które zachodzą w danej grupie nieskończonej, mówiąc dokładniej, od klasy równań określających (Definitionsgleichungen) odnośną grupę.

Załóżmy teraz z innej strony, że mamy układ inwolucyjny w zmiennych x, y, z, który zezwala na nieznaną grupę przekształceń styczności; wówczas zachodzi naprzód kwestya, jak określić wszystkie te grupy najprostszym sposobem. Dla ogólnego rozwiązania tego zagadnienia trzeba naprzód wszystkie te grupy doprowadzić do kształtów kanonicznych. Moje teorye ogólne pozwalają, jak to oddawna zauważyłem, rozwiązać wszystkie te zagadnienia.

Wszystkie rozważania tej pracy, pośrednio lub bezpośrednio polegają na mojej ogólnej teoryi przekształceń. W mej następnej pracy, której treść już dawniej zakomunikowałem temu Towarzystwu, probuję zupełnie ogólnie traktować kwestyę, w jaki sposób pojęcie grupy może być wyzyskane dla teoryi równań różniczkowych. Jakkolwiek nie może być mowy o tem, aby pytanie to rozwiązać w ostatecznej formie, to jednakowoż ośmielam się utrzymywać, że moje ogólne rezultaty zasługują na uwagę matematyków.

W moich wykładach podczas zimowego półrocza 1893—1894 zilustrowałem teorye ostatniego rozdziału za pomocą pewnych nowych przykładów. Dwaj z pomiędzy moich słuchaczów, mianowicie pp. Beudon i Williams, spróbują prawdopodobnie naszkicowane przezemnie teorye wyzyskać dla zagadnienia, na które w tym czasie zwróciło uwagę Towarzystwo im. księcia Jabłonowskiego [1]).

---

[1]) W pracy, która niebawem wyjdzie z druku, podaję w obszernem opracowaniu oddawna ogłoszone przezemnie wyznaczenie wszystkich powierzchni, ktore zezwalają na ciągłą grupę rzutową. Jestem do tego zmuszony: okazało się bowiem, że matematycy, którzy się temi badaniami interesują, nie są w stanie samodzielnie wykonać opuszczonych przezemnie prostych rachunków. (Por. Archiv for Math., t. 7, Chrystyania, 1882, a także „Theorie der Transfgr.," tom 3, Lipsk. 1893).

PRZYCZYNEK DO TEORYI FUNKCYI GREENA

PODAŁ

S. ZAREMBA.

Czytanie pięknej rozprawy Picarda („Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives" [1])) nasuwa bezpośrednio myśl, że wiele wyników, otrzymanych przez znakomitego geometrę dla równań o pochodnych cząstkowych z dwiema zmiennemi niezależnemi, możnaby rozciągnąć do przypadku większej liczby takich zmiennych. Widać bezpośrednio, że rzecz ta sprowadza się do wykazania pewnej własności funkcyi Greena, łatwej do uzasadnienia na płaszczyznie, przy pomocy odwzorowania podobnego, lecz daleko mniej widocznej w innych przypadkach. Oto własność ta stanowi przedmiot pracy niniejszej.

Ograniczymy się na trzech zmiennych niezależnych, co stanowi przypadek najbardziej interesujący; lecz zobaczymy, że metoda użyta daje się stosować i w przypadku ogólnym.

2. Oto jak brzmi własność, o którą nam idzie:

Niechaj $G(x, y, z, x', y', z')$ będzie funkcya Greena w odniesieniu do obszaru D ograniczonego powierzchnią wypukłą S, mającą w każdym ze swych punktów określone promienie krzywizny. Niechaj d oznacza największą odległość dwóch punktów, wziętych na powierzchni S, a — granicę niższą promieni krzywizny powierzchni S w punkcie zmiennym. Powiadamy, że całka

---

[1]) Journal de Mathématiques (4), VI, 1890.

(1) $$J = \iiint \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| dx'\, dy'\, dz',$$

rozciągnięta na cały obszar D, ma wartość mniejszą od liczby N, mającej następujące własności:

a) liczba N zależy j e d y n i e od powierzchni S;

b) liczba N dąży do zera, gdy powierzchnia S zmienia się w ten sposób, że d dąży do zera, stosunek zaś

$$\frac{d}{a}$$

nie przekracza nigdy liczby skończonej M.

Kładąc

$$\varrho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

możemy napisać:

(2) $$G(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{\varrho} - v(x, y, z, x', y', z'),$$

gdzie wyraz drugi strony drugiej jest funkcyą, której pochodne cząstkowe są skończone i ciągłe w całym obszarze D i na powierzchni granicznej S tego obszaru.

Ponieważ funkcya G jest dodatnią wewnątrz powierzchni S, przeto funkcya u, określona na tej powierzchni przez równanie

$$4\pi u = \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{dv}{dn},$$

gdzie każdy wyraz strony drugiej wyobraża, jak zwykle, pochodną wziętą w kierunku normalnej wewnętrznej w punkcie P powierzchni, nie stanie się ujemną dla żadnego położenia punktu P.

Z drugiej strony, oznaczając przez $d\omega$ element powierzchni S, wewnątrz którego znajduje się punkt P, przez r zaś odległość punktu P od punktu o spółrzędnych x, y, z, widzimy odrazu, że funkcya

(3) $$w(x, y, z) = \int_S \frac{u\, d\omega}{r},$$

w której całkowanie rozciąga się na całą powierzchnię S, zlewa się wewnątrz tej powierzchni z funkcyą v, zewnątrz zaś tejże z funkcyą $\frac{1}{\varrho}$.

3. Postarajmy się utworzyć funkcyę, któraby wewnątrz powierzchni S nie miała nigdzie wartości mniejszej niż funkcya f, określona równaniem

$$f = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2.$$

W tym celu oznaczmy przez A punkt (wewnątrz powierzchni S), którego spółrzędnemi są x, y, z, i niechaj A_0 będzie punktem powierzchni S (wogóle jedynym), którego odległość od punktu A nie ma być mniejsza od odległości każdego innego punktu powierzchni.

Weźmy prócz tego inny punkt A_1 symetryczny do punktu A, odnośnie do punktu A_0, i połóżmy

$$r = \overline{AP},\ r_1 = \overline{A_1P},\ b = \overline{AA_0};$$

niechaj nakoniec R oznacza długość równą większej z dwóch długości a i b.

Będzie

(5) $$b \leqslant R$$

oraz, ze względu na wypukłość powierzchni S,

(6) $$\frac{r_1}{r} \leqslant \frac{2R + b}{2R - b},$$

niezależnie od położenia punktu P na powierzchni S.

4. Uważajmy prostą nieograniczoną AA_1 za oś ξ, skierowaną od punktu A do punktu A_1, i odnieśmy tę oś do punktu A. W tem założeniu szukajmy granicy wyższej bezwzględnej wartości pochodnej

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \int_S \frac{u \cos(AP, \xi)\, d\omega}{r'^2};$$

w tym celu porównajmy ją z pochodną:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=2b} = \int_S \frac{u \cos(A_1P, \xi)\, d\omega}{r_1^2}.$$

Ponieważ powierzchnia S jest wypukłą, przeto

$$\cos(A_1P, \xi) < 0,$$

$$|\cos(AP, \xi)| < |\cos(A_1P, \xi)|.$$

Z nierówności (5) i (6) wynika zaś

$$\frac{1}{r} < \frac{3}{r_1};$$

a więc, pamiętając, że u nie jest nigdy ujemnem, znajdujemy:

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}\right| < 9\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=2b}\right|.$$

Niechaj A' będzie punktem, którego spółrzędnemi są x', y', z'. Na zasadzie własności funkcyi w wewnątrz powierzchni S będzie

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=2b}\right| \leqslant \frac{1}{\overline{A'A_1}^2};$$

a ponieważ ze względu na wypukłość powierzchni S jest:

$$\overline{A'A} < \overline{A'A_1},$$

przeto:

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}\right| < \frac{9}{\overline{A_1A}^2}.$$

5. Poprowadźmy przez punkt A oś jakąkolwiek η prostopadłą do osi ξ, odnieśmy tę oś do punktu A i szukajmy granicy wyższej bezwzględnej wartości pochodnej:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \int_S \frac{u \cos(AP, \eta)\, \partial\omega}{r^2}.$$

W tym celu przeprowadźmy przez punkt A oś η_1, podobnie jak poprowadziliśmy oś η, odnieśmy ją do punktu A_1 i rozważmy pochodną:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0} = \int_S \frac{u \cos(A_1P, \eta_1)\, d\omega}{r_1^2},$$

Kładąc

$$\lambda = r \cos(AP, \eta) = r_1 \cos(A_1P, \eta)$$

będziemy mieli:

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} - \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0} = \int_S \lambda u \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) d\omega.$$

Uwzględniając zaś tożsamość

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rr_1} + \frac{1}{r_1^2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right),$$

oraz, że:

$$r \leqslant r_1,$$

znajdziem :

$$(9) \qquad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} \leqslant \frac{3}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Lecz z nierówności (5) i (6) mamy:

$$\frac{r_1 - r}{r} \leqslant \frac{2b}{R},$$

a ponieważ

$$b \leqslant r_1,$$

przeto

$$(10) \qquad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} < \frac{2}{R}$$

Stąd, uwzględniając nierówności (9) i (10) i zważając, że

$$|\lambda| < r,$$

znajdujemy ze związku (8):

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} - \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0}\right| < \frac{6}{R}\int \frac{u\, d\omega}{r},$$

lub, ze względu na określenie funkcyi w,

$$(11) \qquad \left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\right| < \left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0}\right| + \frac{6w}{R}.$$

Ponieważ A' oznacza zawsze punkt (x', y', z'), więc:

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0}\right| \leqslant \frac{1}{\overline{A'A_1}^2},$$

a więc a fortiori:

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0}\right| < \frac{1}{\overline{A'A}^2}. \tag{12}$$

Punkt A jest wewnątrz powierzchni S, więc:

$$w < \frac{1}{\overline{A'A}},$$

a zatem, pamiętając że d oznacza największą odległość dwóch punktów wziętych na powierzchni S, znajdujemy:

$$w < \frac{d}{\overline{A'A}^2}. \tag{13}$$

Można też wnieść z nierówności (11), (12), (13):

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\right| < \left(1 + \frac{6d}{R}\right)\frac{1}{\overline{A'A}^2},$$

stąd, ponieważ

$$a \leqslant R,$$

wynika:

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\right| < \left(1 + \frac{6d}{a}\right)\frac{1}{\overline{A'A}^2}.$$

6. Z nierówności (7) i (14) wyprowadzamy bezpośrednio:

$$f = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 < \left\{81 + 2\left(1 + \frac{6d}{a}\right)^2\right\}\frac{1}{\overline{A'A}^4},$$

lub

$$f < \frac{Q^2}{\varrho^4},$$

gdzie

$$Q^2 = 81 + 2\left(1 + \frac{6d}{a}\right)^2; \quad \overline{A'A} = \varrho.$$

7. Porównywając tę nierówność z nierównością (2), dostajemy

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| < \frac{1+Q}{\varrho^2};$$

a więc całka J, określona równaniem (1), czyni zadość nierówności

$$J < (1 + Q)\iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\varrho^2},$$

gdzie całkowanie rozciąga się na kulę o środku A i promieniu d. Wynika stąd nierówność

$$J < 4\pi\,(1 + Q)\,d,$$

wyrażająca twierdzenie, które należało udowodnić.

Nimes, (Francya),
1896 r.