O SUMACH GAUSSA[1].

PODAŁ

Fr. MERTENS.

Największa trudność przy oznaczaniu sum Gaussa polega, jak wiadomo, na ustanowieniu znaku. Znajdujemy dla sumy:

$$S = \sum_{0}^{n-1} e^{\frac{s^2 2\pi i}{n}}$$

z łatwością, przy n nieparzystem, równanie:

$$S^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n,$$

i kładąc

$$S = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} R,$$

otrzymujemy:

$$R^2 = n$$

Aby wszakże módz oznaczyć R z tego równania, trzeba wiedzieć, czy R jest dodatnie czy ujemne.

[1]) Z „Mathemat. und naturw. Mittheilungen" Berlińskiej Akademii, luty, 1896.

Można to rozstrzygnąć następującym sposobem:
Mamy najprzód równanie:

$$(1+i^n)\,S = \sum_0^{2n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{2n}}.$$

Dochodzimy do niego, oddzielając w poprzedniej sumie wyrazy z s parzystem od wyrazów z s nieparzystem. Suma wyrazów z parzystem s jest równa S. Ogół zaś wyrazów z s nieparzystem, — z powodu, że s można zastąpić przez $n+2r$ i liczbie r nadawać wszystkie wartości całkowite od 0 do $n-1$, —jest równy:

$$\sum_0^{n-1} e^{(n+2r)^2\frac{\pi i}{2n}} = \sum e^{\frac{n\pi i}{2}+\frac{r^2.2\pi i}{n}} = i^n\,S.$$

Dalej mamy:

$$\sum_0^{2n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{2n}} = \sum_1^{4n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{8n}}.$$

Jeżeli bowiem rozłożymy sumę

$$T = \sum_0^{8n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{8n}}$$

na sumy

(1) $$\sum_0^{4n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{8n}}, \qquad \sum_{4n}^{8n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{8n}},$$

to druga z nich, po zastąpieniu s przez $4n+s$, przechodzi na:

$$\sum_0^{4n-1} (-1)^s\, e^{\frac{s^2\pi i}{8n}}$$

i będzie

$$T = \sum_0^{4n-1} (1+(-1)^s)\, e^{\frac{s^2\pi i}{8n}}.$$

Ponieważ odpadają tu wyrazy z s nieparzystem, więc po zastąpieniu s przez $2s$, otrzymujemy:

$$T = 2\sum_0^{2n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{2n}}.$$

Z drugiej strony, druga z sum (1), po zastąpieniu s przez $8n-s$, przechodzi na:

$$\sum_1^{4n} e^{\frac{s^2\pi i}{8n}} = \sum_0^{4n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{8n}}$$

i będzie

$$T = 2\sum_0^{4n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{8n}}.$$

Będzie więc także:

$$(1+i^n)\,S = (1+i)\,R = \sum_0^{4n-1} e^{\frac{s^2\pi i}{8n}},$$

a stąd:

$$R = \sum_0^{4n-1} \cos 8\,s^2\omega = \sum_1^{4n-1} \sin 8\,s^2\omega,$$

gdzie

$$\omega = \frac{\pi}{64n}.$$

Z równania:

$$\sin^2(2s+1)^2\,\omega - \sin^2(2s-1)^2\,\omega = \sin 8s\omega \sin(8s^2+2)\,\omega,$$

wynika

$$\sin(8s^2+2)\,\omega = \cos 2\omega \sin 8s^3\omega + \sin 2\omega \cos 8s^2\omega$$
$$= \frac{\sin^2(2s+1)^2\,\omega - \sin^2(2s-1)^2\,\omega}{\sin 8s\omega}.$$

Sumując od $s=1$ do $s=4n-1$, znajdziemy:

$$\cos 2\omega\, R + \sin 2\omega\,(R-1) = \frac{\sin^2 3^2\omega - \sin^2\omega}{\sin 8\omega} + \frac{\sin^2 5^2\omega - \sin^2 3^2\omega}{\sin 16\,\omega}$$

$$+ \ldots + \frac{\sin^2 (8n-1)^2\,\omega - \sin^2 (8n-3)^2\omega}{\sin 8\,(4n-1)\,\omega}.$$

Jeżeli napiszemy to równanie w postaci:

$$(\cos 2\omega + \sin 2\omega)\, R = \sin\omega \left(\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} - \frac{\sin\omega}{\sin 8\omega}\right)$$

$$+ \sin^2 3^2\omega \left(\frac{1}{\sin 8\omega} - \frac{1}{\sin 16\,\omega}\right) + \sin^2 5^2\omega \left(\frac{1}{\sin 16\,\omega} - \frac{1}{\sin 24\,\omega}\right)$$

$$+ \ldots + \sin^2 (8n-3)^2\,\omega \left(\frac{1}{\sin 8\,(4n-3)\,\omega} - \frac{1}{\sin 8\,(4n-1)\,\omega}\right)$$

$$+ \frac{\sin^2 (8n-1)^2\,\omega}{\sin 8\,(4n-1)\,\omega},$$

to wszystkie wyrazy strony prawej będą dodatnie, gdyż:

$$\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} > 1 > \frac{\sin\omega}{\sin 8\omega},$$

a także

$$\frac{1}{\sin 8\omega} > \frac{1}{\sin 16\,\omega} > \frac{1}{\sin 24\,\omega} > \ldots > \frac{1}{\sin 8\,(4n-1)\,\omega} > 0.$$

Jest tedy $(\cos 2\omega + \sin 2\omega)\, R$, a więc i R dodatnie.

WSTĘP DO TEORYI FUNKCYJ MODUŁOWYCH ELIPTYCZNYCH.

NAPISAŁ

W. LEWICKI.

CZĘŚĆ I.

Grupa modułowa.

Wstęp.

Grupę liniowych podstawień:

$$\left(z,\ \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

o spółczynnikach rzeczywistych i całkowitych, i o module $ad-bc=1$, nazywamy grupą modułową.

1. Aby własności tej grupy bliżej określić, zauważmy podstawienie liniowe o zupełnie dowolnych a, b, c, d:

$$(1) \qquad t = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z = x+iy,$$

to równaniem tem związane są dwie płaszczyzny (t) i (z) w ten sposób, że jedna płaszczyzna odkształca się przez użycie tego podstawienia a na drugą.

Pokażemy, że odkształcenie to jest cząsteczkowe, co znaczy, że obie płaszczyzny w elementarnych (nieskończenie małych) trójkątach są do siebie podobne.