Sumując od $s=1$ do $s=4n-1$, znajdziemy:

$$\cos 2\omega\, R + \sin 2\omega\, (R-1) = \frac{\sin^2 3^2\omega - \sin^2\omega}{\sin 8\omega} + \frac{\sin^2 5^2\omega - \sin^2 3^2\omega}{\sin 16\,\omega}$$

$$+ \dots + \frac{\sin^2 (8n-1)^2\,\omega - \sin^2 (8n-3)^2\omega}{\sin 8\,(4n-1)\,\omega}.$$

Jeżeli napiszemy to równanie w postaci:

$$(\cos 2\omega + \sin 2\omega)\, R = \sin\omega \left(\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} - \frac{\sin\omega}{\sin 8\omega}\right)$$

$$+ \sin^2 3^2\omega \left(\frac{1}{\sin 8\omega} - \frac{1}{\sin 16\,\omega}\right) + \sin^2 5^2\omega \left(\frac{1}{\sin 16\,\omega} - \frac{1}{\sin 24\,\omega}\right)$$

$$+ \dots + \sin^2 (8n-3)^2\,\omega \left(\frac{1}{\sin 8\,(4n-3)\,\omega} - \frac{1}{\sin 8\,(4n-1)\,\omega}\right)$$

$$+ \frac{\sin^2 (8n-1)^2\,\omega}{\sin 8\,(4n-1)\,\omega},$$

to wszystkie wyrazy strony prawej będą dodatnie, gdyż:

$$\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} > 1 > \frac{\sin\omega}{\sin 8\omega},$$

a także

$$\frac{1}{\sin 8\omega} > \frac{1}{\sin 16\,\omega} > \frac{1}{\sin 24\,\omega} > \dots > \frac{1}{\sin 8\,(4n-1)\,\omega} > 0.$$

Jest tedy $(\cos 2\omega + \sin 2\omega)\, R$, a więc i R dodatnie.

WSTĘP DO TEORYI FUNKCYJ MODUŁOWYCH ELIPTYCZNYCH.

NAPISAŁ

W. LEWICKI.

CZĘŚĆ I.

Grupa modułowa.

Wstęp.

Grupę liniowych podstawień:

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

o spółczynnikach rzeczywistych i całkowitych, i o module $ad-bc=1$, nazywamy **grupą modułową**.

1. Aby własności tej grupy bliżej określić, zauważmy podstawienie liniowe o zupełnie dowolnych a, b, c, d:

$$t = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z = x+iy, \tag{1}$$

to równaniem tem związane są dwie płaszczyzny (t) i (z) w ten sposób, że jedna płaszczyzna odkształca się przez użycie tego podstawienia a na drugą.

Pokażemy, że odkształcenie to jest **cząsteczkowe**, co znaczy, że obie płaszczyzny w elementarnych (nieskończenie małych) trójkątach są do siebie podobne.

Pisząc równanie (1) w postaci $t=f(z)$ i rozwijając tę funkcyę w otoczeniu jakiegoś punktu z_0 płaszczyzny (z), w którym funkcya nie traci charakteru ciągłego, otrzymamy:

$$t'=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\dots$$

lub kładąc $f(z_0)=t_0$,

$$t'-t_0=f'(z_0)(z-z_0)+\dots$$

Obierzmy na płaszczyznie (z) trzy nieskończenie blizkie punkty z_0, z_1, z_2, tworzące trójkąt elementarny, to wskutek ciągłości funkcyi $f(z)$ odpowie im na płaszczyznie (t) trojkąt elementarny o wierzchołkach t_0, t_1, t_2. Ponieważ trójkąty te są elementarne, przeto w granicy można napisać:

$$t_1-t_0=f'(z_0)(z_1-z_0); \quad t_2-t_0=f'(z_0)(z_2-z_0); \quad (t_2-t_1)=f'(z_0)(z_2-z_1).$$

Biorąc wartości bezwzględne tych wyrażeń, czyli uwzględniając długości boków owych trójkątów elementarnych, otrzymujemy wprost:

(2) $$\frac{|t_1-t_0|}{|z_1-z_0|}=\frac{|t_2-t_0|}{|z_2-z_0|}=\frac{|t_2-t_1|}{|z_2-z_1|},$$

który to związek wyraża twierdzenie, że płaszczyzny (z) i (t) są spokrewnione cząsteczkowo.

Z tej własności wynika druga, nie mniej ważna własność uważanego podstawienia grupy, mianowicie, że pokrewieństwo obu płaszczyzn (z) i (t) jest równokątne (izogonalne), t. j. że kąt zawarty między dwiema przecinającemi się krzywemi po odkształceniu zostaje niezmieniony. Wynika to stąd, że skoro w otoczeniu punktu przecięcia takich dwóch krzywych obierzemy na obu tych krzywych dwa punkty, tworzące z punktem przecięcia trójkąt elementarny, to odpowiednie im punkty na odpowiednich krzywych drugiej płaszczyzny, utworzą z punktem przecięcia tych krzywych trójkąt elementarny; oba te trójkąty elementarne będą do siebie podobne.

Dalszą własnością uważanego sprzężenia płaszczyzn (t) i (z) jest to, że ono jest kołowe, t. j. koło przekształca na koło. Zauważmy bowiem na płaszczyźnie (z) koło:

$$z z_0+A z_0+A_0 z_0+B=0,$$

gdzie z i z_0, A i A_0 są sprzężone, B zaś rzeczywiste[1]); poddajmy koło to podstawieniu:

[1]) Por. Picard: Traité d'Analyse, I, 437.

$$t=\frac{az+b}{cz+d},$$

czyli połóżmy:

$$z=\frac{-dt+b}{ct-a}, \quad z_0=\frac{-d_0t+b_0}{c_0t-a_0},$$

(a i a_0, b i b_0, c i c_0, d i d_0 sprzężone ze sobą), to otrzymamy:

$$t t_0+A't+A'_0t_0+B'=0, \qquad B' \text{ rzeczywiste}$$

czyli otrzymamy koło na płaszczyźnie (t).

2. Zamiast jednak rozważać podstawienie (1) na dwóch oddzielnych płaszczyznach, można uważać jednę tylko płaszczyznę (z) [1]), której punkty, za użyciem odnośnego podstawienia grupy, przechodzą na inne punkty na tej samej płaszczyźnie (z). Wtedy każdy punkt (z) przechodzi na inny jakiś punkt; są jednak na płaszczyznie t. zw. punkty podwójne, które wypadają jako rozwiązanie równania:

$$z=\frac{az+b}{cz+d};$$

będą to przeto dwa punkty:

(1) $$\alpha, \beta=\frac{(a-d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c},$$

których podstawienie (1) nie wysunie z ich pierwotnego położenia. Zlewają się one w przypadku: $(a-d)^2+4bc=0$.

Podstawieniu (1) nadamy obecnie inną postać, w którą wejdą punkty α, β. Pisząc podstawienie (1) w przypadku $\alpha \neq \beta$ w postaci:

$$ctz+dt-az-b=0$$

i obierając punkty z_1, z_2, z_3 na płaszczyznie (z), dla których:

$$ct_1z_1+dt_1-az_1-b=0; \quad ct_2z_2+dt_2-az_2-b=0; \quad ct_3z_3+dt_3-az_3-b=0,$$

otrzymamy z tych czterech równań, przez eliminacyę ilości a, b, c, d, równanie:

[1]) Znaczy to, że płaszczyznę (t) kładziemy na płaszczyznie (z) tak, żeby ich osie zlewały się.

$$\frac{t-t_1}{t-t_2}=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}\cdot\frac{t_1-t_3}{t_2-t_3}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

Obierając α za z_1, β za z_2 (wtedy $t_1=t_2=\beta$), 0 za z_3 $\left(\text{wtedy } t_3=\frac{b}{d}\right)$, otrzymamy:

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha-\frac{b}{d}}{\beta-\frac{b}{d}}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

$$=\frac{d+c\beta}{d+c\alpha}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}=\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}{}^{1)}=K\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Kładąc za α i β ich wartości, mamy:

(3) $$K=\frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}.$$

Każde podstawienie grupy liniowej da się przeto przedstawić w postaci:

(4) $$\frac{t-\alpha}{t-\beta}=K\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

gdzie K nazywa się m n o ż n i k i e m p o d s t a w i e n i a.

3. Mamy podstawienie:

$$Sz=\frac{az+b}{cz+d}=t_1.$$

Iteracye tego podstawienia dadzą nam punkty:

$$Sz=t_1,\quad S^2z=t_2,\quad S^3z=t_3\quad \text{i t. d.}$$

lub

$$\frac{t_1-\alpha}{t_1-\beta}=K\frac{z-\alpha}{z-\beta},\quad \frac{t_2-\alpha}{t_2-\beta}=K\frac{t_1-\alpha}{t_1-\beta}=K^2\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

i t. d.; wogóle:

[1]) Bo: $\alpha+\beta=\frac{a-d}{c}$.

$$\frac{t_m-\alpha}{t_m-\beta}=K^m\frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Odwrotne podstawienie da nam:

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta}=\frac{1}{K}\frac{t-\alpha}{t-\beta}.$$

lub pisząc t_{-1} zamiast z, z zamiast t, mamy:

$$\frac{t_{-1}-\alpha}{t_{-1}-\beta}=\frac{1}{K}\frac{z-\alpha}{z-\beta}\quad \text{i t. d.}$$

$$\frac{t_{-m}-\alpha}{t_{-m}-\beta}=\frac{1}{K^m}\frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Jeżeli $t_m\equiv z$, to $K^m=1$, czyli podstawienie posiada p e r y o d m; wtedy $K=e^{\frac{2\pi i}{m}}$.

Gdy $K=1$, $\alpha=\beta$, $(a-d)^2+4bc=0$, podstawienie jest p a r a b o l i c z n e.

Gdy $K>1$, $\alpha\gtrless\beta$, $(a-d)^2+4bc>0$, podstawienie jest h y p e r b o l i c z n e.

Gdy $K=e^{\sigma i}$, $|K|=1$, $(a-d)^2+4bc<0$, podstawienie jest e l i p t y c z n e.

Gdy $K=\mu e^{\sigma i}$, $\mu>0$, podstawienie jest l o k s o d r o m i c z n e.

Gdy w podstawieniu e l i p t y c z n e m:

$$\sigma=\frac{m}{n}2\pi,\ \text{gdzie}\ \frac{m}{n}\ \text{jest ułamek właściwy},$$

to:

$$\frac{t_n-\alpha}{t_n-\beta}=\frac{z-\alpha}{z-\beta},\ \text{czyli}\ t_n\equiv z.$$

Wtedy podstawienie eliptyczne posiada peryod n.

Gdy zaś:

$$\frac{\sigma}{2\pi}=e\quad(\text{niewymierne}),$$

to:

$$\frac{t_m-\alpha}{t_m-\beta}=e^{2\mu\pi i}\,e^{m\varepsilon 2\pi i}\frac{z-\alpha}{z-\beta}\qquad(\varepsilon\ \text{dowolnie małe})$$

$$=e^{2m\varepsilon\pi i}\frac{z-\alpha}{z-\beta}=(1+\varepsilon')\frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Dopiero dla $m = \infty$, $t_m \equiv z$, czyli punkt wysunięty z miejsca, wraca po dokonaniu bardzo wielu iteracyj danego podstawienia w otoczenie swego pierwotnego położenia; podstawienie eliptyczne jest wtedy nieskończenie małem. Gdy punkt z poddamy postawieniu hyperbolicznemu, to otrzymane punkty $t_1, t_2, \ldots,$ dążą do punktu podwójnego β; $t_{-1}, t_{-2}, \ldots,$ do punktu podwójnego α, lecz dopiero t_∞ zlewa się z β, $t_{-\infty}$ zlewa się z α, bo:

$$\lim_{m=\infty} \frac{t_m - \alpha}{t_m - \beta} = \lim_{m=\infty} K^m \frac{z-\alpha}{z-\beta} = \infty, \text{ czyli } t_\infty \equiv \beta,$$

$$\lim_{m=\infty} \frac{t_{-m} - \alpha}{t_{-m} - \beta} = \lim_{m=\infty} \frac{1}{K^m} \; \frac{z-\alpha}{z-\beta} = 0, \text{ czyli } t_{-\infty} \equiv \alpha.$$

Podstawienie hyperboliczne, a analogicznie i loksodromiczne, nie jest więc ani peryodycznem, ani nieskończenie małem.

Co się tyczy podstawienia parabolicznego, dla którego:

$$(a-d)^2 + 4bc = 0$$

i które ma jeden tylko punkt podwójny, to można mu nadać kształt:

$$\frac{1}{t_m - \alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \frac{4c}{2(a+d)};$$

m-krotna iteracya da oczywiście:

$$\frac{1}{t_m - \alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + m \frac{4c}{2\,(a+d)},$$

a więc:

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{t_m - \alpha} = \infty, \quad t_m \equiv \alpha.$$

Odwrotne iteracye dadzą:

$$\frac{1}{t_{-m} - \alpha} = \frac{1}{z-\alpha} - m \frac{4c}{2\,(a+d)};$$

czyli i tu:

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{t_{-m} - \alpha} = -\infty, \quad t_{-\infty} = \alpha;$$

w podstawieniu parabolicznem dążą przeto punkty $t_1, t_2, \ldots, t_{-1}, t_{-2}, \ldots,$ do punktu podwójnego α.

4. Grupa, w skład której nie wchodzą podstawienia eliptyczne nieskończenie małe, jest nieciągłą, t. zn., że gdy do dowolnego punktu $z = x + iy$ płaszczyzny zastosujemy podstawienie takiej grupy, to punkt ten przejdzie na inny punkt, nie leżący w otoczeniu uważanego punktu. Punkty, w których grupa traci charakter nieciągłości, są jej punktami osobliwemi.

Przechodząc obecnie do grupy modułowej, zrobimy jeszcze jedną uwagę. W teoryi grup podstawień liniowych i podziału płaszczyzny bierze się pod uwagę zazwyczaj górną część płaszczyzny (z) (po nad osią odciętych) lub jak ją Klein nazywa, dodatnią płaszczyznę, gdyż wszystko, co zachodzi pod osią odciętych, powstaje przez odzwierciedlenie górnej części płaszczyzny w osi xx, czyli punkt $x + iy$ przechodzi na symetrycznie położony punkt $x - iy$.

Grupa modułowa i jej podstawienia zasadnicze.

Na samym wstępie określiliśmy grupę modułową jako grupę podstawień liniowych o spółczynnikach całkowitych i module 1. Obecnie wykażemy, że grupa ta składa się z iteracyj i iloczynów dwóch podstawień zasadniczych:

$$S = (z, z+1), \quad T = \left(z, -\frac{1}{z}\right),$$

czyli:

$$Sz = z + 1, \quad Tz = -\frac{1}{z}.$$

Weźmy bowiem jakiekolwiek podstawienie grupy modułowej:

$$Uz = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1$$

i wypadek $a > 0$; $|a| \geqq |c|$.

Warunek $a > 0$ można zawsze spełnić, mnożąc licznik i mianownik przez odpowiednią wielokrotność.

Widoczną jest rzeczą, że $a = ca + a_1$, gdzie c i a muszą mieć znaki jednakowe, a $a_1 < |c|$ jako reszta. Wobec tego: $Uz = \alpha + U_1 z$, gdzie:

$$U_1 z = \frac{a_1 z + (b - da)}{cz + d}.$$

Nie trudno się przekonać, że i moduł podstawienia $U_1 z$ równa się 1, że więc $U_1 z$ jest również podstawieniem grupy modułowej. W tem podstawieniu $|a_1| < |c|$; chcąc przeto mieć w liczniku przy z spółczynnik większy, niż w mianowniku, zauważmy podstawienie:

$$U'_1 z = \frac{-cz - d}{a_1 z + (b - da)}, \qquad |-c| > |a_1|,$$

przeto:

$$U_1 z = -\frac{1}{\dfrac{-cz-d}{a_1 z + (b - da)}} = TU'_1 z.$$

Mamy więc:

$$Tz = TU'_1 z + a = S^\alpha TU'_1 z,$$

bo:

$$S^\alpha z = z + a.$$

Postępując z podstawieniem $U'_1 z$ tak samo, jak z podstawieniem Uz, otrzymamy:

$$U'_1 z = S^\beta TU'_2 z \quad \text{i t. d.}$$

aż wreszcie dojdziemy do kształtu:

$$Uz = S^\alpha TS^\beta TS^\gamma \ldots S^\mu TU'_\nu z;$$

ponieważ spółczynnik przy z w liczniku w podstawieniach $U'_1, U'_2, \ldots,$ coraz maleje, to końcowe podstawienie $U'_\nu z$ musi mieć postać:

$$U'z_\nu = \frac{k}{\mu z + \nu},$$

a moduł jego $-k\mu = 1$; k i μ są liczby całkowite, bo podstawienie $U'_\nu z$ należy do grupy modułowej, przeto musi być $k = \pm 1$, $\mu = \mp 1$, a wtedy:

$$U'_\nu z = -\frac{1}{z+\nu} = -\frac{1}{S^\nu z} = TS^\nu z,$$

a więc:

$$(\alpha) \qquad Uz = S^\alpha TS^\beta TS^\gamma \ldots S^\mu TS^\nu z;$$

Zupełnie w ten sam sposób można pokazać, że podstawienie grupy modułowej:

$$Uz = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{gdzie } |a| < |c|,$$

da się sprowadzić do kształtu:

$$(\beta) \qquad Uz = TS^\alpha TS^\beta \ldots TS^\nu z.$$

Stąd wypływa twierdzenie: Grupa modułowa ma dwa podstawienia zasadnicze:

$$Sz = z + 1, \quad Tz = -\frac{1}{z},$$

a jakiekolwiek podstawienie tej grupy da się zawsze przedstawić w postaci (α) lub (β).

Widoczną jest także rzeczą, że Uz podstawione w postaci (α):

$$Uz = S^{a_n} TS^{a_{n-1}} TS^{a_{n-2}} \ldots TS^{a_1} z,$$

da się przedstawić ułamkiem ciągłym.

$$Uz = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cfrac{1}{a_{n-3} - \cdots - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}},$$

Uz zaś przedstawione kształtem (β):

$$Uz = TS^{a_n} TS^{a_{n-1}} \ldots TS^{a_1} z$$

można napisać pod postacią ułamka ciągłego:

$$Uz = -\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cdots - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}.$$

T może występować tylko w potędze pierwszej, bo $T^2 z = -\dfrac{1}{-\dfrac{1}{z}} = z$, a więc daje tożsamość. T jest przeto podstawieniem eliptycznem o peryodzie 2, a o punktach podwójnych $z = \pm i$.

Co się tyczy podstawienia S, które punkty płaszczyzny (z) przesuwa w kierunku osi odciętych o 1, to ono jest podstawieniem parabolicznem o punkcie podwójnym $z = \infty$.

Nie trudno dostrzedz, że S i T nie są podstawieniami przemiennemi, że więc:

$$STz \neq TSz,$$

zachodzi jednak między niemi związek:

$$STSTST = 1.$$

Istnienie tego związku nie trudno wykazać. W grupie modułowej zawiera się niezawodnie podstawienie:

$$Uz = \frac{z+1}{-z} = S^{-1}Tz\,^{1)},$$

a stąd:

$$TSU = 1, \quad \text{bo } T^{+1}z = T^{-1}z.$$

Jak łatwo dostrzedz, U jest podstawieniem eliptycznem o peryodzie 3, więc:

$$U^3 = (S^{-1}T)^3 = 1,$$

a stąd wynika:

$$S^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T = 1;$$

przenosząc kolejno podstawienia z lewej strony na prawą, od S^{-1} począwszy, otrzymamy żądany związek:

$$1 = STSTST.$$

Związki:

$$T^2 = 1, \quad STSTST = 1,$$

są związkami zasadniczemi grupy modułowej.

[1] $Sz = z + 1, \; S^{-1}z = z - 1$.

Nieciągłość i punkty osobliwe grupy modułowej.

Grupa modułowa, jako utworzona z podstawienia parabolicznego, jest grupą nieciągłą, gdyż nie posiada podstawienia eliptycznego nieskończenie małego. Są jednak na płaszczyznie (z) punkty osobliwe grupy modułowej, których obecnie poszukamy

Podstawienie grupy modułowej:

$$Uz = \frac{az+b}{cz+d},$$

będące podstawieniem liniowem o module 1, ma punkty podwójne:

$$\alpha, \beta = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c},$$

a jego mnożnik:

$$K = \frac{(a+d-\sqrt{(a+d)^2-4})^2}{4},$$

którą to postać łatwo dostaniemy z postaci ogólnej

$$K = \frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}.$$

kładąc:

$$(a-d)^2+4bc = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a+d)^2 - 4$$

i mnożąc licznik i mianownik przez:

$$(a+d-\sqrt{(a+d)^2-4})$$

Podstawienia, dla których $a+d=0$, a więc $\alpha, \beta = \frac{a \pm i}{c}$, $K=-1$, $(d=-a)$, są podstawieniami eliptycznemi o peryodzie 2, bo $K^2=1$; przy różnych a i c mamy punkty podwójne, porozrzucane tu i tam na płaszczyźnie (z). Gdy $a = c = \infty$, to $\frac{a}{c}$ przedstawia wszelką dowolną liczbę rzeczywistą, $\frac{i}{c}$ jest nieskończenie małe, a więc punkty α i β grupują się w nieskończonej bliskości osi xx, tworząc pas nieskończenie wązki, sięgający od $-\infty$ do $+\infty$; w punktach tego pasu grupa traci swój charakter nieciągły.

Podstawienia, dla których $a+d=1$, są, jak łatwo dostrzedz, eliptycznemi o peryodzie 3, a punktach podwójnych:

$$\alpha, \beta = \frac{a-\frac{1}{2}}{c} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

a więc podstawienia te zrywają tak samo, jak poprzednie, nieciągłość grupy w pasie nieskończenie wązkim, biegnącym równolegle wzdłuż osi odciętych.

Podstawienia grupy modułowej, w których $a+d=2$, są parabolicznemi o punktach podwójnych $\alpha, \beta = \frac{a-1}{c}$; są to wszystkie liczby wymierne rzeczywiste; a więc te podstawienia zrywają nieciągłość grupy modułowej na całej osi xx.

To samo robią podstawienia, w których $a+d>2$; są to hyperboliczne podstawienia grupy modułowej, których punkty podwójne, będące pierwiastkami rzeczywistemi równania 2, przedstawiają wszystkie liczby rzeczywiste algebraiczne, rozrzucone po osi xx.

Stąd wynika twierdzenie:

Grupa modułowa traci swój charakter nieciągły na całej osi odciętych i w nieskończenie blizkiem jej otoczeniu[1]); wszędzie powyżej osi xx jest ona nieciągłą, nie licząc porozrzucanych tu i tam punktów, należących do podstawień eliptycznych grupy modułowej.

Zasadniczy wielobok grupy modułowej.

Na płaszczyznie (z) istnieje pewien obszar taki, że każdemu punktowi z półpłaszczyzny odpowiada na mocy pewnego podstawienia grupy modułowej jeden jedyny punkt w tym obszarze, zwanym wielobokiem zasadniczym grupy. Twierdzenie to udowodnimy na podstawie teoryi form kwadratowych redukowanych.

Gdy weźmiemy grupę modułową:

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right), \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1, \quad z = x+iy,$$

[1]) Punkty nieciągłości tworzą na całej osi xx wszędzie gęstą mnogość (pantachia Cantora).

to jej część rzeczywista jest:

$$R\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ac(x^2+y^2)+(ad+bc)x+bd}{c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2},$$

i nadto:

$$\left|\frac{az+b}{cz+d}\right|^2 = \frac{a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2}{c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2}.$$

Zauważmy teraz formę kwadratową:

$$X^2+2xXY+(x^2+y^2)Y^2,$$

gdzie X i Y są nieoznaczone, zaś $y>0$, i zastosujmy do niej podstawienie jednorodne:

$$(X, Y, \quad dX+bY, \quad cX+aY),$$

to dostaniemy:

$$[c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2]X^2+2[(x^2+y^2)ac$$
$$+(ad+bc)x+bd]XY+[a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2]Y^2.$$

Ponieważ a, b, c, d są zupełnie dowolne, byleby tylko spełniały warunek $\begin{vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{vmatrix} = 1$, przeto można je wybrać tak, aby ostatnia forma była redukowana, czyli:

$$c^2(y^2+y^2)+2cdx+d^2 < a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2,$$
$$-\frac{1}{2} < \frac{(x^2+y^2)ac+(ad+bc)x+bd}{c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2} < \frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| > 1, \quad -\frac{1}{2} < R\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) < \frac{1}{2}.$$

Ponieważ w układzie form określonych dodatnich istnieje jedna tylko[1]) forma redukowana, a każdą inną formę można do

[1]) Por. Picard, loc., str. 446.

formy redukowanej sprowadzić, przeto każdemu punktowi z półpłaszczyzny odpowie wskutek jakiegoś podstawienia grupy modułowej, punkt w trójkącie, utworzonym przez proste $x = \pm \frac{1}{2}$ i koło $x^2 + y^2 = 1$; trzeci wierzchołek tego trójkąta leży w nieskończoności. Jest to właśnie wielobok zasadniczy grupy modułowej (por. fig. I). Punktowi z odpowie jeden tylko punkt tego trójkąta, gdyż dwóch form redukowanych nie ma; w wieloboku tym nie ma oczywiście dwóch punktów równoważnych, t. j. takich, któreby za użyciem pewnego podstawienia grupy przeszły na siebie; bo toby oznaczało, że jednę formę redukowaną można zamienić przez odpowiednie podstawienie na inną jakąś formę redukowaną, co jednak jest niemożliwe.

Jeżeli do wieloboku zasadniczego, który oznaczymy przez (1), wliczymy bok CC_∞, to boku DD_∞ już nie potrzeba doń liczyć, gdyż bok ten powstaje z CC_∞ przez podstawienie $S^{-1}z$; tak samo, jeżeli do wieloboku liczymy łuk CE koła K, to łuku ED wliczać doń nie trzeba, gdyż on powstanie z CE przez podstawienie Tz; bo połóżmy:

$$Tz = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{re^{\varphi i}} = z' = r'e^{\varphi' i},$$

to:

$$rr'e^{(\varphi+\varphi')i} = -1 = e^{\pi i},$$

czyli:

$$(\alpha) \qquad rr' = 1, \qquad \varphi' = \pi - \varphi;$$

odnosząc r i φ do łuku CE koła K, a więc kładąc $r = 1$, otrzymamy $r' = 1$, zaś kąt φ' wypadnie po przeciwnej stronie osi yy, czyli dostaniemy łuk ED[1]). Działanie, oznaczone warunkami (α), nazywa się odbiciem w kole K.

[1]) Proste CC_∞ i DD_∞ zawierają z kołem K kąty $\frac{\pi}{3}$, gdyż kąty DOC, OCD i CDO wynoszą po $\frac{\pi}{3}$.

Podział płaszczyzny na trójkąty równoważne.

Jeżeli teraz poddamy wszystkie punkty z wieloboku zasadniczego 1 jakiemuś podstawieniu Vz grupy modułowej, to wielobok 1 przejdzie na jakiś inny wielobok V, tworzący podobnie jak 1 continuum.

Poddajmy najpierw wielobok 1 podstawieniu Tz, t. j. poszukajmy trójkąta T; jak z równania (α) widać, będzie on leżał w kole K, bo dla $r > 1$ jest $r' < 1$. Ponieważ trójkąt ten tworzyć będzie continuum, przeto wystarczy rozważyć, na co przejdą boki trójkąta 1 wskutek podstawienia Tz. Łuk CED przejdzie przez podstawienie Tz sam na siebie. Co się tyczy prostej CC_∞, to trzeba ją przerobić według równania (α) i odbić w osi yy, jak w zwierciadle. Oczywista, że punkt D odpowie sam sobie; punktowi C_∞ odpowie $r = \infty$, a więc na podstawie równania (α) $r' = 0$, punktowi C_∞ odpowie 0. Prosta CC_∞ przechodzi przeto na łuk OC (na łuk, bo podstawienie jest kołowe), a ponieważ podstawienie Tz jest i równokątne, przeto łuk OC przetnie się z kołem K pod kątem $\frac{\pi}{3}$. CC_∞ zawiera z osią xx kąt $\frac{\pi}{3}$, więc takiż sam kąt musi zawierać i łuk OC z osią xx, bo podstawienie Tz, jak to jest widoczne, nie narusza osi xx. Skoro łuk ten dopełnimy, dostaniemy koło K_1 o środku $x = +1$ a promieniu 1, t. j. koło K_1 powstaje przez przesunięcie koła K o 1 po osi xx. Podobnież prosta DD_∞ przejdzie na łuk OD o tych samych własnościach, jak łuk OC. Podstawienie Tz przetwarza zatem obszar 1 w trójkąt T o kątach $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 przy wierzchołkach.

Chcemy teraz dostać wszystkie inne obszary z wieloboku zasadniczego. Podstawienia $S^{-1}z$ i $S^{+1}z$ odtwarzają tylko wielobok zasadniczy na wieloboki doń przystające. Tak samo podstawieniom $S^2z, S^3z, \ldots, S^{-2}z, S^{-3}z, \ldots$ odpowiadają wieloboki przystające, idące in inf. na prawo i na lewo od wieloboku zasadniczego. Podstawienia $TSz, TS^2z, TS^3z, \ldots, TS^{-1}z, TS^{-2}z, TS^{-3}z, \ldots$ powiadają, że wieloboki $Sz, S^2z, S^3z, \ldots, S^{-1}z, S^{-2}z, S^{-3}z, \ldots$ należy odbić w kole K i obrócić około osi yy. Każdy trójkąt po odbiciu w kole K przekształca się na odpowiedni trójkąt kołowy, leżący symetrycznie po drugiej stronie osi yy; np. trójkątowi S^2z odpowiada trójkąt $TS^{-2}z$, trójkątowi $S^{-2}z$ odpowiada trójkąt TS^2z w kole K (por. fig. 1).

Zauważmy teraz koło K i trójkąt T, to widoczną jest rzeczą, że dowolnemu punktowi, leżącemu w wspólnej części kół K i K_2, odpowie, wskutek podstawienia Sz, punkt, leżący w części wspólnej kół K i K_1. Gdy więc z jednej strony osi yy zauważymy jakiekolwiek koło o środku na osi xx, leżące w kole K_1, to po drugiej stronie osi yy musi leżeć przystające doń koło, gdyż podstawienia są kołowe i równokątne. Z przecięcia wszystkich tych kół dostaniemy cały szereg trójkątów, które coraz bardziej maleją i zagęszczają się, dążąc ku osi xx.

Gdy mamy koło K wraz z obszarem T i trójkątami, zapełniającymi to koło po za obszarem T, to części tego koła po za T są symetrycznie zapełnione trójkątami kołowemi. Ponieważ trójkąty pozostaną trójkątami, gdy je przesuwamy o 1, 2, ..., lub wogóle o liczbę całkowitą na mocy podstawienia $S^{\pm\alpha}z$, przeto wszystkie koła o promieniu 1, powstałe z przesunięcia koła K o ± 1, ± 1, ± 3, ..., zapełnią się takiemi samemi trójkątami i to do nieskończoności. Po nad kołami K, K_1, K_2, ... są trójkąty 1, $S^{+1}z$, $S^{-1}z$, ...

W każdem kole trójkąty są tylko odbiciem trójkątów górnych. Wszystkie te trójkąty pokrywają swą mnogością całą dodatnią część płaszczyzny (z), nie pozostawiając nigdzie luki; stykają się one, ale nie mają nigdzie części wspólnych. Gdyby bowiem jeden punkt należał do kilku trójkątów, toby do tego punktu w zasadniczym wieloboku należało kilka punktów, co jednak niemożliwe, bo w wieloboku zasadniczym nie ma dwóch punktów równoważnych. Trójkąty coraz bardziej maleją i zagęszczają się ku osi xx, t. zn., że gdy weźmiemy punkt nieskończenie blizki osi xx i poddamy go podstawieniu grupy, to otrzymamy punkt, który musi leżeć nieskończenie blizko osi xx i nieskończenie blizko uważanego punktu. A więc w otoczeniu osi xx znajdziemy nieskończenie wiele odpowiadających sobie punktów, leżących nieskończenie blizko obok siebie.

CZĘŚĆ II.

Formy modułowe eliptyczne.

1. Formą modułową wymiaru k-go nazywa się funkcya jednoznaczna i jednorodna dwóch zmiennych x i y wymiaru k-go, która zostaje niezmienna, gdy poddamy jej argumenty dowolnemu podstawieniu z grupy podstawień liniowych jednorodnych, podczas gdy przy użyciu innych podstawień funkcya ta zmienia wogóle wartość.

Gdy dana forma modułowa jest funkcyą jednorodną pary peryodów $2\omega_1$ i $2\omega_2$ funkcyj eliptycznych, to forma modułowa nazywa się eliptyczną formą modułową.

Iloraz dwu form modułowych o równych wymiarach jest funkcyą modułową argumentu $\frac{x}{y} = z$, a więc funkcyą, należącą do grupy modułowej; iloraz dwu form modułowych eliptycznych jest funkcyą modułową eliptyczną argumentu $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

2. Zbadajmy najważniejsze z form modułowych eliptycznych.

Jak wiadomo, funkcyą zasadniczą w teoryi funkcyj eliptycznych Weierstrassa jest $p(u)$, która w otoczeniu punktu $u = 0$ ma rozwinięcie:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} (2\nu-1)\, c_\nu\, u^{\nu-2}\,{}^{1)}, \tag{1}$$

gdzie:

$$c_\nu = \sum_{\mu\mu'}{}' \frac{1}{(2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega_2)^{2\nu}} \qquad \nu=2, 3, \ldots \tag{2}$$

Widoczną jest rzeczą, że c_ν są formami modułowemi (-2ν) tego wymiaru gdyż nie zmieniają one wartości, gdy na nich dokonamy podstawienia:

$$2\tilde{\omega}_1 = 2p\omega_1 + 2q\omega_2; \quad 2\tilde{\omega}_2 = 2p'\omega_1 + 2q'\omega_2; \tag{3}$$

t. j. gdy peryody $2\omega_1$ i $2\omega_2$ zastąpimy przez $2\tilde{\omega}_1$ i $2\tilde{\omega}_2$; albowiem sumowanie odbywa się na wszystkich μ i μ'.

Pokażemy, że c_ν są funkcyami analitycznemi wielkości ω_1 i ω_2.

Połóżmy:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \tau = \alpha + \beta i,$$

gdzie ω_1 i ω_2 tak wybrano, aby:

$$R\left(\frac{\omega_1}{\omega_2 i}\right) > 0,$$

t. j., że β jest zawsze i tylko dodatnie:

$$\frac{\tau}{i} = \frac{\alpha}{i} + \beta,$$

[1]). Por. Biermann; Theorie der analytischen Functionen, str. 404.

i wybieramy z dodatnich wartości β tylko te, które dają $|e^{\tau\pi i}| < 1$. Napiszmy teraz:

$$c_\nu = \frac{1}{(2\omega_2)^{2\nu}} \sum_{\mu}' \sum_{\mu}' \left(\frac{1}{\mu + \mu'\tau}\right)^{2\nu}$$

$$= \frac{1}{(2\omega_2)^{2\nu}} \left[\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{\mu}\right)^{2\nu} + 2 \sum_{\mu'=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu + \mu'\tau}\right)^{2\nu} \right],$$

gdzie pierwszy wyraz odnosi się do wszystkich $\mu' = 0$, a w drugim uwzględniono, że $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} = 2 \sum\limits_{1}^{\infty}$.

Mając to, zauważmy rozwinięcie:

$$\pi \operatorname{cotg} \tau\mu'\pi = -\pi i \frac{1 + e^{2\pi i \tau\mu'}}{1 - e^{2\pi i\tau\mu'}},$$

albo:

$$\frac{1}{\tau\mu'} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{\tau\mu' + \mu} + \frac{1}{\tau\mu' - \mu}\right\} = -i\pi - 2i\pi \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{2\pi i\tau\mu'\lambda}.$$

Różniczkując ostatnie równanie 2ν razy względem $(\tau\mu')$, otrzymamy:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu + \mu'\tau}\right)^{2\nu} = (-1)^{2\nu} \frac{(2i\pi)^{2\nu}}{(2\nu-1)!} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{2\nu-1} e^{2\pi i\tau\mu'\lambda}.$$

Prawa strona jest zbieżna dla $|e^{2\pi i\tau\mu'}| < 1$.

Wstawiając ostatnie wyrażenie w c_ν, znajdziemy:

$$(4) \quad c_\nu = \frac{2}{(2\omega_2)^{2\nu}} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{2\nu} + (-1)^\nu \frac{(2\pi)^{2\nu}}{(2\nu-1)!} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{2\nu-1} \frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1 - e^{2\pi i\tau\lambda}} \right].$$

Warunek zbieżności $|e^{2\pi i\tau}| < 1$ już spełniono przez to, żeśmy położyli:

$$R\left(\frac{\omega_1}{\omega_2 i}\right) = R\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0.$$

Wyraz w nawiasie da się przeto rozwinąć podług $e^{2\pi i\tau}$ dla wszelkich τ, leżących w dodatniej półpłaszczyznie (τ); c_ν są przeto funkcyami analitycznemi argumentów ω_1 i ω_2. W dolną półpłaszczyznę (τ) c_ν nie da się przeprowadzić, gdyż wyraz w nawiasie dla wszelkich wymiernych τ jest nieskończony, wtedy bowiem $e^{2\pi i\tau} = 1$, a więc w mianowniku:

$$1 - e^{2\pi i\tau} = 0.$$

3. Z pośród tych form c_ν zasługują na największą uwagę t. zw. niezmienniki funkcyj eliptycznych g_2 i g_3, będące także formami eliptycznemi, gdyż jak z teoryi funkcyj eliptycznych wiadomo:

$$g_2 = 60c_2, \; g_3 = 140c_3.$$

Z ogólnej formy (2) widać, że g_2 jest formą modułową (—4) tego, g_3 (—6) tego wymiaru.

Zbudujemy jeszcze formę modułową (—12) tego wymiaru. Formą taką jest niezawodnie wyróżnik funkcyj eliptycznych, który ma kształt:

$$(5) \quad \Delta(\omega_1 \omega_2) = g_2^3 - 27g_3^2 = 16\, G = 16\, (e_3 - e_3)^2 (e_2 - e_1)^2 (e_1 - e_3)^2 \;{}^{1)},$$

gdzie:

$$e_1 = p(\omega_1), \quad e_2 = p(\omega_3) = p(\omega_1 + \omega_2), \quad e_3 = p(\omega_2).$$

Formy te przedstawione jako funkcye jednej tylko zmiennej $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ odkształcają się za użyciem grupy podstawień grupy liniowej z pewnym czynnikiem, są więc funkcyami pseudo-automorficznemi argumentu τ.

Z form tych jednak da się utworzyć t. zw. niezmiennik bezwzględny $J(\tau)$, będący już funkcyą automorficzną argumentu τ.

Funkcya $J(\tau)$.

1. Niezmiennikiem bezwzględnym będzie niezawodnie wyrażenie:

$$(6) \qquad J(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2},$$

[1]) Patrz Schwarz: Formeln u. Lehrsätze zum Gebrauche der ellip. Funct., str. 61

z której to formy wprost widać, że niezmiennik ten jest *funkcyą eliptyczną modułową*.

2. Postarajmy się obecnie o takie podstawienie funkcyi $J(\tau)$, z którego moglibyśmy poznac jej miejsca zerowe i nieskończonościowe.

Według wzorów ogólnych na c_ν, mamy:

$$g_2{}^3 = (60\,c_2)^3 = \left(\frac{1}{2\omega_2}\right)^{12}\left\{120\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^4 + 320\,\pi^4\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^3\,\frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1-e^{2\pi i\tau\lambda}}\right\}^3,$$

a że

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^4 = \frac{4}{120}\,\frac{\pi^4}{3}\,,$$ [1]

więc:

$$g_2{}^3 = \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^{12}\left\{\frac{1}{12} + 20\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^3\,\frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1-e^{2\pi i\tau\lambda}}\right\}^3.$$

Chodzi teraz o przedstawienie mianownika:

$$\Delta = 16\,G = 16\,(e_2-e_3)^2\,(e_1-e_3)^2\,(e_1-e_2)^2.$$

Do obliczenia tej funkcyi posłużą nam związki następujące, znane w teoryi funkcyj eliptycznych [2].

$$\sqrt{e_2-e_3} = \frac{\pi}{2\omega_2}\,4h^{\frac{1}{2}}\prod_n(1-h^{2n})^2\prod_n(1+h^{2n})^4,$$

$$\sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2\omega_2}\prod_n(1-h^{2n})^2\prod_n(1+h^{2n-1})^4,$$

$$\sqrt{e_1-e_2} = \frac{\pi}{2\omega_2}\prod_n(1-h^{2n})^2\prod_n(1-h^{2n-1})^4,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n-1})\,(1+h^{2n})\,(1+h^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n}),$$

gdzie:

$$h = e^{\pi i\tau}.$$

---

[1] Patrz Biermann, loc., cit., str. 326.

[2] Schwarz, loc. cit., str. 37.

Napiszmy Δ w postaci:

$$\Delta = 16\,(e_1-e_3)^6\left(\frac{e_3-e_2}{e_1-e_3}\right)^2\left(\frac{e_2-e_1}{e_1-e_3}\right)^2 = 16\,(\varkappa^2\varkappa'^2)^2\,(e_1-e_3)^6,$$

gdzie:

(7) $$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \varkappa^2 = \lambda\,, \qquad \frac{e_2-e_1}{e_1-e_3} = \varkappa'^2 = \lambda',$$

(8) $$\lambda + \lambda' = 1,$$

to ponieważ teraz:

$$\varkappa^2 = 16\,h\left[\frac{\Pi\,(1+h^{2n})}{\Pi\,(1-h^{2n})}\right]^8,$$

$$\varkappa'^2 = \left[\frac{\Pi\,(1-h^{2n-1})}{\Pi\,(1+h^{2n+1})}\right]^8,$$

przeto:

(9) $$\Delta = \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^{12} h^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})^{24}.$$

Dostaniemy zatem:

(10) $$J(\tau) = \frac{g_2{}^3}{g_2{}^3 - 27\,g_2{}^3} = \frac{\left\{\frac{1}{12} + 20\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\,\frac{h^{2n}}{1-h^{2n}}\right\}^3}{h^2\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})^{24}}.$$

3. Grupą funkcyi $J(\tau)$ jest grupa nieskończona.

$$\left(\tau,\ \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right), \qquad ad-bc=1,$$

a jej wielobokiem zasadniczym trójkąt $CEDD_\infty C_\infty$ (por. fig. 1):

$$C = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \varrho, \quad E = i, \quad C_\infty = \infty i.$$

Zbadajmy zachowanie się funkcyi $J(\tau)$ w tych wierzchołkach.

Weźmy mianowicie pod uwagę *wierzchołek* $\tau = \varrho$:

$$g_2 = 60\ c_2 = \frac{60}{(2\omega_2)^4} \sum{}' \frac{1}{(\mu + \mu'\tau)^4}\,.$$

Sumowanie odbywa się na wszystkich $\mu\mu'$, a ponieważ c_ν są jako funkcye analityczne szeregami są bezwarunkowo zbieżnemi, przeto można w c_2 zbierać kolejno po trzy wyrazy w sposób następujący [1]):

$$\left(\frac{1}{\mu+\mu'\varrho}\right)^4 + \left(\frac{1}{-\mu+(\mu-\mu')\varrho}\right)^4 + \left(\frac{1}{(\mu-\mu')-\mu\varrho}\right)^4$$

$$= \left(\frac{1}{\mu+\mu'\varrho}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\mu+\mu'\varrho}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,$$

a więc:

$$\sum_{\mu\mu'}{}' \left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^4_{\tau=\varrho} = 0, \qquad \text{czyli } g_2(\varrho) = 0.$$

Również i na miejscu równoważnem D $(\tau = -\varrho)$:

$$g_2(-\varrho) = 0.$$

Przeciwnie $g_3(\pm\varrho) \neq 0$.

Lecz za to $g_3(i) = 0$. Albowiem:

$$g_3 = 140 c_3 = \frac{140}{(2\omega_1)^6} \sum_{\mu\mu'}{}' \left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^6.$$

Dla $\tau = 1$ zbierajmy po dwa wyrazy:

$$\left(\frac{1}{\mu+\mu' i}\right)^6 + \left(\frac{1}{-\mu+\mu' i}\right)^6 = \left(\frac{1}{\mu+\mu' i}\right)^6 + \frac{1}{i}\left(\frac{1}{\mu'+\mu i}\right)^6$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu'+\mu i}\right)^6 \left(1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3}\right) = 0,$$

a więc $g_3(i) = 0$, zaś $g_2(i) \neq 0$.

Stąd wynika, że:

$$J(\pm\varrho) = 0,$$

[1]) Por. Hurwitz. Mathem. Annal., XVIII, str. 554.

a że:

$$J(\tau) - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta},$$

przeto:

$$J(i) - 1 = 0, \qquad J(i) = 1.$$

Przejdźmy obecnie do wierzchołka $\tau = \infty i$; dla niego:

$$\frac{\tau}{i} = \frac{\omega_1}{\omega_2 i} = \infty\,;$$

wtedy:

$$\lim h = e^{\pi i \tau}\Big\}_{\tau=\infty i} = e^{-\frac{\pi\tau}{i}}\Big\}_{\frac{\tau}{i}=\infty} = 0,$$

czyli w $J(\tau)$ znika mianownik, licznik redukuje się do $\frac{1}{12^3}$, czyli $J(\tau)$ staje się nieskończonością.

Atoli wtedy $J(\tau)\,h^2 = J(\tau)\,e^{2\pi i\tau}\Big\}_{\tau=\infty i}$ ma wartość skończoną, czyli miejsce $\tau = \infty i$ jest dla $J(\tau)$ miejscem istotnie osobliwem. Zrozumieć to łatwo, gdyż w punkcie $\tau = \infty i$ schodzą się wszystkie trójkąty, a więc schodzą się wszystkie wierzchołki równoważne, czyli $J(\tau)$ przybiera w punkcie $\tau = \infty i$ tę samą wartość nieskończenie wiele razy; punkt ten musi być zatem istotnie osobliwym.

Oczywistą jest rzeczą, że $J(\tau)$ przybiera wartość 0 na wszystkich wierzchołkach równoważnych z wierzchołkami C i D, wartość 1 na wszystkich punktach równoważnych z E.

W trójkącie zasadniczym funkcya $J(\tau)$ nie ma miejsc zerowych ani nieskończonościowych, gdyż na innych miejscach ani g_2, ani g_3 nie staje się 0, ani ∞.

Oczywistą jest rzeczą, że funkcya $J(\tau)$ musi w wieloboku zasadniczym przyjąć każdą wartość jako funkcya automorficzna i to każdą raz tylko, gdyż w wieloboku tym nie ma dwóch miejsc równoważnych. Na osi rzędnych $(\tau = \beta i)$ argument funkcyi $J(\tau)$ ma postać:

$$e^{\pi i\tau} = e^{\pi i\beta i} = e^{-\pi\beta},$$

a więc $J(\tau)$ przybiera na osi rzędnych same wartości rzeczywiste, leżące, jak z poprzednich rozważań wynika, w granicach $(1 \ldots + \infty)$.

Również na ograniczeniach wieloboku ($\tau = \pm \frac{1}{2} + \beta i$) przybiera $J(\tau)$ wartości rzeczywiste, gdyż wtedy argument:

$$h = e^{\pi i \left(\pm \frac{1}{2} + \beta i\right)} = e^{\pm \frac{\pi i}{2}} e^{-\pi\beta},$$

a że w $J(\tau)$ wchodzą same parzyste potęgi argumentu h, przeto czynnik $e^{\pm \frac{\pi i}{2}}$ da ± 1; wartości te rzeczywiste leżą w granicach $(0 \ldots + \infty)$.

Zresztą wszędzie w wieloboku przyjmuje $J(\tau)$ wartości złożone.

Na punktach półpłaszczyzny (z), leżących po za wielobokiem zasadniczym, przyjmuje $J(\tau)$ jako funkcya automorficzna takie tylko wartości, jakie posiada na równoważnych miejscach wieloboku zasadniczego.

4. Wyprowadzimy teraz związki między funkcyą $J(\tau)$, a innemi wyrażeniami z teoryi funkcyj eliptycznych.

Ponieważ:

$$\frac{g_2}{4} = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2),$$

a nadto:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \lambda = \varkappa^2,$$

gdzie $\varkappa^2$ nazywa się modułem funkcyj eliptycznych, zaś:

$$\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \lambda' = \varkappa'^2,$$

przeto możemy napisać:

$$g_2 = \frac{4}{3} (1 - \lambda + \lambda^2)(e_1 - e_3)^2.$$

A ponieważ dalej:

$$\Delta = 16 (e_3 - e_2)^2 (e_2 - e_1)^2 (e_1 - e_3)^2$$
$$= 16 \lambda^2 \lambda'^2 (e_1 - e_3)^6 = 16 [\lambda (1 - \lambda)]^2 (e_1 - e_3)^6,$$

przeto możemy ostatecznie napisać:

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2}. \tag{11}$$

Funkcya $J(\tau)$ wyraża się przeto wymiernie przez moduł λ (stąd nazwa funkcyj eliptycznych modułowych).

Naodwrót (gdy nie uwzględniamy, że J jest funkcyą ilości τ) λ jest algebraiczną funkcyą argumentu J:

$$\lambda = \lambda(J)$$

i to, jak z równania (11) wypływa, funkcyą sześciowartościową.

5. Wyrazimy obecnie J wymiernie jeszcze przez jeden parametr μ.

Jak wiadomo, całka eliptyczna 1-go rodzaju ma kształt:

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

gdzie $f(z)$ jest najogólniej funkcyą 4-go stopnia. Kładąc $z = \frac{z_1}{z_2}$, otrzymamy formę jednorodną dwukwadratową:

$$f(z_1, z_2) = a z_1^4 + 4b z_1^3 z_2 + 6c z_1^2 z_2^2 + 4d z_1 z_2^3 + e z_2^4.$$

Niezmiennikami tej formy, t. j. wyrażeniami, które się nie zmieniają przy wszelkich podstawieniach liniowych jednorodnych, są tu wyrażenia:

$$\begin{cases} g_2 = ae - 4bd + 3c^2, \text{ [1]} \\ g_3 = ace + 2bcd - ad^2 - b^2 e - c^3. \end{cases} \tag{12}$$

Formę $f(z_1, z_2)$ można przekształcać w różny sposób i nadawać jej różną postać, przyczem niezmienniki nie ulegają zmianie. Takiemi postaciami będą normalne formy Weierstrassa i Legendre'a:

$$f(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3, \qquad f(z) = (1 - z^2)(1 - \lambda z^2).$$

Nadajmy formie $f(z_1, z_2)$ kształt:

$$f = (\mu_2^2 z_1^2 - \mu_1^2 z_2^2)(\mu_1^2 z_1^2 - \mu_2^2 z_2^2),$$

to ponieważ niezmienniki tej formy mają być identyczne z niezmiennikami formy ogólnej, to na podstawie równań (12), musi być:

$$\begin{aligned} 12 g_2 &= \mu_1^8 + 14 \mu_1^4 \mu_2^4 + \mu_2^8, \\ 216 g_3 &= \mu_1^{12} - 33 \mu_1^8 \mu_2^4 - 33 \mu_1^4 \mu_2^8 + \mu_2^{12}, \end{aligned} \tag{13}$$

---

[1] Por. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, str. 15.

a wtedy wyróżnik:

$$16\,\Delta = \mu_1^4\,\mu_2^4\,(\mu_1^4 - \mu_2^4)\,.$$

Kładąc $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, $z = \frac{z_1}{z_2}$ i używając podstawienia $z = \mu y$, otrzymamy obecnie dla całki eliptycznej 1-go rodzaju kształt:

$$J = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-\mu^4 y^2)}}\,.$$

Widzimy przeto, że μ^4 jest obecnie tak samo modułem, jak poprzednio $\varkappa^2$.

Podstawiając otrzymane wartości na g_2, g_3 i Δ w $J(\tau)$, otrzymamy (po skróceniu licznika i mianownika przez μ_2^{24}) następujące wyrażenie:

$$J(\tau) = \frac{(\mu^4 + \mu^{-4} + 14)^3}{108\,(\mu^4 + \mu^{-4} - 2)^2}\,, \tag{14}$$

J jett przeto *funkcyą wymierną* argumentu μ; naodwrót μ jest *funkcyą algebraiczną* J:

$$\mu = \mu\,(J)$$

i to, jak z równań (13) widoczne, 24 — wartościową.

Z porównania równań (11) i (14) wyniknie następujący ważny związek między λ i μ:

$$\lambda = -\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right)^2. \tag{15}$$

Zajmiemy się teraz temi odwróceniami funkcyi J, t. j. funkcyami $\lambda\,(J)$ i $\mu\,(J)$

Funkcya $\lambda\,(J)$.

1. Widzieliśmy, że J jako funkcya argumentu τ posiada nieskończoną grupę modułową; obecnie wykażemy, że J w funkcyi λ należy do grupy skończonej.

Zauważmy skończoną grupę sześciu podstawień [1]):

[1]) Por. Weber: Ellip. Funct., u. alg. Zahlen, str. 141.

$$\lambda' = \lambda,\quad \lambda' = \frac{1}{\lambda},\quad \lambda' = 1-\lambda,\quad \lambda' = \frac{1}{1-\lambda},\quad \lambda' = \frac{\lambda-1}{\lambda},\quad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda-1} \tag{G}$$

i utwórzmy iloczyn:

$$(\lambda'-\lambda)\left(\lambda'-\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda'-(1-\lambda))\left(\lambda'-\frac{1}{1-\lambda}\right)\left(\lambda'-\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\left(\lambda'-\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = \Pi\,(\lambda',\lambda)\,,$$

to iloczyn ten da się sprowadzić do postaci:

$$(\lambda^2-\lambda)^2\left[\frac{(\lambda'^2-\lambda'+1)^3}{(\lambda'^2-\lambda')^2} - \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{(\lambda^2-\lambda)^2}\right].$$

Wnosimy stąd, że wyrażenie $\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{(\lambda^2-\lambda)^2}$ nie zmienia swej postaci, gdy w niem λ zastąpimy przez podstawienia grupy (G). Skoro więc to wyrażenie ma wartość J przy $\lambda = \lambda\,(J)$ to ma tę samą wartość $J(\tau)$ i przy $\lambda = \frac{1}{\lambda\,(J)}$. $\lambda = 1-\lambda\,(J)$, $\lambda = \frac{1}{1-\lambda\,(J)}$, $\lambda = \frac{\lambda\,(J)-1}{\lambda\,(J)}$, $\lambda = \frac{\lambda\,(J)}{\lambda\,(J)-1}$, t. zn., że λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ są gałęziami funkcyi λ.

Wszystkie więc pozostałe gałęzie wyrażają się przez pierwszą gałąź λ liniowo, czyli:

$J(\tau)$ wyrażone przez λ nie zmienia się w grupie liniowej (G).

Wartości tych gałęzi wynikają z równań:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}\,,\qquad \text{a więc } \lambda = \pm 1\,,$$

$$\lambda_2 = 1-\lambda,\qquad \text{a więc } \lambda = \frac{1}{2}\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{\lambda-1}{\lambda}\,, &&\text{a więc } \lambda^2-\lambda+1=0 \\ \lambda_4 &= \frac{1}{1-\lambda}\,, &&\text{a więc } \lambda^2-\lambda+1=0 \end{aligned}\right\}\ \lambda = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$\lambda_5 = \frac{\lambda}{\lambda-1}\,,\qquad \text{a więc } \lambda^2-2\lambda=0,\ \lambda = 0,\ 2.$$

Znaczy to, że równanie (11) może mieć punkty osobliwe w $J = 0,\ 1,\ \infty$.

2. Sprawdzimy, że to są punkty wielokrotne osobliwe, tak że gałęzie funkcyi $\lambda(J)$ w tych punktach są cyklicznie z sobą złączone. W tym celu w równaniu (11) uważajmy J za zmienną niezależną i postarajmy się o całkowity obraz odwzorowania płaszczyzny (J) na płaszczyznie (λ).

Gdy J rzeczywiste, musi i prawa strona być rzeczywista, a gdy ją napiszemy w postaci:

$$\frac{4}{27}(\lambda^2-\lambda)\left[1+\frac{1}{\lambda^2-\lambda}\right]^3,$$

to widzimy, że rzeczywiste musi być $\lambda^2-\lambda=\lambda(1-\lambda)$.

Kładąc $\lambda=x+iy$ otrzymamy:

$$\lambda(1-\lambda)=x-x^2+y^2-iy(2x-1);$$

a przyrównywając do zera część czysto urojoną, mamy:

$$y(2x-1)=0.$$

Widzimy przeto, że J jest rzeczywiste na obu prostych $y=0$, $x=\frac{1}{2}$, a więc na osi odciętych płaszczyzny (λ) i na linii równoległej do osi rzędnych. Kładąc dalej (po podzieleniu licznika i mianownika przez λ^3):

$$\frac{27}{4}J=\frac{(\lambda+\lambda^{-1}-1)^3}{\lambda+\lambda^{-1}-2}=\frac{[(1-\lambda)+(1-\lambda)^{-1}-1]^3}{(1-\lambda)+(1-\lambda)^{-1}-2},$$

gdy za λ można położyć $(1-\lambda)$ na podstawie grupy (G), widzimy, że J jest wtedy rzeczywiste, gdy $\lambda+\lambda^{-1}$ lub $(1-\lambda)+(1-\lambda)^{-1}$ jest rzeczywiste. Kładąc $\lambda=x+iy$ i przyrównywając do zera część czysto urojoną, mamy:

$$x^2+y^2-1=0;\quad (x-1)^2+y^2-1=0.$$

Widzimy więc, że rzeczywista oś płaszczyzny (J) odpowiada na płaszczyznie λ powyższym dwom prostym i kołom o promieniu 1, a środkach $\lambda=0$, $\lambda=1$ (por. fig. II).

Dla $J=0$ mamy $\lambda^2-\lambda+1=0$, czyli:

$$\text{(A)}\qquad \lambda=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=e^{+\frac{\pi i}{3}}.$$

Dla $J=1$ dostaniemy:

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases}\lambda=-1, \\ \lambda=\frac{1}{2}, \\ \lambda=2,\end{cases}$$

wreszcie dla $J=\infty$:

$$\text{(C)}\qquad \begin{cases}\lambda=0, \\ \lambda=+1. \\ \lambda=\infty.\end{cases}$$

W ten sposób płaszczyzna (λ) rozpadła się na 12 trójkątów łukowych; dwa z nich graniczące przedstawiają odwzorowanie całej płaszczyzny (J) w ten sposób, że jeden z nich jest odwzorowaniem półpłaszczyzny dodatniej, drugi ujemnej półpłaszczyzny (J). Cieniowane trójkąty odpowiadają półpłaszczyznie dodatniej, gdyż ich wierzchołki $J=0, 1, \infty$ tak po sobie następują, że okrążanie odbywa się w stronę dodatnią (przeciwnie jak wskazówka zegarowa). Widzimy dalej, że rzeczywiście punkty $J=0, 1, \infty$ są punktami rozgałęzienia dla funkcyi $\lambda(J)$; mianowicie w dwóch punktach A mamy po trzy pary trójkątów, mających w A wierzchołki, a stąd wnosimy, że w punkcie $J=0$ ma funkcya λ dwa punkty osobliwe, w których schodzą się po trzy gałęzie ze sobą.

W punktach B mamy po dwie pary trójkątów, t. zn., że w punkcie $J=1$ ma funkcya λ trzy punkty wielokrotne osobliwe, w których schodzą się po dwie gałęzie ze sobą.

Wreszcie w trzech punktach C mamy po dwie pary trójkątów, a stąd wynika, że funkcya λ ma w punkcie $J=\infty$ trzy punkty wielokrotne osobliwe, w których schodzą się po dwie gałęzie ze sobą.

Każdy trójkąt ma kąty $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$.

Funkcya $\mu(J)$.

1. Równanie (14) powstanie z (11) w ten sposób, że położymy:

$$\lambda=-\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right)^2.$$

Widzieliśmy dalej, że J w funkcyi λ nie zmienia się w grupie G. Gdy więc w grupie G za λ położymy $-\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right)^2$, za λ' $-\left(\frac{\mu'^2-1}{2\mu'}\right)^2$, dostaniemy grupę H, w której J dane w funkcyi ilości μ nie zmieni się wcale. Grupa H ma postać:

$$H = \left(\begin{array}{l} \frac{\mu'^2-1}{2\mu'} = \pm\frac{\mu^2-1}{2\mu} \\ \frac{\mu'^2-1}{2\mu'} = \pm\frac{2\mu}{\mu^2-1} \\ \frac{\mu'^2-1}{2\mu'} = 1 \mp \frac{\mu^2-1}{2\mu} \\ \frac{\mu'^2-1}{2\mu'} = -\dfrac{\pm\frac{\mu^2-1}{2\mu}-1}{\frac{\mu^2-1}{2\mu}} \\ \frac{\mu'^2-1}{2\mu'} = \dfrac{1}{1\mp\frac{\mu^2-1}{2\mu}} \\ \frac{\mu'^2-1}{2\mu'} = \dfrac{\pm\frac{\mu^2-1}{2\mu}}{\pm\frac{\mu^2-1}{2\mu}-1} \end{array}\right)$$

Każde z tych równań da cztery podstawienia postaci:

$$\mu' = f(\mu),$$

tak, że grupa H po obliczeniu przedstawi się tak:

$$\mu' = i^k\mu,\ \frac{i^k}{\mu},\ i^k\frac{\mu+1}{\mu-1},\ i^k\frac{\mu-1}{\mu+1},\ i^k\frac{\mu-i}{\mu+i},\ i^k\frac{\mu+i}{\mu-i},\quad {}_{k=0,1,2,3,}$$

zawiera ona zatem 24 podstawień liniowych. Gdy więc μ pojmujemy jako jednę gałąź funkcyi $\mu(J)$, to pozostałe 23 gałęzie wyrażają się liniowo przez $\mu(J)$.

2. Chodzi nam teraz o punkty wielokrotne osobliwe funkcyi $\mu(J)$. I tu punkty osobliwe funkcyi $\mu(J)$ są $J = 0, 1, \infty$, jak z kształtu tej funkcyi wypływa. Jakość tych punktów wielokrotnych zbadamy, odwzorowując płaszczyznę (J) na płaszczyznie (μ), a właściwie oś odciętych płaszczyzny (J).

J jest rzeczywiste wtedy, gdy $(\mu^4+\mu^{-4})$ jest rzeczywiste. Kładąc tedy $\mu = x+iy$ i przyrównywając do zera część czysto urojoną, mamy:

$$xy(x+y)(x-y)(x^2+y^2-1) = 0;$$

a więc na płaszczyznie (μ) pozostaje y rzeczywiste na obu osiach, na dwusiecznych kąta zawartego między obu osiami i na kole o promieniu 1, a środku $\mu = 0$. Mielibyśmy przeto 16 obszarów. Atoli funkcya ma 24 gałęzie, musi być przeto obszarów $2 \cdot 24 = 48$ (gdyż 24 obszary odnoszą się do półpłaszczyzny dodatniej, 24 do półpłaszczyzny ujemnej).

W tym celu połóżmy:

$$\frac{\mu^2-1}{2\mu} = \frac{(x+iy)^2-1}{2(x+iy)}.$$

J jest rzeczywiste, gdy $\lambda = 1$, czyli gdy:

$$\left|\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right| = \left|\frac{(x+iy)^2-1}{2(x+iy)}\right| = 1.$$

Bezwzględna wartość licznika ma być równą bezwzględnej wartości mianownika; dostaniemy przeto:

$$(x^2+y^2+2x-1)(x^2+y^2-2x-1) = 0.$$

J jest przeto rzeczywiste na kołach:

$$(x\pm 1)^2 + y^2 = 2,$$

t. j. na kołach o środku $\mu = \mp 1$, a promieniu $\sqrt{2}$.

Ponieważ nadto:

$$1-\lambda = \left(\frac{\mu^2+1}{2\mu}\right)^2,$$

przeto do poprzednich kół dołączą się jeszcze dwa koła:

$$x^2 + (y\pm 1)^2 = 2,$$

a więc koła, przystające do poprzednich, o środkach $\mu = \pm i$ (por. fig. III). Dostaniemy przeto 48 obszarów. Z figury występuje jasno jakość punktów osobliwych 0, 1, ∞, a mianowicie:

W punkcie $J = 0$ ma funkcya $\mu(J)$ osiem punktów osobliwych, w których schodzą się po trzy gałęzie, w punkcie $J=1$ dwanaście punktów osobliwych, w których schodzą się po dwie gałęzie, w punkcie $J=\infty$ sześć punktów osobliwych, w których schodzą się po cztery gałęzie.

Każdy trójkąt na płaszczyźnie (μ), odwzorowujący górną lub dolną połowę płaszczyzny (J), ma kąty $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$.

Mamy przeto dotychczas następujące wyniki:

Funkcya $J(\tau)$, przedstawiona przez τ, dopuszcza nieskończoną grupę modułową; przedstawiona przez λ dopuszcza grupę sześciu podstawień; przedstawiona przez μ — grupę 24 podstawień liniowych. Odwrotna funkcya $\lambda(J)$ jest funkcyą algebraiczną sześciowartościową argumentu J; przez jedną jej gałąź wyrażają się liniowo pozostałe gałęzie. Odwrotna funkcya $\mu(J)$ jest funkcyą algebraiczną 24—wartościową argumentu J; przez jedną jej gałąź wyrażają się pozostałe (w liczbie 23) liniowo.

Pozostaje nam zająć się jeszcze funkcyą odwrotną $\tau(J)$.

Funkcya $\tau(J)$.

1. Co się tyczy tej funkcyi odwrotnej, to odrazu widoczną jest rzeczą, że podczas, gdy J jest funkcyą jednoznaczną argumentu τ, to τ jest nieskończenie wieloznaczną funkcyą argumentu J. Wynika to stąd, że $J(\tau)$ jest funkcyą modułową argumentu τ, t. j. należy do grupy $\left(\tau, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$, wszystkie przeto gałęzie funkcyi τ dadzą się przedstawić w postaci $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

Widoczną jest rzeczą, że punkty $J=0, 1, \infty$ są punktami rozgałęzienia funkcyi $\tau(J)$ na płaszczyźnie (J), gdyż w punkcie $J=\infty$ schodzą się wszystkie gałęzie funkcyi $\tau(J)$; w punkcie $J=0$ jest $\tau=\varrho$, schodzą się przeto w tym punkcie trzy gałęzie, bo ϱ jest trójwartościowe; dla $J=1$ mamy $\tau(1)=e^{\frac{\pi i}{2}}$, schodzą się tam przeto dwie gałęzie.

2. Jak wiadomo $\tau=\frac{\omega_1}{\omega_2}$, wyprowadzimy przeto obecnie pewne równanie różniczkowe drugiego rzędu dla tych peryodów, a stąd przejdziemy do równania różniczkowego rzędu trzeciego, którego całką jest funkcya τ.

W tym celu zauważmy całkę eliptyczną pierwszego rodzaju w normalnej formie Weierstrassa; całka ta brana po drodze zamkniętej da peryod:

$$2\omega = \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}.$$

Wprowadzając nową zmienną na podstawie równania:

$$y = \frac{g_2}{g_2} z,$$

otrzymamy:

$$2\omega = \int \frac{\frac{g_3}{g_2}\, dz}{\sqrt{4\frac{g_3^3}{g_2^3} z^3 - g_2 \frac{g_3}{g_2} z - g_3}} = \int \frac{\sqrt{\frac{g_2}{g_3}}\, dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{g_2^3}{g_3}(z+1)}}.$$

Lecz

$$\frac{g_2^3}{g_3} = \frac{27\,J}{J-1},$$

więc:

$$2\omega\sqrt{\frac{g_3}{g_2}} = \Omega = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{27\,J}{J-1}(z+1)}}.$$

Idąc za Kleinem, nazwiemy Ω **peryodem unormowanym** całki 1-go rodzaju. Zbadamy obecnie zależność tego peryodu od funkcyi J.

Każdy peryod Ω da się liniowo jednorodnie przedstawić przez dwa peryody pierwotne:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}}\, 2\omega_1, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}}\, 2\omega_2,$$

więc:

$$(\alpha) \qquad \Omega = m_1\,\Omega_1 + m_2\,\Omega_2.$$

Stąd mamy:

$$(\beta) \qquad \frac{d\Omega}{dJ} = m_1 \frac{d\Omega_1}{dJ} + m_2 \frac{d\Omega_2}{dJ},$$

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2\Omega}{dJ^2} = m_1 \frac{d^2\Omega_1}{dJ^2} + m_2 \frac{d^2\Omega_2}{dJ^2}.$$

Eliminując z (α), (β), (γ) ilości m_1, m_2, otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} \Omega\,, & \Omega_1\,, & \Omega_2 \\ \frac{d\Omega}{dJ}\,, & \frac{d\Omega_1}{dJ}\,, & \frac{d\Omega_2}{dJ} \\ \frac{d^2\Omega}{dJ^2}\,, & \frac{d^2\Omega_1}{dJ^2}\,, & \frac{d^2\Omega_2}{dJ^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie to utrzyma się, bez względu na to, jakich par Ω_1, Ω_2 użyjemy do przedstawienia peryodu Ω. Gdy przeto równanie powyższe rozwiniemy według pionu pierwszego, to spółczynniki będą zawsze funkcyami jednoznacznemi funkcyi J. Dostaniemy zatem:

(16) $$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + r_1(J)\frac{d\Omega}{dJ} + r_2(J)\,\Omega = 0.$$

Musimy teraz zbadać spółczynniki jednoznaczne μ_1 i μ_2.

W tym celu zauważmy całkę eliptyczną drugiego rodzaju, braną po drodze zamkniętej:

$$2\eta = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\,,$$

to po użyciu tego samego podstawienia dostaniemy peryod unormowany:

$$-H = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 + g(z+1)}}\,, \quad \text{gdzie } g = \frac{27\,J}{J-1}\,.$$

Połóżmy:

$$\sqrt{4z^3 + g(z+1)} = R;$$

różniczkując Ω i $-H$ według g, otrzymamy:

$$\frac{d\Omega}{dg} = -\int \frac{dz}{2R^3} - \int \frac{z\,dz}{2R^3}\,,$$

$$\frac{dH}{dg} = \int \frac{z\,dz}{2R^3} + \int \frac{z^2\,dz}{2R^3}\,,$$

Po prawej stronie mamy trzy całki:

$$\int \frac{z^\alpha\,dz}{2R^3}\,; \qquad (\alpha = 0, 1, 2)$$

Są to całki brane po kołach zamkniętych; iloraz $\left(\frac{z^\alpha}{R}\right)$, prowadzony od pewnej swej wartości z punktu z po kole (K), wraca do tegoż punktu z tą samą wartością, więc:

$$\int_K d\left(\frac{z^\alpha}{R}\right) = 0.$$

Dla $\alpha = 0$ mamy:

$$d\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{-12z^2 - g}{2R^3}\,,$$

więc:

(17) $$12\int \frac{z^2\,dz}{2R^3} + g\int \frac{dz}{2R^3} = 0.$$

Dla $\alpha \neq 0$ mamy:

$$d\left(\frac{z^\alpha}{R}\right) = \frac{2\alpha R^2 z^{\alpha-1} - z^\alpha(12z^2 + g)}{2R^3}\,dz\,,$$

więc dla $\alpha = 1$:

$$d\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{dz}{R} - \frac{2gz}{2R^3}\,dz - \frac{3g}{2R^3}\,dz,$$

a że:

$$\int d\left(\frac{z}{R}\right) = 0, \quad \int \frac{dz}{2R} = \frac{\Omega}{2}\,,$$

więc:

(18) $$2g\int \frac{z\,dz}{2R^3} + 3g\int \frac{dz}{2R^3} = \frac{\Omega}{2}\,.$$

Analogicznie dla $\alpha = 2$ otrzymamy:

(19) $$2g\int \frac{z^2\,dz}{2R^3} + 3g\int \frac{z\,dz}{2R^3} = \frac{1}{2}H,$$

Równania (17), (18), (19) dadzą:

$$\int \frac{z^2\,dz}{2\,R^3} = \frac{2H-3\Omega}{8\,(g+27)}\,, \quad \int \frac{z\,dz}{2\,R^3} = \frac{g\Omega+18H}{4g\,(g+27)}$$

$$\int \frac{dz}{2\,R^3} = \frac{g\Omega-6H}{2g\,(g+27)}\,.$$

Otrzymamy przeto:

$$(20)\qquad \begin{cases} 4\,(g+27)\,\dfrac{d\Omega}{dg} + (18+g)\,\Omega + 6H = 0, \\[2ex] 4\,(g+27)\,\dfrac{dH}{dg} + \dfrac{1}{2}\,g\Omega - (g+18)\,H = 0. \end{cases}$$

Wprowadźmy tu znowu:

$$-g = \frac{27\,J}{1-J}\,,$$

to równania (20) przejdą na:

$$(\mathrm{A})\qquad 36\,J\,(J-1)\,\frac{d\Omega}{dJ} = 3\,(J+2)\,\Omega - 2\,(J-1)\,H,$$

$$(\mathrm{B})\qquad 24\,J\,(J-1)\,\frac{dH}{dJ} = 3\,J\,\Omega - 2\,(J+2)\,H.$$

Różniczkując równanie (A), otrzymamy:

$$(\mathrm{C})\qquad 36\,J\,(J-1)\,\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + (6gJ-42)\,\frac{d\Omega}{dJ} + 2\,(J-1)\,\frac{dH}{dJ} - 3\Omega - 2H = 0.$$

Eliminując z równań (A), (B), (C) H i $\dfrac{dH}{dJ}$, znajdziemy równanie różniczkowe:

$$(21)\qquad \frac{d^2\Omega}{dJ^2} = \frac{1}{J}\,\frac{d\Omega}{dJ} + \frac{\frac{31}{144}\,J - \frac{1}{36}}{J^2\,(J-1)^2}\,\Omega = 0.$$

Porównywając to równanie z równaniem (16), widzimy, że:

$$r_1\,(J) = \frac{1}{J}\,,$$

$$r_2\,(J) = \frac{\frac{31}{144}\,J - \frac{1}{36}}{J^2\,(J-1)^2}\,.$$

Widzimy przeto, że spółczynniki r_1 i r_2 są funkcyami wymiernemi funkcyi J.

Ponieważ całkami szczególnemi równania (16), są peryody Ω_1 i Ω_2, peryody te można obrać za układ zasadniczy całek równania (21), tak, że każda inna całka wyrazi się przez nie liniowo:

$$\Omega = m_1\,\Omega_1 + m_2\,\Omega_2.$$

Widzimy zarazem, że miejscami osobliwemi równania (21) są $J = 0, 1, \infty$, będące zarazem miejscami osobliwemi dla funkcyi $\tau\,(J)$. Chcąc znaleźć rozwinięcia funkcyi $\tau\,(J)$ w otoczeniu tych miejsc osobliwych, należy znaleść na podstawie równania (21) rozwinięcia dla całek Ω_1 i Ω_2, gdyż $\tau = \dfrac{\Omega_1}{\Omega_2}$.

Tych badań przeprowadzać nie będziemy, natomiast przejdziemy do równania różniczkowego 3-go rzędu, którego całką jest $\tau\,(J)$.

3) Napiszmy równanie (21) dla obu całek Ω_1 i Ω_2 i oznaczmy spółczynniki przy Ω' i Ω przez p i q, to dostaniemy.

$$\Omega_1'' + p\Omega_1' + q\Omega_1 = 0,$$
$$\Omega_2'' + p\Omega_2' + q\Omega_2 = 0.$$

Przez eliminacyę ilości q otrzymamy równanie:

$$(22)\qquad (\Omega_2\,\Omega_1'' - \Omega_1\,\Omega_2'') + p\,(\Omega_2\,\Omega_1' - \Omega_1\,\Omega_2') = 0.$$

Na mocy tego, że:

$$\tau = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\,,$$

znajdziemy:

$$\frac{d\tau}{dJ} = \tau' = \frac{\Omega_2\,\Omega_1' - \Omega_1\,\Omega_2'}{\Omega_2^2}\,,$$

zaś pochodna logarytmowa równa się:

$$\frac{\tau''}{\tau'} = \frac{\Omega_2\,\Omega_1'' - \Omega_1\,\Omega_2''}{\Omega_2\,\Omega_1' - \Omega_1\,\Omega_2'} - 2\,\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}\,,$$

lub na mocy (22):

$$-\frac{\tau''}{\tau'} = p + 2\,\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}. \tag{23}$$

Zróżniczkujemy to równanie, a z drugiej strony podnieśmy (23) do kwadratu i podzielmy przez — 2, to otrzymamy:

$$\frac{\tau'''}{\tau'} - \left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = -p' - 2\,\frac{\Omega_2''}{\Omega_2} + 2\left(\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}\right)^2,$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = -\frac{1}{2}\,p^2 - 2p\,\frac{\Omega_2'}{\Omega_2} - 2\left(\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}\right)^2.$$

Dodając te równania, otrzymamy przy uwzględnieniu istniejących już związków:

$$\frac{\tau'''}{\tau'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = -p' - \frac{1}{2}\,p^2 - \frac{2}{\Omega_2}\,(\Omega_2'' + p\Omega_2') = 2q - p' - \frac{1}{2}\,p^2.$$

Podstawmy za p i q napowrót ich wartości i obliczmy p', to otrzymamy szukane równanie:

$$\frac{\tau'''}{\tau'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = \frac{4}{9J^2} + \frac{3}{8\,(1-J^2)^2} + \frac{23}{72\,J\,(J-1)}.$$

Takiemu równaniu różniczkowemu czyni zadość funkcya $\tau(J)$. Idąc za Cayleyem nazywamy wyrażenie lewej strony szwarcyanem funkcyi $\tau(J)$ i oznaczamy podług Kleina przez $[\tau]_J$. Jak z teoryi równań różniczkowych wiadomo, szwarcyan posiada tę własność, że nie zmienia swej wartości, gdy na ilości τ dokonamy dowolnego podstawienia grupy liniowej $\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$. Najogólniejszą przeto całką równania (24), a zarazem najogólniejszą gałęzią funkcyi τ jest $\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$, co zresztą wiemy już skądinąd.

Prawej stronie równania (24) można nadać postać:

$$[\tau]_J = \frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2\,(J^2-1)^2} + \frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2\,J^2} + \frac{\frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_3^2} - 1}{2J\,(J-1)}, \tag{25}$$

gdyż równanie to jest zgodne z równaniem (24) dla $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = \infty$. A że całkę równania (25) nazywamy funkcyą s—Schwarza, albo funkcyą trójkąta i oznaczamy przez:

$$s\left(\frac{1}{\nu_1'}, \frac{1}{\nu_2'}, \frac{1}{\nu_3'}, J\right),$$

przeto i funkcya τ jest pewną funkcyą trójkąta:

$$\tau(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, J\right).$$

Na tem poprzestajemy, nie wchodząc bliżej w samą teoryę funkcyj trójkąta.

Lwów, lipiec, 1895.
