delta t.$$

Podstawiając zamiast Δx i Δy wyprowadzone dla nich wyżej wyrażenia i oznaczając jeszcze:

$$\eta = \varrho \sin \varphi', \quad \xi = \varrho \cos \varphi',$$

otrzymamy:

$$\Delta tn' = (1 + g') \xi \sin t \sin \delta' \cos M . \Delta t + g' \eta \cos \delta' \cos N$$
$$- g' \xi \cos t \sin \delta' \cos N + g' \xi \sin t \sin N + (1 + g') \xi \cos t \sin N . \Delta t.$$

Dla skrócenia piszemy:

$$\sin \delta' \cos N = \sin k \cos K,$$
$$\sin N = \sin k \sin K,$$
$$\cos \delta' \cos N = \cos k,$$

i otrzymujemy:

$$\Delta t [n' - (1 + g') \xi \sin k \sin (K + t)] = g' [\eta \cos k - \xi \sin k \cos (K + t)]$$

$$\Delta t = \frac{g' [\eta \cos k - \xi \sin k \cos (K + t)]}{n' - (1 + g') \xi \sin k \sin (K + t)}.$$

Gdy rozwiniemy Δt według potęg g' i zatrzymamy się na pierwszym wyrazie, znajdziemy:

$$\Delta t = \frac{\eta \cos k - \xi \sin k \cos (K + t)}{n' - \xi \sin k \sin (K + t)} . g' \ldots \tag{2}$$

Drugi wyraz rozwinięcia ma wartość znikomą.

Aby otrzymać Δt w sekundach, należy jeszcze na prawej stronie dodać czynnik $\mathfrak{k} = \frac{12.60.60}{\pi}$; $\log \mathfrak{k} = 4.1383338$.

Aby rozwiązać to samo zadanie dla początku i końca całkowitości, postępujemy w sposób następujący. Niech będą (fig. 2) X i Y spółrzędne środka koła cieniowego w płaszczyźnie XY w czasie t, x, y, z zaś spółrzędne punktu na powierzchni ziemi, w którym ma miejsce zetknięcie ze stożkiem pełnego cienia. W czasie $t + \Delta t$ niech ma miejsce zetknięcie w punkcie, wzniesionym na wysokość g' nad powierzchnię ziemi, którego spółrzędne w momencie zetknięcia niech będą x_1, y_1, z_1; spółrzędne środka cienia niech będą w tej samej chwili X_1, Y_1. Kąty, utworzone przez kierunek prostej, przechodzącej przez rzuty punktów zetknięcia na płaszczyznę XY i odpowiednie położenie środka cienia, z kierunkiem drogi cienia, niech będą odpowiednio ψ i ψ'. Dla tych dwóch punktów mamy 2 równania analogiczne:

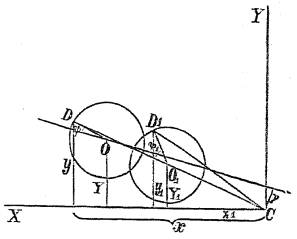

Fig. 2.

$$u \sin \psi = X \cos N - Y \sin N + (y \sin N - x \cos N)$$
$$u \cos \psi = X \sin N + Y \cos N - (y \cos N + x \sin N) \tag{3}$$
$$u = u' - z \operatorname{tg} f$$

i

$$u_1 \sin \psi' = X_1 \cos N - Y_1 \sin N + (y_1 \sin N - x_1 \cos N)$$
$$u_1 \cos \psi' = X_1 \sin N + Y_1 \cos N - (y_1 \cos N + x_1 \sin N)$$
$$u_1 = u' - z_1 \operatorname{tg} f.$$

W równaniach tych jest:

$$X \cos N - Y \sin N = X_1 \cos N - Y_1 \sin N = - \gamma$$
$$X \sin N + Y \cos N = (t - \lambda - \mu) \frac{n}{15}$$
$$X_1 \sin N + Y_1 \cos N = (t - \lambda - \mu) \frac{n}{15} + \Delta tn'$$
$$y_1 = y + \Delta y, \quad x_1 = x + \Delta x, \quad z_1 = z + \Delta z.$$

Gdy zatem każde z równań 1-go układu odejmiemy od odpowiednich równań 2-go, otrzymamy:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
u \sin \psi' &= u \sin \psi + (\Delta y \sin N - \Delta x \cos N) \\
u \cos \psi' &= u \cos \psi + \Delta t \,.\, n' - (\Delta y \cos N + \Delta x \sin N) \\
u_1 &= u - \Delta z \operatorname{tg} f.
\end{aligned}
$$

Wyrażenie dla $\Delta y \cos N + \Delta x \sin N$ znaleźliśmy wyżej. Podobnie otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\Delta y \sin N - \Delta x \cos N = {} & (1 + g')\, \xi \sin t \sin \delta' \sin N \,.\, \Delta t \\
& + g' \eta \cos \delta' \sin N - g' \xi \cos t \sin \delta' \sin N - g' \xi \sin t \cos N \\
& - (1 + g')\, \xi \cos t \cos N \,.\, \Delta t.
\end{aligned}
$$

Dla skrócenia połóżmy:

$$
\begin{aligned}
\sin \delta' \sin N &= \sin g \sin G \\
\cos N &= \sin g \cos G \\
\cos \delta' \sin N &= \cos g,
\end{aligned}
$$

wtedy mamy:

$$
\begin{aligned}
\Delta y \sin N - \Delta x \cos N = {} & - (1 + g')\, \xi \sin g \cos (G + t) \,.\, \Delta t \\
& - g' \xi \sin g \sin (G + t) + g' \eta \cos g.
\end{aligned}
$$

Równaniom (3) można dać postać następującą:

$$
\begin{aligned}
u \sin \psi &= - \gamma + \eta \cos g - \xi \sin g \sin (G + t) \\
u \cos \psi &= (t - \lambda - \mu) \frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos (K + t),
\end{aligned}
$$

gdzie μ oznacza czas prawdziwy 1-go południka, dla którego odległość środka ziemi od drogi cienia jest najmniejszą. Mamy zatem:

$$
\begin{aligned}
g' [\eta \cos g - \xi \sin g \sin (G + t)] &= g' (u \sin \psi + \gamma) \\
g' [\eta \cos k - \xi \sin k \cos (K + t) &= g' [(t - \lambda - \mu) \frac{n}{15} - u \cos \psi] \,.
\end{aligned}
$$

i równania otrzymują postać:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
u_1 \sin \psi' &= u \sin \psi (1 + g') + \gamma g' - \xi \sin g \cos (G + t) \,.\, \Delta t \\
u_1 \cos \psi' &= u \cos \psi (1 + g') - g' (t - \lambda - \mu) \frac{n}{15} \\
&\qquad - [\xi \sin k \sin (K + t) - n'] \, \Delta t \\
u_1 &= u - \Delta z \operatorname{tg} f.
\end{aligned}
$$

W wyrażeniach powyższych opuszczone zostały wyrazy, zawierające iloczyn $g' \Delta t$. Uważając w równaniach (5) wielkości u, ψ, t, jako wiadome, mamy zatem dla znalezienia niewiadomych u_1, ψ' i Δt trzy równania. Ponieważ jednakże kąt f jest mały, a Δz najwyżej jest porządku g', więc iloczyn $\Delta z \operatorname{tg} f$ jest wielkością znikomą, tak iż możemy przyjąć $u_1 = u$; wskutek tego układ równań (5) redukuje się do dwu równań z dwiema niewiadomemi. Równania te piszemy w skróceniu:

$$
\begin{aligned}
u \sin \psi' &= A - a \, \Delta t \\
u \cos \psi' &= B - b \, \Delta t.
\end{aligned}
$$

Znaczenie wielkości a, b, A, B jest zrozumiałem. Z równań tych rugujemy ψ, podnosząc je do kwadratu i dodając, i rozwiązujemy według Δt:

$$
\Delta t = \frac{aA + bB \mp \sqrt{(aA + bB)^2 + (u^2 - A^2 - B^2)(a^2 + b^2)}}{a^2 + b^2}.
$$

Z dwóch rozwiązań daje odpowiedź w naszem zadaniu to, w którem dla $g' = 0$, otrzymujemy $\Delta t = 0$; dotyczy to rozwiązania ze znakiem $-$; w tym przypadku bowiem dla $g' = 0$, jest $A^2 + B^2 = u^2$, wskutek czego drugi wyraz pod znakiem pierwiastku odpada i cały licznik staje się zerem, gdy pozostały pierwiastek odejmiemy. Rozwijamy Δt na szereg według wzrastających potęg ilości g':

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d\,\Delta t}{dg'}\right)_0 = {} & \frac{1}{a^2 + b^2} \Bigg\{ a (\gamma + u \sin \psi) + b \left(u \cos \psi - \frac{n}{15} (t - \lambda - \mu)\right) \\
& - a (\gamma + u \sin \psi) - b \left[u \cos \psi - \frac{n}{15} (t - \lambda - \mu) \right] + \frac{(a^2 + b^2) \left(A \frac{dA}{dg'} + B \frac{dB}{dg'} \right)_0}{a u \sin \psi + b u \cos \psi} \Bigg\} \\
= {} & \frac{\sin \psi (\gamma + u \sin \psi) + \cos \psi \left[u \cos \psi - \frac{n}{15} (t - \lambda - \mu) \right]}{a \sin \psi + b \cos \psi} \\
= {} & \frac{\frac{n}{15} (t - \lambda - \mu) - (u + \gamma \sin \psi)}{[n' - \xi \sin k \sin (K + t)] \cos \psi - \xi \sin g \cos (G + t) \sin \psi}.
\end{aligned}
$$

Gdy jeszcze oznaczymy:

$$n' - \xi \sin k \sin (K + t) = a \cos A, \quad \xi \sin g \cos (G + t) = a \sin A,$$

otrzymamy:

$$\left(\frac{d\,\Delta t}{dg'}\right)_0 = \frac{\frac{n}{15}(t - \lambda - \mu) - (u + \gamma \sin \psi)}{a \cos (A + \psi)} = C. \tag{6}$$

W mianowniku spółczynnika 2-go wyrazu występuje jako czynnik wielkość u, która zawsze jest małym ułamkiem, skutkiem czego nawet przy małem g' drugi wyraz może mieć wartość znaczną. Rozwijając 2-gi wyraz, otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić:

$$\left(\frac{d^2(\Delta t)}{dg'^2}\right)_0 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(u \sin \psi + \gamma)^2 + \left[u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)\right]^2}{-u\,a \cos (A + \psi)}\right.$$

$$+ \frac{a^2 \left\{u \sin \psi (u \sin \psi + \gamma) + u \cos \psi \left[u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)\right]\right\}^2}{-[u\,a \cos (A + \psi)]^3}$$

$$- \frac{2 \left\{u \sin \psi (u \sin \psi + \gamma) + u \cos \psi \left[u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)\right]\right\} (u \sin \psi + \gamma)\, a \sin A}{[u\,a \cos (A + \psi)]^3}$$

$$\left. + \frac{2 \left\{u \sin \psi (u \sin \psi + \gamma) + u \cos \psi \left[u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)\right]\right\} \left[u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)\, a \cos A\right]}{[u\,a \cos (A + \psi)]^2}\right\}.$$

Gdy wyłączymy jeszcze $-u\,a \cos (A + \psi)$ jako wspólny czynnik, otrzymamy:

$$\left(\frac{d^2(\Delta t)}{dg'^2}\right)_0 = -\frac{1}{2\,a \cos (A + \psi)}\left\{(u \sin \psi + \gamma)^2 + \left[u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)\right]^2\right.$$

$$\left. + a^2 C^2 - 2\,C (u \sin \psi + \gamma)\, a \sin A + 2\,C [u \cos \psi - (t - \lambda - \mu)]\, a \cos A\right\}.$$

$$\left(\frac{d^2(\Delta t)}{dg'^2}\right)_0 = -\frac{1}{2\,a \cos (A + \psi)\,u}\left\{(u \sin \psi + \gamma - a \sin A \,.\, C)^2\right. \tag{7}$$

$$\left. + \left(u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu) + a \cos A \,.\, C\right)^2\right\}.$$

Mamy zatem:

$$\Delta t = Cg' - \frac{g'^2}{2\,a \cos (A + \psi)\,u}\left\{(u \sin \psi + C\,a \sin A)^2\right. \tag{8}$$

$$\left. + \left[u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu) + C\,a \cos A\right]^2\right\}.$$

Wyrazów w nawiasie, zawierających u jako czynnik, nie potrzeba w większości przypadków uwzględniać, ponieważ w tych wyrazach u skraca się z temże u, stojącem w mianowniku, tak iż ów mały dzielnik odpada. Błąd skutkiem opuszczenia tych wyrazów rzadko tylko może dosięgnąć jednej sekundy czasu, możemy zatem napisać:

$$\Delta t = Cg' - \frac{g'^2}{2\,a\,u \cos (A + \psi)}\left\{(\gamma - C\,a \sin A)^2\right. \tag{9}$$

$$\left. + \left[\frac{n}{15}(t - \lambda - \mu) - C\,a \cos A\right]^2\right\}.$$

Wzór ten służy tak w przypadku pierwszego jak i ostatniego zetknięcia wewnętrznego, jeżeli dla każdego z nich użyjemy odpowiedniego t i ψ.

Jeżeli g' jest tak znaczne, że na drugim wyrazie rozwinięcia ograniczyć się nie można, to zamiast wyprowadzać wyraz 3-ci, który oczywiście jest znacznie więcej złożony, aniżeli dwa pierwsze, lepiej postąpić w ten sposób: obrachujemy t i ψ prócz dla powierzchni ziemi, jeszcze dla jakiejś średniej wysokości g'_1 według zasadniczych równań zaćmieniowych, tak, ażeby rozwijając Δt według potęg $(g' - g'_1)$, można było zatrzymać się na 2-im wyrazie rozwinięcia. Dla wysokości mniejszych niż g'_1 różnica $(g' - g'_1)$ ma wartość ujemną, forma rozwinięcia jednakże pozostaje niezmienioną. Zresztą i wyprowadzenie 3-go wyrazu nie przedstawia trudności, ponieważ jednakże jest ono dosyć zawiłem, więc podaję tutaj tylko otrzymany rezultat. Gdy oznaczymy spółczynnik 3-go wyrazu przez E, drugiego zaś przez D, będzie:

$$E = \frac{D\left\{Ca - (u \sin \psi + \gamma) \sin A + \left[u \cos \psi - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)\right] \cos A\right\}}{2\,u \cos (A + \psi)}. \tag{10}$$

Gdy jeszcze w liczniku opuścimy wyrazy, zawierające czynnik u, co na ścisłość nie wpłynie z powodu małego czynnika g'^3, występującego w 3-im wyrazie rozwinięcia, będzie:

$$E = \frac{D\left[C\,a - \gamma \sin A - \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)\cos A\right]}{\dot{z}\,u \cos(A + \psi)}.$$

Pomijamy rozwiązanie zadania dla innych faz, które w teoryi jest zupełnie podobnem do poprzedniego, w praktyce zaś zastosowania nie znajdzie. Przechodzimy teraz do rozwiązania drugiego zadania, t. j. do znalezienia granicy dla wysokości, ponad którą w danym punkcie faza całkowitości zaćmienia przestaje być widzialną.

Jeżeli dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia dla Δt określają Δt dostatecznie dokładnie, to rozwiązanie zadania jest bardzo prostem. Gdy bowiem obrachujemy Δt dla początku i końca całkowitości dla szeregu g', to zauważymy, iż przy pewnej wysokości początek całkowitości i koniec mają miejsce równocześnie, a gdy posuniemy się jeszcze wyżej, to nam wypadnie, iż koniec następuje wcześniej niż początek. Jest to rzeczywiście niemożliwem i wskazuje, iż stożek cienia do tej wysokości już nie sięga. Niechaj będzie dla początku zaćmienia:

$$\Delta t_e = C_e g' - D_e g'^2$$

i dla końca:

$$\Delta t_a = C_a g' - D_a g'^2,$$

gdzie t_e i t_a oznaczają momenty początku i końca całkowitości na powierzchni ziemi. Ponieważ na wysokości krańcowej, do której sięga stożek cienia, początek i koniec całkowitości ma miejsce jednocześnie, więc dla tej wysokości mamy:

$$t_e + C_e g' - D_e g'^2 = t_a + C_a g' - D_a g'^2.$$

Z tego równania otrzymujemy:

$$g' = \frac{C_a - C_e \pm \sqrt{(C_a - C_e)^2 + 4\delta(D_a - D_e)}}{2(D_a - D_e)}, \tag{11}$$

gdzie δ oznacza czas trwania całkowitości na powierzchni ziemi, wyrażony w częściach promienia. Z dwóch rozwiązań obieramy to, w którem g' posiada wartość dodatnią.

Z większą ścisłością otrzymujemy największe g' na zasadzie warunku, iż w tym przypadku można przyjąć $\psi = 90^0$. W tym razie mamy równania:

$$u = u' - [(1 + g')\,\eta \sin \delta' + (1 + g')\,\xi \cos \delta' \cos t]\,\mathrm{tg}\, f$$

$$u = -\gamma + (1 + g')\,\eta \cos g - (1 + g')\,\xi \sin g \sin(G + t_1)$$

$$0 = (t_1 - \mu - \lambda)\frac{n}{15} - (1 + g')\,\eta \cos k + (1 + g')\,\xi \sin k \cos(K + t_1),$$

które wystarczają do znalezienia 3-ch niewiadomych u, t_1 i g'. Dla t_1 zawsze znaną będzie jakaś wartość przybliżona t_0, za którą można naprzykład przyjąć moment wejścia lub największej fazy na powierzchni ziemi. W ten sposób potrzeba będzie znaleść tylko poprawkę Δt, którą należy dodać do t_0, aby równaniom powyższym uczynić zadość. Gdy położymy $t_1 = t_0 + \Delta t$, rozwiniemy $\sin(t_0 + \Delta t)$ i $\cos(t_0 + \Delta t)$, kładąc $\cos \Delta t = 1$, $\sin \Delta t = \Delta t$ i nie uwzględniając zmienności u w przeciągu czasu Δt, położymy $u = u_0$, odpowiadającemu momentowi t_0, to otrzymamy 2 następujące równania z 2-ma niewiadomemi.

$$u + \gamma = \tau\,[\eta \cos g - \xi \sin g \sin(G + t_0)] - \tau\,\xi \sin g \cos(G + t_0)\,\Delta t$$

$$0 = (t_0 - \lambda - \mu)\frac{n}{15} + \tau\,[-\eta \cos k + \xi \sin k \cos(K + t_0)]$$
$$- [\tau\,\xi \sin k \sin(K + t_0) - n']\,\Delta t.$$

W tych równaniach oznaczyliśmy $1 + g' = \tau$.

Gdy dla skrócenia oznaczymy jeszcze:

$$\eta \cos g - \xi \sin g \sin(G + t_0) = l$$
$$\xi \sin g \cos(G + t_0) = m$$
$$-\eta \cos k + \xi \sin k \cos(K + t_0) = p$$
$$\xi \sin k \sin(K + t_0) = q$$
$$u + \gamma = r,\ (t_0 - \lambda - \mu)\frac{n}{15} = s,$$

to równania otrzymają postać:

$$r = \tau l - \tau m \Delta t$$
$$s = -\tau p + (\tau q - n')\,\Delta t.$$

Z tych równań otrzymujemy:

$$\Delta t = \frac{\tau l - r}{\tau m} = \frac{s + \tau p}{\tau p - n'}$$

$$(12) \qquad \tau = \frac{sm + qr + n'l \pm \sqrt{(sm + qr + n'l)^2 - 4rn'(ql - mp)}}{2(ql - mp)}.$$

Znak winien być obrany tak, ażeby było $\tau > 1$; ujemne rozwiązanie dla τ daje nam odległość od powierzchni ziemi punktu przecięcia promienia wodzącego miejsca z powierzchnią przedłużonego wewnątrz ziemi stożka cienia. Wielkości l, m, p i t. d. muszą w każdym razie być obrachowane przy obrachowywaniu zaćmienia, tak iż obrachowanie ilości τ nie przedstawia trudności. Ażeby z tych równań otrzymać dokładną wartość dla Δt, τ musi być obrachowanem z wielką ścisłością, ponieważ Δt, jako wyrażone w częściach promienia, jest bardzo małym ułamkiem; τ musiałoby w tym celu być obrachowanem przynajmniej za pomocą 7 cyfrowych logarytmów. Gdy jednakżo znalezione zostały spółczynniki dawniej rozwiniętego szeregu dla Δt, to daleko wygodniej znaleść Δt dla odpowiedniego $g' = \tau - 1$ za pomocą szeregu.

Gdy miejsce obserwacyi leży w linii centralnej zaćmienia, a t_0 odpowiada początkowi lub końcowi całkowitości na powierzchni ziemi, wtedy $l = \gamma$, $p = -s$, a zatem:

$$\tau = \frac{ms + qr + n'\gamma \pm \sqrt{(ms + qr + n'\gamma)^2 - 4n'r(ms + \gamma q)}}{2(ms + \gamma q)},$$

$$g'_{max} = \frac{n'\gamma + q(u - \gamma) - ms \pm \sqrt{(ms + qr + n'\gamma)^2 - 4n'r(ms + \gamma q)}}{2(ms + \gamma q)}.$$

W ostatniem równaniu znak winien być obrany tak, ażeby było $g'_{max} > 0$.

O wiele mniej złożony, ale też mniej ścisły wzór dla g'_{max} otrzymujemy w sposób następujący.

Całkowitość może mieć miejsce w wysokości g' oczywiście tylko wówczas, gdy rzut punktu w tej wysokości na płaszczyznę XY od drogi cienia odległym jest mniej, aniżeli na u_1, gdy u_1 oznacza promień koła cienia w wysokości g'. Niech będzie (fig. 3) CD rzut promienia wodzącego miejsca obserwacyi w czasie t, a CD_1 rzut przedłużonego do wysokości g' nad powierzchnię ziemi promienia wodzącego w czasie $t + \Delta t$. Spółrzędne punktu D niechaj będą x, y, punktu zaś D_1: $x + \Delta x$ i $y + \Delta y$. Spółrzędne osi

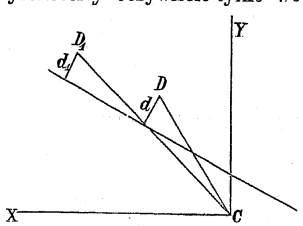

Fig. 3.

cienia niech będą w momentach odpowiednich X, Y, Z, oraz $X + \Delta X$, $Y + \Delta Y$ i $Z + \Delta Z$. Gdy d oznacza odległość punktu D od drogi cienia, a d_1 odległość punktu D od tejże, to mamy:

$$d^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2$$

$$d_1^2 = [(X + \Delta X) - (x + \Delta x)]^2 + [(Y + \Delta Y) - (y + \Delta y)]^2$$

Ponieważ wszakże $OO_1 = n'\Delta t$, zatem:

$$\Delta X = n'\,\Delta t \sin N; \quad \Delta Y = n'\,\Delta t \cos N.$$

lub też, ponieważ, jak widzieliśmy:

$$n'\Delta t = \Delta y \cos N + \Delta x \sin N,$$

$$\Delta X = (\Delta x \sin N + \Delta y \cos N) \sin N$$

$$\Delta Y = (\Delta x \sin N + \Delta y \cos N) \cos N,$$

będzie:

$$X + \Delta X - x - \Delta x = X - x + \Delta x \sin^2 N + \Delta y \sin N \cos N - \Delta x$$
$$= X - x + \cos N(\Delta y \sin N - \Delta x \cos N)$$
$$Y + \Delta Y - y - \Delta y = Y - y + \Delta y \cos^2 N + \Delta x \sin N \cos N - \Delta y$$
$$= Y - y - \sin N(\Delta y \sin N - \Delta x \cos N)$$

Gdy wyrażenia powyższe wstawimy w równanie dla d_1, otrzymamy:

$$d_1^2 = d^2 + (\Delta y \sin N - \Delta x \cos N)^2 + 2(\Delta y \sin N - \Delta x \cos N) \,.$$
$$.\,[\cos N(X - x) - \sin N(Y - y)],$$

Ponieważ $X - x = -d \cos N$ i $Y - y = d \sin N$, więc:

$$d_1^2 = d^2 + 2(\Delta x \cos N - \Delta y \sin N) \,.\, d + (\Delta x \cos N - \Delta y \sin N)^2,$$

$$d_1 = d + (\Delta x \cos N - \Delta y \sin N).$$

Przedtem mieliśmy:

$$\Delta x \cos N - \Delta y \sin N = (1 + g')\, \xi \sin g \cos (G + t) \,.\, \Delta t$$
$$+ g' \xi \sin g \sin (G + t) - g' \eta \cos g,$$

skutkiem czego:

$$d_1 = d + (1 + g')\, \xi \sin g \cos (G + t)\, \Delta t - g' l\,.$$

Dla największej fazy jest:

$$\Delta t = - \frac{g' p}{n' - (1 + g')\, q}\,,$$

więc:

$$d_1 = d + (1 + g') \cdot \frac{m g' p}{(1 + g')\, q - n'} - g' l$$

i największa wartość dla g' ma miejsce wtedy, gdy $d_1 = u_1 = u \ldots$

Z równania:

$$u = d + (1 + g') \cdot \frac{m g' p}{(1 + g')\, q - n'} - g' l\,,$$

g' określa się dosyć dokładnie, gdy zaniedbamy wyrazy, zawierające g'^2; w tym razie mamy:

$$g'_{max} = \frac{u q - n' (u - d)}{l (n' - q) + m p - q (u - d)}\,. \tag{13}$$

Gdy miejsce obserwacyi leży na linni centralnej, mamy $d = 0$ i w tym razie:

$$g'_{max} = \frac{u (n' - q)}{q u - m p - l (n' - q)}\,.$$

Możnaby g'_{max} na zasadzie wzoru (13) rozwinąć na szereg według potęg ilości d, jednakże nie przynosi to żadnej korzyści, ponieważ rachunki stają się w tym razie bardziej zawikłanemi, jeżeli na 2-im wyrazie rozwinięcia zatrzymać się nie można.

Gdy odległość miejsca obserwacyi od linii centralnej jest małą, to można w powyższych wzorach zamiast d, poprostu podstawić tę odległość, wyrażoną jako ułamek promienia ziemskiego. W rzeczywistości jednakże odległość ta jest daną przez (na krzywiznę powierzchni ziemi nie zwracamy uwagi):

$$\Delta^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2,$$

czyli:

$$\Delta^2 = d^2 + (Z - z)^2; \quad d^2 = \Delta^2 - (Z - z)^2.$$

Z powodu małych różnic, zachodzących w λ i φ, można uważać $Z - z$ za różniczkę funkcyi z, względem zmiennych λ i φ.

$$\mathrm{d}z = (\xi \sin \delta' - \eta \cos \delta' \cos t)\, \mathrm{d}\varphi - \xi \cos \delta' \sin t\, \mathrm{d}\lambda, \tag{14}$$

$$d = \Delta - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}z^2}{\Delta}\,,$$

d różni się zatem od Δ tylko wyrazem drugiego rzędu względem $\mathrm{d}z$. Dopełniony odpowiednio wzór (13) jest:

$$g'_{max} = \frac{u q - n' \left(u - \Delta + \frac{\mathrm{d}z^2}{2\Delta}\right)}{l (n' - q) + m p - q \left(u - \Delta + \frac{\mathrm{d}z^2}{2\Delta}\right)}\,, \tag{15}$$

$\mathrm{d}z$ winno być obrachowane według równania (14).

Wzory powyższe zastosowane były do obrachowania warunków odnośnych w czasie zaćmienia słonecznego 8—9 sierpnia 1896 r. Ponieważ zjawisko to już należy do przeszłości, więc nie podajemy tu otrzymanych rezultatów, nadmieniamy tylko, iż poszukiwania dotyczyły tej części pasa całkowitości, która przypadała w granicach Norwegii. Dla umożliwienia korespondujących obserwacyj do każdego punktu linii centralnej, ktorych uwzględniono 3, dobrane były po 2 punkty zewnątrz centralnej w odległości wzajemnej około 10 kilometrów, która to odległość była podstawą wystarczającą do oznaczenia paralaktycznego wysokości zaobserwowanych w atmosferze ciał lub zjawisk. Dla obrachowania okoliczności zaćmienia w odpowiednich punktach na zasadzie danych okoliczności w punktach przyległych (które zostały obrachowane bezpośrednio na zasadzie wzorów ścisłych), zostały rozwinięte wzory różniczkowe. Następnie dla każdego punktu zostały obrachowane wartości Δt, aż do wysokości 60 kilometrów nad powierzchnią ziemi, w odstępach 10 kilometrowych; obrachowane wartości Δt dotyczą początku i końca całkowitości, oraz środkowej fazy zaćmienia. Dokładność wszystkich wzorów różniczkowych została szczegółowo zbadaną i w danym przypadku okazała się wystarczającą.

Ekspedycya, którą obserwatoryum berlińskie wysłać pragnęło do Norwegii w celu przeprowadzenia obserwacyj, dla których rachunki wyżej wymienione miały być podstawą, z powodu braku dostatecznych funduszów nie doszła do skutku. Rezultaty te jednakże zakomunikowane zostały jednej z ekspedycyj angielskich, która zajęła się tym przedmiotem i miała mu poświęcić specyalną uwagę; prócz tego centralne biuro meteorologiczne w Sztokholmie obiecało zakomunikować je rozmaitym nauczycielom, lekarzom, i t. p., osiedlonym w okolicach, objętych rachunkiem. Wszystkie usiłowania spełzły wszakże na niczem, gdyż, jak wiadomo, w czasie zaćmienia na całem terytoryum pasa całkowitości panowała niepogoda.

TEORYA PRZEKSZTAŁCENIA PFAFFA.

PODAŁ

C. RUSJAN.

Pfaff[1]), chcąc dać ogólny sposób całkowania równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, przedstawił to zadanie, jako szczególny przypadek ogólniejszego zadania o całkowaniu równania różniczkowego zwyczajnego o parzystej liczbie zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0, \tag{1}$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ są jakiekolwiek funkcye analityczne tychże zmiennych.

W przypuszczeniu, że spółczynniki tego równania X nie czynią zadość pewnym warunkom, Pfaff w celu znalezienia całek tego równania, używa specyalnego przekształcenia $2n-1$ zmiennych $x_2, \ldots, x_{2n}$ na nowe zmienne $y_2, \ldots, y_{2n}$, mającego tę własność, że w nowej postaci danego równania spółczynnik przy dx_1 jest równy zeru, a sama zmienna x_1 zawiera się w pozostałych spółczynnikach równania tylko we wspólnym ich czynniku μ; więc przekształcone równanie ma postać:

$$\mu\,(Y_3\, dy_2 + \ldots + Y_{2n}\, dy_{2n}) = 0,$$

---

[1]) Abh. der mathem. Klasse der Königlich-Preussischen Acad. der Wiss. aus der Jahren, 1814—15: „Methodus generalis, aequationes differentiarum particularium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis inter quotcunque variabiles complete integrandi“ (str. 76—136).