# H. GYLDÉN. TEORYA ANALITYCZNA ORBIT PLANETARNYCH.

**Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales.**
Tome I. **Théorie générale des orbites absolues,** Stockholm, 1893, 4° str. V—573.

STREŚCIŁ

M. ERNST.

Prace Gyldéna, dotyczące mechaniki nieba, specyalnie zaś teoryi perturbacyj w układzie planetarnym, znane są po części szerszym kołom matematyków z „Acta mathematica," w których były ogłaszane. Podana w 1-szym tomie niniejszego dzieła teorya składa się z czterech części głównych. Księga I obejmuje cynematykę orbit bezwzględnych; II — związki pomiędzy argumentami, należącemi do dwu planet; III — rozwinięcie funkcyi perturbacyjnej; IV wreszcie — równania różniczkowe ruchu planet.

Metoda Gyldéna ma, według samego autora, dwa główne cele: 1) uczynić rachunek możliwym w tych razach, w których inne metody prowadzą do rozwinięć rozbieżnych; 2) uprościć rachunek liczbowy.

Podstawą teoryi orbit bezwzględnych jest wprowadzenie, zamiast elips keplerowskich, innych krzywych z ruchomemi absydami, mianowicie t. z. krzywych periplegmatycznych.

KSIĘGA I. Rozdział I.

Krzywą periplegmatyczną nazywa autor krzywą, która przebiega przestrzeń pomiędzy dwiema kulami spółśrodkowemi w ten sposób, że wklęsłość jej zawsze zwróconą jest ku pewnej prostej przechodzącej przez środek, tak, iż normalna w danym punkcie krzywej zawsze przecina kulę wewnętrzną. Promień wodzący punktu, poruszającego się po takiej krzywej, dosięga kolejno swej największości i najmniejszości w granicach skończonych. Na zasadzie wymienionych własności krzywej periplegmatycznej, jesteśmy w stanie wyprowadzić jej równanie. Niechaj środek wspólny dwóch kul będzie początkiem spółrzędnych prostokątnych; jeżeli rozważać będziemy tylko krzywe periplegmatyczne, leżące na jednej płaszczyznie, i zastąpimy kule kołami, to warunek, aby wklęsłość zawsze zwróconą była ku prostej, przechodzącej przez środek, wypowiada się przez równanie:



$$y \frac{d^2 y}{dx^2} = - \Pi,$$

gdzie $\Pi$ jest funkcyą, mającą wartość dodatnią; przyczem prostą, przechodzącą przez środek, jest oś odciętych. Warunek ten w układzie spółrzędnych biegunowych wyraża się w postaci:

$$r \frac{d^2 r}{dv^2} - 2 \left(\frac{dr}{dv}\right)^2 - r^2 = \frac{\left\{\frac{dr}{dv} \cos (v-\omega) - r \sin (v-\omega)\right\}^3}{r \sin (v-\omega)} \cdot \Pi,$$

gdzie $v$ jest kąt pomiędzy promieniem wodzącym a osią układu biegunowego, $\omega$ zaś kąt pomiędzy tą ostatnią a osią $x$. Obierając kierunek osi układu biegunowego w ten sposób, iż $\omega = v - 90°$, otrzymamy równanie:

$$(1) \qquad r \frac{d^2 r}{dv^2} - 2 \left(\frac{dr}{dv}\right)^2 - r^2 = - r^2 \Pi.$$

Pisząc to równanie w postaci:

$$(2) \qquad \frac{d^2 \frac{p}{r}}{dv^2} + \frac{p}{r} = \frac{p}{r} \Pi,$$

gdzie $p$ jest ilością stałą, możemy łatwo wyrazić drugą własność krzywych periplegmatycznych, dotyczącą największości i najmniejszości promienia wodzącego. Kładąc $\frac{p}{r} = 1 + \varrho$. $\Pi = \frac{r}{p} (1 + P)$, otrzymujemy:

$$(3) \qquad \frac{d^2 \varrho}{dv^2} + \varrho = P.$$

Ażeby, według warunku, było $\Pi > 0$, musi być $P > -1$ i $\frac{r}{p} > 0$, a zatem $\varrho > -1$; jeżeli więc zcałkujemy równanie (3), to krzywa określona przez to równanie tylko wtedy może być periplegmatyczną, gdy $\varrho > -1$. Prócz tego jednakże, ażeby promień wodzący zawartym był w granicach

skończonych i posiadał w nich maximum i minimum, musi $\frac{d^2\varrho}{dv^2}$, a zatem i $P-\varrho$, przyjmować kolejno wartości dodatnie i ujemne. Po za tym waiunkiem funkcya $P$ może być obrana w sposób bardzo rozmaity.

Wprowadzając w równanie zamiast $v$ zmienną $\tau$, określoną związkiem $dv = \frac{\sqrt{c}}{r^2}\, d\tau$, i całkując według zmiennej $\tau$, mamy:

$$(4) \qquad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{c}{r^2} = -h - 2c\int\frac{\Pi}{r^3}\, dr\,.$$

Równanie to jest niezależnem od drugiej pochodnej; $-\frac{1}{2}h$ jest dowolną stałą całkowania: Promień wodzący dosięga maximum lub minimum, gdy $\frac{dr}{d\tau} = 0$; jest wtedy:

$$(5) \qquad \frac{c}{r^2} = -h - 2c\int\frac{\Pi}{r^3}\, dr\,.$$

Jeżeli mamy do czynienia z krzywą periplegmatyczną o stałym diastemacie t. j. taką, która w maximum i minimum dotyka odpowiednio większego i mniejszego koła, przyczem promienie tych kół są ilościami stałemi, to równanie (5) musi mieć dwa pierwiastki $r_0$ i $r_1$, odpowiadające największej i najmniejszej wartości promienia wodzącego; diastematem jest $r_1-r_0$. Jeżeli jednakże równanie (5) posiada więcej niż dwa pierwiastki, w takim razie krzywa, określona przez równanie (3) jest periplegmatyczną o diastemacie zmiennym.

Równanie (5) możemy napisać w postaci

$$\frac{(r-r_0)(r_1-r)}{(F(r))^2} = 0\,,$$

gdzie $F(r)$ oznacza funkcyę, która nie jest zerem dla $r=r_0$, ani dla $r=r_1$; z równania zatem (4) otrzymujemy.

$$d\tau = \frac{F(r)\, dr}{\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}}, \quad \text{albo} \quad dv = \frac{\sqrt{c}\, F(r)\, dr}{r^2\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}}\,.$$

Z tego ostatniego równania znajdujemy kąt zawarty pomiędzy najmniejszym i największym promieniem wodzącym:

$$V = \int_{r_0}^{r_1}\frac{\sqrt{c}\, F(r)\, dr}{r^2\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}}\,.$$



Kąt ten, jak widzimy, posiada wartość stałą i w ogólności jest, oczywiście, niewspółmierny z obwodem koła, i dlatego absydy krzywej periplegmatycznej przypadają w najrozmaitszych kierunkach; krzywe periplegmatyczne tedy muszą oczywiście przecinać się nieskończoną liczbę razy, jeżeli liczba obiegów naokoło koła wewnętrznego jest nieskończenie wielką.

Funkcya $\Pi$, jak wiemy, czyni zadość jednemu warunkowi, mianowicie $\Pi > 0$; niech będzie $\Pi = \frac{1+\beta_1\varrho}{1+\varrho}$, gdzie $\varrho > -1$, $\beta_1$ zaś jest jakimkolwiek ułamkiem $< 1$. Podstawiając to wyrażenie w równaniu (2), mamy:

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1-\beta_1)\,\varrho = 0, \quad \text{skąd}$$

$$\varrho = \varkappa\cos(\sqrt{1-\beta_1}\,.\,v - \Gamma) = \varkappa\cos f.$$

W równaniu tem $\varkappa$ i $\Gamma$ są stałemi całkowania, a $f = \sqrt{1-\beta_1}\,.\,v - \Gamma$; lub też jeszcze, kładąc $\sqrt{1-\beta_1} = 1-\varsigma$, mamy:

$$\varrho = \varkappa\cos f, \text{ gdzie } f = (1-\varsigma)\, v - \Gamma.$$

Łatwo również otrzymać $r$ jako funkcyę ilości $f$ w postaci:

$$r = \frac{a\,(1-\varkappa^2)}{1+\varkappa\cos f}, \text{ gdzie } a = \frac{p}{1-\varkappa^2},$$

Krzywa, wyrażona przez to równanie, jest periplegmatyczna, przecinająca samą siebie nieskończoną liczbę razy; punkty przecięcia leżą na kołach o promieniu $r_d = \frac{a\,(1-\varkappa_2)}{1+\varkappa\cos d\varsigma\pi}$, gdzie $d$ jest liczbą całkowitą. Koła te autor nazywa izopyknotami. Ponieważ $d$ oznacza jakąkolwiek liczkę całkowitą od $-\infty$ do $+\infty$, więc liczba izopyknot jest nieskończenie wielką. Do dalszych własności krzywych periplegmatycznych, które można wyprowadzić analitycznie, należy ta, iż krzywizna rozmaitych ich zwojów w punktach przecięcia jest jednakową, że promień wodzący, przechodzący przez jakiś punkt przecięcia, dzieli kąt, utworzony przez dwie styczne do krzywej w tym punkcie, na dwie części równe.

Niechaj teraz $\Pi$ będzie funkcyą, zależną jedynie od $v$ i zawierającą tylko wyrazy peryodyczne, postaci:

$$\Pi = a_0 + a_1\cos(\lambda_1 v + b_1) + a_2\cos(\lambda_2 v + b_2) + \ldots$$

Wyrażenia formy $\Sigma a\cos(\lambda v + b)$ i $\Sigma a\sin(\lambda v + b)$ nazywa autor agregatami peryodycznemi i podaje niektóre ich własności, w oddziel-

nych wyrazach nazywa $a_i$ spółczynnikami, $\lambda_i$—szybkościami, $b_i$—argumentami początkowemi.

Podstawiając powyższe wyrażenie funkcyi $\Pi$ w równaniu (2), otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe rzędu 2-go, którego całką jest:

$$\frac{p}{r} = \frac{C_1 e^{\nu v + \nu \int z dv} + C_2 e^{-\nu v - \nu \int z dv}}{\sqrt{1+z}}, \tag{6}$$

gdzie $C_1$, $C_2$ są stałemi całkowania, $z$—agregatem peryodycznym, którego wartość nie dosięga jedności, $\nu$ zaś—spółczynnikiem stałym rzeczywistym lub urojonym, zależnym od stałych $a_1$ i $\lambda_i$.

Krzywa, wyrażona równaniem (6), w żadnym razie nie jest krzywą periplegmatyczną. Jeżeli bowiem $\nu$ jest liczbą rzeczywistą, to $\frac{p}{r}$ może wzrastać do nieskończoności, jeżeli zaś $\nu$ jest liczbą urojoną, to $\frac{p}{r}$ przechodzi nieskończoną liczbę razy przez zero Wpierwszym razie mogłoby być $\frac{r}{p} = 0$, co nie zgadza się z warunkami, przy których krzywa periplegmatyczna jest możliwą.

Jeżeli jednakże mamy $\Pi = \frac{r}{p} - \left(1 - \frac{r}{p}\right) A$, gdzie $A$ jest agregatem peryodycznym z wyrazem stałym, to wprowadzając $\frac{p}{r} = 1 + \varrho$ i wstawiając w równanie (2) wyrażenie $\Pi$, otrzymamy:

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1 + A)\varrho = 0,$$

skąd

$$\varrho = \frac{C_1 e^{\nu v + \nu \int z dv} + C_2 e^{-\nu v - \nu \int z dv}}{\sqrt{1+z}},$$

Ponieważ $\varrho$ musi mieć wartość skończoną dla krzywej periplegmatycznej, więc, wyłączając wartości rzeczywiste spółczynnika $\nu$, i uwzględniając tylko urojone, otrzymamy dla $\varrho$ rezultat w formie agregatu peryodycznego; oznacza to, iż $\varrho$, a zatem $r$ oscyluje pomiędzy granicami zmiennemi. Pisząc zatem $iv$ zamiast $\nu$ i kładąc

$$\frac{C_1}{\sqrt{1+z}} = \frac{1}{2}\eta e^{i\Gamma}; \quad \frac{C_2}{\sqrt{1+z}} = \frac{1}{2}\eta e^{i\Gamma},$$

otrzymamy dla promienia wodzącego:



$$r = \frac{p}{1 + \eta \cos(\nu v + \nu \int z dv - \Gamma)}. \tag{7}$$

Widzimy stąd, iż w rozważanym przypadku $r$ zawsze jest ilością skończoną, jeżeli $|\eta| < 1$; a warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest, ażeby zawsze $4 C_1 C_2 < 1 + z$. W tym razie krzywa, określona przez równanie (7), jest periplegmatyczną o diastemacie zmiennym.

Dwa rozważane rodzaje krzywych periplegmatycznych, mianowicie o diastemacie stałym lub zmiennym, mają tę wspólną własność, iż diastemat staje się zerem, jeżeli stałe całkowania są zerem. Autor nazywa te dwa rodzaje krzywych orbitami pośredniemi, ponieważ dają one przybliżone wyobrażenie o ruchu ciał niebieskich; mianowicie pierwszy rodzaj wyobraża drogi komet w pobliżu planet, drugi zaś ruchy księżyca i ciał niebieskich, znajdujących się w warunkach podobnych jak księżyc.

Ogólniejszym typem krzywych periplegmatycznych o diastemacie zmiennym jest ten, gdy diastemat nie równa się zeru, a stałe całkowania są zerami. Taką krzywą otrzymamy naprzykład, gdy:

$$\Pi = \frac{r}{p} + (\beta_1 + \beta_3 H)\left(1 - \frac{r}{p}\right) - \frac{r}{p} A,$$

gdzie $H$ jest funkcyą pewnych spółczynników stałych, $A$ zaś agregatem peryodycznym postaci:

$$\gamma_1 \cos[(1-\sigma_1) v - B_1] + \gamma_2 \cos[(1-\sigma_2) v - B_2] + \ldots;$$

$\gamma_i$ i $\sigma_i$ są małemi ilościami dodatniemi.

Podstawiając wyrażenie $\Pi$ w równaniu (3), mamy:

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H)\varrho = -A, \tag{8}$$

oznaczając $\sqrt{1 - \beta_1 - \beta_3 H}$ przez $1 - \varsigma$, otrzymujemy:

$$\varrho = \varkappa \cos[(1-\varsigma) v - \Gamma] + \varkappa_1 \cos[(1-\sigma_1) v - B_1] + \varkappa_2 \cos[(1-\sigma_2) v - B_2] + \ldots \tag{9}$$

gdzie $\varkappa$ i $\Gamma$ są stałemi całkowania, a spółczynniki $\varkappa_i$ mają postać:

$$\varkappa_i = \frac{\gamma_i}{(1-\sigma_i)^2 - (1 - \beta_1 - \beta_3 H)}.$$

Wyraz $\beta_3 H$ występuje zawsze w równaniach różniczkowych, określa-

jących ruch planet, funkcya zaś $H$, odpowiednio wybrana, czyni rozwinięcie całki $\varrho$ zbieżnem; w danym razie dowodzi autor zbieżności szeregu (9), jeżeli

$$H = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots$$

Funkcyę $H$ nazwa z powyższych względów horystyczną. Określając odpowiednio funkcye $\eta$ i $\pi$, można równanie (9) napisać w postaci

$$\varrho = \eta \cos\left[(1-\varsigma)\, v - \pi\right],$$

skąd

$$r = \frac{p}{1 + \eta \cos\left[(1-\varsigma)\, v - \pi\right]}.$$

Znalazłszy maximum i minimum dla $r$, otrzymujemy dla diastematu w danym momencie, wyrażenie:

$$r_1 - r_0 = \frac{2p\eta}{1-\eta^2}.$$

Funkcya $\eta$ nazywa się diastematyczną. W teoryi planet jest to funkcya, zawierająca, prócz wyrazu stałego, tylko wyrazy peryodyczne, które przyjmują wartości stałe, kiedy szybkości argumentu znikają; w tym ostatnim razie $\eta$ ma wartość stałą, mianowicie oznacza mimośród elipsy. Wszystkie wyrazy funkcyi diastematycznej, odnoszące się do mimośrodu, nazywa autor wyrazami elementarnemi. Tę samą nazwę nadaje też wyrazom, których spółczynniki nie stają się zerem wraz z siłami perturbacyjnemi. Wyrazy, posiadające powyższe własności, których argument ma postać $\sigma v + A$, nazywają się elementarnemi typu ($A$), wyrazy zaś z argumentem $(1-\sigma)\, v + B$ są elementarnemi typu ($B$). Ponieważ w teoryi planet $\sigma$ jest ilością pierwszego rzędu względem sił perturbacyjnych, więc łatwo dostrzedz, że peryod wyrazów typu ($A$) jest zawsze bardzo długi, wyrazów zaś typu ($B$) nie o wiele dłuższy, aniżeli czas obiegu.

Wyrazy, mające ten sam argument, co wyrazy elementarne, lecz których spółczynniki zawierają jako czynnik potęgę lub iloczyn sił perturbacyjnych, nazywa autor podelementarnemi rzędu $1, 2 \ldots n$, zależnie od rzędu owego czynnika; wyrazy, które stają się nieskończenie wielkiemi, gdy siły perturbacyjne są zerem, nazywa nadelementarnemi.

Bezwzględne orbity planet są krzywemi periplegmatycznemi, których równanie ma postać:

$$r = \frac{a\,(1-\eta^2)}{1 + \eta \cos\left[(1-\varsigma)\, v - \pi\right]}. \tag{10}$$

Autor dowodzi, że równanie to tylko wtedy jest równaniem krzywej periplegmatycznej, jeżeli $\eta$ jest funkcyą, złożoną z samych wyrazów elementarnych typu ($A$); $\varrho$ zaś musi być wyrażeniem typu ($B$), jeżeli, wychodząc z równania (10), dla obrachowania $\varrho$ otrzymamy równanie formy:



$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv}\,\frac{d\varrho}{dv} + \left\{1 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{1}{1-\eta^2}\,\frac{d^2\eta^2}{dv^2}\right\}\varrho = X;$$

$X$ określa się równaniem:

$$\Pi = \frac{1}{1+\varrho}\left\{1 + X + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv}\,\frac{d\varrho}{dv} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2\varrho + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{1}{1-\eta^2}\,\frac{d^2\eta^2}{dv^2}\right\}.$$

Wartość liczebna ilości $\varrho$ zawsze pozostaje $< 1$.

**Rozdział II.** Odnieśmy ruch punktu po krzywej periplegmatycznej do dwóch układów spółrzędnych o spólnym początku W pierwszym układzie, mającym położenie niezmienne w przestrzeni, niechaj spółrzędnemi punktu będą $x, y, z$; w drugim zaś, którego osie $\xi$ i $\eta$ zawsze leżą na płaszczyznie, określonej przez dwa po sobie następujące promienie wodzące, a zatem zmiennym, spółrzędnemi punktu niech bydą $\xi, \eta, \zeta$. Niech dalej $i$ będzie pochyłością zmienną płaszczyzny $x\,y$ względem płaszczyzny $\xi\eta$, $\theta$ — kątem pomiędzy linią przecięcia płaszczyzn $xy$ i $\xi\eta$, a osią $x$ w płaszczyznie $xy$, $\sigma$ zaś kątem pomiędzy linią przecięcia a osią $\xi$ w płaszczyznie $\xi\eta$. Wreszcie niechaj danym będzie jeszcze trzeci układ, związany niezmiennie z płaszczyzną chwilową, tak, iż spółrzędne punktów stałych tej płaszczyzny względem tych osi nie ulegają żadnej zmianie; spółrzędnemi punktu ruchomego w tym układzie niech będą $x, y, z$, kątowi $\sigma$ w tym układzie niech odpowiada kąt $\bar{\sigma}$. Jeżeli oznaczymy szybkość obrotu płaszczyzny chwilowej przez $\lambda, \mu, \nu$, to warunek, aby obrót odbywał się naokoło promienia wodzącego, wypowie się przez równania:

$$z_1 = 0;\; 0 = -\frac{d\bar{\sigma}}{dt} + \cos i\,\frac{d\theta}{dt};\; 0 = \lambda y_1 - \mu x_1. \tag{11}$$

Jeżeli kąt pomiędzy promieniem wodzącym a osią $x$, oznaczymy przez $w$, a promień wodzący przez $r$, to będzie $x_1 = r \cos w$; $x_1 = r \sin w$. Podstawiając te wartości w trzeciem z równań (11) i zważywszy, iż

$$\lambda = \cos \bar{\sigma} \frac{di}{dt} - \sin \bar{\sigma} \sin i \frac{d\theta}{dt},$$

$$\mu = \sin \bar{\sigma} \frac{di}{dt} + \cos \bar{\sigma} \sin i \frac{d\theta}{dt},$$

$$\nu = -\frac{d\bar{\sigma}}{dt} + \cos i \frac{d\theta}{dt}.$$

otrzymamy, jako równanie trzecie:

$$\sin (w - \bar{\sigma}) \frac{di}{dt} = \cos (w - \bar{\sigma}) \sin i \frac{d\theta}{dt}. \tag{12}$$

Niech będzie $l$ kątem między osią $x$ a rzutem promienia wodzącego na płaszczyznę $xy$, $b$ zaś szerokością punktu ruchomego względem tej płaszczyzny. Wyrażając $x, y, z$ przez $r, b$ i $l$ i wprowadzając do tych wyrażeń kąty $w, \theta, \sigma, i$, za pomocą odpowiednich przekształceń, otrzymamy między innemi:

$$\mathfrak{z} = \sin b = \sin i \sin (w - \bar{\sigma}); \tag{13}$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \sin i \cos (w - \bar{\sigma}) \frac{dw}{dt} + \cos i \sin (w - \bar{\sigma}) \frac{di}{dt}$$

$$- \sin i \cos (w - \bar{\sigma}) \frac{d\bar{\sigma}}{dt}.$$

Podstawiając w ostatniem równaniu zamiast $\sin (w - \bar{\sigma}) \frac{di}{dt}$ prawą stronę równania (12) i uwzględniając drugie z równań (12), znajdziemy:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \sin i \cos (w - \bar{\sigma}) \frac{dw}{dt}, \text{ albo } \frac{d\mathfrak{z}}{dw} = \sin i \cos (w - \bar{\sigma}); \tag{14}$$

z równań zaś (13) i (14) wypływa:

$$\sin i = \sqrt{\mathfrak{z}^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dw}\right)^2}; \quad \cos i = \sqrt{1 - \mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dw}\right)^2}.$$

Położenie osi $\xi$ w płaszczyznie $\xi\eta$ jest w ogólności zmiennem; niechaj ono się zmienia według pewnej funkcyi skończonej ciągłej czasu $N$. Wziąwszy

$$N = -\frac{d\sigma}{dt} + \cos i \frac{d\theta}{dt}, \tag{15}$$



można otrzymać równanie

$$\cos^2 b \frac{dl}{dt} = \gamma_2 \frac{dv}{dt} + \gamma_2 N,$$

gdzie $v$ oznacza kąt pomiędzy promieniem wodzącym a osią $\xi$, zaś $\gamma_2 = \cos i$. Z drugiej strony jest:

$$\cos^2 b \frac{dl}{dt} = \cos i \frac{dw}{dt},$$

skąd wypływa

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dt} + N.$$

Oznaczając $N$ przez $\frac{dg}{dt}$, znajdujemy, przyjmując stałą całkowania równą zeru:

$$w = v + g.$$

Biorąc na uwagę wartość $\frac{dg}{dt} = N$ z równania (15) i uwzględniając drugie z równań (11), mamy:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{d(\bar{\sigma} - \sigma)}{dt}, \quad \bar{\sigma} = \sigma + g,$$

$$w - \bar{\sigma} = v - \sigma.$$

Z powyższego wypływa, iż $g$ jest to kąt w płaszczyznie chwilowej pomiędzy osią stałą a ruchomą.

Określając kierunek osi $\xi$ przez warunek $\sigma = \theta$, otrzymamy:

$$\frac{dg}{dt} = -(1 - \cos i) \frac{d\theta}{dt},$$

co oznacza, iż $g$ jest wielkością drugiego rzędu względem pochyłości. W teoryi perturbacyj planetarnych $\frac{dg}{dt}$ jest ilością zawsze bardzo małą, gdyż płaszczyznę stałą możemy obrać tak, aby dostawa kąta $i$ niezbyt różniła się od jedności, a drugi czynnik po prawej stronie, wyrażający szybkość ruchu węzła, zawsze jest ilością bardzo małą. Dalsze badania wykazują, iż funkcya $g$ ma postać

$$g = g_0\, t + G,$$

gdzie $g_0$ jest stałą 1-go rzędu względem sił perturbacyjnych i drugiego względem $i$, $G$ zaś jest agregatem peryodycznym. Prócz tego w przypadku ogólnym jest $\bar{\sigma} = \sigma + g_0\, t$, zatem

$$\sigma = \theta + G,$$

t. j. w przypadku ogólnym (gdzie $\sigma$ nie równa się $\theta$) średnie wzrastanie kąta $\sigma$ jest takież, jak i kąta $\theta$.

Ponieważ $w - \bar{\sigma} = v - \theta - G$, mamy:

$$\mathfrak{z} = \sin i \sin (v - \theta - G),$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin i \cos (v - \theta - G) \left(1 + g_0 \frac{dt}{dv}\right).$$

W ten sposób funkcya $\mathfrak{z}$ (jak również oczywiście $l$ i $r$) jest zależna od agregatu peryodycznego. Autor stawia więc sobie w dalszym ciągu zadanie znalezienia podobnych wyrażeń dla funkcyj trygonometrycznych kątów $\theta$ i $i$. Przypuśćmy, iż w szukanych wyrażeniach występują wyrazy elementarne i że dla $\mathfrak{z}$ mamy rozwinięcie formy:

$$\mathfrak{z} = \iota \sin [(1 + \tau)\, v - \theta] + \iota_1 \sin [(1 + \tau_1)\, v - S_1] + \ldots$$

gdzie $\iota_i$, $\tau_i$, $S_i$ są stałemi, przyczem pierwszych kilka $\iota$ są rzędu pochyłości $i$—$\tau_i$ rzędu sił perturbacyjnych, $S$ zaś—pewnemi kątami; $\iota$, $\theta$ niech będą uważane za stałe całkowania pewnego równania drugiego rzędu, określającego funkcyę $\mathfrak{z}$. Obierając odpowiednio funkcye $I$ i $\Omega$, można napisać takie:

$$\mathfrak{z} = I \sin [(1 + \tau)\, v - \Omega],$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = I \cos [(1 + \tau)\, v - \Omega] + (\zeta),$$

gdzie $(\zeta)$ jest pewną funkcyą natury określonej. Autor znajduje szukane wyrażenia w postaci:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \sin i \sin \theta &= - I \sin (\tau v - \Omega + G) + ((\zeta)) \,.\, \sin (v - G), \\ \sin i \cos \theta &= I \cos (\tau v - \Omega + G) + ((\zeta)) \,.\, \cos (v - G). \end{aligned}$$

Z tych wzorów wypływają wzory dla wszystkich funkcyj trygonometrycznych kątów $\theta$ i $i$.

Wysokość po nad płaszczyzną stałą, do której sięga krzywa periplegmatyczna, nazywa autor a n a s t e m a t e m. Wartość tego anastematu jest



dana przez iloczyn $rI$, jeżeli $r$ i $I$ oznaczają te wartości funkcyi $r$ oraz $I$, jakie odpowiadają tym funkcyom, gdy ich argument

$$(1 + \tau)\, v - \Omega = (2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

gdzie $n$ jest jakąkolwiek liczbą całkowitą. Z tego powodu nażywa autor $I$ f u n k c y ą a n a s t e m a t y c z n ą, argument zaś powyższy — a r g u m e n t e m a n a s t e m a t y c z n y m. Prócz tego argument ten, jak i drugi $(1-\varsigma)\, v - \pi$, nazywa autor a r g u m e n t a m i a s t r o n o m i c z n e m i, ponieważ od tych argumentów, nader często używanych w astronomii, zależy promień wodzący oraz spółrzędne prostokątne punktu, poruszającego się na krzywej periplegmatycznej. Ogólniej, nazwa argumentów astronomicznych przysługuje tym wszystkim argumentom, których różnica od argumentów, wyżej wymienionych, wyraża się przez agregat peryodyczny; dwa takie argumenty nazywają się i z o c y n e t y c z n e m i. Wreszcie, gdy agregat peryodyczny, stanowiący różnicę pomiędzy dwoma argumentami izocynetycznemi, zależy również tylko od tych argumentów, argumenty te nazywają się h o m o r y t m i c z n e m i. Spółczynniki $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, o których była mowa wyżej, są s p ó ł c z y n n i k a m i d i a s t e m a t y c z n e m i, spółczynniki zaś $\iota_1, \iota_2 \ldots$ — a n a s t e m a t y c z n e m i. Jeżeli te spółczynniki wszystkie równają się zeru, to funkcya diastematyczna, oraz anastematyczna mają wartości stałe, mianowicie $\eta = \varkappa$, $I = \iota$.

Te dwie wartości autor nazywa odpowiednio m o d u ł a m i d i a s t e m a t y c z n y m i a n a s t e m a t y c z n y m.

Rozdział III.

Według 2-go prawa K e p l e r a, mamy

$$dt = \frac{r^2}{\sqrt{c}}\, dv.$$

W teoryi orbit bezwzględnych taki związek nie zachodzi; tu bowiem zamiast $t$ występuje funkcya $\zeta$, przyczem $\frac{d\zeta}{dt}$ nie bardzo różni się od jedności. Zważywszy to i podstawiając zamiast $r$ wyrażenie jego według równania (10), otrzymamy:

$$(16) \qquad d\zeta = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\nu\mu} \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{\{1 - \eta \cos [(1-\varsigma)\, v - \pi)\}^2}\, dv.$$

W równaniu tem zamiast $c$ podstawiono przybliżenie równą mu wartość $\mu a\,(1-\eta^2)$; $\mu$ jest stałą, której wartość w układzie słonecznym dla wszystkich planet jest prawie jednakową. Aby zcałkować wyrażenie (16), ozna-

czamy $\sqrt{\mu}\, a^{-\frac{3}{2}}$ przez $n$, argument diastematyczny $(1-\varsigma)\, v - \pi$ przez $F$ i wprowadźmy zamiast $F$ argument $E$, homorytmiczny z $F$ według związku:

$$\cos F = \frac{\cos E - \eta}{1 - \eta \cos E}, \qquad \sin F = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\, \sin E}{1 - \eta \cos E},$$

tak, iż odwrotnie jest

$$(17) \qquad \cos E = \frac{\cos F + \eta}{1 + \eta \cos F}, \qquad \sin E = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\, \sin F}{1 + \eta \cos F},$$

oraz

$$\frac{1}{1 + \eta \cos F} = \frac{1 - \eta \cos E}{1 - \eta^2}.$$

Ostatnie wyrażenie, podstawione w równaniu (10), daje

$$(18) \qquad r = a\,(1 - \eta \cos E).$$

Równania (17) i (18) są zupełnie analogiczne z zachodzącemi w teoryi orbit eliptycznych: $F$ odpowiada anomalii prawdziwej, $E$ anomalii ekscentrycznej, $\eta$ zaś mimośrodowi, tylko że w teoryi orbit absolutnych $\eta$ jest funkcyą elementarną typu (A), jak powiedziano wyżej.

Mnożąc równanie (16) przez $(1-\varsigma)$ i oznaczając $(1-\varsigma)\, v - \Gamma$, przez $f$, kładąc zatem $F = f\,(\pi - \Gamma)$, wyrażamy $df$, jako funkcyę ilości $E$ w postaci:

$$df = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1 - \eta \cos E}\, dE + \frac{\sin E}{\sqrt{1-\eta^2}\,(1 - \eta \cos E)}\, d\eta + d\,(\pi - \Gamma).$$

Mamy zatem po podstawieniu, dla $\zeta$ równanie:

$$(1-\varsigma)\, n d\zeta = (1 - \eta \cos E)\, dE + \frac{(1 - \eta \cos E) \sin E}{1 - \eta^2}\, d\eta + \frac{(1 - \eta \cos E)^2}{\sqrt{1-\eta^2}}\, d\,(\pi - \Gamma).$$

Przypuśćmy, że po scałkowaniu tego równania, otrzymaliśmy wyrażenie

$$(1-\varsigma)\, n\zeta + \Lambda - \pi = E - \eta \sin E - (1-\varsigma)\, X,$$



gdzie $\Lambda$ jest dowolną stałą całkowania, $X$ zaś funkcyą dotąd nieznaną, od której określenia zależy określenie funkcyi $\zeta$. Oznaczmy

$$(19) \qquad G = (1-\varsigma)\, n\zeta + \Lambda - \pi + (1-\varsigma)\, X,$$

zatem

$$G = E - \eta \sin E.$$

Z tego ostatniego równania widzimy, iż pomiędzy $G$ i $E$ w teoryi orbit bezwzględnych zachodzi taki sam związek, jak pomiędzy anomalią średnią a ekscentryczną w teoryi keplerowskiej.

Funkcyę $G$ można rozwinąć na szereg, według wstaw wielokrotnych kąta $F$, mianowicie:

$$G = F + \left[\frac{1}{1} A_1 - \frac{1}{2}\, \eta\, (A_0 - A_2)\right] \sin F + \left[\frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2}\, \eta\, (A_1 - A_3)\right] \sin 2F + \ldots$$

gdzie

$$A_s = (-1)^s \cdot 2 \cdot \left(\frac{\eta}{1 + \sqrt{1-\eta^2}}\right)^s.$$

Wszystkie ilości $A$ można rozwinąć na szeregi według potęg funkcyi diastematycznej $\eta$. Przy pomocy dosyć złożonych rachunków otrzymuje się szereg na $(1-\varsigma)\, X$, i okazuje się, iż $X$ jest zawsze ilością małą pierwszego rzędu względem sił perturbacyjnych, oraz funkcyą liniową spółczynników diastematycznych.

W dalszym ciągu autor podaje rozwinięcie potęg całkowitych dodatnich agregatu $(G - F)$, rozwinięcia $\sin \lambda G$, $\cos \lambda G$, $\sin \lambda (F - G)$, $\cos \lambda (F - G)$, gdzie $\lambda$ jest jakąkolwiek liczbą rzeczywistą. Spółczynniki wyrazów tych rozwinięć są funkcyami funkcyi diastematycznej i mogą być rozwinięte na szeregi według potęg tej ostatniej. Autor podaje te rozwinięcia z wyrachowanemi liczebnie spółczynnikami aż do wyrazów, nie mogących wpływać na dokładność rezultatów. Wszystkie te rozwinięcia mają na celu określić zależność między argumentem diastematycznym a czasem zredukowanym, jak autor nazywa funkcyę $\zeta$, jak również pomiędzy $\zeta$ a długością, rachowaną w płaszczyznie ruchomej; z tych zaś zależności wypływają przez zastosowanie odpowiednich związków wyrażenia innych funkcyj, określających położenie punktu ruchomego w orbicie periplegmatycznej.

**Rozdział IV.** We wszystkich wyrażeniach, określających zależność pomiędzy położeniem punktu, poruszającego się po krzywej

periplegmatycznej, występuje pewna ilość stałych, niezależnych od siebie wielkości, mających znaczenie elementów krzywej. Pomiędzy temi elementami autor rozróżnia elementy pierwotne, t. j. występujące jako stałe całkowania przy rozwiązaniu zadania o ruchu punktu o masie równej zeru, przyciąganego według prawa Newtona przez inną masę ruchomą, oraz wtórne, które algebraicznie wypływają z elementów pierwotnych. Elementami pierwotnemi są:

$\Lambda$ — długość bezwzględna punktu ruchomego;
$\Gamma$ — długość bezwzględna punktu przysłonecznego;
$\Theta$ — długość bezwzględna węzła wstępującego;
$a$ — protometr;
$\varkappa$ — moduł diastematyczny;
$\iota$ — moduł anastematyczny.

Przez długość bezwzględną autor rozumie długość dla epoki $t = 0$, przez protometr zaś — element, odpowiadający w teoryi orbit eliptycznych połowie osi wielkiej.

Do elementów wtórnych zalicza autor spółczynniki diastematyczne i anastematyczne, oraz odpowiadające tym spółczynnikom argumenty początkowe; co się tyczy szybkości, te, jako niezależne od wyżej wyliczonych elementów pierwotnych, nie zaliczają się do elementów.

Jeżeli zamiast $a$, jako element pierwotny uważać będziemy ruch średni, dany przez równanie: $n = \sqrt{\mu}\, a^{-\frac{3}{2}}$, to zamiast $\varkappa$ i $\iota$ wystąpią jako elementy: $\varsigma$ (sigma) — stosunek średniego ruchu punktu przysłonecznego do średniego ruchu punktu ruchomego, oraz — $\tau$, t. j. stosunek średniego ruchu węzła do średniego ruchu punktu. Dwa w ten sposób otrzymane układy elementów pierwotnych, wszakże nie zawsze jednakowo dobrze wyobrażają ruch punktu, a to dlatego, iż szybkość argumentu, której jako spółczynnik odpowiada jeden z modułów, pomnożona przez średni ruch punktu ruchomego, tylko wtedy równa się średniej szybkości punktu przysłonecznego lub węzła, kiedy ów moduł jest większym od sumy wszystkich innych spółczynników diastematycznych lub anastematycznych. Wogóle należy tu rozróżniać trzy przypadki:

1. moduł diastematyczny (lub anastematyczny) jest większy od sumy spółczynników diastematycznych (lub anastematycznych), przytem wartość tych spółczynników ma być dodatnią;
2. jeden z spółczynników jest większy od sumy pozostałych spółczynników w połączeniu z modułem;
3. ani moduł, ani żaden ze spółczynników nie jest większy od sumy reszty spółczynników.

W pierwszym przypadku szybkość argumentów jednego z wyrazów, zależnych od modułów, jest jednocześnie ruchem średnim punktu przysłonecznego lub węzła, gdy szybkość średnią punktu przyjmiemy za jedność. W tym przypadku wzory bez żadnych zmian odpowiadają rzeczywistości. W drugim przypadku wyprowadzone wzory zachowują w zupełności swą postać, tylko należy w nich $\varkappa$, $\varsigma$ i $\Gamma$ zastąpić przez $\varkappa_n$, $\sigma_n$ i $B_n$, jeżeli chodzi o spółczynniki diastematyczne, albo $\iota$, $\tau$ i $\Theta$ przez $\iota_m$, $\tau_m$, $S_m$, jeżeli chodzi o spółczynniki anastematyczne; skaźnik $n$ oznacza te spółczynniki i odnoszące się do nich wielkości, które są większe od sumy pozostałych spółczynników. W tym razie kąt $\sigma_n nt$ wyraża średni ruch punktu przysłonecznego, zaś $\tau_n nt$ — średni ruch węzła. Co się tyczy przypadku trzeciego, to jak pokazuje autor, i w tym razie zachodzi średni ruch punktu przysłonecznego i węzła; wartość tego ruchu jest $\sigma_n$, gdzie $\sigma$ jest ilością rzeczywistą skończoną; jedynie gdy $\sigma = 0$, ruch punktów powyższych zasadza się na wahaniach w określonych skończonych granicach.

Z pownych rozważań wynika, iż średnie wartości wyrażeń $\eta \cos(\pi - \Gamma)$ i $\eta \sin(\pi - \Gamma)$ są odpowiednio $\varkappa$ i 0 (w pierwszym przypadku) oraz $\varkappa_n$ i 0 w drugim. Średnia wartość $\eta^2$, którą oznaczamy przez $\eta_0^2$ wyraża się przez

$$\eta_0^2 = \varkappa^2 + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots \qquad \text{(1-szy przypadek)}$$

przytem $\Sigma \varkappa_i^2 < \varkappa^2$, tak iż w przybliżeniu $\eta_0^2 = \varkappa^2$. Wprowadzając w równaniu (10) zamiast $\eta^2$, $\eta \cos(\pi - \Gamma)$ i $\eta \sin(\pi - \Gamma)$ ich wartości średnie, otrzymamy w pierwszym przypadku:

$$r = \frac{a(1-\varkappa^2)}{1 + \varkappa \cos[(1-\varsigma)v - \Gamma]},$$

i odpowiednio w drugim:

$$r = \frac{a(1-\varkappa_n)^2}{1 + \varkappa \cos[(1-\varsigma)v - B_n]}.$$

Krzywe, wyrażone przez powyższe równania, w przybliżeniu odpowiadają kształtom orbit planetarnych; za pomocą kolejnych przybliżeń można przy pomocy tych równań określić drogę planety z żądanym stopniem dokładności. Krzywe te, jako używane już niegdyś przez Clairauta, autor nazywa krzywemi Clairauta. W trzecim przypadku, jak pokazuje autor, krzywa Clairauta jest kołem.

KSIĘGA II.
Rozdział I.

Niechaj będzie dla jakiejś planety

$$t = \zeta + T;$$

Funkcyę $T$, określoną w sposób powyższy, autor nazywa redukcyą czasu. Niechaj dla drugiej planety będzie:

$$t = \zeta' + T',$$

zatem

$$\zeta = \zeta' + T' - T,$$

albo

$$n\zeta = \frac{1}{\mu}\,(n'\zeta' + n'T') - nT. \qquad \left(\mu = \frac{n'}{n}\right)$$

Podstawiając $n\zeta$ w równaniu (19), otrzymujemy łatwo

$$G + \pi - \Lambda = \frac{1-\varsigma}{\mu(1-\varsigma')}\,(G' + \pi' - \Lambda') + (1-\varsigma)\,[X - nT$$

$$- \frac{1}{\mu}\,(X' - n'T')],$$

lub krócej

$$G + \pi - \Lambda = \varphi'(G' + \pi' - \Lambda') + U'$$

i analogicznie dla 2-ej planety:

$$G' + \pi' - \Lambda' = \varphi(G + \pi - \Lambda) + U.$$

Znaczenie wielkości $\varphi$, $\varphi'$, $U$, $U'$ jest widocznem Oznaczając jeszcze

$$L = \varphi(\Gamma - \Lambda) - (\Gamma'' - \Lambda'), \qquad L' = \varphi'(\Gamma'' - \Lambda') - (\Gamma - \Lambda),$$

$$V = \varphi(v - \omega) + L, \qquad V' = \varphi'(v' - \omega') + L',$$

mamy zależności następujące:

$$\varphi\varphi' = 1;\ L = -\varphi L';\ L' = -\varphi' L;\ U = -\varphi U';\ U' = \varphi' U.$$

Przez uwzględnienie dawniej wyprowadzonych związków, dochodzimy do równań:

$$G + \pi - \Gamma = V' + \varphi'(G' - F') + U' = \varphi'(v' - \omega' + G' - F') + L' + U'$$

$$G' + \pi' - \Gamma'' = V + \varphi(G - F) + U = \varphi(v - \omega + G - F) + L + U.$$

Wprowadzając te wyrażenia do otrzymanego przez autora rozwinięcia

$$(20) \qquad e^{im(v-\omega)} = X_0^{(m)}\eta\, e^{im(G+\pi-\Gamma)} + X_1^{(m)}\eta\, e^{i(m+1)(G+\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma)} + \ldots$$

w którem $X^{(m)}(\eta)$ są funkcyami funkcyi diastematycznej, znajdujemy zależność pomiędzy funkcyą diastematyczną a kątem $v-\omega$ lub $v'-\omega'$, jak również pomiędzy kątami $v-\omega$; $v'-\omega'$. Jeżeli dalej oznaczymy:



$$H = F' - G' - \varphi(F - G),$$

$$H' = F - G - \varphi'(F' - G'),$$

to okazuje się, iż

$$V = v' - \omega' - H - U; \quad V' = v - \omega - H' - U'.$$

Ponieważ $H$, $H'$ wyrażają się przy pomocy agregatów peryodycznych, więc wypływa stąd, iż argument $V$ jest izocynetycznym z argumentem $v - \omega$ 2-ej planety, argument zaś $V'$ jest izocynetycznym z tymże $(v-\omega)$ argumentem 1-ej planety. Uwzględniając powyższe rezultaty, autor daje rozwinięcie funkcyj $e^{im(v-\omega)}$ oraz $e^{im(v'-\omega')}$ na szeregi, postępujące w 1-ym razie według wstaw i dostaw wielokrotności kątów $(v' - \omega'')$ i $V'$, w drugim zaś razie według wstaw i dostaw wielokrotności kątów $z - \omega$ i $V$; spółczynniki w tych rozwinięciach są funkcyami funkcyj $\eta$, $\eta'$, $\pi - \Gamma$, $\pi' - \Gamma'$. Następnie pokazuje, jak szeregi, postępujące według wstaw i dostaw wielokrotności argumentów $v'$, $\omega'$ i $V'$, zastąpić szeregami, postępującemi według wstaw i dostaw wielokrotności argumentów $v$, $\omega$ i $V$. Wreszcie daje sposób rozwinięcia funkcyi $e^{im(V+U)}$ według argumentów $G + \pi - \Gamma$ i $G' + \pi' - \Gamma'$. Analogiczne rozwinięcia zachodzą dla $e^{im(V'+U')}$; z tych zaś dwóch rozwinięć w połączeniu z (20), wypływają szeregi na $e^{im(V+U)+n(v-\omega)}$, $e^{im(V'+U')+n(v'-\omega')}$.

Rozdział II. Niech $r$, $x$, $y$, $z$ oznaczają odpowiednio promień wodzący i spółrzędne prostokątne układu nieruchomego dla jednej planety; $r'$, $x'$, $y'$, $z'$ odpowiednie wielkości, odnoszące się do drugiej planety. W tym razie dla kąta $H$ pomiędzy $r$ i $r'$ mamy

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'};$$

wyrażając $x$, $x'$ itd. przez szerokość, długość i $r$, mamy:

$$\cos H = \cos b \cos b' \cos l \cos l' + \cos b \cos b' \sin l \sin l' + \text{ŝŷ}.$$

Podstawiając otrzymane tu poprzednio wyrażenia dla $\sin b$, $\cos b$ itd., jako funkcyj ilości $I$, $G$, $(\zeta)$, $\Omega$, $\Theta$ itd., otrzymamy

$$\cos H = \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + h,$$

gdzie $\mathrm{v}' = \mathrm{v} - G$, $h$ zaś jest funkcyą postaci

$$h = h_0 + h_1 \cdot (\zeta) + h'_1 \cdot (\zeta') + h_2 (\zeta) (\zeta') .$$

$h_0, h_1, h_2$ są funkcyami ilości $I, I', \nu, \nu', G', G'$ itd. Autor podaje rozwinięcia tych funkcyj i obliczywszy $h_0, h_0^2, h_0^3$, przystępuje do rozwinięcia funkcyi $\cos nH$, gdzie $n$ jest jakąkolwiek liczbą całkowitą. Rozwinięcie to podaje od $n = 1$ do $n = 9$ z początku, przyjąwszy, iż $\mathfrak{z}, \frac{d\mathfrak{z}}{dv}, \mathfrak{z}', \frac{d\mathfrak{z}'}{dv}$ wyrażają się jako agregaty wyrazów elementarnych i nadelementarnych, następnie zaś uwzględnia i przypadek zwykły w teoryi planet, mianowicie, iż oprócz wyrazów peryodycznych występują także i nieperyodyczne.

**Rozdział III.** Rozwinięcia funkcyi $\cos nH$ są wszystkie zbieżne, jak wogóle zbieżnemi są szeregi, postępujące według potęg funkcyi anastematycznej. Co się tyczy szeregów według potęg funkcyi diastematycznej, to są one nie zawsze zbieżne; naprzykład rozwinięcie funkcyi $G-F$ przestaje być zbieżnem, jeżeli $\eta > 0,6627\ldots$; jednakże wartość funkcyi diastematycznej dla 9 głównych planet układu słonecznego o wiele jest mniejszą od powyższej liczby i dlatego zbieżność szeregów rozważanej postaci w tych razach zawsze zachodzi.

W dalszym ciągu podaje autor rozwinięcia na szereg iloczynu postaci:

$$F^{(n)}_{s,s'} = \varrho^s \varrho'^{s'} \cos nH ,$$

gdzie $\varrho = \eta \cos [(1-\zeta) v - \pi]$, $\varrho'$—odpowiednia funkcya, dotycząca drugiej planety, $s$ i $s'$ liczby całkowite lub 0. Rozwinięcia te, jak również rozwinięcia funkcyi $\mathfrak{z} \cos nH$, $\mathfrak{z}' \cos nH$, $\varrho e^{i[n(v-v')+mv']}$, o których szczegółowiej na tem miejscu mówić nie możemy, zajmują przeszło 120 stronic. Są to tylko rezultaty nader skomplikowanych rachunków, dające pojęcie o ogromie pracy, dokonanej przez autora; liczby, występujące jako spółczynniki w znalezionych szeregach, autor uważa za zupełnie wiarogodne, gdyż zostały one obliczone niezależnie przez dwie osoby.

**Księga III.** W równaniach różniczkowych, których całkowanie doprowadza do wyrażenia spółrzędnych prostokątnych planety, jako funkcyi czasu, Lagrange w swej metodzie daje składowym sił zakłócających formę pochodnych cząstkowych jednej funkcyi, zwanej funkcyą perturbacyjną. Funkcya ta jednakże jest bardzo skomplikowaną i nie sposób znaleźć wyrażenie spółrzędnych, wychodząc z pierwotnej formy pochodnych. Dlatego okazuje się potrzeba rozwinięcia funkcyi perturbacyjnej takiego, ażeby, wybrawszy z rozwinięcia tylko wyrazy najważniejsze i podstawiwszy je zamiast funkcyi perturbacyjnej w wyrażeniu pochodnych, całkowanie równań ruchu uczynić możliwem. Metody tego rodzaju, jeżeli chodzi o równania ruchu w orbicie periplegmatycznej, tj. jeżeli mamy do czynienia z orbitami bezwzględnemi, muszą być, według zdania



autora, wyprowadzone czysto analitycznie, jak np. metody Laplace'a, Leverriera, Newcomba, Hansena, i Backlunda. O swojej metodzie powiada autor, iż posiada ona te same strony dodatnie, co i metody Laplace'a, Leverriera i Newcomba, a przytem pod względem zastosowania w praktyce nie jest niższą od metod Hansena i Backlunda, szczególnie przy użyciu tablic całki

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi \, d\varphi}{(1-a^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} ,$$

obrachowanych przez Masala.

**Rozdział I.** Funkcya perturbacyjna, odnosząca się do sił, zakłócających ruch planety $a$, wyraża się przez

$$\Omega_a = \Omega_{a,b} + \Omega_{a,c} + \Omega_{a,d} + \ldots$$

gdzie ogólnie:

$$\Omega_{k,l} = \mu'_l \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2}} - \frac{x_k x_l + y_k y_l + z_k z_l}{\sqrt{(x_l^2 + y_l^2 + z_l^2)^3}} \right\}$$

W tem wyrażeniu oznacza wogóle $\mu'_l = f m_l$, gdzie $m_l$ jest masą planety $l$, wyrażoną jako ułamek masy słońca, $f$ spółczynnikiem stałym dla wszystkich planet; $x_l, y_l, z_l$ oraz $x_k, y_k, z_k$ są odpowiednio spółrzędnemi prostokątnemi planet $l$ i $k$. Rozważając wypadek ogólny, możemy opuścić skaźniki i napisać:

$$\Omega = \mu' \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right\} ,$$

gdzie

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = \Delta^2 ; \; x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 .$$

Równania ruchu planety są:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} ; \quad \mu = f(1+m)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} .$$

W układzie biegunowym funkcya $\Omega$ wyraża się tak:

$$\Omega = \mu' \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{rr' \cos H}{r'^3} \right\}.$$

Na zasadzie tych równań autor wyprowadza znaczną ilość pożytecznych związków między pochodnemi cząstkowemi funkcyi $\Omega$ względem $x, y, z$, a pochodnemi tejże funkcyi względem $b, l, r$, i przystępuje do rozwinięcia funkcyi $\Omega$ według funkcyj trygonometrycznych wielokrotności kąta $H$. Niech będzie

$$\Omega = U_0 + 2U_1 \cos H + 2U_2 \cos 2H + \ldots \tag{21}$$

Spółczynniki $U_i$ są funkcyami ilości $r$ i wyrażają się w formie:

$$U_i = A_0 r^i + A_1 r^{i+1} + A_2 r^{i+2} + \ldots$$

gdzie $A_k$ są funkcyami ilości $r'$; z rozwinięcia (21) zatem łatwo otrzymać $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$. Aby znaleźć dalej zależność między $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ a $\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho}$, mamy $r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}$.

Jeżeli jednakże z równania $r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}$, po podstawieniu $\varrho = \eta \cos [v - \omega - (\pi - \Gamma)]$, wyrachujemy $r$, to otrzymana wartość $r$ nie przedstawi rzeczywistej wartości promienia wodzącego planety, gdyż ta ostatnia zależną jest jeszcze od zmiennego względnego położenia planet. Wyrazy, wyrażające wpływ konfiguracyi na wartość $r$, autor nazywa nierównościami diastematycznemi.

Oznaczmy przez $(r)$ i $(\varrho)$ wartości, odpowiadające ruchowi planety w orbicie periplegmatycznej, $r$ i $\varrho$ zaś rzeczywiste wartości promienia wodzącego i funkcyi $\varrho$; połóżmy

$$\varrho - (\varrho) = R; \quad \frac{a}{r} - \frac{a}{(r)} = \xi.$$

Ponieważ $(r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)}$, mamy więc $R = (1-\eta^2)\xi$, i dalej:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} = \frac{\partial \Omega}{\partial (\varrho)} = \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{1}{1-\eta^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi},$$

oraz

$$\frac{\partial r}{\partial \varrho} = - \frac{a(1-\eta^2)}{(1+\varrho)^2}.$$



Oznaczając jeszcze $a(1-\eta^2)$ przez $\frac{(c)}{\mu}$, mamy:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} = \frac{\partial \Omega}{\partial (\varrho)} = - \frac{\mu r^2}{(c)} \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Jest to szukana zależność między $\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho}$ i $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$.

W dalszym ciągu autor znajduje wyrażenie dla $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$, które okazuje się równem $\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}}$, a następnie wyrażenia dla $\frac{\partial h}{\partial \mathrm{v}}$, $\frac{d \cos nH}{d \cos H}$; znajduje wreszcie, iż $\frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = \frac{\partial \Omega}{\partial h}$, z czego wypływa, iż całka równania

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = W_1 + 2W_2 h + 3W_3 h^2 + \ldots$$

posiada postać:

$$\Omega = W_0 + W_1 h + W_2 h^2 + \ldots$$

Spółczynniki $W$ mają postać:

$$\begin{cases} W_0 = U_0 + 2U_1 \cos w + 2U_2 \cos 2w + 2U_3 \cos 3w + \ldots, \text{ gdzie } w = \mathrm{v} - \mathrm{v}' \\ W_1 = 2\{\Psi_{1,1} U_1 + \Psi_{2,1} U_2 + \Psi_{3,1} U_3 + \ldots\}, \\ W_2 = 2\{\Psi_{2,2} U_2 + \Psi_{3,2} U_3 + \Psi_{4,2} U_4 + \ldots\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{22}$$

Funkcye $\Psi$ określone są przy pomocy równań:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,1} + \Psi_{n-2,1} &= 2 \cos nw + 2\Psi_{n-1,1} \cos w, \\ \Psi_{n,2} + \Psi_{n-2,2} &= 2\Psi_{n-1,1} + 2\Psi_{n-1,2} \cos w, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_{n,n-1} &= 2\Psi_{n-1,n-2} + 2_{n-1,n-1} \cos w, \\ \Psi_{n,n} &= 2\Psi_{n-1,n-1}. \end{aligned}$$

przytem

$$\Psi_{1,1} = 1; \quad \Psi_{2,1} = 4 \cos w; \quad \Psi_{2,2} = 2.$$

Wreszcie autor wyprowadza kilka pożytecznych związków pomiędzy

pochodnemi cząstkowemi funkcyi perturbacyjnej, wziętemi względem współrzędnych rozmaitych planet.

Rozdział II. Przystępując do rozwinięcia funkcyi $\frac{1}{\Delta}$, autor ogranicza się na tym specyalnym przypadku, iż jeżeli dla jakiegokolwiek momentu jest $r > r_1$, to nierówność ta zachodzi zawsze; gdyby warunek uległ zmianie, tak iż $\frac{r_1}{r} > 1$, to rozwinięcia, dane przez autora, przestają być zbieżnemi. Niechaj będzie ogólnie

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m = \left(\frac{a'}{r'}\right)^m C_0^{(m)} + 2\,\frac{r}{a}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{m+1} C_1^{(m)} \cos H$$

$$+ 2\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^{m+2} C_2^{(m)} \cos 2H + \ldots$$

Spółczynniki $C$ są funkcyami stosunku $\frac{r}{r'}$, mianowicie dla $m = 1$; jeżeli oznaczymy $\alpha = \frac{a}{a'}$ będzie:

$$C_n^{(1)} = \frac{2}{\pi}\,\alpha^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2\varphi}}\,.$$

Dla osiągnięcia szybszej zbieżności autor rozwija funkcyę $C_n^{(1)}$ według potęg funkcyi, określonej przez równanie:

$$\chi = 1 - \left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2,$$

tak że:

$$C_n^{(1)} = \frac{2}{\pi}\,\alpha^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2\varphi + \alpha^2\chi \sin^2\varphi}}\,.$$

Oznaczając

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}\,,$$



$$\gamma_s^{1,n} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2s-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2s}\,\alpha^{n+2s+1}\,\beta_{n+s}^{(2s+1)}\,,$$

otrzymamy rozwinięcie funkcyi $C_n^{(1)}$ w postaci:

$$C_n^{(1)} = \gamma_0^{1,n} - \gamma_1^{1,n}\,\chi + \gamma_2^{1,n}\,\chi^2 - \gamma_3^{1,n}\,\chi^3 + \cdots;$$

$\chi$ możemy jeszcze wyrazić, jako funkcyę ilości $\eta$ i $\varrho$:

$$\chi = 1 - \left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2}\right)^2\left(\frac{1+\varrho'}{1+\varrho}\right)^2,$$

a zatem spółczynnik $C_n^{(1)}$ można rozwinąć na szeregi, postępujące według potęg lub iloczynów funkcyj $\varrho$, $\varrho'$, $\eta^2$, $\eta'^2$; spółczynniki tych rozwinięć są wielomanami skończonemi i zawierają wszystkie funkcye $\gamma_s^{1,n}$ w pierwszej potędze. Dla ostatecznego otrzymania tych spółczynników, jedynie jako funkcyj ilości $\eta$ i $\eta'$, należy zamiast $\varrho^s$, $\varrho'^s$ podstawić otrzymane dla tych iloczynów rozwinięcia według potęg ilość $\eta$, $\eta'$. Jeżeli jeszcze wyrazimy $\cos nH$ przez szeregi postępujące według potęg funkcyj diastematycznych, możemy funkcyi $\frac{1}{\Delta}$ dać postać takiegoż szeregu.

W ogólniejszym przypadku, mianowicie gdy $m$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, większą od 1, t. j. gdy chodzi o rozwinięcie funkcyi $\frac{1}{\Delta^m}$, spółczynnik $C_n$ ma postać:

$$C_n^{(2k+1)} = \frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n-1)}{1\,.\,3\ldots(2n-1)(1-k_1^2)^{2k}}\cdot\frac{2\alpha^{2k+1+n}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}$$

$$\left\{(1-k_1^2\sin^2\varphi)^k + \frac{2k(2k-1)}{1\,.\,2}(1-k_1^2\sin^2\varphi)^{2k-1}k_1^2\cos^2\varphi + \ldots\right\} d\varphi\,.$$

W wyrażeniu powyższem oznacza $k$ jakąkolwiek liczbę całkowitą, tak iż $2k+1 = m$, a $k_1 = \alpha\sqrt{1-\chi}$. Funkcye $\gamma$ w tym razie mają postać:

$$\gamma_s^{2k+1,n} = \frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n-1)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{\alpha^{2k+1+n}}{(1-\alpha^2)^{2k}}$$

$$\left\{p_1^{(k)} + \frac{2k}{1}\,\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\,p_{s-1}^{(k)} + \frac{2k(2k+1)}{1\,.\,2}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)p_{s-2}^{k} + \cdots\right\}.$$

Spółczynniki $p_s^{(k)}$ są funkcyami całek $\beta_n^{(s)}$; dla tych ostatnich, jak już wspo-

mnieliśmy, wyrachował Masal tablice, wystarczające dla wszystkich przypadków, mogących zachodzić w praktyce. Pomimo to, autor daje jeszcze wzory do obliczania tych całek w jakimkolwiek przypadku.

Rozdział III. W równaniach różniczkowych, o których zcałkowanie chodzi, występują wyrazy, zależne od pochodnych $\frac{\partial\Omega}{\partial r'}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial \nu}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$. Oznaczając:

$$P = \frac{r^2}{(c)}\frac{a\,\partial\Omega}{\partial r},\quad Q = \frac{r^2}{(c)}\frac{\partial\Omega}{\partial r},\quad R = \frac{r^2}{(c)}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial h},$$

można przez odpowiednie przekształcenie otrzymać:

$$P = -\frac{\mu a}{(c)}\frac{r^3}{\Delta^3} + \frac{a}{r}\,R\cos H,$$

$$Q = R\,\frac{\partial\cos H}{\partial \nu},$$

$$R = \frac{\mu r}{(c)}\,r^2 r'^2\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\}.$$

Wprowadzając do tych wyrażeń rozwinięcia, otrzymane dla $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m$, wyrazimy $P$, $Q$, $R$ przez szeregi, postępujące według dostaw wielokrotności kąta $H$. W szeregu na $Q$ wszystkie wyrazy będą miały spólny spółczynnik $\frac{\partial\cos H}{\partial\nu} = -\sin(\nu-\nu') + \frac{\partial h}{\partial\nu}$. Ażeby szeregi, otrzymane w ten sposób zastąpić takiemi, w których zamiast $H$ argumentem jest $\nu$ i $\nu'$, można w nie za wyrażenia na $\cos nH$ podstawić otrzymane poprzednio, albo też rozwinąć je według potęg ilości $h$, również zależnych od $\nu$ i $\nu'$ i podanych przez autora. Obierając drugą drogę, otrzymujemy dla $\frac{a}{\mu'}\,\Omega$ rozwinięcie postaci:

$$\frac{a}{\mu'}\,\Omega - W_0 + W_1 h + W_2 h^2 + \ldots,$$

gdzie $W_0$ oznacza wartość funkcyi $\frac{a}{\mu'}\,\Omega$, jeżeli podstawimy w niej $\nu-\nu'=w$ zamiast $H$, spółczynniki zaś $W_i$ utworzone są w taki sposób, jak pokazują wyrażenia (22). Niech będzie:

$$W_m = W_0^{(m)} + 2\,W_1^{(m)}\cos w + 2\,W_2^{(m)}\cos 2w + \ldots$$

$$P = P^{(0)} + P^{(1)}h + P^{(2)}h^2 + \ldots$$

$$Q = Q^{(0)} + Q^{(1)}h + Q^{(2)}h^2 + \ldots + R\,\frac{\partial h}{\partial \nu},$$

$$R = R^{(0)} + R^{(1)}h + R^{(2)}h^2 + \ldots$$



Autor pokazuje, iż $-\frac{\mu}{\mu'}\,P^{(m)}$ wyraża się przez szereg, postępujący według dostaw wielokrotności kąta $w$, przyczem spółczynnikami wyrazów szeregu są $\frac{\partial W_i^{(m)}}{\partial\varrho}$; w rozwinięciu $-\frac{\mu}{\mu'}\,Q^{(m)}$, postępującem według dostaw wielokrotności kąta $w$, pierwszym spółczynnikiem jest $2\cdot\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2}\,W_1^{(m)}$, inne zaś mają formę $4\cdot\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2}\,W_i^{(m)}$. Wreszcie w rozwinięciu $\frac{\mu}{\mu'}\,R^{(m)}$, według $\cos iw$, pierwszym wyrazem jest $(m+1)\,\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2}\,W_0^{(m+1)}$, inne zaś wyrazy posiadają spółczynniki formy $2\,(m+1)\,\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2}\,W_i^{(m+1)}$. Funkcyę $W_i^{(m)}$ można rozwinąć według potęg ilości $\xi$ i $\xi'$, stąd zaś wypływają rozwinięcia dla $W_m$, $P^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $R^{(m)}$. W dalszym ciągu otrzymujemy rozwinięcia podobnej formy dla $P$, $Q$, $R$, przytem spółczynniki tych rozwinięć są funkcyami funkcyj $(\varrho)$ i $(\varrho')$ i mogą być rozwinięte na szeregi:

$$M_{k,k'} = \sum_s\sum_{s'}\left\{M^{(m)}(k,k',n,s,s')_{0,0} - M_{1,0}^{(m)}\eta^2 + M_{0,1}^{(m)}\eta'^2 - \ldots + \ldots\right\}(\varrho)^s(\varrho')^{s'}.$$

Spółczynniki $M^{(m)}$ tego rozwinięcia są funkcyami liczb całkowitych, umieszczonych w nawiasie i funkcyj $\gamma$ i $\vartheta$, z których ostatnie występują jako spółczynniki w rozwinięciu funkcyi $\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a'}{r'}\right)^n C_n^{(m)}$ według potęg ilości. Ostatecznym rezultatem jeszcze kilku podobnych przekształceń i podstawień jest, iż główna część funkcyi perturbacyjnej, t. j. $\frac{a}{\Delta}$ wyrażoną jest w postaci szeregu, postępującego według potęg funkcyi diastematycznej oraz iloczynów potęg $\varrho^s$ i $\varrho'^{s'}$. Dla otrzymania całkowitego rozwinięcia funkcyi $\Omega$, należy jeszcze do części wymienionej dodać:

$$-\frac{ar}{r'^2}\cos H = -\frac{ar}{r'^2}\,(\cos w + h),$$

a to w przypadku, jeżeli należy obrachować wpływ planety, odleglejszej od słońca, na bliższą. Jeżeli mamy do czynienia z przypadkiem pierwszym, rachunek odbywa się nieco inaczej.

Reasumując wszystkie otrzymane rezultaty, autor daje postać fundamentalną rozwinięcia funkcyi perturbacyjnej według swej metody. Jest ona

$$N = \sum_s \sum_{s'} \{ N(0, s, s')_{0,0} - N(0, s, s')_{1,0} + \ldots$$

$$\ldots + N(0, s, s')_{0,1}\, \eta'^2 - \ldots + \ldots \} (\varrho)^s (\varrho)^{s'}$$

$$+ 2 \sum_s \sum_{s'} \sum_n \{ N(n, s, s')_{0,0} - N(n, s, s')_{1,0}\, \eta^2 + \ldots$$

$$\ldots + N(n, s, s')_{0,1}\, \eta'^2 - \ldots + \ldots \} (\varrho)^s (\varrho')^{s'} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, nw,$$

gdzie wszystkie $N_{i,i'}$ są znanemi funkcyami. Szereg ten jest zawsze zbieżnym, jeżeli $\eta < 1$. Z tej formy fundamentalnej można wyprowadzić jeszcze rozmaite inne formy rozwinięć funkcyi perturbacyjnej.

Rozdział IV. Autor zastanawia się bliżej nad formą, jaką to rozwinięcie otrzymuje, jeżeli do niego wprowadzić rozwinięcie iloczynów $(\varrho^s)\,(\varrho')^{s'}\, e^{inw}$; formę tę nazywa **formą diastematyczną**, ponieważ w niej argument diastematyczny występuje jako argument zasadniczy. Wyrazem ogólnym rozwinięcia iloczynu przytoczonej formy jest:

$$T\,(\varrho^s, \varrho'^s\, e^{inw}) = \overset{(c)}{E}\, \eta^{s+\mu}\, \eta'^{s'+\mu'}\, e^{\pm i(s+\mu-2r)(\pi-\Gamma) \pm i(s'+\mu'-2r')(\pi'-\Gamma')}$$

$$\times\, e^{i\{[n \mp (s+\mu-2r)\,\nu - [n \pm (s'+\mu'-2r')]\,\Gamma \pm (s+\mu-2r)\,\tilde{\omega} - n\tilde{\omega}'\}},$$

gdzie $n, s, s', \mu, \mu', r, r'$ są całkowitemi, a $\overset{(c)}{E}$ oznacza spółczynnik, zależny jedynie od tych całkowitych, przytem $(c)$ u góry wskazuje zależność ilości $E$ od kombinacyi znaków w wykładnikach. Autor wprowadza jeszcze oznaczenie:

$$p = s + \mu\,; \quad p' = s' + \mu'\,; \quad S = n \mp (p - 2r)\,; \quad S' = n \pm (p' - 2r'),$$

mamy zatem

$$T\,(\varrho^s\, \varrho'^{s'}\, e^{inw}) = \overset{(c)}{E}\, \eta^p\, \eta'^{p'}\, e^{i(n-S)(\pi-\Gamma) + i(S'-n)(\pi'-\Gamma') + i[S(\nu-\tilde{\omega}) - S'\Gamma + n(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')]}$$

Potęga wyrazu, do którego należy spółczynnik $\overset{(c)}{E}$ jest $d = p + p'$. Liczba wyrazów, dla których $s$ i $s'$ pozostają te same, jest nieskończenie wielką; wszystkie wyrazy, należące do tych samych $s$ i $s'$ nazywa autor **synechią** tych liczb, a oddzielne wyrazy, tworzące jedną synechią — **wyrazami spółrzędnemi**. Wyrazy spółrzędne tworzą szereg nieskończony, postępujący według potęg i iloczynów potęg funkcyj $\eta$ i $\eta'$. Wyrazy synechii najniższego stopnia określają stopień synechii; wyrazy te—może ich w synechii być pewna liczba skończona, jak wogóle wyrazów jednego stopnia — nazywa autor **wyrazami naczelnemi**, i podaje niektóre prawidła, określające liczbę wyrazów jednakowego stopnia w synechii. Aby otrzymać formę diastematyczną rozwinięcia funkcyi perturbacyjnej, należy rozmaite iloczyny $\varrho^s\, \varrho'^s\, e^{inw}$ pomnożyć przez odpowiednie $N\,(n, s, s')$, tak iż ogólna postać spółczynników w tem rozwinięciu jest:



$$\overset{(c)}{G}\,(p, p', r, r'\, n)_{\nu,\nu'} = \sum_{s=s'=0}^{s=\mu,\, s'=\mu'} \left\{ N\,(n, s, s')_{\nu,\nu'} \,.\, \overset{(c)}{E}{}^{s,s'\,n}_{p-s,\, p'-s';\, r,r'} \right\},$$

gdzie $\overset{(c)}{E}{}^{s,s',n}_{p-s,\,p'-s';\,r,r'}$ jest formą symboliczną, służącą do oznaczenia różnych wartości, jakie przyjmuje spółczynnik $E$, zależnie od rozmaitych $n, s, s'$ i t. d. i od kombinacyi znaków. Wyrażenie formy diastematycznej rozwinięcia funkcyi $\Omega$ jest nader skomplikowanem: powtórzenie wszystkich szczegółów za autorem na tem miejscu jest zupełnie niemożliwem.

KSIĘGA IV. Rozwiązanie równań dynamiki, odniesionych do układu spółrzędnych prostokątnych, nastręcza w badaniach ruchu planet prawie nieprzezwyciężone trudności. Wygodniejszemi są te równania, odniesione do spółrzędnych biegunowych, ponieważ nie są symetryczne i łatwiej dadzą się przekształcać odpowiednio do celu, do jakiego w danym razie dążymy. Dosyć przypomnieć postać, użytą przez Laplace'a w jego teoryi księżyca, oraz postać, otrzymaną przez Hansena. Autor stawia sobie zadanie wyprowadzenia równań analogicznych do równań Laplace'a i Hansena z tą różnicą, iż w jego równaniach zamiast elementów stałych występować mają odpowiadające teoryi orbit bezwzględnych funkcye elementarne. Nowy układ równań ma się rozkładać na układy częściowe, których rozwiązanie, przynajmniej w przypadku głównych planet, ma być możliwem. Opierając się na poprzednich rozdziałach, autor wyprowadza 13 równań zasadniczych, którym nadaje taką postać, ażeby z łatwością można było oddzielić funkcye elementarne od nierówności peryodycznych. Równania te dają się rozwiązać za pomocą kolejnych przybliżeń. W przypuszczeniu, iż przystępujemy do badań nad ruchem planet, znając tylko masę słońca i planet, położenie słońca i planety w pewnej określonej epoce oraz ich względną szybkość w tej epoce, autor rozważa, jaką wartość funkcyj poszukiwanych należy uważać za pierwsze przybliżenie. Rozważania te, jak i dalsze poszukiwania autora w tej kwestyi, nie nadają się do streszczenia. Ostatni rozdział wreszcie poświęca autor kwestyi wyrazów krytycznych, t. j. tych, w których występuje mały dzielnik, mogący rozwinięcie uczynić mało zbieżnem, albo też nawet rozbieżnem, i pokazuje, w jaki sposób dadzą się usnąć nastręczające się tu trudności.

Tom I, którego treść przytoczyliśmy w krótkości, stanowi część pierwszą dzieła Gyldéna. Część druga traktować będzie o nierównościach planet, zależnych od zmiennego względnego położenia; wreszcie w części trzeciej znajdzie się rachunek wyrazów elementarnych, oraz wartości liczebne elementów bezwzględnych.