

¹⁰⁸⁾ Math. Ann., XXX, str. 496—515 (1887).

¹⁰⁹⁾ Math. Ann., XXIX, str. 157—170 (1887), cf. Reichardt, tamże XXVIII, s. 84—98 (1887).

¹¹⁰⁾ Math. Ann., XXXIII, s. 317—344 (1889).

¹¹¹⁾ Jordan, Traité des substitutions, 1871.

Co do związku obu zagadnień patrz Klein, 1888, Journ. de Math. (4), IV, str. 169—177 i Burkhardt, Gütt. Nachr. 1892, str. 1—5.

¹¹²⁾ Z badaniami, poruszonemi w tekście, o ile odnoszą się do grup skończonych dwójkowych i trójkowych, znajduje się w związku ściślym szereg prac Autonne'a, C. R., XCVII, str. 567—570; (1883), C. R., XCVIII, s. 565—567, IC, s. 646—649; (1889), C. R. CI, str. 53—56, Journ. de Math. (4) I, s. 431—454; (1885), C. R. CII, s. 313—316, CIII, s. 1176—1178, Journ. de Math. (4), II, s. 49—104; (1886); C. R. CIV, s. 767—770, 1422—1425, CV, s. 267—270, 929—95, Journ. de Math. (4), III, s. 63—85; (1887). Journ. de Math. (4), IV, s. 177—247; 407—464; (1888). W tych pracach autor założył sobie oznaczenie wszystkich skończonych grup i podgrup przekształceń Cremony (płaszczyzny), a specjalnie przekształceń kwadratowych i sześciennych. Conf. S. Kantor, Wien. Denk., 1882, s. 46.

¹¹³⁾ Ueber allgemeinere Invarianten-Systeme, Münch. Ber., 1888, s. 103—150.

¹¹⁴⁾ Pozostaje to w swej mocy, jak to zaznacza Maurer, gdy f jest wogóle funkcją wymierną i jednorodną zmiennych x .

¹¹⁵⁾ l. c., str. 107.

¹¹⁶⁾ Wtedy wyznacznik funkcyjny ilości c albo równa się m , albo też ma dzielniki elementarne tylko pierwszego rzędu i nadto pierwiastki całkowito-liczbowe. Twierdzenie to podał i udowodnił autor jeszcze w rozprawie swej. Strasburg, 1887.

¹¹⁷⁾ Str. 138.

¹¹⁸⁾ W innej rozprawie (Journ. für Math. CVII, str. 89—116, 1890) Maurer rozciągnął badania swoje na podstawienia nieliniowe.

PRZYSZYNEK DO OGÓLNEJ TEORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH DOWOLNEGO RZĘDU

PRZEZ

SOPHUSA LIEGO.

Przełożył z niemieckiego za zezwoleniem autora

KAZIMIERZ ŻORAWSKI.

(Nowe teorie w tej pracy zawarte zakomunikowałem Królewskiemu Saskiemu Towarzystwu Umiejętności 11 Października 1893 r. Następnie rozwinąłem je szczegółowo w wykładach moich na Uniwersytecie w Lipsku podczas zimowego półroczu 1893/4.

Sophus Lie)

Teoria równań różniczkowych jest w całej matematyce współczesnej działem najważniejszym.

Zdanie, że pojęcia pochodnej i całki, których pierwsze początki spotykamy już u Archimidesa, w swych cechach zasadniczych wprowadzone zostały do nauki przez Keplera, Descartes'a, Cavalieri'ego, Fermata i Wallisa, wydaje się być zgodne z prawdą. Pomimo to jednakoż, badaczy tych w żadnym razie nie można uważać, jako założycieli rachunku nieskończenie małych, co zdaje się wynikać stąd, że nie zauważyli oni, iż różniczkowanie i całkowanie są działaniami odwrotnymi. Wspomniałem to odkrycie ¹⁾, dziś dla nas zupełnie widoczne, zawdzięczamy Newtonowi i Leibnizowi, którzy oprócz tego poznali niezmierną wartość tych

¹⁾ Dla rozstrzygnięcia dawnego sporu o pierwszeństwo w sprawie odkrycia rachunku nieskończenie małych, oczywiście bardzo ważną jest kwestya, czy Newton, czy też Leibniz pierwszy zauważył, że różniczkowanie i całkowanie są działaniami odwrotnymi. Pan Zeuthen, który tyle już zdziałał dla historii matematyki, zamierza, o ile go dobrze zrozumiałem, kwestyę tę traktować w pracy, mającej niebawem opuścić prasę.

pojęć i wprowadzili jednocześnie odpowiednie algorytmy. Wyjątkowo doniosłym był z jednej strony odkryty przez Newtona wzór na potęgę dwumianu, za pomocą którego można było wyznaczyć wiele pochodnych i całek, z drugiej zaś wprowadzone przez Leibniza symbole dx , dy , jakoteż wreszcie traktowanie i zastosowanie pochodnych rzędów wyższych.

Zastosowania pojęć różniczki i całki, dokonane przez poprzedników Newtona i Leibniza, odnosiły się prawie tylko do sposobów prowadzenia stycznych, obliczania długości łuków, pól i objętości. Szersze traktowanie tych pojęć przez Newtona i Leibniza, pozwoliło tym wielkim uczonym podjąć już zupełnie poważnie takie zagadnienia, które dziś wkraczają w dziedzinę równań różniczkowych. Prawdziwym, zdaje się, jest pogląd, że właśnie redukcja pewnych zagadnień do całkowania równań różniczkowych jest epokową zdobyczą, charakteryzującą zarówno erę Leibniza i Newtona, jakoteż i dzisiejszą wyższą matematykę.

Wielce sławnym, i to zupełnie słusznie, jest dokonany przez Newtona wywód praw Keplera z ogólnego prawa ciążenia, które sformułował także Newton. Odkrycie to, epokowe nie tylko dla mechaniki, polega właśnie na całkowaniu pewnego układu równań różniczkowych; prawo ciążenia daje tu równania różniczkowe ruchu planet, a prawa Keplera są odpowiedniami równaniami całkowymi.

Bracia Jakób i Jan Bernoulli (1654—1705, 1667—1748) podali wiele przyczynków do teorii równań różniczkowych; sławnymi są ich badania linii geodezyjnych i zagadnień izoperymetrycznych; badania te należy uważać za początki rachunku wariacyjnego.

Włoski matematyk Riccati (1676—1754) zwrócił uwagę na pewne przypadki wsławnego później równania różniczkowego:

$$\frac{dy}{dx} = X(x) + X_1(x)y + X_2(x)y^2,$$

które uważać należy jako najprostsze i najważniejsze pomiędzy równaniami, nie dającymi się całkować za pomocą kwadratur. Nowsze badania z teorii grup wykazały mianowicie, że równanie to można uważać jako analogię do równania algebraicznego piątego stopnia.

Clairaut (1713—1765), który odznaczył się szczególniej badaniami swemi o krzywych skośnych, zajmował się równaniami postaci:

$$y - xy' - \varphi(y') = 0.$$

Całkowanie tych równań stoi, jak wiadomo, w ścisłym związku z pojęciem spórzędnych liniowych, można więc uważać, że pierwotne

zaczątki tego pojęcia (a nawet i zasady dwoistości) znajdują się już u Clairauta.

Jeszcze silniejszym był wpływ d'Alemberta (1717—1783) na ogólną teorię równań różniczkowych. Przez postawienie znanej pod jego imieniem ogólnej zasady w mechanice¹⁾ sprowadził on w wszystkie zagadnienia dynamiki do równań różniczkowych i dał przez to formę określoną i ogólnie stosować się dającą epokowym ideom mechaniki Newtona. Ważnymi bardzo były także piękne badania d'Alemberta z zakresu równań różniczkowych liniowych, zwyczajnych i cząstkowych.

Imiona Eulera, Lagrange'a i Laplace'a, Monge'a, Ampère'a i Pfaiffa stanowią nową epokę w ogólnej teorii równań różniczkowych. Charakterystyczną cechą tej epoki między innymi jest to, że rozpoczęto i równania cząstkowe traktować z ogólnych punktów widzenia.

Nie mogę oczywiście przy tej sposobności zastanawiać się nad wszystkimi przyczynkami do teorii równań różniczkowych, pochodzącymi od tych wielkich matematyków i ich jeszcze większych następców: Gaussa, Cauchy'ego, Fouriera, Abela, Jacobiego i Riemanna. Spróbuję wszakże w Rozdziale I, chociaż w grubszych rysach, krótko scharakteryzować pewne z najważniejszych kierunków, które dostrzedz można w nowszych badaniach z zakresu równań różniczkowych. Obszerniej traktować będę te tylko kierunki, które stoją w związku z memi własnymi badaniami. Następnie w Rozdziale II postaram się scharakteryzować pewne moje teorie, które dotychczas naszkicowałem tylko bardzo krótko i tylko w języku norweskim. W następnych Rozdziałach rozwinę wreszcie dość obszernie ważne i ogólne teorie całkowania, które także są moją własnością.

R O Z D Z I A Ł I.

Porównawcze rozważania o nowszych badaniach z zakresu teorii równań różniczkowych.

W tym rozdziale podajemy naprzód przegląd badań o równaniach różniczkowych, dokonanych od czasów Eulera i Lagrange'a. Mimo niezupełności i niedokładności, roztrząsania te posłużą do

¹⁾ W najnowszym czasie próbował p. Ostwald postawić ogólną zasadę, mającą obejmować wszystkie prawa natury. Jednakowoż, jak już dawniej zauważyłem, należy żałować, że dotychczasowe matematyczne sformułowanie tej zasady jest tak nieokreślone i niejasne, iż matematycy nie mogą pojmować jej sensu. Dopiero na podstawie prawdziwego sformułowania tej zasady można będzie rozstrzygnąć kwestję, czy np. Hertz miał podobne idee.

wyjaśnienia tendencji naszych własnych usiłowań. Następnie zajmiemy się obszernie teorią charakterystyk, rozwiniętą przez Monge'a, Laplace'a, Ampère'a i Darboux'a. W ten sposób uzyskamy podstawę do wyłożenia własnych badań, które podamy w rozdziałach następnych.

§ 1.

O różnych kierunkach w teorii równań różniczkowych.

O ile mogę się zorientować, prawdziwym powinien być pogląd, że badania o równaniach różniczkowych, ogłoszone w ciągu ostatnich lat studium dwudziestu, można podzielić na cztery lub pięć różnych kategorii, które zawierają co prawda wiele punktów wspólnych.

Do pierwszej kategorii zaliczam naprzód badania o równaniach cząstkowych rzędu pierwszego, rozpoczęte przez Eulera, Lagrange'a i Monge'a, a prowadzone w dalszym ciągu przez Pfaffa, Cauchy'ego, Hamiltona, Jacobi'ego, A. Mayera i innych. Tu zaliczam także badania, rozpoczęte przez Monge'a i Laplace'a o równaniach cząstkowych drugiego i wyższych rzędów. Z pomiędzy następców Monge'a i Laplace'a na tem polu Ampère, Darboux i kilku innych matematyków francuskich uzyskało rezultaty najważniejsze. We wszystkich tych pracach odgrywa wyraźnie lub niewyraźnie bardzo ważną rolę wprowadzone przez Monge'a pojęcie charakterystyki.

Do drugiej kategorii zaliczam badania, rozpoczęte przez d'Alemberta, Fouriera i Cauchy'ego, a prowadzone dalej przez Riemanna, Weierstrassa, Méraya, Schwarza, C. Neumanna, Poincarégo, Picarda i wielu innych wybitnych matematyków; badania, w których chodzi z jednej strony o podanie warunków całkowalności, z drugiej zaś o wyznaczenie całek, odpowiadających danym warunkom granicznym.

Do trzeciej kategorii zaliczam większą część nowszych badań z zakresu równań różniczkowych liniowych, których podstawą jest właściwie ogólna teoria funkcji, wprowadzona do nauki przez Abela i Cauchy'ego. Jakkolwiek należy przyznać, że Gauss i Riemann wytknęli drogę tego kierunku, to jednakowoż za istotnego założyciela tej kategorii badań trzeba uważać Fuchsa (1866). Ten kierunek zyskał nową doniosłość przez zastosowanie pojęcia grupy nieciągłej, wprowadzonego

przez Galois'a. W znanych mi pracach Riemanna pojęcie to wyraźnie nie zachodzi¹⁾; niema go także w dawniejszych pracach Fuchsa. Pierwszymi pracami, w których pojęcie grupy znajduje zastosowanie do ogólnej teorii równań różniczkowych liniowych, są, o ile mi wiadomo, publikacje C. Jordana z pierwszej połowy 1874 roku. Z drugiej strony pewien postęp sprawiło zastosowanie przez Fuchsa (1875) teorii niezmienników Cayley'a do równań różniczkowych liniowych. Bądź co bądź, należy zwrócić uwagę na to, że rezultaty te, jak to pokazał Klein, można wyprowadzić prościej i zupełniej przez połączenie rzeczonych badań C. Jordana i przeprowadzonego przez Kleina (1874) wyznaczenia wszystkich nieciągłych grup rzutowych linii prostej²⁾.

Do tego kierunku należy wielka liczba teoretyczno-funkcyjnych badań Schwarza, Hermite'a, Thomégo, Frobeniusa, Fuchsa, Kleina, Poincarégo, Picarda, Appela, Painlevégo i innych. Nie mamy potrzeby omawiać tych badań; natomiast, jakkolwiek pobieżnie, omówimy później badania Cocklesa, Laguerre'a, Halphen'a, a także Picarda i Vessiot'a z zakresu równań różniczkowych liniowych.

Do czwartej kategorii zaliczam te badania, które wyraźnie lub niewyraźnie spożytkowują moje ogólne pojęcie grupy ciągłej (continuirliche Gruppe) dla teorii całkowania. W pracach tych odgrywa jednocześnie rolę zasadniczą pojęcie niezmiennika różniczkowego (Differentialinvariante), wynikające z pojęcia grupy. Nie mam potrzeby zastanawiać się przy tej sposobności nad historycznym rozwojem tych dwu pojęć. Ten cały kierunek zawdzięcza swój początek memu odkryciu z lat 1869—1870, że teorie całkowania dawniejszych matematyków, traktowane poprzednio, jako teorie osobnionione, można przez wprowadzenie pojęcia grupy ciągłej wyprowadzić z jednego wspólnego źródła. Uwaga ta doprowadziła mnie do szeregu nowych, co prawda, prostych teorii całkowania, które wszystkie charakteryzuje pojęcie grupy (Ges. d. W. Christiania, 1871, Math. Ann., t. V).

¹⁾ Pewnem jest, że pojęcie grupy zachodzi niewyraźnie zarówno w pracach Riemanna, jakoteż i innych pracach dawniejszych. Nic nie wiadomo jednak, czy Riemann istotnie posiadał pojęcie grupy. Riemann w badaniach swych o całkach Abela nie cytuje wcale Galois'a, a okoliczność ta oczywiście nie wskazuje tego, aby idee Galois'a były Riemannowi dokładniej znane.

²⁾ W listopadzie 1873 zakomunikowałem Kleinowi, że przeprowadziłem redukcję wszystkich ciągłych grup jednej zmiennej do grup rzutowych. Ten mój komunikat stanowił, jeżeli się nie mylę, pobudkę zewnętrzną dla Kleina do podjęcia rozwiązania na wiosnę w 1874 zagadnienia o wyznaczeniu wszystkich nieciągłych grup rzutowych o jednej zmiennej. Należy jeszcze zanotować, że Klein już w tym czasie (list z 30 kwietnia 1874) zajmował się kwestyą wszystkich funkcji jednowartościowych, niezmiennych przy grupach rzutowych nieciągłych.

W roku 1872 naszkicowałem, chociaż bardzo zwięźle, wiele ogólnych teorii całkowania, opartych na teorii niezmienników nieskończonej grupy wszystkich przekształceń styczności (Berührungstransformationen), a także na teorii niezmienników wszystkich przekształceń punktów (Punkttransformationen), (porówn. „Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien, kwiecień, 1872; Zur Theorie der Differentialprobleme, 1872; Zur Invariantentheorie der Berührungstransformationen, Grudzień, 1872; Ges. d. W. Christiania). Obszerniejsze opracowanie tych teorii podałem w tem samem wydawnictwie z lat 1873 — lut, 1875; por. Math. Ann., t. VIII i XI. Niema potrzeby cytować tu moich licznych późniejszych publikacji o tych przedmiotach; zaznaczam tylko, że moje najważniejsze rezultaty zestawilem w krótkości w tomach XXIV i XXV Math. Ann. We wszystkich tych badaniach charakterystycznym jest, że nie ograniczam się na wykonaniu pewnych całkowań, lecz zarazem w każdym szczególnym przypadku dokładnie podaję możliwe uproszczenia. Co prawda, należy zauważyć, że dotychczas posiadam in extenso jeszcze nie wszystkie dowody na to, iż większe uproszczenia są niemożliwe.

Do tegoż kierunku zaliczam dalej piękne prace Laguerre'a i Halphen'a o przekształcaniu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. W istocie swojej badania te odnoszą się do grupy nieskończonej:

$$x_1 = \varphi(x), y_1 = y \psi(x),$$

czego jednakowoż nie zaznaczają obaj autorowie. Zmuszony jestem przypuścić, że zarówno Laguerre (1879), jak Halphen (1882) pierwotnie nie znali bliżej ani mojej teorii niezmienników przekształceń styczności, ani opierających się na tem teorii całkowania, bo byliby przecież powołali się na wiele analogij, istniejących pomiędzy ich badaniami i moimi teoryami¹⁾. Należy wreszcie zauważyć, że angielski matematyk Cockle już w roku 1870 rozwinął dla równań liniowych idee, które, pomimo, iż nie mają cechy ogólności, są wszakże spokrewnione z ideami Laguerre'a.

Wreszcie do tego kierunku zaliczam szereg nowych badań Picarda i Vessiot'a, których ważność podnosiłem już przy wielu sposobnościach.

Jeżeli podany tu przegląd historyczny jest prawdziwy, to mogę przypisać sobie pierwszeństwo w za-

¹⁾ Że moje dawniejsze prace geometryczne o krzywych i powierzchniach z nieskończoną liczbą przekształceń rzutowych znane były Halphenowi, wynika to z cytatu jego rozprawy doktorskiej (1879). Że jednakowoż nie znalazł on pierwotnie doniosłości moich teorii całkowania, wynika to już stąd, że jego teorie całkowania nie tylko mają charakter zupełnie specjalny, ale nadto nie doprowadzają ani liczby, ani rzędu działań całkowych do minimum.

stosowaniu pojęcia grupy do całkowania równań różniczkowych. W dziele badań Fuchsa pojęcie grupy i mianowicie pojęcie grupy nieciągłej zastosowane było po raz pierwszy w roku 1874 przez Jordana. Natomiast moja teoria grup funkcji (Functionengruppen) pochodzi z roku 1872, a początek mojej teorii całkowania układów zupełnych z grupą znaną skończoną lub nieskończoną, jest jeszcze dawniejszy.

Oczywiście dłubrze mi wiadomo, że istnieje bardzo wiele ważnych badań z zakresu równań różniczkowych, których nie można zaliczyć do żadnego z czterech omówionych kierunków. Do takich należą teoretyczno-funkcyjne badania Briota i Bouqueta, prace Darboux'a o algebraicznych równaniach różniczkowych, dalej wielkiej wartości badania Bruns'a i Poincarégo z zakresu zagadnienia trzech ciał, wreszcie pewne inne badania teoretyczno-funkcyjne. To też poprzednie uwagi krytyczne nie mają bynajmniej pretensji do wyczerpania całości przedmiotu. Gdy jednak liczba badań o równaniach różniczkowych, szczególnie w ostatnich lat dziesiątkach, wzrosła tak nadzwyczajnie, zdawało mi się rzeczą potrzebną spróbować podania wzajemnych związków, pomiędzy temi wszystkimi badaniami istniejących. Gdy ukończę potrzebne studia bibliograficzne w innem miejscu obszernie przedmiot ten traktować będę.

Pomiędzy temi różnemi kierunkami znajduje się wiele punktów styczności, bardzo interesujących. Moje własne dążenia idą przede wszystkim w tym kierunku, aby pojęcie grupy ciąglej zużytkować i dla trzech pierwszych kierunków.

Już w moich najdawniejszych pracach wykazałem, że zgodnem jest z naturą rzeczy traktować całą teorię równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego ze stanowiska teorii grup. W pracy niniejszej próbuję w możliwie największym zakresie zredukować teorię równań cząstkowych dowolnego rzędu do teorii równań cząstkowych rzędu pierwszego, aby w ten sposób umożliwić traktowanie ogólnej teorii za pomocą pojęcia grupy. Moja następna praca, której treść podałem temu Towarzystwu już na początku roku zeszłego, idzie w tym kierunku znacznie dalej.

§ 2.

Teoria charakterystyk równań cząstkowych.

Z teorii Lagrange'a rozwiązań zupełnych równania cząstkowego 1-go rzędu:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

wynika, jak zauważył Monge, że wszystkie powierzchnie całkowite takie równania, dotyczące się w jednym punkcie, mają wspólną linię krzywą i nadto dotyczą się wzdłuż tej linii krzywej. Monge nazwał te krzywe¹⁾ charakterystykami; dowiódł on, że do każdego równania $F=0$ należy ∞^3 charakterystyk, i że każda powierzchnia całkowita zawiera ∞^1 charakterystyk. Stąd wyprowadził w szczególności wniosek, że przez każdą krzywą, która nie jest charakterystyką, można przeprowadzić tylko jedną krzywą całkową.

Monge rozszerzył pojęcie charakterystyki, co prawda, w formie mało ścisłej, na równania cząstkowe dowolnie wysokiego rzędu pomiedzy x, y, z .

Dla równań drugiego rzędu:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

to rozszerzone pojęcie charakterystyki można podać chociażby w formie następującej:

Monge nazywa charakterystykami te krzywe na każdej powierzchni całkowitej, które czynią zadość równaniu:

$$\frac{\partial F}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s} dy dx + \frac{\partial F}{\partial t} dx^2 = 0.$$

Każda powierzchnia całkowita zawiera tym sposobem ∞^1 charakterystyk, które składają się z dwóch nieskończonych gromad linii krzywych, a więc dwa razy pokrywają powierzchnię, jeżeli tylko wyrażenie:

$$4 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2$$

¹⁾ Wielką zasługą Monge'a w teorii równań różniczkowych polega na tem, że umożliwił on poglądowe traktowanie tej dziedziny przez wprowadzenie prostych pojęć elementarnych. Jemu i jego spółczesnym brakło swobody w operowaniu ilościami urojonymi, brakło znajomości pojęcia przestrzeni n -wymiarowych, a po części i teoretyczno-funkcyjnej ścisłości.

nie równa się zeru. Najłatwiej zdefiniować te krzywe pośrednio. Jeżeli mianowicie przeprowadzimy na dowolnej powierzchni całkowitej linię krzywą, która nie jest charakterystyką, to niema żadnej innej powierzchni całkowitej, któraby wzdłuż tej krzywej była ściśle styczna z powierzchnią daną,

Odpowiednim sposobem rozszerza się pojęcie charakterystyki na dowolne równania cząstkowe (w zmiennych x, y, z).

Te rozważania doprowadziły Monge'a i Ampère'a do teorii całkowania, które w każdym razie pewne z równań cząstkowych postaci:

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$$

redukują do równań różniczkowych zwykłych.

Monge i Ampère wykazali mianowicie, że można podać trzy równania różniczkowe:

$$(1) \quad a_k dx + b_k dy + c_k dz + d_k dp + e_k dq = 0, \quad (k = 1, 2, 3)$$

którym czyni zadość każda charakterystyka jednej z dwu gromad. (Odpowiednio charakterystyki drugiej gromady czynią zadość analogicznemu układowi równań o różniczkach zupełnych, który na razie można pominąć). Może tu zachodzić wiele rdzennie różnych przypadków. Zwrócimy uwagę wraz z Mongem i Ampèrem w szczególności na ten przypadek, gdy układ (1) jest całkowalny i mianowicie założymy, że istnieją dwie i tylko dwie całki niezależne:

$$u(x, y, z, p, q), \quad v(x, y, z, p, q).$$

Na każdej powierzchni całkowitej mają u i v wzdłuż jednej i tej samej charakterystyki wartości stałe, wartości te zaś (wogóle) zmieniają się przy przejściu od jednej do drugiej charakterystyki na tej powierzchni. Zatem na każdej poszczegółnej powierzchni całkowitej u i v są związane równaniem:

$$v - \varphi(u) = 0,$$

którego kształt dla różnych powierzchni całkowitych nie zawsze jest ten sam.

Lecz u i v są określone funkcjami zmiennych x, y, z, p, q ; równanie więc:

$$v - \varphi(u) = 0$$

jest równaniem cząstkowym rzędu pierwszego, a mówiąc dokładniej, gdy φ oznacza funkcję dowolną, równanie:

$$v - \varphi(u) = 0$$

przedstawia nieskończenie wiele równań cząstkowych rzędu pierwszego.

Stąd wynika, że ogólne powierzchnie całkowite danego równania Monge'a-Ampère'a drugiego rzędu otrzymujemy przez wyznaczenie powierzchni całkowitych wszystkich równań rzędu pierwszego:

$$v - \varphi(u) = 0$$

i odnalezienie z pomiędzy tych powierzchni wszystkich takich, które istotnie czynią zadość równaniu cząstkowemu rzędu drugiego. Ale łatwo dostrzedz, że istnieje jedno i tylko jedno równanie cząstkowe drugiego rzędu, któremu czynią zadość powierzchnie całkowite wszystkich równań:

$$v - \varphi(u) = 0.$$

Istotnie, oba równania:

$$\frac{dv}{dx} - \varphi'(u) \frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{dv}{dy} - \varphi'(u) \frac{du}{dy} = 0$$

dają przez rugowanie $\varphi'(u)$ jedyne równanie drugiego rzędu:

$$\frac{dv}{dx} \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dy} \frac{du}{dx} = 0,$$

które jest oczywiście równaniem Monge'a-Ampère'a.

W ten sposób otrzymuje się piękne twierdzenie Monge'a i Ampère'a:

Jeżeli charakterystyki pierwszego rzędu (jednego szeregu) na powierzchniach całkowitych danego równania Monge'a-Ampère'a:

$$Ar + Bs + Ct + D + E(rt - s^2) = 0$$

czynią zadość dwu równaniom postaci:

$$u(x, y, z, p, q) = a = \text{const.},$$

$$v(x, y, z, p, q) = b = \text{const.},$$

to ogólne powierzchnie całkowite można określić przez wyznaczenie powierzchni całkowitych wszystkich równań cząstkowych 1-go rzędu:

$$v - \varphi(u) = 0,$$

gdzie φ jest funkcją dowolną.

Jeżeliby chodziło w szczególności o znalezienie tej powierzchni całkowitej danego równania Monge'a-Ampère'a, która przechodzi przez krzywą daną: $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $z = Z(t)$ i wzdłuż niej dotyka danej powierzchni rozwijalnej, to naprzód należy według danych równań krzywej i związków dodatkowych $p = P(t)$, $q = Q(t)$ wyznaczyć $u(x, y, z, p, q)$ i $v(x, y, z, p, q)$, jako funkcje zmiennej t oraz przez rugowanie zmiennej t określić związek $v - \varphi(u) = 0$, który należy traktować, jako równanie cząstkowe rzędu pierwszego; następnie trzeba określić tę powierzchnię całkowitą owego równania rzędu pierwszego, która zawiera krzywą daną. Pomijamy tu możliwe w pewnych przypadkach uproszczenia w całkowaniu.

Uważajmy teraz zupełnie dowolne równanie cząstkowe rzędu drugiego:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Na wszystkich powierzchniach całkowitych wstęgi charakterystyczne (characteristische Streifen) drugiego rzędu¹⁾ czynią zadość sześciu równaniom liniowym postaci:

$$\begin{aligned} a_k dx + b_k dy + c_k dz + d_k dp + e_k dq + \\ + f_k dr + g_k ds + h_k dt = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

($k = 1, 2, \dots, 6$),

które tworzą układ równań o różniczkach zupełnych.

Załóżmy teraz wraz z Darboux'em, że układ ten jest całkowalny i posiada dwie i tylko dwie całki niezależne:

$$u(x, y, z, \dots, r, s, t), v(x, y, z, \dots, r, s, t).$$

Wówczas wielkości te nie zmieniają swych wartości na każdej powierzchni całkowitej wzdłuż każdej charakterystyki (jednej gromady), przy przejściu zaś od jednej charakterystyki tej powierzchni do drugiej wogóle obie podlegają zmianie. Stąd wnosi Darboux, że każda powierzchnia całkowita równania $F = 0$ czyni zadość równaniu postaci:

$$v - \varphi(u) = 0.$$

To nowe równanie zaś, gdy funkcja φ jest dana, jest równaniem cząstkowym drugiego rzędu, które ma z równaniem $F = 0$ pewne powierzchnie całkowite wspólne.

¹⁾ Wstęgami charakterystycznymi pierwszego, drugiego i t. d. rzędów nazywam charakterystyki, wzdłuż których uwzględnia się nie tylko wartości zmiennych x, y, z , ale i wartości pochodnych p, q, r, s, t i t. d.

Jakkolwiek Darboux tem się nie zajmuje, wyznaczmy tu tę powierzchnię całkową, która przechodzi przez daną krzywą:

$$y = Y(x), z = Z(x)$$

i wzdłuż niej dotyka danej powierzchni rozwijalnej. Inaczej mówiąc: uważamy wedle mojej terminologii daną wstęgę elementarną:

$$y = Y(x), z = Z(x), p = P(x), q = Q(x)$$

i szukamy odpowiedniej powierzchni całkowej równania $F = 0$.

Równania:

$$P' = r + sY', Q' = s + tY'$$

wraz z $dF = 0$ wystarczają, przynajmniej wogóle, do wyznaczenia wielkości r, s, t , jako funkcij zmiennej x dla wszystkich punktów krzywej danej. To określenie jest, według Monge'a i Cauchy'ego, iluzoryczne tylko wówczas, gdy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & Y' & 0 \\ 0 & 1 & Y' \\ F_r & F_s & F_t \end{vmatrix} = F_r Y'^2 - F_s Y' + F_t$$

znika dla wszystkich punktów krzywej danej, inaczej mówiąc, gdy ta krzywa jest charakterystyką. Pomijając ten przypadek wyjątkowy, możemy za pomocą podobnych rozumowań wykazać, że nie tylko r, s, t , ale i pochodne trzeciego i wyższych rzędów są wzdłuż krzywej zupełnie określonei funkcjami zmiennej x . Przez podstawienie wartości:

$$y = Y(x), z = Z(x), p = P(x), q = Q(x), r = R(x), s = S(x), t = T(x)$$

w funkcje $u(x, \dots, t)$ i $v(x, \dots, t)$, otrzymujemy:

$$u = U(x), v = V(x),$$

t. j. także jako funkcje zmiennej x wzdłuż uważanej linii krzywej. Stąd przez rugowanie zmiennej x otrzymujemy zupełnie określone równanie:

$$v - \varphi(u) = 0,$$

zawierające tylko wielkości u i v . Ponieważ zaś ogólna teoria Cauchy'ego wykazuje, że przy danych warunkach granicznych istotnie mamy powierzchnię całkową równania $F = 0$, ponieważ z drugiej strony wiadomo, że dla wszystkich punktów naszej powierzchni całkowej istnieje jedno

i tylko jedno równanie $v - \varphi(u)$; ponieważ nareszcie znalezione równanie $v - \varphi(u) = 0$ zachodzi dla ∞^4 punktów naszej powierzchni całkowej, więc pewnem jest, że właśnie to równanie $v - \varphi(u) = 0$ ma miejsce dla wszystkich punktów naszej powierzchni. Pokażemy potem, jak stąd można określić samą powierzchnię.

Darboux zwraca uwagę, że równania liniowe (2) zawierają pierwiastek kwadratowy i w ten sposób przedstawiają dwa układy równań zupełnych. Ogranicza się on do przypadku, w którym każdy z dwu układów zawiera dwie całki niezależne:

$$u_1, v_1 \text{ i } u_2, v_2.$$

Wówczas każda powierzchnia całkową równania czyni zadość pewnemu równaniu $v_1 - \varphi_1(u_1) = 0$, a także pewnemu równaniu $v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$. Jeżeli zaś na odwrót φ_1 i φ_2 są dowolnie obranymi funkcjami swych argumentów, to znajduje Darboux, że trzy równania cząstkowe drugiego rzędu:

$$F = 0, v_1 - \varphi_1(u_1) = 0, v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$$

zawsze tworzą układ nieograniczenie całkowny; ich ∞^4 powierzchni całkowych wspólnych określa się przez całkowanie równań zwyczajnych.

To jest właśnie punktem zasadniczym teorii Darboux, którą, jak on sam podaje, można rozszerzyć w wielu kierunkach. Szczególnie uwzględni on przypadek, gdy układy równań o różniczkach zupełnych wstęg charakterystycznych jakiegokolwiek rzędu posiadają po dwie całki u_1, v_1 , i u_2, v_2 . Zwraca on uwagę, że wówczas układ równań:

$$F = 0, v_1 - \varphi_1(u_1) = 0, v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$$

jest zawsze nieograniczenie całkowny. W ten sposób Darboux całkuje przez równania zwyczajne wszystkie równania cząstkowe, których całka ogólna należy do pierwszej klasy całek Ampère'a.

Szkoda wielka, że Darboux naszkicował tylko te badania, tak wartościowe i daleko sięgające. Jego publikacje nie wyczerpują bynajmniej zastosowań jego nowych idei.

M. Levy¹⁾ uzupełnił okolicznościowo teorię Darboux za pomocą ważnej, chociaż blisko leżącej uwagi. Levy traktował równanie cząstkowe rzędu drugiego $F = 0$, mające z innym równaniem drugiego lub wyższego rzędu takie powierzchnie całkowite wspólne, których wyrażenie analityczne zależy nie tylko od stałych dowolnych. Przekonał się on, że te powierzchnie

¹⁾ Comptes rendus, 1872.

całkowe posiadają takie wstęgi charakterystyczne, które można określić przez całkowanie układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Wyrażając się ściślej, Levy wykazał, że powierzchnie całkowe takich dwóch równań, dotykające się ściśle w jednym punkcie, dotykają się ściśle wzdłuż pewnej krzywej, która jest charakterystyką obu tych równań.

Stąd wyprowadził wniosek, że rozwiązanie drugiego rzędu $F=0$ może być zcałkowane za pomocą układów równań zwyczajnych, gdy z pomiędzy dwu układów równań wstęp charakterystycznych, damy na to m -go rzędu, chociażby jeden tylko posiada dwie całki niezależne u i v . W ten sposób Levy zcałkował równania cząstkowe drugiego rzędu, których całka ogólna nie należy do całej klasy Ampère'a pierwszej.

Levy podał, że w tym celu trzeba zcałkować trzy układy równań różniczkowych zwyczajnych.

W roku 1874 zauważyłem, że przy warunkach Levy'ego, wystarczy zcałkować dwa układy równań różniczkowych zwyczajnych. Gdy mianowicie wielkości u i v są znalezione przez całkowanie wiadomego układu równań o różniczkach zupełnych, można sobie postawić zadanie o wyznaczeniu tej powierzchni całkowej równania $F=0$, która zawiera krzywą daną i wzdłuż niej dotyka danej powierzchni rozwijalnej. Te warunki graniczne dają cztery związki:

$$y = Y(x), z = Z(x), p = F(x), q = Q(x),$$

które wyznaczają y, z, p, q jako funkcje zmiennej x . Przytem funkcje Y, Z, P, Q eo ipso czynią zadość równaniu:

$$Z' - P - Q Y' = 0.$$

Jeżeli teraz wartości pochodnych r, s, t wzdłuż tej krzywej oznaczmy przez $R(x), S(x), T(x)$, to dla wyznaczenia tych wielkości otrzymamy związki:

$$P' - R - SY' = 0, Q' - S - TY' = 0, \\ F(x, Y, Z, P, Q, R, S, T) = 0,$$

które wogóle można rozwiązać względem R, S i T . Założmy teraz dla uproszczenia, że u i v zależą tylko od pochodnych pierwszego i drugiego rzędu, to odrazu można będzie wyznaczyć u i v jako funkcje zmiennej x :

$$u = U(x), v = V(x),$$

skąd przez rugowanie zmiennej x otrzymamy związek:

$$v - \varphi(u) = 0.$$

Równanie to posiada według Darboux'a takie powierzchnie całkowe wspólne z równaniem $F=0$, które zależą nie tylko od stałych dowolnych. Odpowiednie wstęgi charakterystyczne można na podstawie uwagi Levy'ego znaleźć przez całkowanie układów jednoczesnych równań zwyczajnych. Z pomiędzy tych wstęp należy wybrać ∞^1 takich, które mają dla wielkości x, y, z, p, q, r, s, t układ wartości wspólny z wartościami:

$$y = Y, z = Z, p = P, q = Q, r = R, s = S(x), t = T(x).$$

W ten sposób szukana powierzchnia całkowa równania $F=0$ jest znaleziona¹⁾.

Dodaję tu jeszcze, za pomocą jakich rozumowań poznałem pierwotnie prawdziwość twierdzeń Levy'ego.

Uważajmy naprzód równanie cząstkowe pierwszego rzędu $F(x, y, z, p, q) = 0$. Dla wszystkich powierzchni całkowych takiego równania różniczkowego, które mają element x, y, z, p, q wspólny, odpowiednie wartości pochodnych r, s, t czynią zadość dwu równaniom liniowym. Jeżeli następnie utworzymy równanie:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} r (X - x)^2 + s (X - x) (Y - y) + \frac{1}{2} t (Y - y)^2 + \dots,$$

które przedstawia linię wskazującą Dupin'a w wszystkich tych powierzchni, to dostrzeżemy, że te krzywe drugiego stopnia tworzą pęk krzywych i że nadto pęk ten składa się z ∞^1 spółśrodkowych przecięć stożkowych, które dotykają się wzajemnie w dwu punktach. Uwaga ta prowadzi bezpośrednio do twierdzenia, będącego podstawą teorii całkowania Lagrange'a i Monge'a równania $F(x, y, z, p, q) = 0$, mianowicie do twierdzenia: Jeżeli dwie powierzchnie całkowe równania $F(x, y, z, p, q) = 0$ mają jeden element x, y, z, p, q wspólny, to mają także i sąsiedni element wspólny.

Założmy teraz wraz z Darboux'em i Levy'm, że dwa równania cząstkowe drugiego rzędu:

$$r - f(x, y, z, p, q, s) = 0, t - \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0$$

mają ∞^∞ powierzchni całkowych wspólnych i w ten sposób czynią w każdym razie zadość warunkowi: $f' \varphi' - 1 = 0$; widzimy bezpośrednio, że linie wskazujące trzeciego rzędu tych powierzchni:

$$\alpha (X - x)^3 + 3 \beta (X - x)^2 (Y - y) + 3 \gamma (X - x) (Y - y)^2 + \delta (Y - y)^3 = \varepsilon$$

stanowią ∞^1 krzywych trzeciego rzędu, które są do siebie ściśle styczne.

¹⁾ Lie, Rozpr. Tow. nauk. w Chrystyanii 1874, str. 274.

Stąd wynika bezpośrednio, że wszystkie wspólne powierzchnie całkowite, które stykają się ściśle w jednym punkcie, stykają się ściśle wzdłuż pewnej krzywej.

ROZDZIAŁ II.

Uzupełnienie teorii charakterystyk Monge'a.

Gdy udało mi się dokładnie zrozumieć teorie Monge'a, Ampere'a, Darboux'a i Levy'ego, co z powodu bardzo treściwej redakcji badań, szczególnie Levy'ego, wymagało w każdym razie pewnej pracy samodzielnej, dostrzegłem zaraz, że nowe idee Darboux'a nie zostały w zupełności wyzyskane przez Levy'ego. Pierwotnie poprzestałem na naszkicowaniu pewnych metod w lutym 1880, które ogłosiłem w rozprawach Towarzystwa naukowego w Chrystyanii. Metody te w rzeczy samej uzupełniają teorię charakterystyk moich poprzedników. Rozwijając w rozdziale tym te moje dawne teorie obszerniej, uważam naprzód za potrzebne, wyjaśnienie mej zwykłej terminologii.

Powiadamy, że układ dwu równań cząstkowych drugiego rzędu

$$(3) \quad F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad F_2(\dots) = 0$$

jest nieograniczenie całkowalny, gdy posiadają one takie wspólne powierzchnie całkowite, które nie czynią zadość żadnym innym równaniom cząstkowym drugiego lub pierwszego rzędu. Według ogólnej teorii Darboux'a są tu możliwe tylko dwa przypadki, zależnie od tego, czy równania te posiadają ∞^4 , czy też ∞^∞ powierzchni całkowitych wspólnych. W ostatnim przypadku powiadam, że nasz nieograniczenie całkowalny układ równań cząstkowych drugiego rzędu jest układem inwolucyjnym, lub układem Darboux'a.

Odpowiednio powiadam, że układ równań cząstkowych m -go rzędu jest nieograniczenie całkowalny, jeżeli posiadają one taki utwor całkowity wspólny, który nie czyni zadość żadnemu równaniu m -go lub niższego rzędu. Nazywam następnie układ nieograniczenie całkowalny równań cząstkowych układem Darboux'a, jeżeli wspólne utwory całkowite nie tylko zależą od stałych dowolnych. W szczególności układ Darboux'a nazywam układem inwolucyjnym, jeżeli liczba wspólnych utworów całkowitych dochodzi do maximum.

W naszym szczególnym przypadku (3) każdy układ Darboux'a jest układem inwolucyjnym. To bynajmniej nie zachodzi zawsze. Pomiędzy układami nieograniczenie całkowalnymi istnieją różne klasy, które według mojej terminologii należy nazywać układami Darboux'a. W szeregu tych klas układy inwolucyjne same dla siebie tworzą pewną klasę, którą należy uważać jako najważniejszą.

Wyprowadzimy raz jeszcze rezultat, znaleziony przez Levy'ego.

Zwracamy się więc do układów nieograniczenie całkowalnych drugiego rzędu:

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad F_2(\dots) = 0.$$

Jeżeli z pomiędzy wszystkich powierzchni całkowitych takiego układu wybierzemy ∞^3 , to będziemy mogli ∞^3 powierzchni nieskończenie wieloma sposobami rozłożyć na ∞^1 gromad, które wyznaczone będą przez równanie postaci:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = c.$$

Wielkości a, b, c oznaczają tu stałe dowolne, z których stała c dla wszystkich powierzchni jednej gromady ma wartość określoną. Rugując następnie z równań:

$$\Phi_x + \Phi_z p = 0, \quad \Phi_y + \Phi_z q = 0$$

i równania $\Phi = c$ parametry a i b , otrzymujemy równanie cząstkowe pierwszego rzędu:

$$V(x, y, z, p, q) = c,$$

które dla każdej wartości parametru c ma (co najmniej) ∞^2 powierzchni całkowitych wspólnych z równaniami $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$. Można więc, gdy dany jest układ nieograniczenie całkowalny $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$, postawić zagadnienie wyznaczenia wszystkich takich równań $V(x, y, z, p, q) = c$, które dla każdej wartości c mają co najmniej ∞^2 powierzchni całkowitych wspólnych z $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$. Warunek ten równoważny jest z żądaniem, aby cztery równania rzędu drugiego:

$$\begin{aligned} F_1 &= 0, \quad F_2 = 0, \\ V_x + V_z p + V_r r + V_s s &= 0, \\ V_y + V_z q + V_r s + V_s t &= 0 \end{aligned}$$

miały (co najmniej) ∞^3 powierzchni całkowitych wspólnych.

Jeżeli z pomiędzy tych równań wyrugujemy r, s, t , to otrzymamy jedno, lub w pewnych okolicznościach dwa równania, które mają postać:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0$$

i względem pochodnych funkcji V są jednorodne.

Idąc dalej, możemy bez istotnego ograniczenia przyjąć, że równania: $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$ zachodzą w kształcie:

$$r + R(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

$$t + T(\dots) = 0^1).$$

Jeżeli oba te równania zróżniczkujemy względem x i y , to otrzymamy dla wyznaczenia pochodnych rzędu trzeciego $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ związki:

$$\alpha + R_s \beta + \dots = 0,$$

$$\beta + R_s \gamma + \dots = 0,$$

$$T_s \beta + \gamma + \dots = 0,$$

$$T_s \gamma + \delta + \dots = 0.$$

Jeżeli wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & R_s & 0 \\ 0 & T_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T_s & 1 \end{vmatrix} = 1 - T_s R_s \equiv 1 - T' R'$$

jest różny od zera, to nasz układ nieograniczenie całkowalny posiada dokładnie ∞^4 powierzchni całkowych. Jeżeli zaś wyznacznik ten jest tożsamościowo równy zeru, to układ $F_1 = 0, F_2 = 0$ jest układem Darboux'a, lub, co tu najjedno wychodzi, układem inwolucyjnym.

Jeżeli wyrugujemy z pomiędzy czterech równań:

$$r + R = 0, \quad t + T = 0,$$

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0,$$

$$V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0$$

wielkości r, s i t , otrzymamy jedno lub dwa równania cząstkowe pierwszego rzędu dla wyznaczenia V jako funkcji pięciu zmiennych x, y, z, p, q

¹⁾ Do tego kształtu można zawsze doprowadzić nasz układ przez odpowiednie przekształcenie styczności.

zależnie od tego, czy w macierzy:

$$\begin{vmatrix} 1 & R' & 0 \\ 0 & T' & 1 \\ V_p & V_q & 0 \\ 0 & V_p & V_q \end{vmatrix}$$

wyznaczniki trzeciego stopnia:

$$V_q - R' V_p, \quad T' V_q - V_p, \quad V_q (V_q - R' V_p), \quad V_p (T' V_q - V_p)$$

wszystkie znikają tożsamościowo, czy też nie. Widoczna bezpośrednio, że oba wyrażenia $V_q - R' V_p$ i $T' V_q - V_p$ w każdym razie mogą znikać tylko wtedy, gdy $1 - R' T' = 0$, t. j., gdy równania $r + R = 0$ i $t + T = 0$ tworzą układ inwolucyjny. W tym przypadku wielkości:

$$R' = \frac{V_q}{V_p}, \quad T' = \frac{V_p}{V_q}$$

zależałyby tylko od x, y, z, p, q i odpowiednio R i T miałyby kształt:

$$R = s \frac{V_q}{V_p} + m(x, y, z, p, q) = as + m,$$

$$T = s \frac{V_p}{V_q} + n(x, y, z, p, q) = \frac{1}{a} s + n.$$

Wobec tego wielkość s wypadłaby z równań:

$$V_x + V_z p - V_p \left(s \frac{V_q}{V_p} + m \right) + V_q s = 0,$$

$$V_y + V_z q + V_p s - V_q \left(s \frac{V_p}{V_q} + n \right) = 0$$

i V musiałoby czynić zadość równaniom:

$$V_x + V_z p - m V_p = 0, \quad V_y + V_z q - n V_q = 0, \quad V_q - a V_p = 0,$$

kóre są równaniami cząstkowymi rzędu pierwszego. Wówczas $V = c$ byłoby wspólną całką pośrednią równań $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$ i ten przypadek możemy pozostawić na uboczu.

Jeżeli tedy mamy układ nieograniczenie całkowny dwu równań cząstkowych rzędu drugiego:

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, F_2(\dots) = 0$$

to możliwe są trzy następujące przypadki.

Równania nasze mogą mieć jedną wspólną całkę pośrednią:

$$W(x, y, z, p, q) = c,$$

która otrzymuje się przez całkowanie zwyczajnego równania różniczkowego rzędu pierwszego. W tym przypadku układ równań $F_1 = 0, F_2 = 0$ jest równoważny z równaniami:

$$\frac{dW}{dx} = 0, \frac{dW}{dy} = 0.$$

Dalej możliwe jest, że równania $F_1 = 0, F_2 = 0$ posiadają dokładnie ∞^4 powierzchni całkowych, które można wyznaczyć przez całkowanie zwyczajnego równania różniczkowego czwartego rzędu. Nareszcie układ $F_1 = 0, F_2 = 0$ może mieć ∞^∞ powierzchni całkowych wspólnych, z pomiędzy których niema więcej, niż ∞^2 takich, które czynią zadość określonymu równaniu cząstkowemu pierwszego rzędu.

Do odróżnienia tych trzech przypadków prowadzą kryteria następujące.

Doprowadzamy równania $F_1 = 0, F_2 = 0$ do kształtu:

$$r + R(x, y, z, p, q, s) = 0, t + T(\dots) = 0$$

i tworzymy następnie równania:

$$(4) \quad \begin{cases} V_x + V_z p - V_p R + V_q s = 0 \\ V_y + V_z q + V_p s - V_q T = 0; \end{cases}$$

jeżeli wielkość s sama znika z obu tych liniowych równań cząstkowych, to mamy przypadek pierwszy. Wówczas R i S mają kształty:

$$R = a(x, y, z, p, q) s + m(x, y, z, p, q),$$

$$S = \frac{s}{a} + n(x, y, z, p, q),$$

a trzy liniowe równania cząstkowe:

$$V_q - a V_p = 0,$$

$$V_x + p V_z - m V_p = 0,$$

$$V_y + q V_z - n V_q = 0$$

wraz z czwartym, otrzymującem się za pomocą symbolów Poissona, stanowią układ zupełny, który posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie: $V = W(x, y, z, p, q)$; wówczas $W = c$ jest szukaną całką pośrednią.

Jeżeli dopiero co podane kryteria nie sprawdzają się, to przez rugowanie wielkości s otrzymujemy jedno tylko równanie cząstkowe:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0,$$

które określa V jako funkcję zmiennych x, y, z, p, q i nadto jest jednorodne względem pochodnych $V_x, \dots$.

Jeżeli tedy $V(x, y, z, p, q)$ jest dowolnem rozwiązaniem równania $\Omega = 0$, to równania:

$$F_1 = 0, F_2 = 0, V = c$$

dla każdej wartości stałej c tworzą układ nieograniczenie całkowny z ∞^2 wspólnymi powierzchniami całkowymi.

Tu mamy oczywiście zawsze ∞^∞ różnych równań $V = c$, z których każde daje ∞^2 powierzchni całkowych układu $F_1 = 0, F_2 = 0$.

Należy jednakże zauważyć, że stąd bynajmniej nie wynika, aby dane równania $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$ miały ∞^∞ powierzchni całkowych wspólnych. To zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wielkość R, T, S — 1 znika tożsamościowo. Jeżeli warunkowi temu nie staje się zadość, natenczas równania $F_1 = 0, F_2 = 0$ mają tylko ∞^4 powierzchni całkowych wspólnych.

Jeżeli tedy mamy układ nieograniczenie całkowny:

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, F_2(\dots) = 0,$$

to we wszystkich przypadkach zgodnem jest z naturą rzeczy szukać takich równań cząstkowych rzędu pierwszego:

$$V(x, y, z, p, q) = c,$$

które miałyby z układem co najmniej ∞^2 powierzchni całkowych wspólnych. W tym celu rugujemy wielkości r, s, t pomiędzy $F_1 = 0, F_2 = 0$ i równaniami:

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0,$$

$$V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0,$$

a przez to, oprócz przypadku, w którym $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$ mają pośrodkową całkę wspólną, otrzymujemy jedno równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0,$$

które określa V jako funkcję wielkości x, y, z, p, q . Pokażemy, że to równanie cząstkowe jest zawsze półliniowe (semilinear). Pokażemy następnie, że jeżeli

$$z = f(x, y)$$

jest wspólną powierzchnią całkową dwu równań $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$, wówczas trzy równania:

$$z = f(x, y), p = f_x, q = f_y$$

przedstawiają w pięciowymiarowej przestrzeni x, y, z, p, q taką dwuwymiarową mnogość punktów, które wedle mego sposobu wyrażenia się, jest istotnym obrazem całkowym równania cząstkowego rzędu 1-go $\Omega = 0$.

Niech w rzeczy samej

$$z = f(x, y, a, b, c)$$

będzie równaniem ∞^3 powierzchni całkowych dwu równań $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$. Wówczas (por. str. 85, 86) istnieje nieskończenie wiele takich funkcji $V(x, y, z, p, q)$, że równaniom 2-go rzędu:

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0,$$

$$V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0$$

staje się zadość przez podstawienie $z = f$ przy dowolnych wartościach parametrów a, b, c .

Jeżeli tedy równania: $z = f, p = f_x, q = f_y$ rozwiążemy względem a, b, c :

$$a = A(x, y, z, p, q), b = B, c = C$$

i wprowadzimy oznaczenie:

$$\Phi(x, y, A, B, C) \equiv \bar{\Phi}(x, y, a, b, c),$$

¹⁾ Zobacz moją notatkę w Göttinger Nachrichten, październik, 1872, str. 480 i nast.

to możemy napisać, że wyżej uważane funkcje V i f zawsze czynią tożsamościowo zadość związkom:

$$(6) \quad V_x + V_z \bar{f}_x + V_p \bar{f}_{xx} + V_q \bar{f}_{xy} \equiv 0$$

$$V_y + V_z \bar{f}_y + V_p \bar{f}_{xy} + V_q \bar{f}_{yy} \equiv 0$$

Ale związki:

$$(7) \quad F_1(x, y, z, p, q, \bar{f}_{xx}, \bar{f}_{xy}, \bar{f}_{yy}) = 0, F_2(\dots) = 0$$

zachodzą także tożsamościowo. A więc, jak zauważyliśmy już poprzednio, równanie:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0,$$

otrzymujące się przez rugowanie $\bar{f}_{xx}, \bar{f}_{xy}, \bar{f}_{yy}$ z równań (6) i (7), musi także zachodzić tożsamościowo. Przytem jedynym naszym założeniem jest to, że funkcję V obraliśmy tak, iż każde z ∞^1 równań $V = c$ posiada (co najmniej) ∞^3 powierzchni całkowych wspólnych z równaniami $F_1 = 0, F_2 = 0$.

Jeżeli tedy zakładać będziemy, że równanie $z = f(x, y, a, b, c)$ daje ∞^3 powierzchni całkowych wspólnych obu równań $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$ i oznaczać:

$$\Psi(x, y, A, B, C) \equiv \bar{\Psi};$$

wówczas założenie nasze wyrażać się będzie analitycznie tożsamościowem zachodzeniem związków:

$$(8) \quad F_1(x, y, z, p, q, \bar{f}_{xx}, \bar{f}_{xy}, \bar{f}_{yy}) = 0, F_2(\dots) = 0.$$

Równania:

$$z = f(x, y, a, b, c), p = f_x, q = f_y$$

określają tedy w pięciowymiarowej przestrzeni ∞^3 mnogości dwuwymiarowych, z których każda posiada ∞^4 elementów, których współrzędne: (Math. Ann., t. IX, str. 250 — 251)

$$x, y, z, p, q, V_x : V_y : V_z : V_p : V_q$$

określone są przez równania:

$$z = f, p = f_x, q = f_y,$$

$$V_x + V_z f_x + V_p f_{xx} + V_q f_{xy} = 0,$$

$$V_y + V_z f_y + V_p f_{xy} + V_q f_{yy} = 0.$$

Więc te ∞^3 rozmaitości punktów posiadają razem $\infty^3 \cdot \infty^4 = \infty^7$ elementów, które z szeregu wszystkich ∞^9 elementów pięciowymiarowej przestrzeni wyszczególnione są przez równania:

$$(9) \quad \begin{aligned} V_x + V_z p + V_p f_{xx} + V_q f_{xy} &= 0, \\ V_y + V_z p + V_p f_{xy} + V_q f_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli oba równania cząstkowe $F_1 = 0, F_2 = 0$, jak założyliśmy, mają więcej niż ∞^3 powierzchni całkowych wspólnych, to oba równania (9) mogą mieć ∞^∞ różnych postaci. Łatwo dostrzedz wszakże, że nasze ∞^7 elementów w pięciowymiarowej przestrzeni czynią zawsze zadość jednemu równaniu, posiadającemu zupełnie określoną postać. Równaniem tem jest równanie:

$$\Omega(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0,$$

które, jak wiadomo, otrzymuje się przez rugowanie wielkości $\overline{f_{xx}}, \overline{f_{xy}}, \overline{f_{yy}}$ z pomiędzy równań (8) i (9).

Dowiedzieliśmy tedy, że równaniu cząstkowemu rzędu pierwszego $\Omega = 0$ można uczynić zadość przez każdą dwuwymiarową rozmaitość punktów $y = f, p = f_x, q = f_y$, jeżeli tylko równanie $z = f$ w przestrzeni trójwymiarowej x, y, z , przedstawia powierzchnię, czyniącą zadość obu równaniom $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$.

Jeżeli układ nieograniczenie całkowny posiada w przestrzeni x, y, z tylko ∞^4 powierzchni całkowych $z = \varphi(x, y, a, b, c, d)$, to rezultat ten nie daje nic nowego. Wówczas bowiem równania:

$$z = \varphi(x, y, a, b, c, d), p = \varphi_x, q = \varphi_y$$

wyznaczają w przestrzeni x, y, z, p, q dokładnie ∞^4 dwuwymiarowych rozmaitości punktów, których $\infty^4 \cdot \infty^4 = \infty^8$ elementów

$$x, y, z, p, q, V_x : V_y : V_z : V_p : V_q$$

czynią widocznie zadość jednemu i tylko jednemu równaniu

$$\Theta(x, y, z, p, q, V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0$$

przytem te ∞^4 rozmaitości punktów stanowią wedle mojej terminologii eo ipso zupełne rozwiązanie równania cząstkowego rzędu pierwszego $\Theta = 0$.

Przeciwnie gdy dwa równania $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$ tworzą układ inwolucyjny, rezultat ten jest nawet bardzo interesujący. Z teorii bowiem równań cząstkowych rzędu pierwszego wiadomo, że każdy prawdziwy utwór całkowy (t. j. każdy utwór całkowy, posiadający możliwie największą liczbę elementów) składa się ze wstęg charakterystycznych. W szczególności wiadomo, że utwory całkowe równania $\Omega = 0$ składają się z ∞^7 wstęg charakterystycznych i przytem, że każdy utwór całkowy zawiera ∞^3 tych wstęg charakterystycznych. Utrzymujemy, że miejsce geometryczne punktów we wstęgi w przestrzeni 5-ciu wymiarach jest linią krzywą a nie punktem; inaczej mówiąc, utrzymujemy, że wielkości x, y, z, p, q , nie dla każdej wstęgi charakterystycznej mogą posiadać wartości stałe; wynika to bezpośrednio stąd, że w każdym razie pewne z pomiędzy 5-ciu wielkości V_x, V_y, V_z, V_p, V_q muszą zachodzić w równaniu $\Omega = 0$. Dodajemy, że i trzy wielkości x, y, z także nie mogą mieć wartości stałych dla każdej wstęgi charakterystycznej; wynika to stąd, że liczba dwuwymiarowych utworów całkowych jest co najmniej ∞^4 , i że wszystkie dwuwymiarowe utwory całkowe nie czynią zadość żadnemu innemu równaniu cząstkowemu rzędu pierwszego, prócz $\Omega = 0$ tak, że każda wstęga charakterystyczna należy co najmniej do jednej rozmaitości dwuwymiarowej: $z = f, p = f_x, q = f_y$. Stąd wynika, że gdyby x, y, z lub też tylko x, y dla jakiejś wstęgi charakterystycznej miały wartości stałe, to z, p, q byłyby dla tej wstęgi także wielkościami stałymi. Tedy ∞^7 wstęg charakterystycznych w przestrzeni pięciowymiarowej przedstawione są przez równanie $\Omega = 0$ i przez siedem równań pomiędzy wielkościami:

$$x, y, z, p, q, V_x : V_y : V_z : V_p : V_q$$

i siedmioma stałymi dowolnymi, z którychto równań można otrzymać dwa i tylko dwa równania pomiędzy x, y, z i stałymi dowolnymi:

$$\varphi_1(x, y, z, c_1, \dots, c_7) = 0, \varphi_2(x, y, z, c_1, \dots, c_7) = 0.$$

Stąd wynika wszakże, że w trójwymiarowej przestrzeni wszystkie powierzchnie $z = f$ zawierają nieskończenie wiele krzywych, należących do gromady $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$.

Można dowieść, że gromada krzywych $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ obejmuje nie ∞^7 , lecz ∞^5 krzywych, i odpowiednio, że wprowadzie w pięciowymiarowej przestrzeni liczba wstęg charakterystycznych równa się ∞^7 , to jednak liczba krzywych charakterystycznych jest w tej przestrzeni ∞^5 ¹⁾.

¹⁾ Już w pierwszej mojej pracy z ogólnej teorii równań cząstkowych zwróciłem uwagę na takie równania cząstkowe rzędu pierwszego, dla których liczba wstęg charakterystycznych jest większą od liczby krzywych charakterystycznych. (Towarzystwo Nauk w Chrystianii, 1872, krótki komunikat...). Przy innej sposobności zajmę się między innymi ważnymi stosunkami obu pojęć: układ Darboux i układ inwolucyjny.

Ponieważ mianowicie liczba istniejących dwuwymiarowych utworów równania $\Omega = 0$ wyraża się symbolem ∞^∞ , więc każdy utwór całkowity może zawierać tylko ∞^1 krzywych charakterystycznych. Stąd wynika, że w pięciowymiarowej przestrzeni każda krzywa charakterystyczna jest miejscem geometrycznym ∞^2 wstęg charakterystycznych.

Stąd wynika dalej, że przez każdy punkt pięciowymiarowej przestrzeni przechodzi tylko ∞^1 krzywych charakterystycznych. Te krzywe czynią tedy zadość trzem równaniom nieliniowym postaci:

$$\varphi(x, y, z, p, q, dx, dy, dz, dp, dq) = 0.$$

Jeżeli w przestrzeni pięciowymiarowej uważać będziemy dowolną krzywą, która tym trzem równaniom czyni zadość i jeżeli wykreśliśmy ∞^1 stycznych charakterystyk, to otrzymamy zawsze istotny utwór całkowity równania $\Omega = 0$, a jednocześnie powierzchnię całkową układu inwolucyjnego $F_1 = 0, F_2 = 0$.

W ten sposób, wedle mego zdania, teoria Levy'ego otrzymała swą prawdziwą postać. Stąd bliska już droga do uogólnienia.

Uważajmy teraz układ nieograniczenie całkowny rzędu pierwszego składający się z trzech równań:

$$(A) \quad F_1(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0,$$

które określają z_1 i z_2 jako funkcje zmiennych x, y . Jeżeli

$$z_1 = f(x, y), \quad z_2 = \varphi(x, y)$$

czynią zadość temu układowi, to te dwa równania wyznaczają w czterowymiarowej przestrzeni x, y, z_1, z_2 dwuwymiarową całkową rozmaiłość punktów układu. Ponieważ układ nasz $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$, ma być nieograniczenie całkowny, więc istnieje co najmniej ∞^3 takich dwuwymiarowych rozmaiłości całkowych. Jeżeli tedy liczba tych rozmaiłości jest dokładnie ∞^3 , to z moich ogólnych teorii wynika bezpośrednio istnienie półliniowego równania cząstkowego rzędu pierwszego

$$\Phi\left(x, y, z_1, z_2, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z_1}, \frac{\partial V}{\partial z_2}\right) = 0,$$

dlą którego te ∞^3 rozmaiłości są rozwiązaniami w mojem znaczeniu tego słowa i tworzą nadto rozwiązanie zupełne. Zdziwiałem jest jednakowoż przynajmniej z pierwszego rzutu oka, że nasze rozmaiłości całkowite $z_1 = f, z_2 = \varphi$, także wtedy są rozwiązaniami równania cząstkowego $\Phi = 0$, gdy liczba ich jest większą od ∞^3 .

Z pomiędzy rozmaiłości całkowych układu inwolucyjnego $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$ wyszczególnimy ∞^2 takich, które nie spełniają żadnego skończonego związku $\psi(x, y, z_1, z_2) = 0$, wolnego od parametrów. Te rozmaiłości czynią zadość dwu związkom skończonym pomiędzy x, y, z_1, z_2 i dwoma parametrami a i b . Założmy, że jeden z tych związków doprowadziliśmy do postaci

$$F(x, y, z_1, z_2, a) - b = 0;$$

różniczkując ten związek względem z i y , otrzymujemy:

$$V_x + V_{z_1} p_1 + V_{z_2} p_2 = 0,$$

$$V_y + V_{z_1} q_1 + V_{z_2} q_2 = 0.$$

Jeżeli z pomiędzy tych obu równań i równań $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$, wyrugujemy wielkości p_1, p_2, q_1, q_2 , to otrzymamy jedno (i jak możemy przyjąć bez dalszej dyskusji tylko jedno) równanie cząstkowe pierwszego rzędu:

$$\Omega(x, y, z_1, z_2, V_x, V_y, V_{z_1}, V_{z_2}) = 0.$$

Udowodnimy, że to równanie cząstkowe jest półliniowe i że każda rozmaiłość całkowita naszego układu inwolucyjnego (A) jest rozwiązaniem równania $\Omega = 0$.

Uważajmy ∞^2 dowolnych rozmaiłości całkowych:

$$z_1 = f(x, y, a, b), \quad z_2 = \varphi(x, y, a, b)$$

układu inwolucyjnego (A) i zauważmy, że każda taka rozmaiłość zawiera ∞^3 elementów, których spórządne:

$$x, y, z_1, z_2, V_x : V_y : V_{z_1} : V_{z_2}$$

określone są wedle moich ogólnych teorii przez równania $z_1 = f, z_2 = \varphi$ wraz z równaniami:

$$V_x + V_{z_1} f_x + V_{z_2} \varphi_x = 0,$$

$$V_y + V_{z_1} f_y + V_{z_2} \varphi_y = 0.$$

Jeżeli równania $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ dają rozwiązanie:

$$a = A(x, y, z_1, z_2), \quad b = B(x, y, z_1, z_2)$$

i jeżeli dla skrócenia oznaczmy:

$$\psi(x, y, A, B) \equiv \bar{\psi}$$

to wzory:

$$(B) \quad \begin{aligned} V_x + V_z \bar{f}_x + V_z \bar{\varphi}_x &= 0, \\ V_y + V_z \bar{f}_y + V_z \bar{\varphi}_y &= 0 \end{aligned}$$

dadzą dwa równania cząstkowe rzędu pierwszego, których rozwiązania przedstawiają rozmaiłości całkowite $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ układu inwolucyjnego $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$. Forma obu równań (B) zależy mniej lub więcej od tego, jakie rozmaiłości całkowite są obrane. Można jednak znaleźć równanie cząstkowe pierwszego rzędu zupełnie określonej formy, które spełnia się dla wszystkich rozmaiłości całkowitych układu inwolucyjnego. W samej rzeczy trzy równania:

$$F_k(x, y, f, \varphi, f_x, \varphi_x, f_y, \varphi_y) = 0$$

spełniają się tożsamościowo w x, y, a, b , niezależnie od tego, które ∞^3 rozmaiłości całkowite układu inwolucyjnego będą obrane. Odpowiednio trzy równania:

$$F_k(x, y, z_1, z_2, \bar{f}_x, \bar{\varphi}_x, \bar{f}_y, \bar{\varphi}_y) = 0$$

zachodzą zawsze tożsamościowo i mianowicie w zmiennych x, y, z_1, z_2 .

Jeżeli tedy cztery wielkości $\bar{f}_x, \bar{\varphi}_x, \bar{f}_y, \bar{\varphi}_y$, wyrugujemy z pomiędzy trzech ostatnich związków i obu równań rzędu pierwszego (B), to otrzymując się z tego rugowania równanie cząstkowe rzędu pierwszego:

$$\Omega(x, y, z_1, z_2, V_x, V_y, V_z, V_z) = 0,$$

którego kształt jest widocznie zupełnie określony, spełnia się dla każdej rozmaiłości całkowitej układu inwolucyjnego $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$.

Dowiedliśmy tedy twierdzenia, o które chodziło.

Stąd wyprowadzamy wniosek zasadniczy, że każda rozmaiłość całkowita składa się z charakterystyk. Nasze równanie cząstkowe $\Omega = 0$ ma ∞^3 wstęp charakterystycznych w przestrzeni czterowymiarowej x, y, z_1, z_2 .

Każda rozmaiłość całkowita układu inwolucyjnego (A), uważana jako utwór całkowity równania $\Omega = 0$ zawiera ∞^2 wstęp charakterystycznych. Stąd nie wynika wszakże, aby każda rozmaiłość całkowita zawierała ∞^2 różnych krzywych charakterystycznych. To jest nawet niemożliwe, bo w tym przypadku nie mogłoby istnieć ∞^∞ różnych dwuwymiarowych rozmaiłości całkowitych układu inwolucyjnego (A).

Każda dwuwymiarowa rozmaiłość całkowita $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ naszego układu inwolucyjnego $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ zawiera tedy wprawdzie ∞^3 różnych wstęp charakterystycznych, jednakże tylko ∞^1 różnych krzywych charakterystycznych. Każda taka krzywa jest miejscem geometrycznym ∞^1 wstęp charakterystycznych.

Półliniowe równanie cząstkowe $\Omega = 0$ posiada więc wprawdzie w czterowymiarowej przestrzeni ∞^5 wstęp charakterystycznych, jednakowoż posiada ono tylko ∞^4 krzywych charakterystycznych, z pomiędzy których zawsze ∞^1 przechodzi przez punkt ogólnego położenia x, y, z_1, z_2 .

Stąd wyprowadzamy naprzód wniosek, że do każdego punktu x, y, z_1, z_2 należy stożek elementarny, zawierający tylko ∞^1 kierunków i określony zatem nie przez jedno równanie Monge'a, ale przez dwa takie równania:

$$\Phi_1(x, y, z_1, z_2, dx, dy, dz_1, dz_2) = 0, \quad \Phi_2 = 0.$$

Wnosimy dalej, że miejsce geometryczne punktów wszystkich wstęp charakterystycznych, przechodzących przez jeden punkt, jest dwuwymiarową rozmaiłością punktów, która eo ipso stanowi rozmaiłość całkowitą układu inwolucyjnego.

Należy zauważyć, że znalezione cechy naszego równania $\Omega = 0$ bynajmniej nie wynikają bezpośrednio stąd, że to równanie rzędu pierwszego jest półliniowe.

Jeżeli wogóle mamy równanie półliniowe w czterech zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$

to, gdy wielkościom x damy wartości stałe, zaś p traktować będziemy jako współrzędne jednorodne płaszczyznowe w przestrzeni o trzech wymiarach, można¹⁾ będzie powiedzieć, że $\Pi = 0$ przedstawia w tej przestrzeni trójwymiarowej powierzchnię prostoliniową. W danym przypadku, należy jeszcze dodać, że ta powierzchnia prostoliniowa redukuje się do krzywej w trójwymiarowej przestrzeni.

Można tu wyprowadzić jeszcze inne wnioski. Widocznie istnieje w przestrzeni x, y, z_1, z_2 , nieskończenie wiele i mianowicie ∞^∞ krzywych,

¹⁾ Göttinger Nachrichten, October, 1872.

które spełniają oba równania Monge'a $\mathcal{Q}_1 = 0$, $\mathcal{Q}_2 = 0$. Uważając tedy zupełnie dowolną taką krzywą całkową układu $\mathcal{Q}_1 = 0$, $\mathcal{Q}_2 = 0$, widzimy, że w każdym punkcie styka się ona z zupełnie określoną krzywą charakterystyczną równania $\Omega = 0$. Określone tym sposobem ∞^1 krzywe charakterystyczne tworzą dwuwymiarową rozmiatość punktów, która daje rozmiatość całkową równania $\Omega = 0$, zarówno jak i układu inwolucyjnego.

W ten sposób zredukowaliśmy całkowanie układu inwolucyjnego:

$$F_1(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$$

do działań możliwie najprostszych.

Uważać będziemy obecnie zupełnie dowolny układ nieograniczenie całkowany równań różniczkowych i założymy, że jest on rzędu pierwszego, co zawsze zrobić można, bez zmniejszenia ogólności. Zmienne niezależne oznaczmy przez $x_1, x_2, \dots, x_n$, a funkcje niewiadome przez $z_1, z_2, \dots, z_m$. Oznaczmy dalej

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = p_{ik}.$$

Tedy równania naszego nieograniczenie całkowanego układu mają postać:

$$(a) \quad F_j(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, p_{11}, \dots, p_{mn}) = 0 \\ (j = 1, 2, \dots, q).$$

Układamy n równań:

$$(b) \quad V_{x_k} + V_{z_1} \cdot p_{1k} + V_{z_2} \cdot p_{2k} + \dots + V_{z_m} \cdot p_{mk} = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, n).$$

i wprowadzamy założenie, że liczba q jest tak wielką, iż $m \cdot n$ wielkości p_{ik} można wyrugować z pomiędzy $q + n$ równań (a) i (b). W ten sposób otrzymujemy układ równań cząstkowych rzędu pierwszego z jedną niewiadomą funkcją V :

$$\Omega_k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, V_{x_1}, \dots, V_{x_n}, V_{z_1}, \dots, V_{z_m}) = 0.$$

Utrzymujemy, że ten układ równań cząstkowych rzędu pierwszego jest półliniowy; utrzymujemy dalej, że jeżeli równania:

$$z_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), z_2 = \varphi_2, \dots, z_m = \varphi_m,$$

przedstawiają rozwiązanie poprzedniego układu nieograniczenie całkowanego $F_1 = 0, \dots, F_q = 0$, to równania $z_1 = \varphi_1, \dots, z_m = \varphi_m$ dają rozwiązanie układu $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = 0, \dots$ w znaczeniu, jakie nadaję temu słowo.

Dla przeprowadzenia dowodu zwracamy uwagę, że równania $z_1 = \varphi_1, \dots, z_m = \varphi_m$ tworzą w przestrzeni $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m$ n -wymiarową rozmiatość punktów. Elementy tej rozmiatości:

$$x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, V_{x_1}, \dots, V_{x_n}, V_{z_1}, \dots, V_{z_m},$$

według mojej teorii ogólnej, wyznaczają się przez n równań dodatkowych:

$$V_{x_i} + V_{z_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + V_{z_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0.$$

Możemy przytem założyć, że równania $z_1 = \varphi_1, \dots, z_m = \varphi_m$ zawierają m parametrów dowolnych $a_1, a_2, \dots, a_m$, i że można je rozwiązać względem tych parametrów:

$$a_i = A_i(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = A_i(x, z).$$

Jeżeli wprowadzimy jeszcze oznaczenia:

$$\psi(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \equiv [\psi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)],$$

to n równań:

$$(c) \quad V_{x_i} + V_{z_1} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right] + \dots + V_{z_m} \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right] = 0$$

stanowiąc będą taki półliniowy układ równań cząstkowych rzędu pierwszego dla którego równania:

$$z_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m), \dots, z_m = \varphi_m$$

wyznaczają rozwiązanie zupełne w znaczeniu przezemnie stosowanem.

Należy jednak zauważyć, że kształt równań (c) zależy będzie, nie tylko od pierwotnie danych równań $F_j = 0$. Biorąc różne układy równań $z_1 = \varphi_1(x, a), \dots, z_m = \varphi_m(x, a)$, otrzymujemy wiele różnych układów równań (c). Można jednak znaleźć taki układ równań cząstkowych rzędu pierwszego ze zmiennymi niezależnymi $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m$ i jedną

tylko funkcją V , który spełnia się dla wszystkich rozmaitości $z_1 = \varphi_1 \dots z_m = \varphi_m$. Istotnie równania:

$$F_j \left(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right], \dots, \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right] \right) \equiv 0$$

spełniają się tożsamościowo dla wszystkich rozmaitości $z_1 = \varphi_1, \dots, z_m = \varphi_m$.

Jeżeli tedy z ostatnich równań i równań (c) wyrugujemy wielkości $\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right]$, to otrzymamy układ równań cząstkowych rzędu pierwszego:

$$\Omega_k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, V_{x_1}, \dots, V_{x_n}, V_{z_1}, \dots, V_{z_m}) = 0:$$

który spełnia się dla wszystkich rozmaitości $z_1 = \varphi_1, \dots, z_m = \varphi_m$, który jednocześnie posiada zupełnie określoną formę, i który nadto, jeżeli tylko istnieje, może być znaleziony wprost przez eliminację.

Otrzymaliśmy tedy zapowiadany rezultat i doszliśmy do następującego twierdzenia, którego doniosłość rozpościera się na równania różniczkowe do woli wysokiego rzędu, bo takie równania zawsze można zredukować do równań rzędu pierwszego:

Twierdzenie. Jeżeli mamy układ nieograniczenie całkowny q równań cząstkowych rzędu pierwszego z n zmiennymi niezależnymi i m zależnymi:

$$F_j(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, p_1, \dots, p_{mn}) = 0, \quad p_{ik} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k},$$

i jeżeli można z tych równań i z równań:

$$V_{x_i} + V_{z_1} p_{1i} + \dots + V_{z_m} p_{mi} = 0 \\ (i = 1, \dots, n)$$

wyrugować wielkości p_{ik} , to rezultat rugowania:

$$\Omega_j(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, V_{x_1}, \dots, V_{x_n}, V_{z_1}, \dots, V_{z_m}) = 0$$

tworzy układ równań cząstkowych rzędu pierwszego z jedną tylko niewiadomą funkcją V . Układowi temu czynią zadość wszystkie rozmaitości $z_1 = \varphi_1, \dots, z_m = \varphi_m$, które spełniają dany układ równań cząstkowych $F_1 = 0, \dots, F_q = 0$.

Zachodzi przedewszystkiem pytanie, jaką twierdzenie to posiada wartość praktyczną. Na to można zaraz odpowiedzieć, że jeżeli wspomniane rugowanie jest możliwe, to dochodzimy do układu równań $\Omega_j = 0$, z którego przez całkowanie jednego układu jednoczesnych równań z wyznaczonych można wyznaczyć taki szereg rozmaitości punktów, który wytwarza wszystkie utwory całkowe. Jeszcze ściślej¹⁾ i zupełnie scharakteryzujemy znalezienie twierdzenia, gdy powiemy, że każdy układ $F_j = 0$, dla którego istnieje odpowiedni układ $\Omega_j = 0$, może być zredukowany do innego układu nieograniczenie całkownego

$$F'_j(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p}, z'_1, z'_2, \dots, z'_m, p'_{11}, \dots, p'_{m,n-p}) = 0,$$

który posiada mniej niż n zmiennych niezależnych. Jeżeli np. liczba zmiennych niezależnych pierwotnie danego układu równa się dwóm, to całkowanie tego układu w przypadku istnienia układu $\Omega_j = 0$, sprowadza się do całkowania równań różniczkowych z wyznaczonych.

Zmniejszenie liczby zmiennych niezależnych jest wogóle znacznie większym postępem, niż zmniejszenie liczby zmiennych zależnych, które można porównać ze zmniejszeniem rzędu układu.

ROZDZIAŁ III.

Każde nieskończenie małe przekształcenie styczności równania różniczkowego cząstkowego wytwarza szczególne utwory całkowe.

Jeżeli dane równanie cząstkowe nie zmienia się przy pewnym nieskończenie małym przekształceniu punktów, lub przekształceniu styczności, to w pewnych przypadkach wszystkie utwory całkowe przechodzą na siebie przy tem przekształceniu.

Uważajmy np. liniowe równanie cząstkowe ze stałymi współczynnikami:

$$ap + bq - c = 0,$$

¹⁾ Poprzednie rozważania tego rozdziału znajdują się wszystkie, wprowadzając w więźlejszej formie, w mojej poprzednio już cytowanej pracy z r. 1880. Następująca dalej, ważna uwaga nie była wówczas wyraźnie wypowiedziana.

które, jak wiadomo, można napisać tak:

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} + c \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Odpowiednie powierzchnie całkowe:

$$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = \Omega \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

są powierzchniami walcowymi z równoległymi tworzącymi; każda taka powierzchnia przechodzi sama na siebie przy nieskończeniu małym przesunięciu:

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} + c \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Jeżeli z innej strony mamy dowolne równanie liniowe cząstkowe:

$$\xi(x, y, z) p + \eta(x, y, z) q - \zeta(x, y, z) = 0,$$

to każda powierzchnia całkowa zezwala na nieskończenie małe przekształcenie, którego symbolem jest

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Twierdzenie to jest wprost ujęciem ze stanowiska teorii grup sławnej teorii Lagrange'a równań liniowych cząstkowych o trzech zmiennych.

Uważajmy dalej nieliniowe równanie cząstkowe rzędu pierwszego:

$$W(x, y, z, p, q) = 0$$

I w tym przypadku można znaleźć takie nieskończenie małe przekształcenia, które przeprowadzają na siebie każdą powierzchnię całkową. To ma miejsce mianowicie dla każdego nieskończenie małego przekształcenia styczności, którego funkcyja charakterystyczna ma postać:

$$\varrho_1(x, y, z, p, q) \cdot W,$$

zakładając przytem, że ϱ_1 zachowuje się prawidłowo dla wszystkich układów wartości ogólnego położenia x, y, z, p, q , które spełniają równanie $W = 0$.

Na tej uwadze, którą można rozszerzyć na wszystkie równania cząstkowe pierwszego rzędu z dowolną liczbą zmiennych, polegają

w istocie rzeczy w wszystkie te teorie całkowania, które sprowadzają takie równania do równań różniczkowych zwyczajnych¹⁾.

Istnieją jednak nieskończenie małe przekształcenia styczności, które wprawdzie nie zmieniają równania cząstkowego (rzędu pierwszego), nie pozostawiają bez zmiany wszystkich utworów całkowych, lecz przeprowadzają oczywiście każdy utwór całkowy także na utwór całkowy.

Takimi faktami zajmować się będziemy w tym rozdziale i stawiamy w szczególności zapytanie, jaką korzyść osiągnąć można z istnienia takich przekształceń przy całkowaniu równań cząstkowych. Okażemy, że istnienie takich przekształceń można zużytkować także w tym celu, aby przez względnie łatwe działanie całkowe znaleźć pewne takie szczególne utwory całkowe, które nie zmieniają się przy tych nieskończenie małych przekształceniach. W następnym rozdziale okażemy dalej, że istnienie takich przekształceń można wyzyskać w sposób jeszcze o wiele dalej sięgający.

Aby ułatwić zrozumienie mojej teorii, poprzedzam ją kilku prostymi lecz pouczającymi przykładami.

Uważajmy liniowe równanie cząstkowe:

$$(A) \quad \alpha(y, z) p + \beta(y, z) q - \gamma(y, z) = 0,$$

którego współczynniki nie zależą od zmiennej x . Jeżeli wprowadzimy nowe zmienne x_1, y_1, z_1 za pomocą przesunięcia:

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z \quad (a = \text{Const.})$$

to forma równania pozostanie bez zmiany. Znaczy to geometrycznie, że każde przesunięcie wzdłuż osi x przeprowadza każdą powierzchnię całkową na powierzchnię całkową. Fakt ten można wypowiedzieć zupełnie dokładnie w ten sposób, że nieskończenie małe przesunięcie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

przeprowadza każdą powierzchnię całkową także na powierzchnię całkową. Ogólna teorya, którą w jej głównych rysach rozwiniemy w tym rozdziale, orzeka w naszym szczególnym przypadku, że w szeregu powierzchni całko-

¹⁾ W innym miejscu już dawno wykazałem, że nieskończenie małe przekształcenie styczności nigdy nie przeprowadza na siebie wszystkich utworów całkowych równania cząstkowego rzędu drugiego, lub rzędów wyższych.

wych naszego równania (A) znajdują się takie, które przy nieskończeniu małym przesunięciu $\frac{\partial f}{\partial x}$ przechodzą same na siebie.

W istocie wykonajmy w naszym równaniu cząstkowym (A) podstawienie:

$$z = Y(y);$$

dla wyznaczenia funkcji Y otrzymujemy równanie:

$$\beta(y, Y) \frac{dY}{dy} - \gamma(y, Y) = 0,$$

które jako zwyczajne równanie różniczkowe rzędu pierwszego pomiędzy zmiennymi y i Y jest napewno całkowne, i spełnia się najogólniej dla funkcji $Y(y)$, zawierającej jedną stałą dowolną.

A więc pomiędzy ∞^∞ powierzchniami całkowemi każdego równania cząstkowego liniowego w zmiennych x, y, z , które zezwala na nieskończenie małe przesunięcie wzdłuż osi x , które więc posiada kształt:

$$\alpha(y, z)p + \beta(y, z)q - \gamma(y, z) = 0,$$

znajduje się pewna liczba i mianowicie ∞^1 powierzchni walcowych, które przechodzą na siebie przy każdym nieskończeniu małym przesunięciu.

Uważajmy teraz zupełnie ogólnie dowolne liniowe równanie cząstkowe i mianowicie dla prostoty równanie z trzema zmiennymi niezależnymi:

$$Af = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

i załóżmy, że przypadkowo znamy nieskończenie małe przekształcenie:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

które nie zmienia naszego równania $Af = 0$. Założenie to, według mojej ogólnej teorii, wyraża się analitycznie istnieniem związku postaci:

$$X(A(f)) - A(X(f)) = q_1 \cdot Af.$$

Związek ten według teorii ogólnych Jacobi'ego i Bour'a wykazuje, że dwa równania:

$$Af = 0, \quad Xf = 0$$

posiadają jedno rozwiązanie wspólne $\varphi(x, y, z)$. Jeżeli następnie φ zrównamy ze stałą dowolną, to otrzymamy ∞^1 powierzchni:

$$\varphi(x, y, z) = a,$$

wytworzonych przez tory (Bahncurven) nieskończenie małego przekształcenia Xf i spełniających nadto równanie cząstkowe:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0.$$

Twierdzenie to wypowiadamy jak następuje:

Jeżeli nieskończenie małe przekształcenie:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

przeprowadza każdą powierzchnię całkową liniowego równania cząstkowego:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0 = Af$$

na powierzchnię całkową, to istnieje zawsze ∞^1 takich powierzchni całkowych równania $Af = 0$, które przy tem przekształceniu przechodzą same na siebie.

Łatwo twierdzenie to rozciągnąć na dowolne równania cząstkowe, które zezwalają na wiadome lub niewiadome nieskończenie małe przekształcenie styczności.

Uważajmy naprzód, dla prostoty, równanie cząstkowe rzędu pierwszego w trzech zmiennych:

$$F(x, y, z, p, q) = a = \text{Const.}$$

i załóżmy, że $F = a$ zezwala na nieskończenie małe przekształcenie styczności:

$$[Wf] - W \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Podstawmy:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad -p = \frac{p_1}{p_3}, \quad -q = \frac{p_2}{p_3};$$

nasze równanie tedy przyjmuje postać:

$$N(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a,$$

a symbol nieskończenie małego przekształcenia styczności będzie symbolem Poissona (H, f) , gdzie

$$H = p_3 W \left(x_1, x_2, x_3, -\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_2}{p_3} \right);$$

N i H są jednorodne ze względu na p i mianowicie N jest jednorodne rzędu zerowego, zaś H rzędu pierwszego.

Nasze założenie, że nieskończenie małe przekształcenie (H, f) nie zmienia żadnego z ∞^1 równań cząstkowych $N = a$, wyraża się analitycznie tożsamościowym zachodzeniem znanego związku:

$$(H, N) = 0.$$

Stąd jeżeli wprowadzimy oznaczenie:

$$\frac{1}{p_3} H = M(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = W,$$

będziemy mogli wyciągnąć wniosek, że oba równania:

$$N = a, M = 0$$

dla każdej wartości a posiadają pewną liczbę i mianowicie ∞^1 powierzchni całkowych wspólnych. Istotnie, związek $(H, N) = 0$ daje bezpośrednio równanie:

$$(p_3 M, N) = p_3 (M, N) + \frac{\partial N}{\partial x_3} M = 0,$$

które wykazuje, że symbol (M, N) znika dla $M = 0$.

Tak otrzymane powierzchnie całkowe każdego poszczególnego równania $N = a$ przechodzą istotnie same na siebie przy nieskończenie małym przekształceniu styczności (H, f) .

Dowód tego twierdzenia możemy zresztą podać w formie pod pewnemi względami prostszej, jeżeli zachowamy dawne spólrzędne x, y, z, p, q . Założenie nasze, że nieskończenie małe przekształcenie styczności:

$$[W, f] = W \frac{\partial f}{\partial z}$$

nie zmienia żadnego z ∞^1 równań cząstkowych

$$F(x, y, z, p, q) = a$$

jest równoważne z tem, że wyrażenie:

$$[W, F] = W \frac{\partial F}{\partial z}$$

powinno znikać tożsamościowo; stąd wynika, że symbol

$$[W, F]$$

znika dla $W = 0$, co znów wykazuje, że równania:

$$F = a, W = 0$$

mają ∞^1 powierzchni całkowych wspólnych, które przechodzą same na siebie przy naszym przekształceniu styczności.

Teorya ta, którą można odrazu przenieść na wszystkie równania różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego w n zmiennych, daje prawdziwy klucz do wszystkich badań o równaniach różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego, które przeprowadzone zostały przez Lagrange'a i jego następców, aż do Jacobi'ego włącznie. Odkrycie naszkicowanej tu teorii przekształcania równań cząstkowych rzędu pierwszego dało początek moim ogólnym badaniom w tej dziedzinie. Przy tej sposobności nie potrzebuje chyba rozwodzić się nad tem, w jaki sposób rozważania te, pochodzące z lat 1871, 1872¹⁾ doprowadziły mię do rozwinięcia ogólnej teorii przekształceń styczności, zarówno jak i mojej teorii grup przekształceń. Natomiast wydaje mi się odpowiedniem raz istotnie przeprowadzić oddawna zapowiedziane²⁾ uogólnienie dopiero co omówionych rozumowań na dowolne równania cząstkowe, drugiego i wyższych rzędów. W następnym rozdziale wykażę, że z istnienia (danego) nieskończenie małego przekształcenia styczności, nie zmieniającego danego równania cząstkowego, można wogóle wyprowadzić jeszcze większą korzyść. Dalej sięgające rozważania następującego rozdziału, które istotnie przynoszą więcej, zasadzają się przy powierzchownem traktowaniu na zupełnie innych podstawach; jednakże można rozumowania

¹⁾ Por. krótką notatkę: Krótki komunikat etc. Rozprawy Tow. Nauk w Chrystyanii. kwiecień, 1872.

²⁾ Math. Annalen, tom XI, str. 490. Przypisek.

obu rozdziałów traktować z wyższego punktu widzenia; wówczas przekonamy się, że obie teorie wynikają z jednego wspólnego źródła.

Założmy, że dane do całkowania równanie cząstkowe rzędu drugiego:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

zezwała na znane nieskończenie małe przekształcenie styczności:

$$[W, f] = W \frac{\partial f}{\partial z}$$

Wówczas można zawsze znaleźć równanie cząstkowe rzędu pierwszego, mianowicie równanie

$$W(x, y, z, p, q) = 0,$$

które ma z równaniem $F = 0$ ∞^2 powierzchni całkowych wspólnych.

Aby tego dowieść, wprowadźmy za pomocą przekształcenia styczności:

$$x' = X(x, y, z, p, q), \quad y' = Y, \quad z' = Z, \quad p' = P, \quad q' = Q,$$

nowe zmienne, które są obrane w ten sposób, że nieskończenie małe przekształcenie przybiera postać:

$$\frac{\partial f}{\partial x'}.$$

Przez wprowadzenie tych zmiennych równanie cząstkowe rzędu drugiego $F = 0$ przechodzi na takie równanie, które zezwala na wszystkie przesunięcia wzdłuż osi x ; jest więc ono wolne od x' i posiada tedy kształt:

$$\Phi(y', z', p', q', r', s', t') = 0.$$

Jeżeli wykonamy podstawienie:

$$z' = Y(y'),$$

to dla wyznaczenia funkcji $Y(y')$ otrzymamy równanie:

$$\Phi\left(y', Y, 0, \frac{\partial Y}{\partial y'}, 0, 0, \frac{d^2 Y}{dy'^2}\right) = 0,$$

które jako zwyczajne równanie różniczkowe rzędu drugiego jest napewno

całkowalne i najogólniej spełnia się, gdy funkcja $Y(y')$ zależy od dwóch parametrów dowolnych. Dowiedliśmy tedy prawdziwości naszego twierdzenia; przy rozważaniach, które doprowadziły nas do tego celu, zakładaliśmy mianowicie, że pomiędzy układami wartości x, y, z, p, q , które spełniają równanie $W = 0$, znajdują się takie układy, dla których nietylko W , ale i F zachowuje się prawidłowo.

Ten, jakkolwiek mało ogólny, jednakowoż ważny rezultat, formułujemy jak następuje:

Jeżeli dane równanie cząstkowe rzędu drugiego:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

zezwała na nieskończenie małe przekształcenie styczności:

$$[W, f] = W \frac{\partial f}{\partial z},$$

a pomiędzy układami wartości x, y, z, p, q znajdują się takie, które spełniają równanie $W = 0$ i dla których nietylko W ale także F zachowuje się prawidłowo, to dwa równania cząstkowe:

$$F = 0 \text{ i } W = 0$$

mają ∞^2 powierzchni całkowych wspólnych; inaczej mówiąc $F = 0$ ma wówczas wogóle ∞^2 powierzchni całkowych, które przechodzą na siebie przy nieskończeniu małym przekształceniu¹⁾.

Jakkolwiek prostem jest to twierdzenie, wystarcza ono wszakże, aby zredukować szereg oddawna znanych, ale osobno stojących rezultatów do ich prawdziwego źródła.

Jeżeli cząstkowe równanie rzędu drugiego zezwala na wszystkie ruchy euklidesowe, to jest ono poprostu związkiem pomiędzy dwoma głównymi promieniami krzywizny:

$$\Omega(R_1, R_2) = 0.$$

W szeregu powierzchni całkowych takiego równania, znajdują się zawsze pewne powierzchnie walcowe, obrotowe i śrubowe i mianowicie w każdym

¹⁾ W pewnych przypadkach wszystkie powierzchnie całkowe równania $W = 0$ czynią także zadość równaniu $F = 0$.

poszczególnym przypadku (co najmniej) ∞^7 powierzchni całkowych, które zezwalają na nieskończenie mały ruch euklidesowy.

Tak np. istnieją powierzchnie obrotowe i zarazem śrubowe, które są powierzchniami minimalnymi lub powierzchniami o stałej krzywiznie, lub też stałej krzywiznie średniej.

Pomiędzy równaniami cząstkowymi:

$$\Omega(R_1, R_2) = 0$$

znajdują się pewne, które zezwalają nie tylko na wszystkie ∞^6 ruchów, ale wogóle na wszystkie ∞^7 przekształceń podobieństwa. To zachodzi dla równań:

$$\frac{R_1}{R_2} = a = \text{Const.}$$

Możemy tedy wnosić, że pomiędzy powierzchniami, których stosunek promieni krzywizny jest stały, istnieją zawsze takie, które są powierzchniami spiralnymi, które więc zezwalają na nieskończenie małe przekształcenie postaci:

$$c_1(xp + yq + zr) + c_2(yq - xp) + c_3(zq - yr) + c_4(xr - zp) + c_5p + c_6q + c_7r.$$

Właśnie te rozważania doprowadziły mnie w swoim czasie do odkrycia tych powierzchni minimalnych, które są powierzchniami spiralnymi.

Podane twierdzenie zezwala na wiele uogólnień, które są bardzo interesujące, jakkolwiek stanowią tylko bezpośredni wynik mojej ogólnej teorii.

Jeżeli ograniczymy się naprzód na równaniach cząstkowych w, x, y, z , to otrzymamy przez dosłowne prawie powtórzenie poprzednich rozważań twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli cząstkowe równanie m -tego rzędu w zmiennych x, y, z :

$$F\left(x, y, z, p, q, r, \dots, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) = 0$$

zezwała na nieskończenie małe przekształcenie styczności:

$$[W'] - W \frac{\partial f}{\partial z},$$

to dwa równania cząstkowe:

$$F = 0, W = 0$$

mają wogóle ∞^m powierzchni całkowych wspólnych, wyznaczenie których wymaga tylko całkowania jednego zwyczajnego równania różniczkowego m -tego rzędu. To równanie pomocnicze zawiera stałe dowolne, które odpadają jeżeli równanie rzędu pierwszego $W = 0$ jest już zcałkowane.

Dla zilustrowania tego twierdzenia uważamy najprzód równanie cząstkowe rzędu czwartego, które określa wszystkie powierzchnie izotermiczne. To równanie cząstkowe zezwala widocznie na dziesięcioczęściową grupę wszystkich odwzorowań podobnych. Teorie nasze dają tedy ∞^{9+4} powierzchni izotermicznych, z których każda zezwala na nieskończenie małe przekształcenie odwzorowań podobnych.

Jako drugi przykład uważamy równanie cząstkowe czwartego rzędu, które określa wszystkie powierzchnie translacyjne; równanie to zezwala na wszystkie ∞^{10} liniowych przekształceń punktów przestrzeni; stąd można wnosić, że istnieje ∞^{9+4} powierzchni translacyjnych, które zawsze zezwalają na nieskończenie małe przekształcenie liniowe.

Można te, same przez się interesujące powierzchnie translacyjne istotnie wyznaczyć. Powierzchnie te dzielą się na dwie kategorie zależnie od tego, czy przy nieskończeniu małym przekształceniu liniowym punkty nieskończenie oddalone pozostają w spoczynku, czy też jedne z nich przechodzą na drugie.

Pierwszą z tych kategorii możemy pozostawić na boku, widoczna bowiem, że obejmuje ona tylko powierzchnie rozwijalne, a nawet tylko powierzchnie walcowe.

Możemy tedy przyjąć, że nasze nieskończenie małe przekształcenie przemienia wzajemnie punkty nieskończenie oddalone; wówczas nieskończenie oddalona płaszczyzna przekształca się rzutowo; na płaszczyźnie tej mamy więc ∞^1 krzywych, które wszystkie pozostają bez zmiany. Z pomiędzy tych krzywych, których równania mają postać:

$$\omega \left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \right) = a = \text{Const.}$$

wyszczególniamy dowolne dwie krzywe, nadając parametrowi a dwie określone wartości a_1 i a_2 . Moja ogólna teoria powierzchni translacyjnych daje wówczas bezpośrednio równanie cząstkowe:

$$R(p, q)r + S(p, q)s + T(p, q)t = 0;$$

powierzchnie całkowite tego równania są powierzchniami translacyjnymi, które

rych krzywe rodzące mają zawsze ∞^1 stycznych, przecinających jedną z dwu omówionych poprzednio krzywych nieskończenie oddalonych. Jeżeli tedy

$$(D) \quad \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

jest symbolem odpowiedniego nieskończenie małego przekształcenia, to powierzchnie translacyjne, o które chodzi, wyznaczają się z równań cząstkowych

$$(E) \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0,$$

$$(F) \quad Kr + Ss + Tt = 0,$$

z pomiędzy których pierwsze zawiera dziewięć istotnych stałych dowolnych; w drugim równaniu zachodzą oprócz tego parametry a_1, a_2 . Te dwa równania posiadają dla ogólnych wartości jedenastu parametrów zawsze ∞^3 powierzchni całkowych wspólnych. Wynika to stąd, że równanie cząstkowe drugiego rzędu (F), jak wykazuje widoczne rozumowanie geometryczne, zezwala na nieskończenie małe przekształcenie (D).

Chcąc znaleźć skończone równania tych powierzchni można najprzód określić tory:

$$x = a, y = b$$

nieskończenie małego przekształcenia (D); wówczas otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne w zmiennych x, y

$$W(x, y, y', y'') = 0,$$

którego równanie całkowe:

$$H(x, y, a, \beta) = 0$$

przedstawia powierzchnie, których szukamy. Bardzo godnem uwagi jest to, że podane tu działania istotnie przeprowadzić można; w tym celu przeprowadzimy rozumowania następujące.

Ponieważ przekształcenie liniowe przeprowadza każdy równoległobok na równoległobok, a co za tem idzie, krzywe przystające na krzywe przystające, więc moglibyśmy utrzymywać, że takie przekształcenie przeprowadza zawsze powierzchnię translacyjną na taką powierzchnię. Jeżeli tedy powierzchnia translacyjna zezwala na nieskończenie małe przekształcenie liniowe, to odrazu mamy dwie możliwości: naprzód możemy przypusz-

czać, że ∞^1 przystających i jednakowo ustawionych krzywych naszej powierzchni tasują się między sobą, następnie możemy przypuszczać także, że przechodzą one na inne szeregi krzywych przystających. Tą ostatnią możliwością nie mamy wszakże potrzeby się zajmować, bo w każdym razie zachodziłaby ona tylko dla takich określonych przez nas powierzchni, które nieskończenie wielu sposobami mogą być uważane jako powierzchnie translacyjne. Pozostaje więc tylko rozważyć możliwość, gdy odpowiednie nieskończenie małe przekształcenie liniowe pozostawia bez zmiany każdą gromadę krzywych przystających. W tym przypadku każda krzywa takiej gromady musi sama zezwalać na nieskończenie małe przekształcenie liniowe, bo każda krzywa gromady przechodzi na tę samą krzywą sąsiadującą za pomocą dwu nieskończenie małych od siebie niezależnych przekształceń liniowych. Stąd wynika, że zawsze można wyznaczyć obie gromady krzywych przystających, leżących na naszej powierzchni, a więc i samą powierzchnię.

Do określonych w ten sposób powierzchni translacyjnych, które zezwalają na nieskończenie małe przekształcenie liniowe należą w szczególności prostoliniowe powierzchnie minimalne. Te powierzchnie śrubowe, mówiąc nawiasowo, są jedynymi prostoliniowymi powierzchniami translacyjnymi, nie będącymi jednocześnie powierzchniami walcowymi.

Pokażemy, w jaki sposób wszystkie te powierzchnie określić można za pomocą możliwie najłatwiejszych rachunków.

W dawniejszych pracach wykazałem, że wszystkie liniowe jednorodne nieskończenie małe przekształcenia można doprowadzić do form kanonicznych. Jeżeli tedy

$$\sum_{i=1}^3 c_{ik} x_i p_k$$

jest taką formą kanoniczną, to tworzymy nieskończenie małe przekształcenie:

$$\sum c_{ik} x_i p_k + d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3$$

i staramy się za pomocą zamiany zmiennych:

$$x'_k = x_k + \alpha_k$$

wyrugować wszystkie, lub przynajmniej pewne ze stałych d_1, d_2, d_3 .

Jeżeli w szczególności wyznacznik

$$|c_{ik}|$$

nie równa się zero, to można odrazu wszystkie d_k założyć równemu zero.

Szukając tedy wszystkich powierzchni translacyjnych, które zezwalają na nieskończenie małe przekształcenie:

$$(G) \quad \sum_{ik} c_{ik} x_i p_k + \sum_k d_k p_k,$$

zwracamy naprzód uwagę, że każda krzywa rodząca, według poprzedniego, zezwala na nieskończenie małe przekształcenie posiadające kształt:

$$\sum c_{ik} x_i p_k + \sum e_k p_k.$$

Określamy ∞^2 torów tego ostatniego przekształcenia i z pomiędzy nich wyszczególniamy jeden, dajmy na to, tor C ; wówczas wszystkie ∞^1 torów pierwszego nieskończenie małego przekształcenia, przecinających C , tworzą powierzchnię, która posiada własność żądaną. W ten sposób powierzchnie translacyjne, których szukamy, otrzymują się za pomocą łatwych do przeprowadzenia rachunków.

Uważając np. nieskończenie małe przekształcenie:

$$axp + byq + czr \quad (abc \neq 0)$$

i dodając do niego wyrażenie rzędu zero, otrzymujemy przekształcenie

$$(ax + l)p + (by + m)q + (cy + n)r.$$

Tory tego ostatniego przekształcenia wyznaczone są przez równania:

$$\begin{aligned} ax + l &= (ax_0 + l) e^{at}, \\ by + m &= (by_0 + m) e^{bt}, \\ cz + n &= (cy_0 + n) e^{ct}. \end{aligned}$$

Odpowiednio dla torów pierwszego przekształcenia otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} x &= x e^{at}, \\ y &= y e^{bt}, \\ z &= z e^{ct}. \end{aligned}$$

Jeżeli z pomiędzy tych sześciu równań wyrugujemy wielkości x, y, z , na-

stępnie zaś wielkościom x_0, y_0, z_0 , nadamy wartości oznaczone i nareszcie t i τ uważać będziemy jako parametry, to trzy równania:

$$\begin{aligned} ax &= -l e^{at} + (ax_0 + l) e^{a(\tau+t)}, \\ by &= -m e^{bt} + (by_0 + m) e^{b(\tau+t)}, \\ cz &= -n e^{ct} + (cz_0 + n) e^{c(\tau+t)}, \end{aligned}$$

wyznaczają widocznie powierzchnię translacyjną, która posiada własności żądane.

Uważajmy teraz równanie cząstkowe m -tego rzędu w $n+1$ zmiennych

$$H\left(z, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}\right) = 0,$$

które zezwala na q znanych nieskończenie małych przekształceń styczności:

$$B_k f = [W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z},$$

czyniących po dwie zadość warunkowi:

$$B_i B_k f - B_k B_i f \equiv 0$$

i mających tę własność, że ich funkcyje charakterystyczne nie spełniają żadnego równania jednorodnego:

$$\Phi(W_1, \dots, W_q) = 0.$$

Jeżeli tedy istnieją układy wartości $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, które spełniają równania:

$$W_1 = 0, \dots, W_q = 0$$

i dla których nadto równanie $F = 0$ zachowuje się prawidłowo, to równania

$$W_1 = 0, \dots, W_q = 0, F = 0$$

posiadają rozwiązania wspólne.

Ażeby dowieść tego twierdzenia i ściślej je sformułować, wprowadźmy, co zawsze jest możliwe, nowe zmienne:

$$Z, X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n,$$

które obieramy tak, aby funkcje charakterystyczne naszych nieskończenie małych przekształceń otrzymały postać:

$$P_n, P_{n-1}, \dots, P_{n-q+1}.$$

W tych nowych zmiennych równanie $F = 0$ ma kształt:

$$\Phi \left(Z, X_1, \dots, X_{n-q}, P_1, \dots, P_n, \frac{\partial^2 Z}{\partial X_1^2}, \dots, \frac{\partial^m Z}{\partial X_n^m} \right) = 0,$$

niezależny od $X_{n-q+1}, \dots$, aż do X_n .

Jeżeli tedy założymy:

$$Z = \Theta(X_1, \dots, X_{n-q}),$$

to dla wyznaczenia funkcji Θ otrzymamy napewno całkowalne równanie cząstkowe m -tego rzędu w zmiennych:

$$Z, X_1, \dots, X_{n-q}.$$

W ten sposób udowodniliśmy zapowiedziany rezultat i podaliśmy jednocześnie metodę całkowania, która w wielu przypadkach okaże się praktyczną, jakkolwiek wymaga większej liczby działań całkowych, niż to jest konieczne potrzebne.

Założenie podane w poprzednim przykładzie, że symbole $B_i B_h f - B_h B_i f$ są wszystkie zerami, można zastąpić przez założenia ogólniejsze. Dajmy na to np. że równanie:

$$F \left(z, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m} \right) = 0$$

spełnia dwa nieskończenie małe przekształcenia styczności, które tworzą grupę z dwoma dowolnymi parametrami. Jeżeli dla tych nieskończenie małych przekształceń symbol Poissona nie równa się zeru, to możemy przyjąć, że zmienne są tak obrane, iż nasze nieskończenie małe przekształcenia mają postać:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Przy tych założeniach F jest wolne od x_1 i jednorodne względem wielkości:

$$x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots,$$

tak iż posiada kształt:

$$\Phi \left(x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, z \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots \right) = 0.$$

Położmy teraz:

$$z = Z(x_2, \dots, x_n) = x_n W \left(\frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$$

i

$$\frac{x_2}{x_n} = y_2, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = y_{n-1};$$

wówczas mamy:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial Z}{\partial x_2} = \frac{\partial W}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial Z}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial W}{\partial y_{n-1}},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} = W - y_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} - \dots - y_{n-1} \frac{\partial W}{\partial y_{n-1}},$$

$$\dots \dots \dots$$

tak, iż nasze równanie cząstkowe przybiera kształt:

$$\Pi \left(W, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_2}, \dots \right) = 0,$$

który zawiera tylko wielkości $y_2, \dots, y_n, W$ i odpowiednie pochodne od pierwszego aż do m -tego rzędu włącznie.

Jeżeli tedy równanie cząstkowe m -tego rzędu $F=0$ w zmiennych $z, x_1, x_2, \dots, x_n$ zezwala na dwuczęściową grupę przekształceń styczności, wytworzoną przez oba nieskończenie małe przekształcenia:

$$[W_k, f] = W_k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (k=1, 2)$$

to równania cząstkowe:

$$F = 0, \quad W_1 = 0, \quad W_2 = 0$$

posiadają możliwie największą liczbę rozwiązań wspólnych.

Załóżmy teraz wogóle, że dane równanie cząstkowe m -tego rzędu w zmiennych $z, x_1, \dots, x_n$, zezwala na q -częściową grupę przekształceń styczności

$$[W_k, f] = W_k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

i przyjmijmy nadto, że funkcyje W nie spełniają żadnego związku postaci:

$$\Omega \left(\frac{W_1}{W_q}, \frac{W_2}{W_q}, \dots, \frac{W_{q-1}}{W_q} \right) = 0.$$

Wówczas równania:

$$F = 0, \quad W_1 = 0, \dots, \quad W_q = 0$$

zawierają możliwie największą liczbę rozwiązań wspólnych i nadto każde z tych rozwiązań pozostaje bez zmiany przy przekształceniach tej grupy q -częściowej¹⁾.

Ażeby tego dowieść przeprowadzamy rozumowania następujące.

Przestrzeń $z, x_1, \dots, x_n$ zawiera ∞^{2n+1} elementów: $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. W gromadzie tych elementów znajduje się wogóle ∞^{2n+1-q} takich, które czynią zadość q równaniom:

$$W_1 = 0, \dots, W_q = 0.$$

Elementy określonej w ten sposób gromady mają tę własność, że każdy taki element przechodzi na siebie przy każdym nieskończeniu małym przekształceniu danej grupy. Ponieważ tedy własność ta zgodnie z naturą rze-

¹⁾ W tekście pomijamy wypowiedzenie założenia, że wśród układów wartości $z, x_1, \dots, x_n$, czyniących zadość naszemu układowi równań, istnieją takie, dla których wchodzące tu w grę funkcyje zachowują się prawidłowo.

czy ma miejsce zarówno przy nieskończeniu małych, jak i przy skończonych przekształceniach grupy, więc naprzód wynika, że gromada elementów, określona przez równania $W_1 = 0, \dots, W_q = 0$, pozostaje bez zmiany przy wszystkich przekształceniach grupy.

∞^{2n+1-q} elementów naszej niezmienniej gromady porządkuje się w utwory częściowe, z których każdy pozostaje bez zmiany. Najmniejsze utwory częściowe niezmiennie zawierają co najmniej ∞^q elementów, z pomiędzy których każdy połączony jest ze wszystkimi sąsiednimi elementami tego samego utworu.

∞^{n+q} elementów gromady $W_1 = 0, \dots, W_q = 0$ porządkuje się tedy w ∞^q najmniejszych częściowych utworów niezmiennych E_v , z których każdy zawiera ∞^n elementów, tworzących połączenie elementów.

Pomiędzy sąsiednimi połączeniami elementów E_v zachodzą ciekawe stosunki, polegające na tem, że jeżeli dwa określone elementy, należące do dwu różnych E_v leżą razem, to wówczas dwa dowolne sąsiednie elementy tych obu E_v leżą razem. W takiej mierze pomiędzy ∞^q połączeniami elementów E_v zachodzą takie same stosunki, jak pomiędzy wstęgami charakterystycznymi równania cząstkowego rzędu pierwszego.

Nie trudno otrzymamy rezultat zredukować do istotnej jego podstawy. Założenie nasze, że q nieskończenie małych przekształceń styczności:

$$[W_k, f] = W_k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (k=1, 2, 3, \dots, q)$$

tworzy grupę q -częściową wyraża się analitycznie w ten sposób, że q funkcyj charakterystycznych $W_1, \dots, W_q$, czynią po dwie zadość związkowi postaci

$$[W_i, W_k] = W_i \frac{\partial W_k}{\partial z} + W_k \frac{\partial W_i}{\partial z} = \sum_s c_{iks} W_s.$$

Stąd wynika bezpośrednio, że równania cząstkowe rzędu pierwszego:

$$W_1 = 0, \dots, W_q = 0$$

tworzą układ inwolucyjny w znaczeniu, jaki nadaję temu pojęciu. Ten układ inwolucyjny posiada różności charakterystyczne, a temi są właśnie połączenia elementów, które oznaczaliśmy poprzednio przez E_v .

Nasze poprzednie założenie, że funkcyje W_k nie spełniają żadnego związku jednorodnego $\Omega = 0$, można zastąpić przez założenia ogólniejsze.

Istnieje twierdzenie ogólne postawione przezemnie, że różności charakterystyczne układu inwolucyjnego rzędu pierwszego można zawsze jednoznaczowo (t. j. nie nieskończenie wielowartościowo) odwzorować w ten

sposób na elementach rzędu pierwszego odpowiednio obranej przestrzeni punktów $\zeta, \xi_1, \dots, \xi_n$, że dwie sąsiednie rozmaitości charakterystyczne, których elementy sąsiednie zawsze leżą razem, odwzorowują się w przestrzeni $\zeta, \xi_1, \dots, \xi_n$, jako dwa elementy (ζ, ξ, π) , które leżą razem.

Stąd wynika, że pierwotnie dane równanie cząstkowe rzędu m -tego i dołączone równania rzędu pierwszego $W_1 = 0, \dots, W_q = 0$, a więc cały układ równań:

$$(L) \quad F = 0, W_1 = 0, \dots, W_q = 0$$

można zastąpić przez jedno jedyne równanie cząstkowe m -tego rzędu

$$\Phi \left(\zeta, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_1, \dots, \pi_n, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1^2}, \dots, \frac{\partial^m \zeta}{\partial \xi_n^m} \right) = 0.$$

Ponieważ ostatnie równanie posiada zawsze rozwiązania, więc stosamo stosuje się do układu równań (L).

Udowodniliśmy tedy zapowiedziany rezultat. Widoczna przytem bezpośrednio, że te rozwiązania są ważne bez żadnej zmiany i wtedy, gdy danem jest nie jedno jedyne równanie m -tego rzędu, ale nieograniczenie całkowny układ równań m -tego rzędu. Wobec tego możemy sformułować twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli dany nieograniczenie całkowny układ równań cząstkowych rzędu m -tego:

$$F_k \left(z, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m} \right) = 0$$

($k = 1, 2, \dots$)

zezwała na ciągłą grupę przekształceń styczności:

$$[W_k, f] = W_k \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

to wszystkie utwory całkowe układu $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$, które przy tej grupie pozostają bez zmiany, otrzymuje się przez dołączenie do równań $F_k = 0$ równań:

$$W_1 = 0, \dots, W_q = 0.$$

Te q równań, o ile nie stoją z sobą w sprzeczności, tworzą zawsze układ inwolucyjny rzędu pierwszego, którego rozmaitości

charakterystyczne, jeżeli występuje ich liczba dostatecznie wielka, mogą zebranerazem tworzyć utwory całkowe pierwotnie danego układu $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$

Uważajmy teraz układ równań cząstkowych, który określa m wielkości $z_1, z_2, \dots, z_m$, jako funkcje zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Oznaczmy dla skrócenia:

$$p_k^{(i)} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k}.$$

Układ nasz można więc napisać w postaci:

$$F_\nu(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}) = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

Każdy układ wartości $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}$ nazwiemy elementem. Powiadamy, że gromada elementów tworzy połączenie elementów, jeżeli dwa sąsiednie elementy gromady czynią zawsze zadość układowi równań

$$dz_i - p_1^{(i)} dx_1 - \dots - p_n^{(i)} dx_n = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Połączenie elementów zawiera najwyżej ∞^n , a najmniej ∞^1 elementów.

Połączenie elementów nazywamy całkowym połączeniem elementów układu równań różniczkowych $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$, gdy wszystkie elementy połączenia czynią zadość równaniom $F_k = 0$. Połączenia te nazywamy całką- V_1 , całką- $V_2, \dots$ całką- V_n , zależnie od liczby wymiarów odpowiedniego połączenia elementów.

Powiadamy, że układ równań różniczkowych $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$ jest nieograniczenie całkowny, jeżeli wszystkie elementy układu równań należą co najmniej do jednej całki- V_n .

Z innej strony, układ równań różniczkowych $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$, nazywamy układem inwolucyjnym, jeżeli każda całka- V_q ogólnego położenia zawarta jest conajmniej w jednej całce- V_n .

Przyjmijmy, że układ inwolucyjny rzędu pierwszego:

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$$

pomiędzy zmiennymi niezależnymi $x_1, \dots, x_n$ i ich funkcjami $z_1, \dots, z_m$ zezwala na pewne (znane) nieskończenie małe przekształcenia:

$$U_k f = \sum \xi_{ki}(x, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \zeta_{ki}(x, z) \frac{\partial f}{\partial z_i},$$

($k = 1, 2, \dots, r$).

które tworzą grupę r -częściową, (a także że największe wyznaczniki macierzy:

$$|\xi_{k1}, \dots, \xi_{kn}, \zeta_{kn}, \dots, \zeta_{km}|$$

nie znikają tożsamościowo).

Jeżeli tedy istnieje dostateczna liczba elementów ogólnego położenia, które wszystkie czynią zadanie następującym równaniom rzędu pierwszego:

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots$$

$$\xi_{ki} - p_1^{(i)} \xi_{k1} - p_2^{(i)} \xi_{k2} - \dots - p_n^{(i)} \xi_{kn} = 0,$$

($k = 1, \dots, r, i = 1, \dots, m$)

to otrzymany układ równań różniczkowych jest nieograniczenie całkowalny.

Dowód można przeprowadzić w ten sam sposób, jak w przykładzie poprzednim.

ROZDZIAŁ IV.

Równania cząstkowe, zezwalające na nieskończoną grupę przekształceń.

W poprzednim rozdziale zajmowaliśmy się równaniami cząstkowymi, które zezwalają na ciągłą grupę przekształceń. Pokazaliśmy, że, gdy mamy dane nieskończenie małe przekształcenie, które nie zmienia takiego równania różniczkowego, to wogóle istnieją pewne rozmaitości całkowite, które przy tem przekształceniu nie przechodzą na inne utwory całkowite, ale przechodzą same na siebie. Jeżeli tedy dane równanie cząstkowe zezwala na pewną skończoną lub nieskończoną grupę ciągłą, to poprzednie teorie dają metody do wyznaczenia pewnych kategorii układów całkowitych, które

w przypadku, gdy dana grupa jest nieskończona, zależą w ogóle nie tylko od stałych dowolnych.

Możliwe jest, jak to na prostych przykładach pokażemy w tym rozdziale, z okoliczności tej wyciągnąć korzyść jeszcze większą. Przy rozwijaniu tych nowych metod, które, wedle naszego poglądu, mają ważność pierwszorzędną, opieramy się na naszej ogólnej teorii niezmienników różniczkowych. Wszystkie te metody sprowadzają się do tego, że przy traktowaniu równania cząstkowego, które zezwala na pewną znaną skończoną grupę ciągłą, wprowadzamy nowe zmienne i mianowicie (pełny) układ niezmienników różniczkowych należący, według naszej teorii, ogólnej, do owej grupy ciągłej.

Przykład 1. Uważajmy naprzód nieskończoną grupę ciągłą, której nieskończenie małe przekształcenie posiada postać ogólną

$$Z(z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

gdzie Z oznacza funkcję dowolną argumentu z .

Jeżeli teraz, jak zwykle, pochodne funkcji z oznaczmy przez $Z', Z'', \dots$, to nieskończenie małe przekształcenia odpowiednich grup uzupełnionych mieć będą postać:

$$Z \frac{\partial f}{\partial z} + Z' \left(p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} + r \frac{\partial f}{\partial r} + s \frac{\partial f}{\partial s} + t \frac{\partial f}{\partial t} \right) + Z'' \left(p^2 \frac{\partial f}{\partial r} + p q \frac{\partial f}{\partial s} + q^2 \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \dots$$

Jeżeli chcemy wyznaczyć wszystkie niezmienniki różniczkowe zerowego pierwszego i drugiego rzędu, to wypadnie utworzyć równania:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} + r \frac{\partial f}{\partial r} + s \frac{\partial f}{\partial s} + t \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$p^2 \frac{\partial f}{\partial r} + p q \frac{\partial f}{\partial s} + q^2 \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

które, zgodnie z naszą teorią, ogólną stanowią układ zupełny. Z jego rozwiązań mamy dwa zerowego rzędu, mianowicie:

$$x i y$$

jedno pierwszego rzędu:

$$u = \frac{p}{q}$$

i dwa drugiego rzędu:

$$\frac{qr-ps}{q^2} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{qs-pt}{q^2} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Według naszych ogólnych teorii, każdy niezmiennik różniczkowy wyraża się przez

$$x, y, u$$

i następujące po sobie pochodne:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$$

Trzy wielkości x, y i u tworzą, według naszej terminologii, pełny układ niezmienników różniczkowych.

Każdy związek postaci:

$$\Omega \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = 0.$$

daje niezmiennie równanie różniczkowe:

$$W(x, y, z, p, q, r, s, t, \dots) = 0.$$

Jeżeliby istniało takie równanie różniczkowe rzędu drugiego, którego nie możnaby doprowadzić do postaci

$$\Omega \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

to na skutek tego równania rzędu drugiego musiałyby zniknąć wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & r & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 & pq & q^2 \end{vmatrix}$$

Ponieważ równanie takie nie istnieje, więc dochodzimy do rezultatu następującego:

Jeżeli równanie cząstkowe rzędu drugiego zezwala na wszystkie przekształcenia grupy nieskończonej:

$$Z(z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

dla której

$$x, y, u = \frac{p}{q}$$

tworzą pełny układ niezmienników różniczkowych, to można je zredukować do postaci

$$\Omega \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

przez co wykonana jest zarazem redukcja tego równania cząstkowego do równań różniczkowych zwyczajnych.

Odpowiednie rozumowania dają ogólne twierdzenie następujące:

Jeżeli pewne równanie cząstkowe m -tego rzędu w zmiennych x, y, z zezwala na wszystkie przekształcenia grupy nieskończonej $Z(z) \frac{\partial f}{\partial z}$, to można je bez całkowania zredukować do równania $(m-1)$ -go rzędu, które samo ma ogólną postać w zmiennych x, y, u . Jeśliby się udało całkować to równanie pomocnicze $(m-1)$ -go rzędu, to pozostałoby do całkowania tylko jedno równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego:

$$\frac{p}{q} - u(x, y) = 0.$$

Widoczna bezpośrednio, że przy całkowaniu naszych obu równań pomocniczych grupa $Z(z) \frac{\partial f}{\partial z}$ nie może przynieść żadnego pożytku.

Przykład 2. Uważajmy teraz grupę nieskończoną:

$$\xi(x) \frac{\partial f}{\partial x} - \xi'(z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

którą w r. 1886 (Towarzystwo nauk w Obrystanii) przy oznaczaniu wszystkich grup nieskończonych w dwu zmiennych przyjąłem jako formę kanoniczną.

Oznaczmy nieskończenie małe przyrosty wielkości x, y, z jak zwykle przez $\delta x, \delta y, \delta z$; wówczas mieć będziemy:

$$\delta x = \xi \delta \tau, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = -\xi' z \delta \tau,$$

i znajdziemy według znanych prawideł:

$$\delta p = (-2\xi' p - \xi'' z) \delta \tau, \quad \delta q = \xi' q \delta \tau,$$

$$\delta r = (-3\xi' r - 3\xi'' p - \xi''' z) \delta \tau,$$

$$\delta s = (-2\xi' s - \xi'' q) \delta \tau, \quad \delta t = -\xi' t \delta \tau.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} X'' f = & \xi \frac{\partial f}{\partial x} - \xi' \left(z \frac{\partial f}{\partial z} + 2p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} + 3r \frac{\partial f}{\partial r} + 2s \frac{\partial f}{\partial s} + \right. \\ & \left. + t \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \xi'' \left(z \frac{\partial f}{\partial p} + 3p \frac{\partial f}{\partial r} + q \frac{\partial f}{\partial s} \right) - \xi''' z \frac{\partial f}{\partial r} \end{aligned}$$

jest symbolem najogólniejszego nieskończenie małego przekształcenia naszej grupy dwukrotnie uzupełnionej. Więc odpowiednie niezmienniki różniczkowe zerowego, pierwszego i drugiego rzędu wyznaczają się jako rozwiązania układu zupełnego:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad z \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial s},$$

$$z \frac{\partial f}{\partial z} + 2p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} + 2s \frac{\partial f}{\partial s} + t \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Otrzymujemy tedy jeden niezmiennik różniczkowy zerowego rzędu mianowicie y , który oznaczmy przez μ , jeden pierwszego $v = \frac{q}{z}$ i dwa drugiego rzędu, mianowicie:

$$u = \frac{zs - pq}{z^3}, \quad v = \frac{t}{z}.$$

Zatem równanie:

$$\Omega(\mu, v, u, v) = 0.$$

jest ogólną formą niezmiennego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu.

Że w ten sposób istotnie znaleźliśmy wszystkie niezmienniki równania cząstkowego rzędu drugiego, wynika wprost stąd, że w szeregu wyznaczników czwartego stopnia macierzy:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 2p & q & 3r & 2s & t \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & 3p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

znajdują się takie, jak np.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 2p & 3r \\ 0 & 0 & z & 3p \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = z^3,$$

które ani tożsamościowo, ani na skutek żadnego równania cząstkowego rzędu drugiego nie stają się zerami.

W danym przypadku łatwo dostrzedz, że wszystkie niezmienniki trzeciego i wyższych rzędów można otrzymać przez różniczkowanie niezmienników μ, v, u, v , że więc wielkości te, według mojej terminologii, tworzą pełny układ niezmienników różniczkowych.

Uważajmy mianowicie dowolną powierzchnię, która nie czyni zadość żadnemu związkowi postaci:

$$W\left(y, \frac{q}{z}\right) = 0 = W(\mu, v),$$

to możemy μ, v uważać jako współrzędne Gaussowskie punktów jej powierzchni, lub, inaczej mówiąc, możemy zamiast x, y wprowadzić μ, v , jako zmienne niezależne. Czyniąc to, można dowieść, że cztery wielkości:

$$(M) \quad \frac{\partial u}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial u}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial v}{\partial v}$$

są niezmiennikami różniczkowymi i oczywiście niezmiennikami różniczkowymi trzeciego rzędu naszej grupy. Aby tego dowieść, wybierzmy dwa dowolne niezmienniki różniczkowe m -tego rzędu np. U i V , i utwórzmy ogólne równanie:

$$\Phi(U, V) = 0$$

z dowolną funkcją Φ . Nadając po kolei funkcji Φ wszystkie możliwe kształty, otrzymujemy nieskończenie wiele równań różniczkowych m -tego rzędu, które wszystkie są pośrednimi całkami równania różniczkowego $(m+1)$ -go rzędu:

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} \\ \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} \end{vmatrix} = 0 = \Delta.$$

Ponieważ zaś ogólne wyrażenie $\Phi(U, V)$ przedstawia zawsze niezmiennik różniczkowy, więc $\Delta = 0$ jest napewno równaniem różniczkowym niezmiennem.

Jeżeli tedy U, V, W są trzema niezmiennikami różniczkowymi, to równanie:

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dV}{dx} - c \frac{dW}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dV}{dy} - c \frac{dW}{dy} \end{vmatrix} = 0$$

jest zawsze równaniem różniczkowym niezmiennem niezależnie od wartości, jaką może mieć stała c . Równanie to można doprowadzić do postaci:

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dV}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dV}{dy} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dW}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dW}{dy} \end{vmatrix} = c.$$

Lewa strona tego równania jest właśnie dlatego, że c jest stałą dowolną, niezmiennikiem różniczkowym.

Znaleziony niezmiennik różniczkowy można, wprowadzając U i V jako zmienne niezależne zamiast x i y , wyrazić przez wyznacznik funkcyjny wielkości U, V względem zmiennych niezależnych U, W :

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dU} & \frac{dV}{dU} \\ \frac{dU}{dW} & \frac{dV}{dW} \end{vmatrix} \equiv \frac{dV}{dW},$$

Więc w naszym przypadku wielkości (M) , które krótko oznaczmy przez

$$u_\mu, u_\nu, v_\mu, v_\nu,$$

są niezmiennikami różniczkowymi.

Znamy tedy o s m niezmienników różniczkowych, mianowicie:

(N)

$$\mu, \nu, u, v, u_\mu, u_\nu, v_\mu, v_\nu,$$

których rząd jest niższy niż cztery. Ale można dowieść, że nie ma więcej niż siedm niezależnych od siebie niezmienników różniczkowych, których rząd jest mniejszy niż cztery. Chcąc mianowicie wyznaczyć wszystkie te niezmienniki, musimy do poprzednich wzorów:

$$\delta x = \xi(x) \delta \tau, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = -\xi'(z) \delta \tau,$$

$$\delta p = (-2\xi'p - \xi''x) \delta \tau, \quad \delta q = -\xi'q \delta \tau,$$

$$\delta r = (-3\xi'r - 3\xi''p - \xi'''z) \delta \tau,$$

$$\delta s = (-2\xi's - \xi''q) \delta \tau, \quad \delta t = -\xi't \delta \tau$$

dołączyć jeszcze wyrażenia przyrostów:

$$\delta \alpha = (-4\xi'\alpha - 6\xi''r - 4\xi'''z) \delta \tau,$$

$$\delta \beta = (-3\xi'\beta - 3\xi''s - \xi'''q) \delta \tau,$$

$$\delta \gamma = (2\xi'\gamma - \xi''t) \delta \tau,$$

$$\delta \delta = -\xi'\delta \delta \tau.$$

Niezmienniki różniczkowe, których szukamy, są rozwiązaniami układu zupełnego:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad z \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

$$z \frac{\partial f}{\partial z} + 2p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} + 3r \frac{\partial f}{\partial r} + 2s \frac{\partial f}{\partial s} + t \frac{\partial f}{\partial t} + 4a \frac{\partial f}{\partial a} + 3\beta \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

$$+ 2\gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma} + \delta \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0,$$

$$z \frac{\partial f}{\partial p} + 3p \frac{\partial f}{\partial r} + q \frac{\partial f}{\partial s} + 6r \frac{\partial f}{\partial a} + 3s \frac{\partial f}{\partial \beta} + t \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0,$$

$$z \frac{\partial f}{\partial r} + 4p \frac{\partial f}{\partial a} + q \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

który zawiera dwa n a s c i e zmiennych niezależnych i składa się z pięciu równań od siebie niezależnych, bo jeden z wyznaczników stopnia piątego, należącej do nich macierzy posiada wartość z^4 . Stąd wynika z jednej strony, że każde równanie niezmiennie rzędu trzeciego można przedstawić jako związek między temi niezmiennikami różniczkowymi; z innej zaś, że liczba niezależnych od siebie niezmienników różniczkowych trzeciego rzędu jest:

$$12 - 5 = 7.$$

Stąd wyprowadzamy wniosek, że ośm wielkości (N) związane są jedynym tylko związkiem tożsamościowym:

$$W(\mu, \nu, u, v, u_\mu, u_\nu, v_\mu, v_\nu) \equiv 0.$$

Teraz możemy rozwinąć ogólną teorię całkowania wszystkich równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego, które zezwalają na przekształcenia naszej grupy.

Jeżeli mamy mianowicie niezmiennie równanie cząstkowe rzędu drugiego, to możemy je na mocy poprzednich rozumowań doprowadzić do postaci:

$$\Omega(\mu, \nu, u, v) = 0.$$

Rozwiążmy następnie równanie to względem u lub względem v , np. względem v :

$$v = \Gamma(\mu, \nu, u),$$

i obliczmy pochodne v_μ, v_ν . W ten sposób z tożsamościowego związku $W = 0$ możemy wyprowadzić związek postaci:

$$II(\mu, \nu, u, u_\mu, u_\nu) = 0.$$

W ten sposób udało się nam zredukować określenie u jako funkcji ilości μ i ν do całkowania równania cząstkowego rzędu pierwszego, a więc do całkowania równań różniczkowych w y z e z a j n y c h.

Wynika z natury rzeczy, że o całkowaniu równania $II = 0$ nie można powiedzieć nic szczególnego, bo II jest zupełnie dowolną funkcją swych

pięciu argumentów. Załóżmy jednak, że całkowanie równania $II = 0$ jest już wykonane; wówczas odpowiednie równanie całkowe:

$$u - U(\mu, \nu) = 0$$

wraz z danem równaniem $\Omega = 0$, zezwala na obliczenie v jako funkcji ilości μ i ν : $v = V(\mu, \nu)$.

Oba tą drogą znalezione równania:

$$u - U(\mu, \nu) = 0, \quad v - V(\mu, \nu) = 0$$

dają po podstawieniu wartości:

$$\mu = y, \quad \nu = \frac{q}{z}, \quad u = \frac{zs - pq}{z^3}, \quad v = \frac{t}{z},$$

dwa równania cząstkowe rzędu drugiego:

$$\frac{zs - pq}{z^3} - U\left(y, \frac{q}{z}\right) = 0, \quad \frac{t}{z} - V\left(y, \frac{q}{z}\right) = 0,$$

które mają powierzchnie całkowe wspólne i tworzą nadto układ inwulucyjny drugiego rzędu. Wobec tego, określenie powierzchni całkowych wspólnych może być wykonane przez całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych.

Jeżeli równanie cząstkowe drugiego rzędu w zmiennych x, y, z zezwala na grupę nieskończoną:

$$\xi(x) \frac{\partial f}{\partial x} - \xi'(x) z \frac{\partial f}{\partial z},$$

to z całkowanie ich wymaga tylko z całkowania po kolei trzech układów jednoczesnych równań różniczkowych zwyczajnych.

Odpowiednie teorie można rozwinąć dla dowolnych układów równań cząstkowych w zmiennych x, y, z , które zezwalają na przekształcenia naszej grupy. Poprzestajemy na prostych uwagach następujących.

Przyjmujemy, że układ inwulucyjny:

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0, \quad F_2 = 0$$

nie zmienia się przy przekształceniach naszej grupy nieskończonej. Według poprzednich rozumowań możemy wnosić, że układ ten można zredukować do postaci:

$$\Phi_1(\mu, \nu, u, v, u_{\mu}, u_{\nu}, v_{\mu}, v_{\nu}) = 0, \quad \Phi_2 = 0.$$

Przypomnijmy sobie nadto związek tożsamościowy $W = 0$; widzimy, że u i v mogą być wyznaczone jako funkcje zmiennych μ i ν przez całkowanie równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego:

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad W = 0.$$

Znajdujemy tedy wielkości u i v jako funkcje zmiennych μ i ν przez całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych, następnie zaś traktujemy znalezione równania całkowite:

$$u = U(\mu, \nu), \quad v = V(\mu, \nu),$$

tak jak w przykładzie poprzednim.

Gdybyśmy mieli jedno tylko równanie rzędu trzeciego, które zezwala na naszą grupę np. równanie:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

to moglibyśmy doprowadzić je do postaci:

$$\Omega(\mu, \nu, u, v, u_{\mu}, u_{\nu}, v_{\mu}, v_{\nu}) = 0;$$

dodając następnie równanie $W = 0$, trzeba by było zcałkować układ inwolucyjny rzędu pierwszego:

$$\Phi = 0, \quad W = 0$$

z dwiema niewiadomymi funkcjami u i v . Przez dwukrotne różniczkowanie i eliminację funkcji v można ten układ inwolucyjny rzędu pierwszego z dwiema nieznanymi funkcjami zastąpić przez układ inwolucyjny rzędu trzeciego z jedną tylko niewiadomą funkcją u :

$$\Theta_1(\mu, \nu, u, u_{\mu}, \dots, u_{\mu\nu\nu}) = 0, \quad \Theta_2 = 0.$$

Aby uogólnić tak otrzymany rezultat, zamieścimy rozważania następujące:

Układ inwolucyjny w trzech zmiennych posiada różne liczby charakterystyczne, z pomiędzy których jedna zupełnie określona, którą oznaczę przez ω , jest niezaprzeczenie najważniejszą. Tę liczbę ω , którą nazwę klasą układu inwolucyjnego, można określić w sposób następujący:

Jeżeli mamy układ inwolucyjny m -tego rzędu w zmiennych x, y, z , to różnica pomiędzy liczbą pocho-

dnych rzędu m -go liczbą równań różniczkowych od siebie niezależnych rzędu $(m+q)$, pochodzących z różniczkowania układu, jest zawsze ta sama, niezależnie od tego czy q ma wartość zero, czy też jest większe od zera. Liczbę tę oznaczam przez ω i nazywam klasą układu inwolucyjnego.

Jeżeli używać będę tej terminologii, to rozważania rozdziału 2-go dadzą bezpośrednio twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli klasa układu inwolucyjnego w zmiennych x, y, z , jest zerem lub jednością, to całkowanie tego układu sprowadza się do równań różniczkowych zwyczajnych.

Teraz możemy jednak wypowiedzieć jeszcze twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli układ inwolucyjny klasy ω zezwala na nieskończoną grupę $\xi(x)p - \xi'zr$, to można go zawsze zredukować do układu inwolucyjnego klasy $(\omega-1)$ i do układu inwolucyjnego klasy pierwszej.

Według naszych poprzednich rozumowań twierdzenie to jest ważne dla układów inwolucyjnych, które zezwalają na nieskończoną grupę $Z(z)r$. W samej rzeczy dopiero co sformułowane twierdzenie jest tylko szczególnym przypadkiem ogólnego twierdzenia, które można rozszerzyć na wszystkie układy inwolucyjne z dowolną liczbą zmiennych, a także na wszystkie grupy nieskończone. W pracy tej ograniczymy się jednak do szczególnych przypadków tej ogólnej teorii, którą obszernie rozwinie my na innych miejscach.

Uważajmy teraz równania cząstkowe, które zezwalają na przekształcenia grupy:

$$\xi(x)p + \eta(y)q.$$

Nieskończenie małe przekształcenie dwukrotnie uzupełnione ma tu postać

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} - \xi' p \frac{\partial f}{\partial p} - \eta' q \frac{\partial f}{\partial q} - (2\xi' r + \xi'' p) \frac{\partial f}{\partial r} - \\ - (\xi' + \eta') s \frac{\partial f}{\partial s} - (2\eta' t + \eta'' q) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Więc niezmienniki różniczkowe drugiego rzędu są rozwiązaniami układu zupełnego:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$p \frac{\partial f}{\partial p} + s \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad q \frac{\partial f}{\partial q} + s \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

t. j. są funkcjami argumentów:

$$z \text{ i } \frac{s}{pq}.$$

Stąd wnosimy, że niezmiennie równania różniczkowe rzędu drugiego przedstawione są wzorem ogólnym:

$$\frac{s}{pq} = \varphi(z).$$

Otrzymujemy tu dwie całki pośrednie:

$$e^{-\int \varphi dz} \frac{\partial z}{\partial x} = A'(x), \quad e^{-\int \varphi dz} \frac{\partial z}{\partial y} = B'(y),$$

skąd przez kwadraturę wynika ogólne równanie całkowite:

$$\int e^{-\int \varphi dz} dz = A(x) + B(y).$$

Grupa nasza posiada cztery niezmienniki różniczkowe rzędów niższych, niż czwarty, które oznaczamy przez:

$$z = \mu, \quad \frac{s}{pq} = v, \quad u, \quad v;$$

dalej istnieje siedem niezmienników rzędów niższych, niż piąty; ponieważ jednak

$$\mu, v, u, v, u_{\mu}, u_v, v_{\mu}, v_v,$$

są takimi niezmiennikami, więc zachodzi związek tożsamościowy:

$$W(\mu, v, u, v, u_{\mu}, u_v, v_{\mu}, v_v) \equiv 0.$$

Jeżeli tedy mamy jakiekolwiek niezmiennie równanie różniczkowe rzędu trzeciego, to doprowadzamy je najprzód do postaci:

$$\Omega(\mu, v, u, v) = 0,$$

i rugujemy następnie wielkość v z równania $W = 0$. Więc do wyznaczenia u jako funkcji zmiennych μ i v otrzymujemy równanie cząstkowe pierwszego rzędu. Gdy ono jest całkowane, to dwa w ten sposób otrzymane równania cząstkowe rzędu trzeciego:

$$u - U(\mu, v) = 0, \quad v - V(\mu, v) = 0$$

tworzą układ inwolucyjny rzędu trzeciego klasy drugiej.

Ażeby teraz wykonać dalszą redukcję, wyzyskujemy okoliczność, że nasza grupa zawiera dwie nieskończone podgrupy, mianowicie

$$\xi(x) p \text{ i } \eta(y) q,$$

(które są nadto obie podgrupami niezmiennymi).

Wobec tego możemy nawet dwoma różnymi sposobami nasz układ inwolucyjny klasy drugiej, zredukować do układu inwolucyjnego klasy pierwszej, a więc do równań różniczkowych zwyczajnych. Zadawalniając się tu tym rezultatem, pomijamy kwestję, czy w całkowaniu znalezionych równań różniczkowych zwyczajnych mogą zachodzić jakie uproszczenia, czy też nie.

Przez prowadzenie tych rozważań w dalszym ciągu otrzymujemy twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli układ inwolucyjny n -tej klasy w zmiennych x, y, z , zezwala na grupę nieskończoną,

$$\xi(x) p + \eta(y) q,$$

to można go zredukować do układu inwolucyjnego $(n-2)$ -ej klasy i równań różniczkowych zwyczajnych.

Podobne rozumowania pokazują, że twierdzenie to zachodzi i dla takich układów inwolucyjnych w zmiennych x, y, z , które zezwalają na przekształcenia grupy nieskończonej:

$$\xi(x) p + \eta(y) q - z(\xi' + \eta') r.$$

Jeżeli z innej strony układ inwolucyjny n -tej klasy w zmiennych x, y, z : zezwala na grupę nieskończoną:

$$\xi(x) p + \eta(y) q + \zeta(z) r.$$

z większą liczbą podgrup niezmiennych, to zagadnienie nasze można zredukować do całkowania układu inwolucyjnego $(n-3)$ -ej klasy i t. d.

Jak wielkie w każdym danym przypadku jest możliwe uproszczenie, zależy od liczby funkcji dowolnych,

które zachodzą w danej grupie nieskończonej, mówiąc dokładniej, od klasy równań określających (Definitionsgleichungen) odnośną grupę.

Założmy teraz z innej strony, że mamy układ inwolucyjny w zmiennych x, y, z , który zezwala na nieznaną grupę przekształceń styczności; wówczas zachodzi naprzód kwestya, jak określić wszystkie te grupy najprostszym sposobem. Dla ogólnego rozwiązania tego zagadnienia trzeba naprzód wszystkie te grupy doprowadzić do kształtów kanonicznych. Moje teorie ogólne pozwalają, jak to oddawna zauważyłem, rozwiązać wszystkie te zagadnienia.

Wszystkie rozważania tej pracy, pośrednio lub bezpośrednio polegają na mojej ogólnej teorii przekształceń. W mej następnej pracy, której treść już dawniej zakomunikowałem temu Towarzystwu, próbuję zupełnie ogólnie traktować kwestyę, w jaki sposób pojęcie grupy może być wyzyskane dla teorii równań różniczkowych. Jakkolwiek nie może być mowy o tem, aby pytanie to rozwiązać w ostatecznej formie, to jednakowoż ośmielam się utrzymywać, że moje ogólne rezultaty zasługują na uwagę matematyków.

W moich wykładach podczas zimowego półroczu 1893—1894 zilustrowałem teorie ostatniego rozdziału za pomocą pewnych nowych przykładów. Dwaj z pomiędzy moich słuchaczy, mianowicie pp. Beudon i Williams, spróbują prawdopodobnie naszkicowane przezemnie teorie wyzyskać dla zagadnienia, na które w tym czasie zwróciło uwagę Towarzystwo im. księcia Jabłonowskiego¹⁾.

¹⁾ W pracy, która niebawem wyjdzie z druku, podaję w obszernem opracowaniu oddawna ogłoszone przezemnie wyznaczenie wszystkich powierzchni, które zezwalają na ciągłą grupę rzutową. Jestem do tego zmuszony: okazało się bowiem, że matematycy, którzy się temi badaniami interesują, nie są w stanie samodzielnie wykonać opuszczonych przezemnie prostych rachunków. (Por. Archiv for Math., t. 7, Chrystyania, 1882, a także „Theorie der Transfr.“, tom 3, Lipsk. 1893).

PRZYZYNEK DO TEORII FUNKCYI GREENA

PODAŁ

S. ZAREMBA.

Czytanie pięknej rozprawy Picarda („Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives“¹⁾) nasuwa bezpośrednio myśl, że wiele wyników, otrzymanych przez znakomitego geometrę dla równań o pochodnych cząstkowych z dwiema zmiennymi niezależnymi, możnaby rozciągnąć do przypadku większej liczby takich zmiennych. Widać bezpośrednio, że rzecz ta sprowadza się do wykazania pewnej własności funkcji Greena, łatwej do uzasadnienia na płaszczyźnie, przy pomocy odwzorowania podobnego, lecz daleko mniej widocznej w innych przypadkach. Oto własność ta stanowi przedmiot pracy niniejszej.

Ograniczymy się na trzech zmiennych niezależnych, co stanowi przypadek najbardziej interesujący; lecz zobaczymy, że metoda użyta daje się stosować i w przypadku ogólnym.

2. Oto jak brzmi własność, o którą nam idzie:

Niechaj $G(x, y, z, x', y', z')$ będzie funkcya Greena w odniesieniu do obszaru D ograniczonego powierzchnią wypukłą S , mającą w każdym ze swych punktów określone promienie krzywizny. Niechaj d oznacza największą odległość dwóch punktów, wziętych na powierzchni S , a — granicę niższą promieni krzywizny powierzchni S w punkcie zmiennym. Powiadaemy, że całka

¹⁾ Journal de Mathématiques (4), VI, 1890.