Jeżeli wreszcie w otrzymanej kongruencyi

$$(p-1)!\left[\frac{1}{1\,(p-1)}+\frac{1}{2\,(p-2)}+\frac{1}{3\,(p-3)}+\ldots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}\right]\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p)$$

rozłożymy każdy wyraz wewnątrz klamry według wzoru $\frac{1}{r\,(p-r)}$ $=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{p-r}\right)$, to znajdziemy

$$\frac{(p-1)!}{p}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right]\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, p),$$

t. j.

$$(p-1)!\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right]\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, p^2),$$

a to stanowi właśnie zapowiedziane twierdzenie. Gdy bowiem $(p-1)!$ nie może być podzielnem przez p, a tem mniej przez p^2, gdy p jest liczbą pierwszą, musi p^2 być dzielnikiem licznika L w ułamku $\frac{L}{M}$, jaki otrzymujemy z dodania $(p-1)$ ułamków $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{p-1}$.

Pozostaje jeszcze wykazać, że powyższa własność przestaje istnieć dla liczb złożonych. Jakoż istotnie, przypuszczając p złożonem i oznaczając przez λ największy z jej pierwszych dzielników, doszlibyśmy do wniosku że wyrażenie

$$(p-1)!\left[\frac{1}{1(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{3(p-3)}+\ldots+\frac{1}{\lambda(p-\lambda)}+\frac{1}{(\lambda+)(p-\lambda-1)}+\ldots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}\right]$$

$$=2.3.4\ldots(p-3)\,(p-2)+1.3.4.5\ldots(p-3)\,(p-1)$$
$$+\,1.2.4.5\ldots(p-4)\,(p-2)\,(p-1)+\ldots$$
$$\ldots+[1.2.3\ldots(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(p-\lambda-1)(p-\lambda+1)\ldots(p-2)(p-1)]+\ldots$$
$$\ldots+1.2.3\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p+3}{2}\cdot\frac{p+5}{2}\ldots(p-1)$$

musiałoby być podzielnem przez p, a tem bardziej przez λ, co jest niemożebnem, gdyż wszystkie wyrazy po prawej stronie są podzielne przez λ z wyjątkiem jednego (ujętego w klamrę dla wyróżnienia).

O STANIE OBECNYM TEORYI NIEZMIENNIKÓW.

NAPISAŁ

Fr. MEYER.

Przełożył za upoważnieniem autora

S. DICKSTEIN.

Słowo od tłómacza.

Praca, której przekład podajemy, ogłoszona została w tomie I Roczników Stowarzyszenia niemieckiego matematyków (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, I, 1892, str. I—IV, 81—292). Nadzwyczajny rozwój tej nowej gałęzi nauki algebraicznej, rozliczne związki, jakie łączą ją z innemi gałęziami matematyki, oraz rosnące wciąż zastosowania niezmienników, usprawiedliwiają dostatecznie ważność i użyteczność przeglądu głównych zdobyczy naukowych na tem polu badań. Przegląd taki staje się tem niezbędniejszy dla pracujących w tej dziedzinie algebry, że oryentowanie się w olbrzymiej literaturze, rozproszonej po wszystkich niemal dziennikach matematycznych Europy i Ameryki, jest wcale niełatwem, a dla wielu wprost niemożliwem. Przedstawienie zatem już nie samego tylko historycznego rozwoju badań, genezy pojęć i teoryj, związku i wzajemnego oddziaływania różnych prac, ale i podanie zupełnej niemal bibliografii teoryi niezmienników jest niepospolitą zasługą autora, za którą szczerze są mu wdzięczni wszyscy pracownicy na niwie matematycznej.

Z trudnego zadania swego wywiązał się prof. Meyer z niepospolitą sumiennością. Zapanował on, rzec można, nad całą literaturą przedmiotu, tak że żadne ważniejsze zjawisko uwagi jego nie uszło. Wprawdzie nie ukrywa sam przed czytelnikiem pewnych niedokładności, od których pracy swej za wolną nie poczytuje. „Czytelnik — mówi on w przedmowie [1]) — spostrzeże, że w omówieniach niektórych badań nie podano należytej krytyki; lecz autor sądził, że odda większą usługę matematykom, jeżeli powstrzymując się w tych razach od sądów osobistych, przedstawi w związku to, co pojedyńczy badacze istotnie zdziałali, nie zaś to, coby zdziałać mogli. Zresztą, w zamian za to, starał się zaznaczać wszędzie dotychczasowe braki w wiedzy, już to za pomocą odpowiedniego uporządkowania materyału, już przez wskazanie nasuwających się zagadnień. W rozkładzie materyału pozwolił sobie autor na pewną swobodę w wymierzaniu rozmiarów sprawozdań o różnych pracach naukowych; liczne i ważne zastosowania do geometryi uwzględnił w stopniu nieznacznym, pozostawiając komu innemu opracowanie historyczne tego przedmiotu; teoryę kombinantów przedstawił, zbyt jednostronnie".

Te braki, które autor z całą szczerością przed czytelnikiem odsłania, nie zmniejszają wcale, zdaniem naszem, wielkiej wartości referatu. Przeciwnie pobudzić mogą innych do analogicznych studyów i do rozwinięcia pewnych szczegółów całości, tak umiejętnie zbudowanej.

W czasie przygotowywania przekładu tłómacz korzystał z łaskawych wskazówek szanownego autora, który nadsyłał mu poprawki i uzupełnienia do rozmaitych ustępów pracy; zwłaszcza cennemi tu dopełnienia, uwzględniające badania najnowsze, ogłoszone, już po wydaniu referatu, t. j. od r. 1892.

Dodajmy jeszcze, że przekład niniejszy wymagał wprowadzenia pewnych nowych terminów naukowych polskich, które staraliśmy się utworzyć w zgodzie z dotychczasowemi dobremi wzorami i z duchem języka. Czytelnik znajdzie je łatwo w tekscie, gdyż obok wyrazów polskich nowowprowadzonych postawiliśmy w nawiasach odpowiadające im wyrazy obce [2]).

Warszawa, we wrześniu, 1895.

[1]) Podajemy ją tu w streszczeniu.

[2]) Praca niniejsza wychodzi równocześnie w przekładzie francuskim H. Fehr'a w „Bulletin des sciences mathématiques" i we włoskim G. Vivanti'ego w „Giornale di Matematiche".

WSTĘP.

1. Rzut oka[1]) na okres dawniejszy od 1841 do 1867.

Święcimy obecnie pięćdziesięcioletni jubileusz teoryi niezmienników. Wprawdzie pierwiastki tej teoryi sięgają czasów dawniejszych; na dowód czego dość przypomnieć z jednej strony teoryę form kwadratowych (o spółczynnikach całkowitych), uzasadnioną przez Lagrange'a i Gaussa [2]), z drugiej zaś geometryę rzutową, powołaną do życia przez Ponceleta i rozwiniętą następnie przez Chasles'a, Möbiusa, Plückera i Steinera [3]). Właściwa wszakże teorya niezmienników rozpoczyna się dopiero od pracy angielskiego matematyka Boole'a [4]) z listopada r. 1841, w której nietylko udowodniono własność niezmienniczą wyróżników, lecz zarazem podano prostą zasadę, przy pomocy której od wyróżników dojść można do jednoczesnych niezmienników form.

Wkrótce potem (luty, 1892) okazał Boole [5]), że biegunowe formy f prowadzą do rozległej klasy spółzmienników, t.j. do tworów niezmienniczych, które oprócz spółczynników formy f (oraz form pomocniczych) zawierają jeszcze same zmienne.

W trzy lata potem (1845) podjął badania w tym kierunku Cayley [6]); on to zbudował odrazu symbolikę systematyczną, którą nazwał „rachunkiem nadwyznaczników" (hyperdeterminants). Przy pomocy tego rachunku można tworzyć dowolnie wielki szereg niezmienników nawet dla formy pojedyńczej.

„Z rachunku tego — powiada Salmon [7]) — powstała algebra nowoczesna".

Nieco wcześniej znalazł był (1844) Eisenstein [8]) najprostsze niezmienniki i spółzmienniki formy ~~dwój~~kowej (binäre Form) sześciennej i dwukwadratowej; Hesse[9]) zaś, władający wytwornym aparatem wyznacznikowym, wykończonym przez Jacobi'ego, poświęcił szczegółowe studyum s półzmiennikom, które obecnie noszą jego nazwisko, oraz wykrył znaczenie tych spółzmienników dla teoryi krzywych płaskich, a zwłaszcza krzywych rzędu trzeciego.

Nie należy również pominąć faktu, że w tymże roku (1844) Grassmann[10]) wystąpił ze swoją „nauką rozciągłości“ (Ausdehnungslehre) i że jego pomysły, odnoszące się do wyrażeń z lukami (Lückenausdrücke) i spółrzędnych wielogatunkowych (mehrstufig), zawierają w sobie zawiązek nowszego upostaciowania naszej teoryi.

Pośredni wpływ miał też i Galois[11]) (1846) przez swoją teoryę grupy równania.

Aronhold[12]) pierwszy odkrył w dziedzinie trójkowej (ternär) niezmienniki formy sześciennej oraz ich związek z wyróżnikami (1849); cykl zaś prac Sylvestera[13]) (1851—1854) zawiera już zarysy teoryi ogólnej, obejmującej elementy najróżnorodniejszych gałęzi nauki późniejszej. Z zupełną świadomością celu wprowadzono w nich, obok zmiennych pierwotnych, zmienne przekształcalne za pomocą podstawienia odwrotnego i utworzono tym sposobem naukę o przeciwzmiennikach (Contravarianten) i formach pośrednich (Zwischenformen) i podano szereg nowych procesów na tworzenie form niezmienniczych, a zwłaszcza zasadę różniczkowania wzajemnego, tak symbolicznego jak i niesymbolicznego[14]). Sylvester uzasadnia dalej (1851) naukę o formach kanonicznych[15]); stosuje ją do przedstawienia form dwójkowych rzędu nieparzystego (w szczególności piątego) pod postacią sum potęgowych; przez sformułowanie zaś „prawa bezwładności“[16]) toruje nowe drogi do ważnego przypadku form kwadratowych o dowolnej liczbie zmiennych. Rozumie on już znaczenie „zasady dzielników elementarnych“[17]) (Elementartheiler), oraz pojęcia „kombinantów“ (1853)[18]); przy pomocy nieskończenie (małych) liniowych przekształceń zmiennych podaje zasadnicze równania różniczkowe dla niezmienniczych utworów form dwójkowych i wyższych (1852)[19]). Zewnętrzną oznaką uczynionych postępów jest obszerna terminologia, pochodząca po największej części od samego Sylvestera a zestawiona na końcu jego wielkiej rozprawy o funkcyach Sturma 1853)[20]).

Rok 1854, zamykający ten pierwszy szereg prac Sylvestera z dziedziny teoryi niezmienników, jest wogóle najważniejszym w tym pierwszym okresie. Do niego należą bowiem też badania Hermite'a, który zresztą już wcześniej (1851) wzbogacił był teoryę przez wprowadzenie pojęcia „ewektantów“[21]), a w licznych pracach swoich z dziedziny teoryi liczb rozsiał wiele zarodków z teoryi form[22]). Hermite ustanawia „prawo wzajemności“[23]), które godnym uwagi sposobem porządkuje w pary utwory niezmiennicze w dziedzinie dwójkowej. W przypadku formy dwójkowej rzędu nieparzystego wprowadza Hermite dwa spółzmienniki liniowe[24]), jako nowe zmienne, i sprowadza formę do postaci „typowej“, w której spółczynniki same są niezmiennikami. W bezpośrednim z tem związku są układy form

„stowarzyszonych“ (associirte Formen), od których zależy sposobem wymiernym każdy utwór dalszy, należący do formy pierwotnej. Przy przeprowadzeniu rachunku dla przypadku formy piątego rzędu podaje Hermite pierwszy przykład niezmiennika „skośnego“[26]) i wyrażenie tegoż za pomocą trzech innych niezmienników. Pięknem zastosowaniem tej teoryi są kryterya niezmiennicze rzetelności[27]) pierwiastków równania rzędu piątego.

W innej pracy, ogłoszonej również w r. 1854, badacz ten[28]), stojąc jeszcze na stanowisku teoryi liczb, zajmuje się zagadnieniem o przekształceniu formy kwadratowej trójkowej na samą siebie za pomocą podstawienia liniowego zmiennych; spółczynniki szukanego podstawienia przedstawia jako funkcye wymierne pewnej liczby parametrów dowolnych, co już uskutecznił był ogólnie Cayley[29]) w r. 1846 dla ważnego przypadku szczególnego sumy kwadratów. Cayley (1855) wkrótce potem rozciągnął wzory Hermite'a na formy ogólne kwadratowe o n zmiennych[30]).

Rok 1854 był płodnym i w innym jeszcze kierunku. Z jednej strony Cayley uzasadnił[31]) (wspomniane już) równania różniczkowe liniowe cząstkowe, którym czynią zadość niezmienniki form dwójkowych, jako funkcye spółczynników; z drugiej zaś strony Brioschi wyprowadził odpowiednie równania, odnoszące się do pierwiastków tych form. Nakoniec w tymże roku rozpoczyna się szereg rozpraw Cayley'a p. t. „Memoirs upon Quantics“, które kończą się tymczasowo w r. 1861 (na 7-ej rozprawie)[32]). Ze względu na swoją wielostronność i wyczerpujące badanie pojedyńczych przypadków, są one dziś jeszcze bogatą kopalnią dla algebraików i geometrów.

Przez uważanie tworów niezmienniczych form dwójkowych za rozwiązania całkowite wymierne ich równań różniczkowych[33]), zbliża się Cayley już w drugiej z rozpraw wymienionych (1856) do ważnego pytania[34]), czy przy danej formie pierwotnej (Urform) nie można oznaczyć a priori liczb należących do niej form (liniowo-niezależnych)? Dla danego stopnia i rzędu takich form otrzymuje on już odpowiednią liczbę pod postacią określonego spółczynnika w szeregu potęgowym „funkcyi tworzącej“[35]), jakiej użył był już Euler przy rozkładzie liczb. Wywód tego szeregu potęgowego opiera się, co prawda, na pewnym wzorze do obliczania, niezupełnie udowodnionym. Temi badaniami dał Cayley pobudkę do wielu poszukiwań, które sięgają się aż do czasów najnowszych[36]); nie zdołał wszakże rozwiązać w całej ogólności tak sławnego później zagadnienia (postawionego tu poraz pierwszy) o sprowadzeniu nieograniczonego szeregu form niezmienniczych danej formy dwójkowej pierwotnej do funkcyj całkowitych wymiernych skończonej liczby tychże niezmienników[37]).

W rozprawie 4-ej (1858) wprowadza na przykładach zasadnicze pojęcie „nasunięcia“ (Ueberschiebung)[38]) dwóch form i nadaje temuż wyrażenie proste, niesymboliczne, którego ważne znaczenie znowu silniej w ostatnich ujawniło się latach.

Silną pobudkę do rozszerzenia młodej jeszcze i nieustalonej umiejętności dało piękne, na zasadach teoryi niezmienników oparte, rozwiązanie [39]) równania rzędu trzeciego i czwartego (1858). Nie mniej ważnym przyczynkiem jest związanie metod algebraicznych, rozwiniętych dla form dwójkowych, z metodami geometryi rzutowej [40]) utworów zasadniczych pierwszego gatunku. Zwłaszcza rzutowe oznaczenie miarowe Cayley'a dla płaszczyzny i przestrzeni (Rozprawa VI, 1859) uznano później za podstawowe dla rozwoju geometryi nieeuklidesowej" [41]).

W związku z temi pracami systematycznemi znajdują się i inne prace Cayley'a, o których krótko tylko nadmienimy, mianowicie: badania nad rozkładem liczb (1855, 1856), [42]); wielka rozprawa o funkcyach symetrycznych (1854) [43]) (z prostemi prawidłami na oznaczanie stopnia i wagi tych funkcyj), którą można uważać za wstęp do późniejszej teoryi półniezmienników; dalej płodne przerobienie metody eliminacyi [44]) Bézouta (1857) oraz rozszerzenie metody kanonizacyi Sylvestera na formy rzędu parzystego (1857) [45]).

Za bezpośredni dalszy ciąg tego kierunku badań uważać należy doniosłe odkrycie M. Robertsa [46]) (1861), według którego spółzmiennik (dwójkowy) charakteryzuje się w zupełności przez swój wyraz główny (Leitglied, source, leading term), tak że wszystkie związki (syzygie) pomiędzy spółzmiennikami można zastąpić wprost takiemiż związkami pomiędzy ich wyrazami głównemi, i odwrotnie. Taki wyraz główny jest zawsze (jak i niezmienniki) funkcyą symetryczną różnic pierwiastków, lecz musi i w istocie rzeczy czynić zadość jeszcze jednemu równaniu różniczkowemu. Roberts sam pokazał szczegółowo płodność swej metody na przykładzie form piątego rzędu [47]).

Powiemy tu odrazu, co uczyniono w ciągu uważanego okresu czasu (1854—1861) dla wspomnianej teoryi form oraz równań rzędu piątego, o ile to wchodzi w zakres naszego przedmiotu.

I tu Hermite wskazał nowe drogi, po których poszli dalej Brioschi i Cayley. Już w r. 1856 zastosował Hermite przekształcenie wymierne zmiennych, w którem mianownik był spółzmiennikiem licznika, w celu sprowadzenia całki eliptycznej pierwszego gatunku do postaci normalnej typowej [48]); dwa lata później nadał ogólnie dawno w algebrze używanemu przekształceniu Tchirnhausena taką formę niezmienniczą [49]), przy której ujawnił się wyraźnie charakter niezmienniczy równania przekształconego, które nadto ma zależeć od możliwie najmniejszej liczby parametrów. Za tem poszło już rozwiązanie podobnego zagadnienia dla rozmaitych rozwiązujących (Resolvente) danego równania. W przypadku równania rzędu piątego temi rozwiązującemi są, jak wiadomo, równanie modułowe i równanie mnożnikowe, występujące przy przekształceniu rzędu 5-go funkcyj eliptycznych [50]).

Opracowanie systematyczne pod tym względem równań rzędu 5-go podał Hermite dopiero później (1865 do 1866) [51]).

Obok trzech głównych badaczy na tem polu: Cayley'a, Sylvestera i Hermite'a, występuje w r. 1854 Brioschi [52]), który w najróżniejszych kierunkach uzupełnił i rozwinął badania tamtych. Wymienimy niektóre tylko główne jego rezultaty. I tak (1857) podał on godny uwagi układ równań różniczkowych [53]), charakterystyczny dla rugownika i wyróżnika form dwójkowych—zastosowanie tego układu do teoryi funkcyj hypereliptycznych [54]) uczyniono dopiero w ostatnich czasach;— dalej zawdzięczamy Brioschi'emu istotne rozwinięcie teoryi Hermite'a przedstawień typowych, mianowicie też i do form trójkowych [55]).

Wobec znacznego wzrostu liczby prac w naszej dziedzinie, należy uznać z wdzięcznością fakt, że Salmon,—który już dawniej ogłosił był cenne przyczynki tak do rachunku, [56]) jak i do zastosowań geometrycznych — podjął się uporządkowania i przedstawienia całego obszernego materyału w zwięzłej monografii (1859) [57]). Rozpowszechnienie tej pracy w Niemczech jest zasługą Fiedlera, który już, przed jej wydaniem [58]) (1863) po niemiecku, ogłosił był (1862) pracę samodzielną [59]), przeznaczoną dla początkujących i uprzystępniającą przedewszystkiem zastosowania geometryi rzutowej, podane przez Cayley'a. Około tego samego czasu (1862) pojawiło się dzieło Brioschi'ego [60]), które zjednało teoryi niezmienników rozległe koło zwolenników we Włoszech.

Podczas gdy wzmiankowani matematycy angielscy, francuscy i włoscy pozostawali z sobą w żywej wymianie myśli, nadając wciąż nowy ruch tej teoryi, w Niemczech tymczasem była ona długo zaniedbywaną.

Wprawdzie metody rzutowe [61]) oraz twierdzenia Hessego i Steinera najściślej wiążą się z należącemi do teoryi form poglądami obcych algebraików, lecz idea nie znalazła jeszcze sobie formy właściwej, która tu ma większe znaczenie niż w innych częściach matematyki.

Zmianę pod tym względem sprawił dopiero Aronhold za pomocą swego klasycznego przykładu [62]) (1858), w którym z teoryi Hessego form trójkowych sześciennych wydziela włókna niezmiennicze i nadaje im postać zaokrągloną, wolną od wszelkiej sztuczności i przypadkowości.

Ponieważ myśli zasadnicze, będące podstawą tego badania, zostały przedstawione w późniejszej pracy Aronholda [63]) (1863) w związku organicznym i w całej ogólności, przeto uważamy za odpowiednie tu je zaraz omówić. Obszerność omówienia naszego niechaj usprawiedliwi ta okoliczność, że myśli te miały wpływ stanowczy na plan niniejszego referatu.

Dążeniem Aronholda było objęcie z jednego punktu widzenia różnorodnych utworów natury niezmienniczej i uzasadnienie tym sposobem nietylko ich związku wzajemnego lecz i samej racyi ich bytu; za punkt wyjścia do tego celu służy mu zagadnienie, które formułuje w sposób następujący [64]):

„Niechaj $F(x \backslash a)$, $F'(\xi|a')$ będą dwie dowolne i ***zupełnie ogólne*** funkcye jednorodne rzędu p-go odpowiednio n zmiennych, $x_1 \ldots x_n$, $\xi_1 \ldots \xi_n$; znaleść warunki, jakie powinny zachodzić pomiędzy ich spółczynnikami a i a', aby obie funkcye dały się przekształcić jedna na drugą za pomocą podstawienia liniowego“.

Podkreśliliśmy tu wyrazy „zupełnie ogólne,“ gdyż nieuwzględnienie ich doprowadziło do nieporozumień[65]). Z tego, że o spółczynnikach a i a' nie czyni się z góry żadnych założeń, wypływa już, że przez warunki szukane rozumie się tylko konieczne we wszystkich przypadkach, nie zaś wystarczające w przypadku form F i F', w jakikolwiek sposób zniekształconych (ausgeartet), co też sam Aronhold wyraźnie zaznaczył w wielu miejscach [66]) rozprawy z r. 1858 dla formy trójkowej sześciennej.

Wyobraźmy sobie, że z warunków przekształcalności wyrugowano już spółczynniki δ podstawienia, wtedy równania ostateczne dają się przedstawić tak, aby ich strony prawe były od δ niezależne. Ten fakt znajduje swój wyraz w istnieniu n^2 równań rożniczkowych cząstkowych [67]), które przekształcają się w ten sposób, aby w nich nie zachodziły wcale ilości δ. Stąd, odwrotnie, wnieść można, że związki algebraiczne przekształcenia przedstawić się dają pod postacią równości pomiędzy ułamkami, z których jeden jest zawsze taką samą funkcyą wymierną spółczynników a funkcyi F, jaką drugi jest funkcyą spółczynników a' przekształconej funkcyi F'.

Ułamki te, jako rozwiązania wymierne wspomnianych równań różniczkowych, uzasadniają istnienie niezmienników „bezwzględnych“ funkcyi F. Otrzymuje się stąd także i liczba niezmienników wymiernie niezależnych, ponieważ dalszy rozwój teoryi pozwala na wyprowadzenie ważnego wniosku, że te równania różniczkowe w liczbie n^2 są wogóle od siebie liniowo-niezależnemi [68]).

Niezmienniki zwyczajne, które przed Aronholdem stanowiły empiryczny punkt wyjścia, okazują się a posteriori licznikami i mianownikami niezmienników zwykłych; czynią one zadość odpowiedniemu układowi n^2 równań różniczkowych.

Układ ten (jak i tuż przedtem wspomniany) jest, według dowodzenia Clebscha (1861), „zupełnym“, (vollständig), co oznacza, że nie jest możliwem dołączenie do tego układu nowych równań liniowych przy pomocy różniczkowania oraz rugowania pochodnych wyższych [69]).

Uogólnienie do układu form pierwotnych [70]) nie sprawia zasadniczych trudności; nadto udało się Aronholdowi [71]) odsłonić głębsze związki pomiędzy różnorodnemi tworami niezmienniczemi, a to przez odkrycie wielu godnych uwagi własności przynależnych form (przeciwzmienników) i form pośrednich (konkomitantów mieszanych).

W badaniach tego rodzaju jest rzeczą ważną, aby pomiędzy spółczynnikami formy pierwotnej nie zachodził żaden związek liniowy; zamiast tej

formy można przeto wziąć odpowiednią potęgę formy liniowej [72]), przez co przedewszystkiem ułatwia się stosowanie procesów różniczkowania.

Tak wprowadzona symbolika nie różni się wprawdzie formalnie co do istoty swej od symboliki Cayley'a, lecz właśnie na podstawie samodzielnego uzasadnienia w teoryi Aronholda pozyskała zdolność rozwoju, jaki stał się następnie jej udziałem w Niemczech.

Tu jest właśnie punkt, w którym Clebsch podjął z wielkiem powodzeniem badania w tej dziedzinie; rozprawa Aronholda z r. 1858 pobudziła go do przyjęcia wspomnianej symboliki za wyłączną podstawę teoryi (1861) [73]) i do rozwinięcia pomysłu sprowadzania utworów form wyższych do utworów form liniowych.

Podczas gdy symbolika anglików ograniczała się na tworzeniu form niezmienniczych w liczbie dowolnej, to przedstawienie symboliczne Clebscha zapomocą agregatów wyznacznikowych prowadzi nie tylko do wszystkich niezmienników, lecz może być poczytane też za ich określenie, wszakże, na początek, w zastosowaniu tylko do form, zawierających najwyżej jeden szereg zmiennych oraz szereg ich wzajemnych.

Ta właśnie ogólność symboliki daje możność Clebschowi wyprowadzenia między innemi znanej „zasady przeniesienia“ [74]), która ustanawia związek bezpośredni pomiędzy dziedzinami różnego gatunku.

Clebsch podał w tymże samym czasie szereg interesujących zastosowań do geometryi krzywych i powierzchni algebraicznych; jako najbardziej charakterystyczne wymieniamy traktowanie zagadnienia o normalnych [75]) do utworów rzędu drugiego.

Zresztą, tak w obecnem, jak i w późniejszem naszem omówieniu badań Clebscha, ograniczamy się na rzeczach najkonieczniejszych, bo istnieje już obszerny i jasny wykład tego przedmiotu, uwzględniający zarazem i dziedziny pokrewne [76]).

Według naszego pojmowania, Clebsch i Aronhold wspomnianemi swemi pracami z r. 1861 i 1863 rozpoczynają nową epokę, która daje początek systematycznemu rozwojowi naszej nauki, przytem kierownictwo w niej przechodzi do Niemiec.

Dwa kierunki główne ujawniają się tu i wyróżniają wybitnie.

Jeden, zainaugurowany przez Clebscha i posiłkujący się jego metodami, dąży do zupełnego zbadania nieskończonego zakresu form niezmienniczych i ich wzajemnego pokrewieństwa; rozważanie zadania tego umożliwiły właśnie metody Clebscha. Drugi kierunek podejmuje zagadnienia „równoważności“, t. j. przekształcalności liniowej jednej formy na drugą, postawione przez Aronholda.

Upływa wszakże pewna liczba lat, zanim ujawnia się rzeczywisty postęp w obu kierunkach; można przyjąć, że nastąpiło to w roku 1868, w którym Gordan ogłosił swój dowód o „skończoności układu“ dla form dwójkowych [77]), Weierstrass zaś—badanie równoważności form i gromad form (Formenscharen) dwuliniowych (i kwadratowych) za pomocą nauki o dzielnikach elementarnych [78]).

Niechaj mi zatem wolno będzie omówić dopiero później, w związku z badaniami nowej epoki, rozprawy Clebscha i Gordana [79]) (1867) o typowem przedstawieniu form dwójkowych, oraz Kroneckera [80]) i Christoffela [81]) o formach dwuliniowych, które to rozprawy—zewnętrznie biorąc—należą jeszcze do okresu starszego.

2. Przejście do nowego okresu od r. 1868 do chwili obecnej.

Rok 1868 przedstawia, obok dwu wyżej wskazanych, jeszcze następujące godne uwagi momenta.

Przedewszystkiem, obowiązkiem jest sprawozdawcy nadmienić, że odtąd dopiero roczniki wydawnictwa „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“, założonego przez Ohrtmanna i Müllera [82]) — wydawnictwa jedynego w całej literaturze matematycznej, — umożliwiają przegląd zupełny badań w rozważanej przez nas dziedzinie nauki.

W tymże roku ukazały się dzieła: Plückera [83]) „Neue Geometrie des Raumes“ i Rey'ego „Geometrie der Lage“, dzięki którym geometrya w wyższym, niż dotąd stopniu, poczęła oddziaływać na algebrę i dostarczać jej nowych źródeł. Za wzór tego rodzaju służyć może zastosowanie, jakie uczynił Klein [84]) (także w r. 1868) z cytowanej już Weierstrassowskiej redukcyi gromady form kwadratowych, w celu podziału kompleksów liniowych drugiego stopnia na różne rodzaje.

Udowodnienie przez Gordana skończoności klasy układów form prowadziło do opanowania i innych form szczególnych w tymże kierunku. Obfitość prac, które dzięki tej pobudce powstały a w których Clebsch i Gordan przeważny udział brali, nasunęła potrzebę założenia nowego czasopisma „Mathematische Annalen“ (pierwszy zeszyt wydano w grudniu 1868); pismo to ze szczególną pieczołowitością uprawiało gałęź umiejętności, będącą przedmiotem naszego sprawozdania.

3. Ograniczenie materyału.

Za podstawę naczelną podziału materyału, który tu przedstawić mamy, przyjmujemy, jak już wyżej zauważono, dwa punkty widzenia: równoważność i powinowactwo form.

Nie ma bezwątpienia dziedziny matematyki, w którejby teorya przekształceń liniowych nie była stosowaną z powodzeniem, i dlatego jest koniecznem ograniczyć w sposób odpowiedni zakres naszych rozważań.

Klein i Lie na początku siódmego dziesiątka lat okazali [85]), że własności wyrażeń, mających cechę niezmienniczą dla pewnej klasy przekształceń, warunkują się zasadniczo charakterem grupowym [86]) przekształceń, t. j. tą właściwością zamkniętej rozmaitości przekształceń, która odtwarza się przy dowolnem ich zestawieniu.

Ten charakter grupowy występuje najdobitniej w przekształceniach liniowych, bo odrazu jest jasnem, że dwa przekształcenia liniowe, wykonane jedno po drugiem, dają znowu przekształcenie liniowe. Do każdej grupy podstawień liniowych ilości zmiennych należy, ściśle biorąc, osobna [87]) teorya niezmienników; tu wszakże rozważać będziemy tylko klasy najgłówniejsze.

W algebrze mamy do czynienia głównie z formami, których spółczynniki są uważane albo za zupełnie niezależne, albo też za zależne sposobem ciągłym od pewnej liczby parametrów dowolnych. Podobnie i spółczynniki podstawień liniowych, którym poddają się zmienne, uważane bywają za wielkości, zmieniające się sposobem ciągłym. Będziemy więc mieli do czynienia z grupami „skończonemi ciągłemi“ [88]).

Istnieją wszakże ważne wyjątki od tego prawidła. Przy formach z przekształceniami liniowemi w same siebie występują podstawienia, których liczba jest skończona, skutkiem czego ich spółczynniki przybierają wartości liczebnie stałe. I takie grupy, nazwane krótko „grupami Galois'a“, będą nas zajmowały ze stanowiska zagadnienia o równoważności. Grupy te dają zarazem przejście do związku z teoryą równań.

Przeciwnie, w teoryi liczb i w dziedzinach pokrewnych (jak np. w nowoczesnej teoryi funkcyj automorficznych) zmienność spółczynników stosowanych podstawień poddawaną bywa prawom arytmetycznym, a stąd spółczynniki te należą do dziedziny wielkości, zmieniających się w sposób nieciągły.

Badanie niezmienników (arytmetycznych i przestępnych), dających się przyporządkować do takich właśnie grup „nieciągłych“ [89]) wymaga metod odmiennych od używanych w algebrze; a ponieważ nadto pytania, związane z tym przedmiotem, rozwijają się w zupełnie innym kierunku, przeto badania z tej dziedziny uwzględniać będziemy tylko okolicznościowo.

Podobnież rzecz się ma z rozległemi badaniami, odnoszącemi się do form i równań różniczkowych, powstałemi stąd, że zmienne niezależne poddawano przekształceniom zupełnie dowolnym. Wprawdzie różniczki zmiennych przekształcają się liniowo — i dlatego teorya algebraiczna niezmienników ma tu do pewnego stopnia zastosowanie [90]), lecz spółczynniki podstawień zawierają w sobie funkcye samych zmiennych, których dowolność może być ograniczona tylko pewnemi warunkami całkowalności. I takiemi grupami „nieskończonemi" będziemy zajmowali się tylko wtedy, gdy ich charakter specyficzny usuwa się na plan dalszy, występują zaś na widownię cechy z teoryi form.

I w dziedzinie algebry właściwej zaprowadzimy pewne ograniczenia.

Od czasu epokowych prac Cremony z jednej i Riemanna z drugiej strony, istnieje w teoryi krzywych i powierzchni algebraicznych (t. j. funkcyj algebraicznych jednej lub więcej zmiennych) szereg ważnych zjawisk, których prawa zależą nie tyle od podstawień liniowych, ile od jednoznacznych (algebraicznych) podstawień ilości zmiennych. Wprawdzie dają się one w zasadzie sprowadzić do podstawień czysto-liniowych (do tak nazwanych utworów φ) [91]), lecz opracowanie tych pytań ze stanowiska rzutowo-niezmienniczego zostało dopiero podjęte w ostatnich czasach, i to tylko w pojedyńczych przypadkach.

Z drugiej wszakże strony będziemy zmuszeni przekroczyć granice algebry w innym kierunku.

Jedno z najważniejszych twierdzeń, podanych przez Lie'go, orzeka, że zakres ciągłej skończonej grupy przekształceń można zawsze „rozszerzyć" (erweitern) [92]), przez włączenie do niej wszystkich tych przekształceń, których doznają pochodne (aż do pewnego dowolnego rzędu) zmiennych, uważanych za niezależne, względem zmiennych niezależnych. Niezmienniki takich grup rozszerzonych, lub wprost „niezmienniki różniczkowe". mają wielkie podobieństwo do zwykłych niezmienników w przypadku, gdy grupa pierwotna była rzutową. Tym sposobem usprawiedliwiamy włączenie do niniejszego referatu odnośnych prac Halphena, Sylvestera i szkoły tego ostatniego matematyka.

Co się wreszcie tyczy zastosowań naszej dziedziny do innych gałęzi matematyki — które ze względu na swą rozległość wymagałyby oddzielnego sprawozdania — to omówimy z nich tylko te, które, zdaniem naszem, przedstawiają szczególny interes, zwłaszcza ze względu na ilustracyę i ożywienie tekstu.

Jeżeli tym sposobem pole podstawień rzutowych okazuje się stosunkowo szczupłem, to ma ono natomiast ważne znaczenie w dwóch kierunkach. Po pierwsze, specyficzna metodyka wyrobiona w niem może służyć za wzór dla innych gałęzi nauki. Powtóre, nauka o podstawieniach liniowych i ich niezmiennikach stanowi nietylko naturalny stopień przygotowawczy do nauki o przekształceniach w ogólności, lecz nadto przy traktowaniu tych ostatnich uwidocznia się coraz wyraźniej dążenie do sprowadzania głównych zagadnień do zagadnień gałęzi pierwszej. Naprzykład, dla każdej grupy ciągłej przekształceń istnieje grupa rzutowa, która może być izomorficznie od-

niesiona do grupy danej; zagadnienie o oznaczeniu wszystkich grup oznaczonego składu (Zusammensetzung) należy do zwykłej teoryi niezmienników pewnych form trójliniowych.

4. Stopniowy rozwój pojęcia niezmiennika.

Jeżeli dany jest układ form i jeżeli różne szeregi zmiennych poddamy pewnej grupie podstawień liniowych, to wytworzą one grupę (holoedrycznoizomorficzną) podstawień spółczynników danych. Każdy niezmiennik jednorodny tej grupy spółczynników, t. j. funkcya analityczna spółczynników, która zarazem jest jednorodną względem każdego szeregu spółczynników, a pozostaje niezmienioną przy przekształceniach grupy, nazywa się „niezmiennikiem bezwzględnym" układu form, w najogólniejszem znaczeniu tego słowa.

W szczególności, gdy pierwotna grupa zmiennych jest ogólną rzutową (spółczynniki ogólnej natury), wtedy niezmiennikami wymiernemi grupy spółczynników są ułamki Aronholda, których liczniki i mianowniki są zwykłemi (lub względnemi) niezmiennikami całkowitemi wymiernemi układu form.

Jeżeli chcemy, aby i ostatnie utwory (i wogóle niezmienniki względne) zawierały się w powyższem określeniu, to należy grupę zmiennych zastąpić taką podgrupą, która powstaje, gdy wyznacznikowi podstawienia pierwszej grupy nadamy wartość stałą, równą jedności.

Po tem sformułowaniu pojęcia niezmiennika, wystarczającem do objęcia z jednego punktu widzenia wielu zjawisk poszczególnych niżej omawianych, zwróćmy się do przedstawienia rozwoju historycznego tego pojęcia i przedstawmy w krótkości najważniejsze momenty postępu.

Punkt wyjścia stanowiły, oczywiście, funkcye całkowite wymierne spółczynników jednej lub kilku form pierwotnych, zmieniających się przy przekształceniu tylko o potęgę (całkowitą) wyznacznika podstawienia. Zakres takich funkcyj prędko rozszerzono, przyjmując za argumenty, obok spółczynników, i zmienne pierwotne oraz zmienne przeciwpodstawieniowe (contragredient) do nich.

Obok tego formalnego jeszcze określenia form niezmienniczych, występuje później bardziej materyalne określenie Cayley'a, który uważa te formy za rozwiązania całkowite wymierne ich równań różniczkowych.

W trzeciem określeniu, według Clebscha, niezmienniki są agregatami pewnych iloczynów symbolicznych.

Następnie uwolniono określenie niezmienników od niepotrzebnego ograniczenia, aby czynnik, przybywający po przekształceniu, był zgóry potęgą wyznacznika podstawienia, i postawiono tylko żądanie, aby zależał wogóle od spółczynników podstawienia (nie zaś od spółczynników form). Ta ostatnia własność, jak to wykazał szereg autorów [93]), pociąga już za sobą własność pierwszą.

Wcześnie już badano formy pierwotne o wielu szeregach zmiennych, które poddawano tylko przekształceniom spółpodstawieniowym (cogredient) lub też przeciwpodstawieniowym.

Clebsch [94]) w r. 1872 wprowadził systematycznie jedne za drugiemi wszystkie zmienne, odpowiadające w dziedzinie n-krotnie rozciągłej rozmaitym zawartym w niej gatunkom dziedziny liniowej. Gordan i Capelli [95]) badali formy powstające wtedy, gdy do różnych szeregów ilości zmiennych zastosujemy podstawienia wzajemnie niezależne.

Dopóki rozmaite utwory niezmiennicze, dające się wyprowadzić z danego układu form, są całkowitemi wymiernemi co do spółczynników oraz względem oddzielnych szeregów ilości zmiennych, dopóty, według Aronholda i Clebscha, wypływają one łatwo z pierwotnego pojęcia niezmienników (w znaczeniu ściślejszem); dość tylko w tym celu do danego układu form dołączyć formy liniowe pomocnicze.

Potrzeba istotnego rozszerzenia tego pojęcia zjawia się dopiero wtedy, gdy pojęcie zasadnicze niezmiennika z dziedziny wymiernej przenosimy do dziedziny niewymiernej i przestępnej. Pozostając tylko wewnątrz granic algebry, winniśmy głównie uwzględnić tu pierwiastki równań nieprzywiedlnych, których spółczynniki są niezmiennikami całkowitemi wymiernemi. Nowe badania Hilberta, Kleina i Gordana, jako też i Frobeniusa pokazały [96]), jak naturalnie występują takie utwory niewymierne, jeżeli formy pierwotne dane są pod pewną postacią niewymiernie-kanoniczną, albo, co na jedno wychodzi, jeżeli w odpowiedni sposób rozszerzymy pierwotną dziedzinę wymierności.

Study [97]) w r. 1887 przedstawił w przejrzystym organicznym wykładzie stopniowe wznoszenie się pojęcia niezmiennika, zestawiając równolegle kolejne jego stopnie z tworzeniem arytmetycznem rozmaitych rodzajów wielkości algebraicznych, uzasadnionem przez Kroneckera. W szczególności zaś, nadał on postać ścisłą delikatnemu pojęciu spółzmiennika niewymiernego.

W innym kierunku Christoffel [98]) i w nowszych czasach Maurer [99]) rozszerzyli pole badań, rozważając takie niezmienniki, dla których grupa spółczynników pozostaje rzutową jeszcze wtedy, gdy wyrażenia, służące do przekształceń ilości zmiennych, stają się wymiernemi. Wtedy zachowuje się postać charakterystyczna równań różniczkowych dla niezmienników.

Wreszcie należy także wspomnieć o oznaczaniu niezmienników całkowitych wymiernych za pomocą ich wyrazów głównych. Te ostatnie są niezmiennikami pewnej podgrupy niezmienników pierwotnych i czynią zadość tylko pewnej części równań różniczkowych, odnoszących się do niezmienników zwyczajnych.

W nowszych czasach Mac-Mahon i Cayley utworzyli specyalnie dla form dwójkowych teoryę samodzielną takich „półniezmienników", które, dzięki właściwej symbolice, znajdują się w najściślejszym związku z teoryą funkcyj symetrycznych [100]). Z drugiej strony Sylvester i Perrin sprowadzili te utwory do utworów jeszcze prostszych [101]).

Znaczenie wyrazów głównych sięga jeszcze dalej; z nich bowiem, według Faa di Bruno [102]) i Hilberta [103]), można otrzymać odpowiednie formy zupełne za pomocą jednego jedynego procesu: dość tylko spółczynniki pojedyńczych form pierwotnych zastąpić pochodnemi tych form względem spółrzędnej niejednorodnej (pomnożonemi przez pewne liczby). Postępowanie to może być stosowane i do form wyższych niż formy dwójkowe.

PRZYPISY.

1) Szereg wskazówek do literatury tego przedmiotu znajduje się w „Modern Higher Algebra" Salmona, wyd. 4-e Dublin, 1885. Porówn. wydanie niemieckie rozszerzone Fiedlera, wyd. 2-ie Lipsk 1877. Dzieła te będziemy w następstwie cytowali w krótkości: „Salmon", Fiedler". Zestawienie literatury, odnoszącej się do form dwójkowych, znajduje się w wydaniu dzieła Faà di Bruno w opracowaniu niemieckiem Waltera i Nöthera: Theorie der binären Formen, Lipsk 1881. Cytować je będziemy w krótkości przez „Bruno".

2) Lagrange stwierdza niezmienniczość wyróżnika wyrażenia $ax^2 + 2b\,xy + cy^2$ przy przejściu od x do $x + \lambda y$ (Berliner Abhandlungen 1773, str. 265), porówn. Salmon, str. 343. W „Disquisitiones arithmeticae" Gaussa (1801) przekształcenie ogólne liniowe stanowi podstawę teoryi form dwójkowych i trójkowych, których wyróżniki są niezmiennikami. W art 267, 268 dowodzi Gauss, że wzajemna (forma adjuncta) formy trójkowej pozostaje niezmienną przy podstawieniu „transponowanem". Porówn. Salmon S. 344 Pierwsze początki znakowania symbolicznego napotkać można, według Gordana (Math. Ann. VII, s. 38), w pracach Cauchy'ego, Boole'a, Pfaffa, Jacobi'ego; dalsze analogie przedstawia rachunek waryacyjny (l. c. str. 37). Twierdzenie o mnożeniu wyznaczników, podane w całej ogólności przez Cauchy'ego w r. 1812, może służyć jako przykład cechy niezmienniczej spółzmiennika, dziś nazywanego tożsamościowym. Takim jest w istocie rzeczy punkt wyjścia badań Cayley'a.

Innego rodzaju stopień wstępny do teoryi niezmienników stanowi przedstawienie form kwadratowych jako sum kwadratów, za pomocą przekształceń ortogonalnych, co do których patrz Teoryę wyznaczników Baltzera (Lagrange, Laplace, Cauchy, Lebesgue, Jacobi). Nakoniec należy tu także pewien szereg twierdzeń przygotowawczych Joachmisthala o wyróżniku, szereg Taylora i t. d. i niektóre przypadki „niezmienników różniczkowych" u Cauchy'ego.

3) Dwoma momentami głównemi, odnoszącemi się do tego przedmiotu są: rola, jaką odgrywa stosunek anharmoniczny, jako niezmiennik (niewymierny) bezwzględny, dalej teorya wzajemności biegunowej. Osobną ocenę zasług przytoczonych w tekscie geometrów, ze stanowiska algebry, daje Clebsch w swoim życiorysie Plückera. Gott. Abh. XVI. s. 1—32.

4) Cambr. Math. Jour. III, s. 1—20; praca nosi datę 28 kwietnia 1841 r. Boole uogólnia przekształcenie ortogonalne form kwadratowych, szukając warunków, przy których dwie dane pary form jednorodnych równego rzędu: ϱ, Q; ϱ', Q' mogą być przekształcone jedna w drugą za pomocą liniowych podstawień zmiennych. Znajduje on warunek konieczny (jakkolwiek niezawsze dostateczny) ten, by wyróżniki wyrażeń $\varrho + \lambda Q$,

$q' + \lambda Q'$, przyrównane do zera, prowadziły do tych samych równań dla λ. Stąd wynika wniosek, że wyróżniki wyrażeń q i q' różnią się tylko potęgą wyznacznika podstawienia (l. c. s. 19). Dowód zupełny tego i dokładne wskazanie wykładnika potęgi dał Boole dopiero trzy lata później. Cambr. Math. Journ. IV (List. 1844), str. 167—171. Porówn. przedstawienie tej rzeczy i w „Wyznacznikach" Gordana-Kerschensteinera, (patrz niżej), gdzie rugownik, jako wyznacznik funkcyjny, poddany jest szczegółowemu rozstrząsaniu. Nie należy pominąć tego, że w r. 1841 pojawiła się rozprawa Jacobi'ego o wyznacznikach funkcyjnych, Journ. f. Math. XXII, s. 319—359. Nie ma ona daty; poprzedzająca ją wielka praca Jacobi'ego o wyznacznikach ma datę 17 marca 1841 r., mniejsza zaś późniejsza praca tegoż autora — datę 18 marca 1841 r. W rozprawie pierwszej podana jest własność zasadnicza wyznaczników funkcyjnych, polegająca na tem, że przy zupełnie ogólnem przekształceniu zmiennych odtwarzają się one jako takież wyznaczniki funkcyjne, przybierając tylko czynnik, który sam jest także wyznacznikiem funkcyjnym. Następnie podane jest zastosowanie tej własności do przekształcania całek wielokrotnych. Szczególnym przypadkiem przytoczonego twierdzenia jest własność kombinantowa rugownika dwóch form dwójkowych f, g jednego rzędu, t. j. że rugownik po przekształceniu przybiera tylko czynnik będący potęgą ilości $\lambda\mu' - \lambda'\mu$, gdy mianowicie f, g zastąpimy przez $\lambda f + \mu g$, $\lambda' f + \mu' g$. Porównaj tom I cytowanego dzieła Gordana „Vorlesungen über Invariantentheorie hg. von Kerschenstein," Lipsk, 1885.

[5]) Cambr. Math. Journ. III, s 106—119. W tej pracy uogólnił rezultaty pierwszej rozprawy do więcej niż dwóch form, które mogą być i nierównych rzędów. Różniczkowanie zupełne danych równoważności form sprowadza zagadnienie do równoważności form różniczkowych rzędów równych i przytem możliwie niskich. Nie podzielam zdania Salmona, (s. 344), że Boole przez to już uzasadnił twierdzenie, iż niezmienniki biegunowych są spółzmiennikami formy zasadniczej.

[6]) Collected Math. Papers. Vol. I, s. 80—94, 95—112. Druga z tych prac wyszła w 1846 r.

Niezmienniczość badanych form występuje tu wszędzie jako rozszerzenie twierdzenia o mnożeniu wyznaczników. Rozszerzenie to rozwija się w dwóch kierunkach: najprzód tworzą się wyznaczniki wyższego rzędu, składające się z $(n!)^n$ wyrazów, następnie całkowity agregat wyznaczników przedstawia się pod postacią macierzy. Wyznaczniki rzędu wyższego były wprowadzone przez Cayley'a już w r. 1843 (l. c. 63—79, druga połowa); skrócenie oznaczenia jest pierwszym rodzajem symboliki. Zastosowanie tych pomysłów do formy pierwotnej n-go rzędu o m zmiennych uskutecznia się w ten sposób, że formę tę zastępujemy najprzód inną liniową względem n rzędów m zmiennych, które mogą być poddane różnym podstawieniom. Twierdzenie Boole'a o wyróżniku występuje teraz w takiem świetle, że wyróżnik pierwotny i przekształcony różnią się od siebie o potęgę iloczynu wszystkich n wyznaczników podstawienia. Niektóre lub wszystkie n szeregów zmiennych można później znowu utożsamić, tylko nie w równaniach różniczkowych (s. 84) liniowych cząstkowych, którym zadość czynią niezmienniki, gdyż te równania są wyrażeniem pewnej elementarnej własności wyznaczników.

W pierwszej z przytoczonych rozpraw (s. 80—94) metoda jest rozwinięta o tyle, że można już poznać, iż każda forma dwójkowa rzędu parzystego posiada niezmiennik kwadratowy. W końcu Cayley nazywa Boole'a odkrywcą pierwszego niezmiennika sześciennego (formy dwukwadratowej), porówn. Salmon, s. 343 i przypisek poniższy o Eisensteinie.

Rozprawa druga wykazuje istotny postęp. Porówn. Salmon Less. 14. Myśl zasadnicza jest ta, że wyznacznik funkcyjny n funkcyj i n zmiennych można pojmować, jako wynik procesu różniczkowania, zastosowanego do **jednej jedynej** funkcyi, mianowicie do iloczynu tych n funkcyj, z których każda jest napisana w innym szeregu zmiennych; następnie należy tę różność n szeregów usunąć. Daje to tę korzyść, że można proces różniczkowania powtarzać (iterować) i różne iteracye kombinować. Wszystkie w ten sposób powstające procesy, zastosowane do funkcyj całkowitych jednorodnych, są natury niezmienniczej, t. j. z funkcyj wytwarzają spółzmienniki jednoczesne.

Związana z tem symbolika jest w istocie rzeczy tylko skróconem przedstawieniem procesów **realnych**. Inaczej się ma rzecz w późniejszych badaniach Gordana, który procesy te rozciąga na formy symboliczne. Cayley'owski proces różniczkowania („proces Ω") ma dziś ważne znaczenie. Porówn. Rozdział II, C, b, α.

Później Escherich (Wiener Denkschriften XLIII, 1880), Gegenbauer) tamże XLIII, s. 15—32, 1881), Zajączkowski (Pam. Ak. Um. w Krakowie, t. VI, 1881) zastosowali do tworzenia niezmienników wyznaczniki wyższych wymiarów, badane przez Gasparisa, Armenantego, Padowę, Zehfussa i innych.

[7]) Salmon, s. 343.

[8]) Journ. f. Math. XXVII. Spółzmiennik kwadratowy i wyróżnik formy dwójkowej sześciennej znajdują się już w Nocie s. 75—79, z grudnia 1843: porówn pracę s. 82—104 również z grudnia 1843: oba niezmienniki i, j formy dwukwadratowej—w znanej nocie o rozwiązywaniu równań czterech pierwszych rzędów s. 81—83, 1 stycz. 1844. Salmon (s. 343) wprawdzie zaprzecza temu, że Eisensteinowi znana już była niezmienniczość tych form. Eisenstein mówi jednak wyraźnie na końcu ostatnio przytoczonej noty o przygotowywanej przez siebie notatce, odnoszącej się do „pewnych bardzo godnych uwagi własności i przekształceń wyrażeń jednorodnych." Notatka ta została ogłoszona w tymże tomie dziennika str. 329—321 i w niej z całą precyzyą wypowiedziana jest własność niezmiennicza obu spółzmienników oraz wyróżnika formy sześciennej. Nie ulega natomiast zaprzeczeniu, że Boole pierwszy wyraził wyróżnik formy dwukwadratowej, jako funkcyę całkowitą obu niezmienników. Cayley I, s. 94, Salmon s. 343.

[9]) Journ. f. Math. XXVIII, s. 58—107. Postaci kanoniczne form dwójkowych sześciennych i dwukwadratowych i ich zastosowanie do rozwiązania odpowiednich równań są podane w tymże dzienniku; niezmienniki występują tu tylko implicite.

O znaczeniu badań Hessego dla algebry nowoczesnej patrz: Nöther w „Zeitschrift" Schlömilcha, XX, oraz Klein w „Programie politechniki monachijskiej" 1875.

[10]) Zasługi Grassmanna w tej dziedzinie przedstawił jasno Sturm w biografii, Math. Ann. XIV, patrz zwłaszcza str. 25. Porówn. Math. Ann. VII, s. 12.

Schlegel ogłosił próbę wykładu algebry według pomysłów Grassmanna Lipsk 1875, także Schendel. Halle, 1885.

[11]) Badania Galois'a były wprawdzie ogłoszone w r. 1829, ale stały się ogólnie dostępnemi dopiero w 1846 (Journ. Liouv. XI). Ich wpływ na teoryę niezmienników występuje dopiero w okresie nowszym.

[12]) Journ. f. Math. XXXIX s. 140—159. W dwa lata potem przedstawił Aronhold fakultetowi filozoficznemu w Królewcu rękopis (nigdy nieogłoszony), w którym wykłada teoryę niezmienników na jednolitej podstawie. Według jego listów do Cayley'a, musiał on już być wtedy w posiadaniu równań różniczkowych dla niezmienników, por. Salmon, s. 344.

[13]) Cambr. and. Dublin Math. J. VI. s. 186—200; 289—293 (1851); t. VII s. 52—97 (1852), t. VIII s. 62—64, 256—259 (1853); t. IX s. 85—103 (1854); por. Cayley, t. VII 40—51, 97—98.

Artykuły Sylvestera poprzedzone są dwiema rozprawami Boole'a, t. VI, s. 87—106, 107—113 (1851), w których są zebrane i uzupełnione kilku ważnemi dodatkami dawniejsze rezultaty jego badań, por. Salmon, s. 344. Do tych dodatków należy tu zasada bardzo płodna tworzenia nowych utworów niezmienniczych. W przypadku dwóch zmiennych jednorodnych x, y, dowodzi Boole, że gdy te przechodzą na x', y' przez podstawienie o wyzaczniku ε, to wtedy toż samo podstawienie przekształca pochodne cząstkowe (funkcyi dowolnej) $\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}$ na $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}$ Powtórzenie tego postępowania (które zresztą, jako nasuwające tu samo przez siebie, pominięto) wskazałoby, że $\frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ przechodzą na $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y'^2}, -\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y'\,\partial x'}, \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$, zupełnie w ten sam sposób, jak x^2, xy, y^2 przechodzą na x'^2, $x'\,y'$, y'^2 i t. d.

Z tożsamości $\varphi\,(x, y) = \psi\,(x', y')$ wynika zatem w znaczeniu symbolicznem następująca: $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial x}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\partial x'}\right)$, t. j. że każdy iloczyn taki, jak $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\lambda}$, daje się zastąpić przez $\frac{\partial^{\varkappa+\lambda}}{\partial y^{\varkappa}\,\partial x^{\lambda}}$, i podobnie dla liter kreskowanych.

Czytelnikowi nieprzywykłemu do znaków symbolicznych wydaje się dziwnem, że Boole nie podaje łatwiej nasuwającego się twierdzenia, iż tożsamość

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

ma też znaczenie realne, tak że zmienne pierwotne można zastąpić istotnemi pochodnemi, co dopiero zauważył Sylvester (patrz niżej).

Boole rozszerza swoje twierdzenie do dziedziny trzech zmiennych, wszakże tylko co do przekształceń ortogonalnych.

W pracy wspomnionej na drugiem miejscu stosuje Boole swoją zasadę do tego, aby przy pomocy przekształcenia liniowego usunąć iloczyny wyrazów z pewnych klas równań z czterema zmiennemi jednorodnemi.

Prace Sylvestera rozpoczynają się od objęcia z jednego punktu widzenia rezultatów osiągniętych przez jego poprzedników. Do tego służy mu ważne twierdzenie „Rugownik n form jednorodnych $\varphi\,(x)$ z n zmiennemi x, jeżeli zmienne zastąpimy n innemi formami $\psi\,(x)$, staje się równym iloczynowi potęg (łatwo wyznaczalnych) rugownika funkcyi $\varphi\,(x)$ i rugownika funkcyi $\psi\,(x)$" (Tom VI, str. 187). Rugownik występuje tu tedy jako niezmiennik w znaczeniu wyższem, t. j. odnośnie do przekształceń wyższych. Jeżeli funkcye $\psi\,(x)$ są liniowemi, to wracamy znów do teoryi niezmienników zwykłych. Jeżeli z drugiej strony przyjmiemy, że funkcya $\psi\,(x)$ jest funkcyą dowolną, $\varphi\,(x)$ zaś funkcyą liniową, to wyrazimy wtedy własność kombinantową rugownika, polegającą na tem, że rugownik n liniowych połączeń form ψ jest równy pierwotnemu rugownikowi pomnożonemu przez potęgę wyznacznika połączenia.

Zasada dowodzenia, implicite tu przyjęta, jest taka: „jeżeli funkcya całkowita ψ n zmiennych jest równa zeru dla wszystkich układów wartości, przy których znika druga także funkcya F, wtedy forma f jest czynikiem formy „F".

Zasada ta wymaga wszakże sama dowodzenia, porówn np. Hölder w Böklena Math. natur w Mit. t. I, s. 60 (1884); Study „Methoden zur Theorie der ternären Formen", Lipsk 1889 s. 31.

Dalsze rozważanie Sylvestera mają swój punkt kulminacyjny (t. VII, s. 55) w pomyśle głównym, polegającym na tem, że forma liniowa $u_x = u_1 + u_2\,x_2 + \ldots + u_n\,x_n$

pozostaje niezmienioną, jeżeli zmienne x poddajemy pewnemu podstawieniu liniowemu, i zarazem zmienne u t. j. „zmienne przeciw podstawieniowe" (contragradient) podstawieniom odwrotnym. Jażeli do formy $f\,(x)$ dołączymy formę u_x, wtedy niezmienniki lub spółzmienniki jednoczesne odnośnie do zmiennych x prowadzą do przeciwzmienników lub mieszanych konkomitantów (form pośrednich Aronholda) form f; odwrotnie rzecz się ma dla formy $\varphi\,(u)$.

Wszystkie twory niezmiennicze (konkomitanty), powstające z formy pierwotnej lub szeregu takich form prowadzą tedy do ściślejszego pojęcia niezmienników.

Szczególny gatunek przeciwzmienników, t. j. „formes adjointes" występuje już wcześniej u Hermite'a. Journ. für Math t. XL. s 263 (1851). Sylvester nazywa je „ewektantami", T. VII, st. 181.

Nazwy: niezmiennik (Invariante), spółzmiennik (Covariante), przeciwzmiennik (Contravariante), konkomitant, występują pierwszy raz u Sylvestera w t. VI, s. 290; wyrażenia zaś: cogredient, contragredient t. VI, s. 53; wyrożnik—discriminant—Phil. Mag. 1851 s. 406, kombinant w t. VIII s. 63.

[14]) Z faktu, że x_i i $\frac{\partial}{\partial u_i}$, są spółpodstawieniowemi t. j. podlegają tym samym podstawieniom, wynika najprzód (porów. wyżej, co mówiliśmy o Boole'u), że podstawienie pochodnych realnych, (niesymbolicznych) formy $\varphi\,(u)$ względem u_i zamiast zmiennych x formy $f\,(x)$ prowadzi do przeciwzmiennika form f i φ (Tom. VII, st. 194). Ponieważ dalej potęgi i iloczyny $x_1{}^n$, $x_1{}^{n-1}\,x_2, \ldots$ są spółpodstawieniowemi z $\frac{\partial^n}{\partial u^n}, \frac{\partial^n}{\partial u_1{}^{n-1}\,\partial u_2}, \ldots$, to zastąpienie tych form, jednych przez drugie, można przeprowadzić w formie $f\,(x)$ rzędu n-go (a nawet wyższego) (Tom VI, str. 96, 179). Powstały w ten sposób spółzmiennik nazwano później n-em nasunięciem (Ueberschiebung) formy f na φ (porównaj Salmon str, 346). Ostatni proces nazywa Sylvester wprowadzeniem symbolicznem symbolów $\frac{\partial}{\partial u_i}$ zamiast zmiennych x_i. Toż samo odnosi się, oczywiście do u_i i $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

W geometryi znikanie przytoczonego najprzód utworu, jeżeli n. p. liczba zmiennych jest trzy, przedstawia powłóczącą biegunowych (liniowych) punktów $f=0$ względem krzywej $\varphi=0$. Steiner poświęcił wyczerpujące studyum takim utworom biegunowym i ich uogólnieniom.

Nasunięcia badano geometrycznie głównie w przypadku ich znikania tożsamościowego; wtedy forma f nazywa się niebiegunową (apolarną) względem formy φ. Porównaj późniejsze prace Reye'go.

[15]) Phil. Mag. Nov. 1851 Str. 391—410, i osobno Londyn, Bell 1851.. Porówn. Cambr. and Dublin Math T. VI, Str. 193, 194, 198, 293; na str. 123 jest wzmianka o tem, że nazwa formy „kanonicznej" pochodzi od Hermite'a.

Okolicznościowo jest mowa o przedstawieniach kanonicznych form f_{2n} dwójkowych rzędu parzystego np. l. c. str. 123, 293; aby forma f_{2n} dała się przedstawić jako suma n zupełnych potęg $(\lambda-\alpha_i)^{2n}$, trzeba, aby znikał „katalektykant" Phil Mag str. 394.

Dla form dwójkowych f_{2n+1} rzędu nieparzystego wzięto pod rozwagę tylko przypadek ogólny przedstawienia pod postacią summy $n+1$ zupełnych potęg $(\lambda-\alpha_i)^{2n+1}$ (l. c. str. 392) t. j. kiedy wyróżnik „kanonizantu" którego pierwiastkami są ilości α, jest różny od zera.

O formie czwórkowej sześciennej, jako sumie pięciu sześcianów, wspomina się poraz pierwszy w Cambr. and Dubl. Math T. VI, St. 199. Porównaj dane w biografii Clebscha Math Ann. VII, Str. 17.

[16]) Phil. Mag. 1852, II str. 138. Phil Trans. 1853, Str. 407—548. Borchardt wspomina w Journ. für Math. t. LIII s. 275—283 (1857), o tem, że Jacobi musiał znać to prawo już w roku 1847. Porówn. dowód Hermite'a, tamże str. 271. Patrz „Fiedler" str.

1471. W Phil. Trans. 1853 (l. c.) podaje S y l v e s t e r zasadnicze zastosowanie prawa bezwładności do tak zw. „bezoutianta“, t. j. do formy kwadratowej o n—1 zmiennych, wyprowadzonej z wyróżnika formy dwójkowej f n-go rzędu; od dyskusyi tej formy zależą bezpośrednio stosunki odnoszące się do rzeczywistości pierwiastków równania f=0. Porówn. H e r m i t e, Journ. für Math. t. II. s. 39—51 (1856). Porówn. jeszcze S y l v e s t e r, Phil. Mag. (4), IV s. 138, następ. (1852), H e r m i t e C. R. 1852, II. J a c o b i (1847), p. Journ. für Mathem. LIII str. 275—280. (1857).

[17]) Phil. Mag. 1851. Str. 119—140, gdzie na podstawie tej zasady obliczono wszystkie możliwe zniekształcenia w stosunkach przecięć dwóch krzywych lub powierzchni stopnia 2-go.

S y l v e s t e r stosuje już tę samą zasadę do badania równoważności dwóch form kwadratowych, Phil. Mag. kwiecień 1851, str. 205—305. Porówn. sprostowanie do tegoż, maj 1851, str. 415.

[18]) Cambr. and. Dubl. Math. Journ. VIII str. 63. (porówn. powyższe uwagi o rugowniku), jako też str. 256, nast. t. IX, str. 85 i nast. S y l v e s t e r ustanawia równania różniczkowe dla kombinantów; dowodzi, że te ostatnie zależą od wyznaczników, które można utworzyć ze spółczynników pierwotnych. Jako zastosowanie podany jest rugownik trzech form kwadratowych trójkowych w funkcyi dwóch pojedyńczych kombinantów.

W Annali di Mat. I 1858, str. 344—348, podał B e t t i układ równań różniczkowych c h a r a k t e r y s t y c z n y c h dla kombinantów.

[19]) Porówn. to, co powiedziano wyżej o A r o n h o l d z i e, przyp. [12]). S a l m o n str. 344.

[20]) Phil. Trans. 1853, Str. 543—548. Objaśnieniem nowo wprowadzonych terminów u C a y l e y'a Papers IV S. 594—608 (Przedruk z Encycl. Brit. 1860).

[21]) Journ. f. Math. X L., Str. 263. Cambr. and Dubl. Math. J. VI, Str. 222.

[22]) U H e r m i t e'a zagadnienie, stanowiące punkt wyjścia, należy ze swej istoty do teoryi liczb; idzie tu mianowicie o wykazanie, że liczba „klas“ różnych, na które rozpadają się formy dwójkowe (i wyższe) danego rzędu z przepisanemi wartościami dla niezmienników, jest skończona. Porówn. w szczególności artykuły w tomie XL i XLI Journ. für Math. (1850, 1851).

[23]) Cambr. and Dubl. Math. J. IX str. 172—217, porówn. zwłaszcza str. 173—175. W jaki sposób przeprowadza się w uogólnienie dla form wyższych, pokazał dopiero D e r u y t s w ostatnim czasie (1891).

Uogólnienie D e r u y t s a odnosi się do form specyalnych; H u r w i t z niedawno, Math. Ann. 45, str. 381—304. 1894. przez odpowiednią modyfikacyę prawa wzajemności przedstawił rzecz tę w postaci najogólniejszej. Prace te rzuciły zarazem nowe światło na procesy różniczkowe, zachodzące w teoryi niezmienników.

[24]) Należy tu rozróżnić dwa przypadki. Oba niezmieniki liniowe, użyte pierwotnie do przekształcenia przez H e r m i t e'a, są n i e w y m i e r n e; są niemi czynniki liniowe niezmiennika kwadratowego φ. Jeżeli forma f przechodzi przytem na formę „kanoniczną“ F, to wtedy każda funkcya całkowita spółczynników formy F, pozostająca niezmienną przy tych samych podstawieniach, które ten niezmiennik przekształcają sam w siebie, jest niezmiennikiem całkowitym wymiernym funkcyi f z potęgą wyróżnika φ w mianowniku (L. c. str. 17-). To daje n. p. możność otrzymania niezmienników formy 5-go rzędu.

W dalszym ciągu czyni się użytek z przekształcenia przy pomocy wymienionych spółzmienników, str. 190, przez co forma f (rzędu nieparzystego) przechodzi na formę „typową“.

[25]) Journ. f. Math. LII str. 1—38. Nazwa „formy stowarzyszone“ wprowadzona na str. 23. Powstawanie tych form najprościej uwidocznić można w sposób następujący: Niechaj f (x, y) będzie daną formą rzędu n-go; g (x i y), h (x, y)—dwoma niezmiennikami formy f. Według B o o l e'a x i y są spółpodstawieniowemi z $-\dfrac{\partial h}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, a więc z $xX - \dfrac{\partial h}{\partial y}Y$ i $yX + \dfrac{\partial h}{\partial x}Y$, gdzie X i Y są najprzód parametrami dowolnemi. Stąd wyrażenie

$$G = g\left(xX - \frac{\partial h}{\partial h}Y,\ yX + \frac{\partial h}{\partial x}Y\right)$$

jest dla wszystkich wartości X i Y niezmiennikiem formy f, t. j. s p ó ł c z y n n i k i p o j e d y ń c z e p o t ę g i i l o c z y n ó w i l o ś c i X i Y s ą n i e z m i e n n i k a m i f o r m y f; pierwszym z nich jest oczywiście sama forma f. Uważajmy teraz X i Y za nowe zmienne zależne liniowo od dawnych. Ponieważ wyznacznik podstawienia (odwracając uwagę od czynnika liczbowego) jest równy h, przeto każdy niezmiennik i spółzmiennik formy G zgadza się z pierwotnym aż do potęgi spółzmiennika h. Jeżeli weźmiemy w szczególności g=h=f, to f przejdzie wskutek podanych podstawień na formę F ze spółczynnikami f, o, f_2, f_3 ... f_n, t.j. na jednę z form stowarzyszonych z formą f, i jakikolwiek niezmiennik lub spółzmiennik formy f daje się przedstawić jako funkcya całkowita ilości f_i z potęgą formy f w mianowniku.

U H e r m i t e'a te formy stowarzyszone służą przedewszystkiem do rozwiązania zadania z teoryi liczb o rozdziale form dwójkowych sześciennych i dwukwadratowych na „rzędy“ (l. c. str. 31 i następ.)

Jeżeli położymy zresztą y=0, x=1 w formach f_i, to przejście formy f na F utożsami się z postępowaniem znanem w teoryi elementarnej równań, za pomocą którego przekształcamy równanie tak, aby spółczynniki przy potędze zmiennej o dwie jedności niższej od rzędu równania, były zerami.

Innem zastosowaniem form f_i jest związek C a y l e y'a pomiędzy spółzmiennikami formy dwukwadratowej; związek ten zużytkowujemy przy pięknem przekształceniu całki eliptycznej 1-go gatunku. Porównaj przypisek 50.

[26]) Cambr. and. Dubl. Math. J. IX str. 186 i nast. Rolę, jaką odgrywa ten niezmiennik przy rozwiązywaniu równań rzędu 5-go, wykazał głównie H e r m i t e w Journ. für Math. L. IX str. 394—405.

[27]) L. c. str. 198 i n. Szczegółowe rozwiązanie podał H e r m i t e, C. R. 1865, 866. Porównaj szkic historyczny H a r r i s a, Annals of Math. V str. 217—228, 1891.

[28]) Cambr. and Dubl. Math J. IX str. 63—67. Porówn. B r i o s c h i, Journ. für Math. LII. str 133—141 (1856).

[29]) Journ für. Math. t. XXII, str. 119—123.

[30]) Journ für Math. L. str. 288—299.

[31]) Journ. für. Math. XLVII str. 109—124.

[32]) Annali di Tortolini V, str. 207—211, zwłaszcza str. 209, Por. B e t t i, Annali di Mat. (1), I, str. 129—134 (1859). W tem samem czasopiśmie t. IX, str. 82 (1859) podaje B r i o s c h i wywód ścisły równań różniczkowych C a y l e y'a dla niezmienników w przypadku form dwójkowych; w Annali di Mat. (II), I (1858) takiż wywód str. 160 dla form o n zmiennych.

[33]) Pierwsze sześć rozpraw znajdujemy w drugim tomie Coll. Papers str. 221—234 (1854); 250—275 (1856); 310—355 (1856); 513—526 (1858); 527—557 (1858); 561—569 (1859). Porówn. Noty dodane przez C a y l e y'a w nowem wydaniu. Wyraz „Quantic“ odpowiada wyrazowi „forma“.

[34]) Jeżeli f $(x_1, x_2, .. x_n)$ jest formą daną, to wynik procesu $x_1\dfrac{\partial f}{\partial f k}$ można zastąpić

procesem różniczkowym, wykonanym na spółczynnikach formy f; proces ten oznacza Brioschi przez $\left\{x_1 \frac{\partial}{\partial x k}\right\}$. Wtedy wspomnione równania różniczkowe w liczbie $\frac{n\,(n-1)}{2}$, określające niezmiennik form f, są dane przez: $\left\{x_1 \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$, Rozszerzenie do większej liczby form i większej liczby zmiennych łatwo daje się przeprowadzić (l. c. str. 224). Cayley za pomocą wyrażenia, które Lie nazywa wyrażeniem nawiasowem Poissona, wykazuje, że spółzmienniki, określone za pomocą poprzedniej symboliki, czynią w istocie zadość tym równaniom. Wszakże dopiero w 1863 Aronhold wykazał ogólnie (Journ. für Math. LXII), że, odwrotnie, równania te charakteryzują dokładnie utwory, nie zmieniające się przy przekształceniu liniowem.

Dla form dwójkowych mamy dwa takie równania; jeżeli utworzymy z nich znowu nawias Poissona, to dojdziemy bezpośrednio do twierdzenia, że odpowiednio unormowana „waga" każdego wyrazu spółzmiennika jest stałą.

W rozprawie II, str. 254 uzasadniono ważne twierdzenie, że przez prosty proces różniczkowy i jego powtórzenie można z pierwszego spółczynnika spółzmiennika otrzymać kolejno pozostałe spółczynniki.

[35]) Cayley wychodzi tu z pojęć spółzmienników „asyzygetycznych" i „nieprzywiedlnych". Asyzygetycznym nazywa się szereg niezmienników, niepołączonych związkiem liniowym (syzygią) o czynnikach liczbowych; nieprzywiedlnym nazywa się spółzmiennik, który nie daje się wyrazić w sposób całkowity i wymierny przez niezmienniki stopnia niższego.

[36]) Twierdzenie na s. 257: „Liczba spółzmienników asyzygetycznych" będących rzędu n (względem zmiennych) i stopnia μ (względem spółczynników) formy dwójkowej n-go, jest równa liczbie wyrazów stopnia ϑ i wagi $w = \frac{1}{2}(n\vartheta - \mu)$, zmniejszonej o liczbę wyrazów stopnia ϑ i wagi $w-1$" polega milcząco na niezależności liniowej układu równań liniowych. Dowód, że to założenie istotnie zachodzi, dał dopiero znacznie później Sylvester (Phil. Mag. 1878).

Wspomniana tu liczba, odpowiadająca liczbom ϑ i w, jest równa liczbie sposobów przedstawienia liczby w pod postacią summy ϑ liczb szeregu $(0, 1, .. n)$, a jako taka (por. str. 243) — równa spółczynnikowi przy $x^w z^\vartheta$ w rozwinięciu „funkcyi tworzącej" (str. 260).

$$\frac{1}{(1-z)\ (1-xz)\ (1-x^2z)\ .\ .\ (1-x^n\ z)},$$

Po odpowiedniem przekształceniu ta funkcya tworząca daje także liczbę zupełną półzmienników nieprzywiedlnych. Ta np. dla $n=3$ mamy

$$\frac{1-x^5}{(1-x)\ (1-x^2)\ (1-x^3)\ (1-x^4)},$$

co wskazuje, że istnieją cztery utwory nieprzywiedlne odpowiednio stopnia 1, 2, 3, 4, połączone ze sobą syzygią szóstego stopnia (str 262).

[37]) Porówn. II, A. c.

[38]) Porówn str. 252, 253, 268, 270.

[39]) Porówn. str. 517. Z drugiej strony nasunięcie zawiera się już jako przypadek szczególny w utworach symbolicznych, wprowadzonych przez Cayley'a w r 1846.

[40]) To rozważanie (rozprawa V a) bezpośrednio wypływa z syzygii, istniejącej dla formy sześciennej lub dwukwadratowej. Zresztą, nie należy tu pominąć milczeniem przedwstępnych prac Boole'a (Cambr, Math. J. III str. 116), Eisensteina (Journ. für Math. XXVII, str. 89), Hessego (Journ. für Math. XXXVIII str. 262) i Sylvestera (Cambr. and Dublin Math J. VI).

Z drugiej strony, przeceniano wielokrotnie doniosłość tych metod rozwiązywania; w samej rzeczy, teorya form wtedy tylko powinna stanowić część istotną zagadnienia o rozwiązywaniu równań, gdy, idąc za Kleinem, uważamy grupę należącą do równania za grupę kolineacyj w przestrzeni wyższej.

[41]) Ta część była szczegółowiej opracowaną przez Fiedlera (Lipsk 1862)

[42]) Jest zasługą Kleina odkrycie zasadniczego znaczenia wyników badań Cayley'a; porów. Math. Ann. IV i VI.

[43]) Papers II, str 235—249 (1855), 47—52 (158). Porówn. zwłaszcza Sylvester Quart. Math. J. I, str. 141—152 (lipiec 1855), jako też Brioschi i Sylvester w Annali di Tort. VIII (1857), Bellavitis w Annali di Mat. II, Bruno w Journ. für Math LXXXV i Math. Ann. XIV. Bellavitis w l. c. str. 147 daje przegląd literatury dawniejszej. Krótkie zestawienie odpowiednich twierdzeń głównych daje Hagen w „Synopsis der höheren Mathematik" Berlin 1891, str. 1—3.

[44]) Papers II, Str. 417—439, cf. str. 454—464. Prawidła Cayle'a zostały w ostatnich czasach uogólnione przez Kohna, Wien. Ber. 1893, str. 1—16. Brill niedawno zwrócił uwagę na to, że pytanie o związkach, zachodzących pomiędzy funkcyami symetrycznemi elementarnemi par zmiennych, sprowadza się do pytań z teoryi niezmienników form dwójkowych. Gött. Nach: 1893 str. 757—762. Porówn. Jordan, Math. Ann. 45, str. 450—427, 1894.

[45]) Journ. für Math. LIII. str. 366—367 lub Papers IV, str. 38—39.

[46]) Journ für Math. LIV, str. 48—58 i 292 lub Papers IV, str. 34—53.

[47]) Quarterly J. IV. (1861) Str. 168—171; 324—328. Twierdzenie zasadnicze tej teoryi orzeka, że wyraz główny iloczynu dwóch spółzmienników równa się iloczynowi pojedyńczych wyrazów głównych.

[84]) Annali di Mat. (1) III (1860). Str. 340—328.

[49]) Journ. für Math. LII, str. 8. Porówn. Brioschi w Annali di Mat. (1), IV, str. 192 (1861). Porównaj przypisek 25-ty. Przekształcenie Hermite'a i Brioschi'ego całki eliptycznej pierwszego gatunku, sprowadzające ją do formy typowej normalnej $\frac{\partial z}{\sqrt{z^3 - \frac{1}{2}\,g_2\,z - \frac{1}{3}\,g_3}}$, jest stopnia czwartego względem zmiennych pierwotnych. Pitarelli, zastosowawszy procesy biegunowe, zastąpił to przekształcenie—liniowem (Roma, Acc. L. R. (4) IV, s. 703—705, 1888). Tenże autor badał także przekształcenia wyższe, skutkiem których znika niezmiennik g_2 lub g_3 w przekształconej całce.

[50]) C. R. XLVI, str. 961 (1858). Niechaj $f(x)=0$ będzie równaniem danem, α—jego pierwiastkiem, $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-\alpha}$. Pierwiastek równania przekształconego, odpowiadający pierwiastkowi α, pisze Hermite pod postacią $\varphi(z) - \frac{1}{n} f(z)$, gdzie potęgi z^0, z^1 . . z^{n-2} należy zastąpić $n-1$ parametrami dowolnemi. Spółczynniki formy przekształconej są utworami biegunowemi spółzmienników formy f; w szczególności znika spółczynnik drugi, gdy następujący bezpośrednio po nim, staje się „bézoutiantem", t. j. formą kwadratową ilości t, od której zależą stosunki określające rzetelność pierwiastków równania $f=0$.

Zresztą modyfikacya, wprowadzona przez Hermite'a w przekształceniu Tschirnhausena, daje tę wielką korzyść, że nowe spółczynniki występują w stopniu możliwie najniższym spółczynników dawnych, Porówn. także Cayley, Journ. für Math. LVIII (1861) str. 259 lub Papers IV str. 259—269.

[51]) Patrz np. Clebscha „Binäre Formen", § 114, 115.

[52]) C. R. 1863, 1864. Tu w dalszym ciągu zmienia przekształcenie Tschirnhausena, tak że nawet pojedyńcze spółczynniki potęg ilości α (patrz wyżej) stają się utworami niezmienniczemi, co dzieje się wszakże z uszczerbkiem dla pierwotnej elegancyi.

[53]) Porówn. przedewszystkiem stanowiące całość przedstawienie teoryi form dwójkowych w Annali di Mat. 1-a Serya; I (1858), Str. 296—309, 349—362; II (1859) Str. 82—85; 265—277; III (1860) str. 160—168; VI (1861) str. 186—194. Odbitka tej pracy ogłoszona w Rzymie w r. 1861 jest wyczerpaną.

[54]) Journ. für Math. LIII, str. 372—376.

Te równania różniczkowe w przypadku rugownika dają się podzielić na trzy grupy Pierwsza orzeka, że rugownik jest zwyczajnym niezmiennikiem; druga, że ma on zarazem własności kombinanta; trzecia wreszcie, że posiada także własności niezmiennicze odnośnie do przekształceń wyższych, mianowicie że po przekształceniu odtwarza się z wyłączeniem czynnika, który sam zależy jeszcze od spółczynników form pierwotnych,

Przy wyróżniku odpada oczywiście druga z wymienionych grup. Grupa ostatnia, jak to później okazał Nöther, daje się sprowadzić do jednego równania. Porówn. Bruno, § 25.

[55]) Porówn. Wiltheiss w Math. Ann. XXXIII, str. 279 (1888).

[56]) Annali di Mat. (1) I (1858) str. 158—161, zwłaszcza str. 163 (Typowe przedstawienie form o n zmiennych). O typowem przedstawieniu form kwadratowych trójkowych, jako pochodnych formy sześciennej, patrz np. C. R. 1863.

[57]) O zastosowaniach geometrycznych patrz notę o spółzmiennikach krzywych i powierzchni, Cambr. und. Dubl. Math. J. II, str. 74 (napisaną bez uwzględnienia prac Hessego). Cenny materyał do symboliki Cayleyowskiej znajduje się w Cambr. and Dublin Math. J. IX, str. 32. W pierwszem wydaniu swego dzieła: „Higher plane curves", 1852 oblicza niezmienniki i spółzmienniki za pomocą funkcyj symetrycznych. W drugiem wydaniu „Algebry" 1865 podaje nowy wywód „układów zupełnych" dla najprostszych form dwójkowych jednoczesnych.

[58]) Dublin 1879. Wydanie czwarte ukazało się w r. 1885.

[59]) Lipsk, 1863; wydanie drugie, 1876.

[60]) Lipsk, 1862.

[61]) Patrz wyżej przyp. 53. Opracowanie elementarne tej teoryi podał Battaglini Atti di Napoli 1867, porówn. ciąg dalszy w Giorn. di Mat.

[62]) Porówn. wielokrotnie cytowane biografie Plückera, Hessego, Clebscha.

[63]) Journ. für Math. LV, str. 97—191.

[64]) Journ. für Math. LXII, str. 281—345.

[65]) Str. 282, 283. Podobne zagadnienie dla dwu i więcej par form, wprawdzie nie tak ściśle sformułowane, znajdujemy już u Boole'a, Cambr. Math. J. III i IV. Boole daje także przykład dla pojedyńczej pary form; wtedy jedno z równań podstawienia liniowego przedstawia drugą parę (L. c. tom III, str. 115).

[66]) Takie nieporozumienie widzi referent w zarzutach, jakie metodzie Aronholda stawia Veltmann w Schlöm Z. XXII str. 277—298 (1877) i XXXIV, str. 321—330 (1889).

[67]) Np. Journ. für Math. LV l. c. str. 160.

[68]) Tom LXII, str. 287—288, 293. Maurer zbadał później, o ile. odwrotnie, część takiego układu może określić niezmienniki. Munch. Ber. 1888. Str. 103—150.

[69]) Dowód prosty i bezpośredni podał Aronhold w Journ. für. Math. LXIX str. 185—189. Dowód podany przez Christoffela, t. LXVIII, str. 246—252, został później cofnięty przez autora i zastąpiony innym; porówn. Math. Ann. XIX str. 280—290 (1881).

Pytaniem o wyższych zależnościach pomiędzy n^2 równaniami różniczkowemi niezmienników zajmował się później Study, który wykazał dla przypadku $n=3$, że wszystkie one są wynikiem tylko dwu z pomiędzy nich. Patrz. „Methoden zu Theorie der ternären Formen", Lipsk 1889, str. 167.

[70]) Journ. für Math. LXV, str 257—268.

[71]) Fem. LXII § 8. Proces użyty już przez Boole'a, nazwany imieniem Aronholda, przy pomocy którego wyprowadzają się niezmienniki jednocześnie pewnej liczby form z niezmienika formy pojedyńczej przez różniczkowanie względem spółczynników, stanowi w § 10 podstawę systematyczną teoryi utworów jednoczesnych (porówn. Journ. für Math. XXXIX str. 150 i nast.)

[72]) T. LXII § 11, § 14.

[73]) Str. 292—293.

[74]) Journ. für. Math. LIX str. 1—62.

[75]) l. c. § 7.

[76]) Journ. für Math. LXII str. 64—109 (1863).

Z późniejszych, poczynionych przez Clebscha zastosowań teoryi niezmienników do geometryi zasługuje na szczególną uwagę zastosowanie do tak zwanego: „zagadnienia o charakterystykach stożkowych" Math. Ann. VI. S. 1—15 (1872). Metoda Clebscha nie jest wolna od zarzutów; porówn. najnowszą pracę Study'ego (Math. Ann. XL. S. 563—578, 1892), który metody swojej książki stosuje z powodzeniem do tego zagadnienia.

[77]) Math. Ann. VII, Str. 1—50, zwłaszcza str. 37—50 (1874).

[78]) Journ. fur Math. LXIX str. 323—354.

[79]) Berliner Berichte, 1868, str. 310—338.

[80]) Annali di Mat. (2), I. str. 23—79.

[81]) Kronecker, Journ. fur Math. LXVIII str. 273—285.

[82]) Christoffel, tamże str. 253—272.

[83]) Pierwszy zeszyt tomu 1-go, który referuje o pracach ogłoszonych w r. 1878, wyszedł w lutym 1871.

„Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik" wydawali 1—X tomu C. Ohrtman, F. Müller i A. Wangerin, od XI do XIV, pierwszy z nich przy spółudziale dwu ostatnich; od XV—XIX M. Henoch i E. Lampe, wreszcie od XX tomu wydaje E. Lampe przy spółudziale i t. d.

[84]) Tom drugi, wydany przez F. Kleina wyszedł w roku następnym.

[85]) Rozprawa, Bonn, przedrukowana w Math. Ann. XXIII, str. 539—578.

[86]) Cytaty tego i następnego rozdziału mają tylko znaczenie prowizoryczne dla oryentowania się w literaturze.

[87]) Patrz np. Math. Ann. IV S. 50—84 (1872), a zwłaszcza Program erlangeński Kleina z r. 1872 (przełożony w „Pracach matematyczno fizycznych", t. VI)

Poniżej często cytować będziemy „Theorie der Transformationsgruppen", Liego t. I i II. Lipsk (1888, 1870) w opracowaniu Engela (w skróceniu: „Lie-Engel") Porówn. też Liego: Vorlesungen uber contuirliche Gruppen unt geometrischen und anderen Anwendungen, herausgegeben von Scheffers, Lipsk 1893.

Jest rzeczą interesującą porównać tu stanowisko, jakie co do tego pytania zasadniczego zajmuje Kronecker; porówn. Berliner Ber. 1890, str. 99 i nast.

[88]) W tym kierunku uczyniono wprawdzie dotąd niewiele, ponieważ dotychczasowe metody teoryi niezmienników, bezpośrednio lub pośrednio stosują różniczkowanie względem spółczynników podstawienia, a więc zakładają, że te spółczynniki są ogólnemi.

Maurer w ostatnich czasach podał ogólną charakterystykę różnych klas szczególnych grup podstawień. Journ. für Math. CVII, str. 86—116 (1890)

[89]) Co do podziału grup przekształceń porówn. rozdział wstępny u Lie-Engela, I.

[90]) Można tu tylko nadmienić o pracach Poincarégo i Picarda z jednej, Kleina, Hurwitza, Frickego i innych — z drugiej strony.

[91]) Lie, który to zagadnienie najdalej posunął, nie uwzględnia związków należących do dziedziny teoryi form.

[92]) Porówn. np. przedstawienie w dziele Kleina-Frickego „Modul-Functionen" (Lipsk, 1890), III Absch. Cap. 2, oraz rozwinięcie Wiltheissa dla rodzaju p=3, Math. Ann. XXXVIII. S. 1—13 (1891).

[93]) Lie-Engel. Cap. I, 25.

[94]) Clebsch, Binäre Formen s. 306 (1872); Gram. Math. Ann. VII str. 234, (1874), d'Ovidio Battag. G. XV S. 187—192 (1877); Capelli Mem. d. Linc. 1882, S. 582 (1882); Hölder. Böklen Mitt. I. str. 59—65 (1884); Elliot, Mess. XVI str. 5—8 (1885, Mansion, Mess. XVI S. 127—129, Brux. S. t. c. XII. S. 47—49 (1887—1888); Study-Methoden (1889) s. 32 i nast., Deruyts Théorie générale des formes algébriques, Liêge, 1891. S. 49.

Porówn. także dowód Kroneckera, Berliner. Ber. 1889, S. 609 i następn.

[95]) Göttinger Abh. XVII. S. 1—62.

[96]) Gordan przy rozwiązywaniu równań rzędu piątego, Math. Ann. XII. S. 375—404, zwłaszcza str. 379 (1879); Capelli przy badaniu form podwójnie kwadratowych Batt. G. XVII. S. 69—148. (1879).

Układ pewnej formy podwójnie dwójkowej obliczony w cytatowanej pracy Gordana służy w dziele „Modulfunctionen" Kleina-Frickego II. S. 127 i nast. (1892) do ustanowienia równań modułowych.

Jeżeli τ jest modułem głównym przekształcenia n-go rzędu, τ' moduł przekształcony, to w rzeczy samej lewą stronę $f(\tau', \tau)$ równania modułowego, gdy ją jeszcze uczynimy jednorodną, można uważać za funkcyę podwójnie dwójkową, która nie zmienia się przy podstawieniach jednoczesnych oznaczonej skończonej grupy, a skutkiem tego daje się przedstawić jako funkcya całkowita wymierna form odnośnego układu zupełnego. Należy tu tylko odróżnić przypadki spół-i przeciw podstawienia. Tożsamo odnosi się w dziedzinie trójkowe do tak zwanych „odpowiedniości modułowych" (t. c. s. 690 i nast.). I tu rozważać tylko należy spół i przeciwpodstawienie obu trójkowych szeregów ilości zmiennych. Porówn. jeszcze Kleina „Ikosaeder". S. 232 i nast., rozprawę lipską Fiedlera (1885), albo Wolf. Z. XXX. S. 129—228.

[97]) Porówn. II B.

[98]) Leipzig. Ber. Porównaj wstęp do jego „Metod". Lipsk 1889.

[99]) Christoffel Math. Ann. XIX. S. 280—290 (1881); Maurer. Münch. Ber. 1888, S. 103—150 i Journ. für Math. CVII, S. 89—116 (1890)

[100]) Cayley Quart. J. XIX. str. 131—138 (1883), Am. J. VII. str. 1—25, 59—73 (1884); Mac-Mahon, Am. J. VI. str. 131—164 (1883), Am. J. VII. str. 26—47 (1884), Am. J. VIII. str. 1—18 (1885)

[101]) Sylvester w Am. J. V. str. 79—137 (1882). Perrin w S. M. F. Bull. XI str. 88—107 (1883)

[102]) Amer. J. III. str. 154—164 (1882) albo Journ. für. Math. XC. str. 186—188, porówn. Stroh, Math. Ann. XXII. str. 402 (1883)

[103]) Math. Ann. XXX. S. 15—29, głównie str. 17.

CZĘŚĆ I.

I. RÓWNOWAŻNOŚĆ.

A. Formy kwadratowe i dwuliniowe.

a) Przekształcenie liniowe form i gromad form, wzajemne i samych na siebie.

Zwracamy się do przekształcenia liniowego form kwadratowych i dwuliniowych. Formy te wyróżniają się od innych tem, że dwa ogólne indywidua jednego gatunku mogą być zawsze przekształcone liniowo, jedno na drugie. Dla form dwuliniowych zakładamy, że przekształcenie dwu par zmiennych są niezależne od siebie.

Ważne przez swoje zastosowania zagadnienie specyalne przekształcenia formy lub dwóch form jednoczesnych kwadratowych o n zmiennych na sumę możliwie najmniejszej liczby kwadratów, było już wielokrotnie traktowane w czasach dawniejszych (Lagrange, Cauchy, Gauss, Jacobi, Plücker, Hesse i inni[1]).

Weierstrass okazał[2]) w r. 1858, w jaki sposób wzory Cauchy'ego i Jacobi'ego na jednoczesną redukcyę dwóch form kwadratowych należy zmodyfikować w „przypadku wyjątkowym," gdy liczba kwadratów jest mniejsza od liczby zmiennych, gdy mianowicie pierwiastki równania „charakterystycznego" (od których zależy oznaczenie tych kwadratów) nie są wszystkie różne od siebie. W szczególności bada Weierstrass przekształcenie rzeczywiste form rzeczywistych.

Już w pierwszym rozdziale wspomina o wzorach Cayley'a i Hermite'a dla gromady przekształceń formy kwadratowej na samą siebie.

Badania Weierstrassa o przekształceniu ogólnych funkcyj θ (przy niezmienności parametrów) doprowadziły do zagadnienia algebraicznego, polegającego na przedstawieniu funkcyi dwuliniowej $2n$ zmiennych pod postacią kanoniczną pewnej sumy iloczynów. Kronecker, wprowadziwszy formy tak zwane „podporządkowane" (beigeordneten), znalazł w r. 1866[3]), że żądana redukcya, jeżeli wyznacznik formy nie jest zerem, daje się wykonać po rozwiązaniu równania „rozwiązującego" n-go stopnia o pierwiastkach nierównych, i wskazał zarazem, w jaki sposób do tego przypadku sprowadza się zadanie ogólniejsze o przekształceniu samej na siebie formy dwuliniowej za pomocą jednakowych podstawień obu szeregów zmiennych.

W roku następnym Christoffel[4]) stwierdził te wyniki metodą Aronholda i dowiódł ważnego twierdzenia, że liczba parametrów dowolnych, zawartych w spółczynnikach podstawienia, równa się liczbie niezmienników bezwzględnych formy. Środkiem pomocniczym jest tu dla niego istotne wypisanie utworów niezmienniczych.

Na początku nowego okresu (1868, jak już wyżej wspomniano) zajmuje się znowu Weierstrass[5]) ogólniej pojętą równoważnością dwóch „gromad" form dwuliniowych i kwadratowych. Wprowadzenie „dzielników elementarnych" [6]) nadaje przejrzystość wynikom. Utwórzmy kolejne różnice pomiędzy liczbami wskazującemi, ile razy pewien czynnik liniowy wyznacznika danej gromady form $f+\lambda\varphi$ dzieli bez reszty wszystkie wyznaczniki rzędów: pierwszego, drugiego i t. d. Jeżeli każdy czynnik liniowy podniesiemy do potęgi, której stopniem jest odnośna z rzeczonych różnic, a następnie wszystkie czynniki pomnożymy przez siebie, to otrzymamy rozkład wyznacznika na iloczyn jego dzielników elementarnych.

Kryteryum wzajemnego przechodzenia dwóch gromad $f+\lambda\varphi$, $F+\lambda\Phi$ jednej na drugą, polega wprost na tem, że wyznaczniki obu form powinny mieć jednakowe dzielniki elementarne[7]).

Dzielnik elementarny jest oczywiście niezmiennikiem niewymiernym gromady. Kronecker pokazał później (1874), że powyższemu kryteryum można nadać formę wymierną [8]) przez zastąpienie dzielników elementarnych największemi wspólnemi dzielnikami wszystkich podwyznaczników tego samego rzędu.

Celem porównania dwóch danych gromad form co do ich równoważności, sprowadza je Weierstrass do odpowiednich postaci kanonicznych [9]), których nowe zmienne zależą jedynie od dzielników elementarnych.

Pojęcie postaci „kanonicznej," które zresztą ma cechę pewnej dowolności, zawiera się tu w wyższem zagadnieniu o równoważności i zyskuje przez to charakter określony. Jedyne ograniczenie, wprowadzone przez Weierstrassa, polega na tem, aby dzielniki elementarne wogóle istniały, t. j. aby wyznacznik gromady form nie znikał tożsamościowo. Bezpośrednio potem pokazał Kronecker[10]), w jaki sposób można traktować i ten skrajny przypadek wyjątkowy, mianowicie przez ustanowienie w nim postaci kanonicznej gromady za pomocą podziału zmiennych na dwie grupy różnorodne[11]). W tejże krótkiej nocie wskazuje, że dla gromad kwadratowych, zawierających przynajmniej jednę formę o znaku niezmiennym, można postępowanie Weierstrassa odwrócić; za pomocą podanej tu metody można wprost dojść do gromady zredukowanej, a stąd odwrotnie odczytać własność równoważności dzielników elementarnych. W sześć lat później (1874)[12]) wszystkie swoje badania algebraiczne o tym przedmiocie Kronecker połączył w jednę całość, obejmującą wszystkie istniejące gromady kwadratowe oraz dwuliniowe $f+\lambda\varphi$.

Jakkolwiek metoda wymierna największego wspólnego dzielnika ma znaczenie zasadnicze — Kronecker[13]) kładzie nacisk na wyższość arytmetycznej teoryi wyznaczników nad zwykłym literalnym sposobem ich tworzenia — to wszakże głębsze wniknienie w treść tych badań uczy, że równość wyznaczników, jako kryteryum równoważności dwu danych gromad, nie zawsze wystarcza we wszystkich przypadkach. Spełnia to dopiero pojęcie podstawowe „gromad elementarnych“ [13]), t. j. takich, których wyznacznik jest albo potęgą zupełną wyrażenia liniowego, albo znika tożsamościowo. Dowolna gromada form zawsze tylko jednym sposobem przedstawić się daje jako agregat gromad elementarnych; te ostatnie (oraz ich liczba) stanowią prawdziwe niezmienniki równoważności.

Do istotnego wykonania redukcyi gromady na jej części składowe potrzeba było rozszerzenia na dowolne gromady metody, podanej w roku 1868 dla gromad z jedną przynajmniej formą oznaczoną. Stało się to dopiero możliwem przez to, że usuwano kolejno nie zmienną po zmiennej (jak u Jacobi'go), lecz odrazu całe grupy zmiennych (zastępując je zmienuemi kanonicznemi).

C. Jordan[14]), w pracy wcześniej nieco ogłoszonej, doszedł był do innych wyników. W polemice, która skutkiem tego wywiązała się pomiędzy nim i Kroneckerem, ten ostatni wyjaśnił, że przy stopniowem zastępowaniu pewnych zmiennych przez nowe, jak to czyni Jordan, może w przypadkach skrajnych zajść ta szczególna okoliczność, że usunięte poprzednio zmienne ukazują się znowu w dalszym przebiegu rachunku.

Pięknym wynikiem badania Kroneckera jest to, że metoda redukcyi Weierstrassa, przy odpowiedniem uporządkowaniu zmiennych, stosowaną być może nawet w przypadku znikającego wyznacznika [14]), gdy tymczasem metoda Jacobi'ego może być bezpośrednio stosowana tylko do form symetrycznych i znako-zmiennych (dwuliniowych).

Utworzywszy teoryę bezwyjątkową przekształceń (niekongruentnych) form i gromad form dwuliniowych, zwrócił się Kronecker do swego dawnego zagadnienia (z r. 1866) o przekształceniach tożsamościowych (kongruentnych), dla obu szeregów zmiennych formy dwuliniowej samej na siebie[15]).

Tu znowu sprawia trudności pominięty dawniej przypadek znikającego wyznacznika (i innych jeszcze zniekształceń); lecz wtedy forma zależy w istocie rzeczy od mniejszej liczby zmiennych i może być przedstawiona jako ich funkcya w ten sposób, że jej wyznacznik (odtąd „wyróżnik“ [16]), będzie różny od zera.

Można tu znowu wydzielić kolejno pewne najprostsze formy kanoniczne, których Kronecker wypisuje cztery („zredukowane“) typy [17]); dalszy zaś przebieg postępowania jest podobny do stosowanego przy przekształceniach niekongruentnych. Układy wyznaczników podstawienia określają się znowu na podstawie pojęcia największego spólnego dzielnika [18])

Szereg uzupełnień w tym kierunku podał Kronecker w czasie najnowszym (1889 i 1890 [18]).

Dotąd punkty widzenia, arytmetyczny i właściwy teoryi form, były z sobą niezwiązanemi; odtąd stało się pożądanem ich przeniknienie wzajemne.

Pierwszy krok w tym kierunku uczynił niedawno Rosenow [19]) (1890). Otrzymuje on niezmienniki Kroneckerowskie dla formy dwuliniowej w przypadku dwu trójek ilości zmiennych; te niezmienniki, jeżeli odwrócimy uwagę od ich wyznacznika, mają tylko pewne cechy całkowito-liczbowe i według nich dzielą się na różne klasy. Z drugiej strony klasy te charakteryzują się w ten sposób, że zawsze niektóre z należących do nich form zwyczajnych (niezmienniki, spółzmienniki, przeciwzmienniki) znikają tożsamościowo.

Wracając do roku 1874, wspomnijmy przedewszystkiem o rozprawie Darboux'a [20]), w której twierdzenia Weierstrassa i Kroneckera z r. 1868 są ogólnie i pięknie wyprowadzone. Pomocniczy środek systematyczny w tem badaniu stanowi wyznacznik jednej lub dwu form, „wybrzeżony“ (gerändert) za pomocą pewnej liczby szeregów wielkości dowolnych.

Szereg tych wyznaczników, jeżeli pierwotny przechodzi przez zero, zachowuje się jak szereg funkcyj Sturma przy przekraczaniu pierwiastka równania algebraicznego.

Do przedstawienia pod postacią sumy dochodzi Darboux, rozkładając na ułamki cząstkowe formę (lub gromadę form), wyrażalną jako iloraz dwu sąsiednich wyznaczników wybrzeżonych, według metody Jacobi'ego, z uwagą wszakże, by zmiany wymagane w przypadkach wyjątkowych były w istocie rzeczy szczegółowo wykonane.

Dalszy nasz wykład [22]) skoncentrujemy głównie na przekształceniach formy kwadratowej i dwuliniowej.

Gdy dotąd wychodzono z form jako danych i szukano takich podstawień ilości zmiennych, które sprawiają pewne przekształcenia form, to obecnie występuje zwrot stanowczy, polegający na tem, że odwrotnie z danej grupy ogólnej podstawień, staramy się wydzielić tę podgrupę, która jest w stanie jakąkolwiek formę kwadratową (dwuliniową) przekształcić samą na siebie, i później dopiero wyznaczamy odpowiednie formy. Formy ustępują teraz na plan dalszy, jako coś drugorzędnego, interes zaś główny zwraca się przedewszystkiem ku grupie podstawień, jako utworowi samodzielnemu. Niestety, ta płodna zasada zaledwie w pojedyńczych przypadkach została dotąd uwzględniona w innych częściach teoryi niezmienników.

Pierwszą pobudkę w tym kierunku zawdzięczamy Rosanesowi[23]) 1875, który ograniczył się na formach kwadratowych o charakterze „ogólnym." Według Cayley'a, wraz z formą kwadratową przekształcają się na same siebie i jej pierwsze pochodne, t. j. układ form liniowych, posiadający tę ważną własność, że jest wzajemnym[24]). Rosanes dowodzi własności odwrotnej, mianowicie, że do każdego równania wzajemnego należy układ „asymetryczny"[25]) form liniowych, a więc i odpowiednia forma kwadratowa. Z jednego takiego rozwiązania można otrzymać pozostałe.

Przytoczoną zasadę dla form kwadratowych badał w całej ogólności Frobenius[26]) (1877) i na tej drodze odkrył, obok wszystkich przypadków wyjątkowych, charakterystyczne własności podstawień, pozostawiających bez zmiany formę kwadratową lub, co na jedno wychodzi, formę dwuliniową, symetryczną lub znakozmienną.

Nie należy pominąć milczeniem tego, że już w r. 1873 Bachmann zbadał bezpośrednio formy kwadratowe trójkowe co do ich zniekształceń i uzupełnił tym sposobem badania Hermite'a, który wkrótce potem pokazał, że wzory Bachmanna wynikają z jego własnych wzorów przy poprawnem przejściu do granicy.

Frobenius wychodzi z prostej myśli zasadniczej, że układ spółczynników formy dwuliniowej przedstawia podstawienie oznaczone pojedyńczego szeregu zmiennych. To pozwala mu uważać przekształcenia form dwuliniowych za „zestawienia" podstawień i zbudować na tej zasadzie płodny algorytm, którego działania są tem samem, czem są pewne odznaczające się prostotą gatunki mnożenia liczb nadurojonych (lub „rozciągłych"). Stąd wypływają kryterya dla takiego podstawienia, które formę przekształca na samą siebie. Jeżeli forma żądana jest ogólna, t. j. o nieznikającym wyznaczniku, wtedy[27]) dzielniki elementarne charakterystycznej funkcyi podstawienia muszą parami być jednego stopnia i znikać dla wartości wzajemnych (wyjąwszy wartość ± 1). Przeciwnie, jeżeli wyznacznik formy znika[28]), to — gdy m oznacza stopień najwyższy nieznikających wyznaczników — funkcya charakterystyczna musi być podzielną przez funkcyę wzajemną m-go stopnia.

Gdy w ten sposób określono w zupełności warunki równoważności, można już było zastosować za pomocą zręcznego przejścia do granicy wzory Cayleya-Hermite'a do spółczynników tych podstawień we wszystkich przypadkach wyjątkowych[29]).

Godne uwagi zastosowanie, które poczynił Frobenius do nauki o układach liczb nadurojonych, zaprowadziłyby nas zbyt daleko; pomijamy też pokrewne badania Lipschitza i Kroneckera[30]) nad związkiem wewnętrznym pomiędzy kwaternionami (i bikwaternionami) Hamiltona i odpowiedniemi podstawieniami ortogonalnemi.

b) Równoważność form różniczkowych. Zagadnienie Pfaffa.

Powiemy tu o podanem przez Frobeniusa zastosowaniu przekształcenia form dwuliniowych do tak nazwanego zagadnienia Pfaffa, a stanowiącem godny uwagi przykład na to, w jaki sposób badanie niezmienników grup nieskończonych, należące właściwie do teoryi funkcyi, daje się przy dogodnych okolicznościach sprowadzić do badania czysto-algebraicznego niezmienników grupy rzutowej. Przy zagadnieniu Pfaffa idzie o poznanie, czy i kiedy dwa dane wyrażenia różniczkowe liniowe n-wyrazowe mogą być przekształcone jedno na drugie, jeżeli zmienne poddajemy „ogólnym przekształceniom punktowym." Frobenius pokazuje najprzód, że przy założeniu możliwości tego przekształcenia, pewien układ, składający się z formy dwuliniowej znakozmiennej i formy liniowej, przechodzi równocześnie za pomocą pewnych przekształceń kongruentnych (liniowych) na inny układ podobny; przytem spółczynniki form jakoteż i podstawień, lubo zależą od zmiennych zagadnienia, odgrywają rolę zwyczajnych stałych. Okazuje się także, że i odwrotnie, samo spełnianie się związków algebraicznego przekształcenia pociąga już za sobą spełnienie warunków całkowalności. Stąd idzie głębsze (ze stanowiska teoryi form) wniknięcie w charakter związków algebraicznych, polegające na tem, że wymagają one tylko równości niezmiennika całkowito-liczbowego p dla obu par form; jest to twierdzenie, które na krótko przedtem udowodnił był Lie przy pomocy teoryi grup. Charakterystyczny niezmiennik p jest, jak to wykazuje Frobenius, liczbą funkcyj niezależnych, występujących w postaci „kanonicznej" wyrażenia różniczkowego Pfaffa.

Z pytaniami, poruszonemi przez Frobeniusa, wiążą się badania Stickelbergera[31]) nad stanowiskiem, które zajmują podstawienia ortogonalne i wogóle podstawienia, nie zmieniające formy oznaczonej (kwadratowej), względem nowego Weierstrass'owskiego punktu widzenia. Przez wprowadzenie odpowiedniej normalnej formy trygonometrycznej dla podobnych podstawień dochodzi Stickelberger do prostego wyniku, że funkcya charakterystyczna tych podstawień posiada jedynie dzielniki elementarne; że skutkiem tego podstawienie takie jest już zupełnie oznaczone przez podanie jego funkcyi charakterystycznej. Stickelberger podał nadto cenne dopełnienie[32]) do Weierstrass'owskiej redukcyi gromad form dwuliniowych, wyjaśniwszy, że można zawsze uniknąć ewentualności, przy której znikają mianowniki spółczynników, zachodzących w formie normalnej, przez co ta forma mogłaby się stać iluzoryjną.

Ważne zadanie rozciągnięcia teoryi Frobeniusa o przekształceniach kongruentnych form kwadratowych na same siebie do dowolnie utworzonych form dwuliniowych, pozostawało jeszcze w stanie niedoskonałości. Dopiero w czasach najnowszych Voss [33]) udoskonalił metody do tego stopnia, że potrzebne procesy pomocnicze dają się wykonać w sposób wymierny. Opierając się na Kroneckerowskiem pojęciu formy przyłączonej, sprowadził on to zadanie do prostszego, mianowicie do przekształcenia „kongruentnego" pewnych gromad form dwuliniowych jednych na drugie; przez co udało mu się układ związków przekształceń kwadratowych co do spółczynników formy pierwotnej zastąpić układem liniowym, i tym sposobem łatwo poznać, dlaczego obie klasy form symetrycznych i znakozmiennych są wyróżnionemi u poprzednich badaczy, zwłaszcza u Frobeniusa. Wzory ostateczne mają wyraźną analogię z wzorami Cayleya-Hermite'a.

Aby od jednego znalezionego podstawienia przejść do wszystkich pozostałych z tą samą własnością, należy znaleść wszystkie podstawienia „przemienne." Zadanie to rozwiązał już był Frobenius przy pomocy swego algorytmu [34]).

I stanowisko formy normalnej Kroneckera i Christoffela wśród całej teoryi teraz występuje wybitnie. Zresztą należy zauważyć, że jądro postępowania, użytego przez Vossa, tkwi już w dawniejszej jego pracy [35]) o podstawieniach ortogonalnych, która wyszła prawie jednocześnie z wielką rozprawą Frobeniusa w r. 1877. Dalszą zasługą Vossa stanowi to, że w pojedyńczej tożsamości wyznacznikowej [36]) odkrył wspólne źródło szeregu poczęści głęboko tkwiących twierdzeń o dzielnikach elementarnych, które podali Frobenius, Siacci, Stickelberger i Stieltjes.

Wspomnieliśmy już wyżej o polemice pomiędzy Kroneckerem i Jordanem z r. 1874. Jordan musiał wtedy uznać zasadność zarzutów mu uczynionych co do rzeczy głównej. Później podjął jeszcze raz ten sam przedmiot i ogłosił pierwszą część swoich studyów [37]) w r. 1888 w pracy o przekształceniu form kwadratowych samych na siebie. Podział form na klasy i podklasy, uwarunkowany przez dzielniki elementarne funkcyi charakterystycznej, przenosi on tu na same podstawienia. Dla tych ostatnich pozyskuje na końcu parę najprostszych typów kanonicznych; należące zaś do nich formy kwadratowe buduje explicite a posteriori. Uderza tu nienależyte uwzględnienie prac obcych.

Można powiedzieć, że teorya równoważności form dwuliniowych i kwadratowych, jak to pokazuje nasz wykład, zawdzięcza dzisiejsze swoje wydoskonalenie prawie wyłącznie dzielności badaczy niemieckich.

c). *Formy kanoniczne. Charakter grupowy przedstawień.*

W wykładzie powyższym musieliśmy pozostawić na uboczu pewne zadania specyalniejsze. Takiem jest np. zadanie o kanonizowaniu formy, które samo przez się ma ważne znaczenie, lecz ustępuje na plan dalszy, skoro przedewszystkiem mamy na widoku własności niezmiennicze stosowanych podstawień.

Należą tu także: uproszczenie i uogólnienie przez Gundelfingera [49]) metody Jacobi'ego-Plückera, służącej do zamiany formy kwadratowej na sumę kwadratów; dalej szereg dowodów prawa bezwładności Sylvestera-Jacobi'ego [50]); dokładniejsze badanie zależności [51]) pomiędzy związkami, które muszą być spełnione, aby forma kwadratowa o n zmiennych dała się przedstawić jako suma mniej niż n kwadratów, oraz różnorodne sformułowanie tych związków; wyrażenie spółczynników kanonicznych w zamkniętej formie wyznacznikowej [52]); i inne podobne.

Niechaj mi będzie wszakże wolno zwrócić jeszcze uwagę na pewien punkt donioślejszego znaczenia.

Jakkolwiek w cytowanych pracach stosowano implicite charakter grupowy podstawień, które pozostawiają bez zmiany formę kwadratową lub dwuliniową, to wszakże jesteśmy jeszcze bardzo dalecy od organicznego wcielenia zasady teoryi grup i przekształceń do omawianej przez nas teoryi. Do tego przedewszystkiem byłoby koniecznem zupełne zbadanie podgrup, zawartych w grupie takiej i spożytkowanie tychże dla form.

Co do pierwszego, to w najnowszym czasie Werner [53]) podał dla utworów kwadratowych oznaczenie największych podgrup; przedtem zaś Lie [54]) traktował był już niektóre przypadki. Są to grupy przekształcające „punkt," albo „rozmaitość płaską" (którą przedstawia formy przyrównana do zera) utworu zasadniczego same na siebie. Killing [55]) na innej drodze uzasadnił to twierdzenie.

W ogólnej teoryi Liego największe znaczenie ma ta grupa („trójwyrazowa"), pozostawiająca niezmienną formę kwadratową o trzech zmiennych. Stosownie do tego, czy ta grupa jest zawarta lub nie jako podgrupa w pewnej grupie przekształceń o n ($\geqq 3$) zmiennych, rozpadają się one na dwie różne istotnie klasy. Podział ten, jak to pokazali Engel [56]) i Killing [57]), zgadza się z dawniej już przez Liego [58]) podanym (i do całkowania równań różniczkowych zastosowanym) podziałem na grupy „całkowalne" i „niecałkowalne."

Scheffers [59]) wskazał zastosowanie tej teoryi do układów naduroJonych, dla których zakłada się istnienie prawa łączności, a wyłącza prawo przemienności w mnożeniu.

B. Formy dalsze.

a). *Przekształcalność liniowa form jednych na drugie.*

C l e b s c h[60]) (1810) pierwszy postawił pytanie, czy równość niezmienników bezwzględnych, konieczna według A r o n h o l d a, jest zarazem zawsze wystarczającą, by dwie formy dane *) dały się przekształcić liniowo jedna na drugą; jeżeli zaś nie, to jakie prócz tego spełniać się jeszcze muszą inne warunki? W istocie, można podać proste przykłady [61]), stwierdzające niedostateczność pierwszego przypuszczenia. Środek do bliższego zbadania tej kwestyi wskazało typowe przedstawienie form, w którem spółczynniki są już same niezmiennikami. Wtedy bowiem widać wprost, że gdy dwie formy dają się za pomocą podstawienia liniowego sprowadzić do tej samej postaci typowej, to istnieć też musi podstawienie, które umożliwia przejście jednej formy na drugą. Będzie więc szło o to, aby oznaczyć granicę, aż do której można osiągnąć przedstawienie typowe, o jakiem mowa. Okazuje się, że równoważność dwu form dwójkowych (równego rzędu) zachodzi zawsze wtedy, gdy (oprócz równości niezmienników bezwzględnych) istnieje za każdym razem para spółzmienników równych i niezależnych, liniowych lub kwadratowych, stosownie do tego, czy rząd form był nieparzysty lub parzysty [62]).

Droga ta wszakże nie okazuje się właściwą do otrzymania układu warunków, tak koniecznych, jak i dostatecznych, rozwiązalności zadania; zresztą dotychczasowe wiadomości nasze o typowych postaciach form wyższych są jeszcze bardzo skromne.

Bezpośrednie ujęcie tego zagadnienia daje A r o n h o l d o w s k a metoda badania równoważności, i dlatego następni badacze tego zagadnienia szli prawie wszyscy za A r o n h o l d e m.

Przedewszystkiem należało otrzymać same niezmienniki bezwzględne na drodze wprost algebraicznej, bez pomocy równań różniczkowych. Uczynił to G r a m[63]) (1874) sposobem prostym, przez wysunięcie na plan główny charakteru grupowego podstawień, zmieniających jedne na drugie formy, tylko do jednej i tej samej należące klasy, podobnie jak to dawniej z wielkiem powodzeniem przeprowadził był G a u s s dla podstawień całkowito-liczbowych w zastosowaniu do form kwadratowych.

*) Odwracamy tu uwagę od teoryi form kwadratowych (i dwuliniowych).

G r a m badał najprzód rugowniki A r o n h o l d a, utworzone ze związków między przekształceniami dla pary form F, F', następnie dla drugiej pary F, F''; po wyrugowaniu spółczynników formy F z tego podwójnego układu związków, wnosi bezpośrednio o równości niezmienników bezwzględnych dla form F' i F''. By odpowiedzieć na pytanie odwrotne, uważa on pojedyńcze kolumny spółczynników podstawienia za samodzielne układy zmiennych i ze względu na nie poddaje formy dane procesom biegunowym. Dochodzi wtedy do twierdzenia, że każdy niezmiennik i spółzmiennik tych form tworzy się w sposób całkowito-wymierny z takich utworów biegunowych. Wynika stąd następujące kryteryum zupełne przekształcalności wzajemnej dwóch układów form: r ó w n o ś ć n i e z m i e n n i k ó w b e z w z g l ę d n y c h i z n i k a n i e t o ż s a m o ś c i o w e t y c h s a m y c h s p ó ł z m i e n n i k ó w.

To nie posunęło wszakże pytania ważnego dla zastosowań: w jakim zakresie dają się wydzielić te klasy form, dla których sama równość niezmienników bezwzględnych wystarcza już do określenia równoważności?

Tem pytaniem zajmuje się bliżej C h r i s t o f f e l w r. 1881 [64]). Posługując się podobnie jak G r a m „zasadą równoważności" G a u s s a, wnika on głębiej w oddzielne stadya procesów eliminacyjnych przez to, że nie czyni z góry żadnych założeń o postaci równań ostatecznych. Zadanie formułuje ściślej w ten sposób, że szuka wszystkich form równoważnych z daną. Aby módz wypowiedzieć pewne własności równań ostatecznych dla spółczynników nieznanych, ruguje spółczynniki podstawienia w jakimkolwiek porządku, z tem wszakże ograniczeniem, aby dla każdego z nich bieg eliminacyi był „systematycznym", t. j. raz na zawsze unormowanym. W ten sposób można wskazać, które z tych nieznanych spółzmienników występują w warunkach równoważności, oraz które z pozostałych spółczynników podstawienia—w równaniach ostatecznych. Zależy to wszystko od liczby tych ostatnich, która, jak to udowodnić się daje, jest n i e z a l e ż n a od porządku, w którym wykonywają się pojedyńcze eliminacye. Liczba ta osiąga w ogólności pewną wartość najwyższą, mianowicie n^2 (n jest liczba zmiennych), co według A r o n h o l d a z a c h o d z i z pewnością, gdy wyróżnik uważanej formy jest różny od zera. Wyłączywszy wyraźnie wszystkie formy, dla których ta wartość najwyższa nie bywa osiąganą, dowodzi C h r i s t o f f e l, że równoważność dwu form zależy w rzeczy samej jedynie od równości obustronnych niezmienników bezwzględnych, i wywodzi równocześnie nowym sposobem ich liczbę.

Byłoby pożądanem zbadać ze stanowiska teoryi niezmienników jądro tego zadania C h r i s t o f f e l a. Na pewno powiedzieć można, że spółczynniki podstawienia nie powinny zawierać parametrów dowolnych, t. j. że formy dane nie zezwalają na gromady przekształceń na same siebie, a nadto wszystkie niezmienniki jednej z form powinny znikać [65]).

Veltmann spróbował także zmodyfikować Aronholdowy proces eliminacyi w ten sposób, aby z równości niezmienników różniczkowych można było odwrotnie wywnioskować prawdziwość związków między przekształceniami; musiał wszakże w tym celu pominąć całe klasy form, wedle subjektywnego uznania, którego wewnętrzną istotę trudno jest zrozumieć.

Zagadnienie o równoważności wtedy dopiero będzie mogło być zadawalająco rozwiązane, gdy z punktu widzenia teoryi niezmienników pozyskamy dostateczną znajomość różnorodnych zniekształceń form [66]).

Z kolei należałoby teraz zbadać te szczególne przekształcenia, które przekształcają formy dane na pewne postaci kononiczne, zbudowane dla użytku praktycznego; ponieważ wszakże w rozwoju historycznym tego przedmiotu daleko więcej uwzględniano pytanie o występujących przy tem niewymiernościach, aniżeli o przekształceniach, przeto omówienie tej kwestyi odkładamy do innego miejsca (II, B).

---

b). Formy z liniowemi przekształceniami na siebie same. Związek z teoryą równań algebraicznych i teoryą równań różniczkowych o całkach algebraicznych.

W niezmiennikach formy lub większej liczby form odkryto proste funkcye spółczynników, zmieniające się przy pewnych grupach przekształceń liniowych tylko o czynnik, zależny od spółczynników podstawienia. Czynnik ten można zresztą uczynić równym jedności.

Jakkolwiek niezmienniki te są natury specyalnej ze względu na ich argumenty—bo winny czynić zadość pewnym równaniom różniczkowym liniowym cząstkowym—to wszakże ogólność form, pierwotnie danych, pozwoliła zbudować daleko sięgające metody tworzenia niezmienników.

Jeżeli oderwiemy pojęcie niezmiennika od podstawy, którą stanowią formy pierwotne, i zapytamy, jakie formy o pewnej oznaczonej liczbie argumentów przechodzą same na siebie przy pewnych podstawieniach, stosowanych do argumentów, albo — co w istocie wychodzi na to samo — jeżeli szukamy wszystkich możliwych grup podstawień n zmiennych, oraz należących do nich niezmienników (całkowitych i wymiernych), to musimy wtedy obejrzeć się za nowemi środkami pomocniczemi.

W poniższym wykładzie ograniczymy się na skończonych grupach podstawień, zwanych grupami Galois'a [67]), albowiem grupy z parametrami dowolnemi nie były dotąd prawie badane [68]).

Najbliższe formy tego rodzaju, formy dwójkowe, zostały znalezione przy pomocy metod teoryi funkcyj. Doszedł do nich H. A. Schwarz [69]), zajmując się pytaniem o całkach algebraicznych równania różniczkowego hypergeometrycznego, które jest liniowem i drugiego rzędu. Iloraz s dwóch rozwiązań szczególnych y_1, y_2 tego równania czyni zadość równaniu różniczkowemu rzędu 3-go [70]); skutkiem tego półpłaszczyzna dodatnia zmiennej niezależnej x odwzorowuje się z podobieństwem (conform) [71]) na trójkącie S, złożonym z łuków kołowych (bez punktu rozgałęzienia wewnątrz), który może być analitycznie przedłużony po za każdy z trzech boków za pomocą „powtórzenia symetrycznego." Liczba powstających w ten sposób obszarów musi być skończoną, jeżeli s ma być funkcyą algebraiczną zmiennej [72]). Pytanie zatem, do którego doszedł Schwartz: „znaleść wszystkie trójkąty kuliste, których powtórzenia symboliczne na powierzchni kuli prowadzą tylko do skończonej liczby trójkątów kulistych różnego położenia"—pytanie to jest implicite równoważne temu, o którem mówimy [73]). Schwartz rozwija odpowiednie formy i podaje także związek, zachodzący pomiędzy dwoma spółzmiennikami wymiernemi i forma pierwotną [74]).

Nie znając pierwotnie [75]) pracy Schwarza, doszedł Klein wprost do oznaczenia grup skończonych dwójkowych i liniowych oraz ich form. Podstawą jego rozważania jest związek, który daje się ustanowić pomiędzy Riemannowską interpretacyą zmiennej zespolonej z na powierzchni kuli z jednej strony [76]) a znaczeniem geometrycznem przekształcenia liniowego z drugiej. Przekształcenia te przyporządkowują się jednoznacznie do „ruchów" rzeczywistych przestrzeni [77]).

Grupy skończone takich ruchów można otrzymać za pomocą bezpośredniego poglądu [78]). Sprowadzone do formy kanonicznej, są to pospolite powtórzenia obrotu kuli około jednej oznaczonej średnicy (grupa cykliczna), obok obrotów, powstających tu przez przemianę obu końców średnicy (grupa dwuścienna). Temi klasami grup nie będziemy się tu zajmowali. Dalej idą grupy obrotów, sprowadzających pięć brył foremnych (platońskich) do przystania, każdą do siebie samej; można tu ograniczyć się na czworościanie, ośmiościanie (lub sześciościanie) i dwudziestościanie (lub dwunastościanie). Te trzy grupy obejmują odpowiednio n=12, 24, 60 obrotów.

Idzie o zbudowanie „zupełnego układu form" takiej grupy, t. j. takich form, aby wszystkie inne (pozostające niezmiennemi przy podstawieniach grupy) były funkcyami całkowitemi wymiernemi tamtych. Z prostej zasady, że „spółzmienniki przechodzą same na siebie przy pomocy tych samych przekształceń liniowych, jak i forma zasadnicza," wynika prawo: „Jeżeli zastosujemy działania jednej z trzech grup do każdej z dwóch dowolnych wartości początkowych (t. j. do punktów kuli), otrzymamy za każdym razem n wartości, które są pierwiastkami dwóch równań $\pi=0$, $\pi'=0$. Wtedy w gromadzie liniowej $\pi + \varkappa\pi'$ znajdują się zawsze trzy (i tylko trzy) zupełne potęgi form rzędu niższego f, H, T, które to formy (po dobraniu jedynego niezmiennika) tworzą układ zupełny grupy.

Pomiędzy odpowiedniemi potęgami ilości f, H, T zachodzi związek liniowy; przytem H jest spółzmiennikiem Hessego formy f, T zaś wyznacznikiem funkcyjnym obu.

Tym sposobem w przypadku „grupy dwudziestościennej" otrzymujemy najprzód szereg form 60-go rzędu; zawiera ona formy 12, 20 i 30-go rzędu: f_{12}, H_{20}, T_{30} odpowiednio pięciokrotnie, trójkrotnie i dwukrotnie liczone; $f=0$ przedstawia wierzchołki dwudziestościanu; $H=0$ wierzchołki dwunastościanu; wreszcie $T=0$ środki krawędzi obu ciał. W dwóch pierwszych przypadkach przedstawiają analogiczne $f_4=0$, $f_6=0$ wierzchołki czworościanu i sześcianu.

Trzy formy f posiadają, jak to okazuje łatwy rachunek, tę godną uwagi własność, że ich czwarte „nasunięcie" względem samych siebie, $(f, f)^4$, znika tożsamościowo; odwrotnie też, ta własność oraz rząd 4, 6, 12 (rozumie się przy nieznikającym wyróżniku) charakteryzuje te formy w zupełności [79].

Możemy tu dotknąć zaledwie wewnętrznego związku, zachodzącego pomiędzy „równaniem dwudziestościanu" $f_{12}=0$ a ogólnemi równaniami rzędu 5-go. Zresztą jest prawie widocznem geometrycznie, że równanie $f_{12}=0$ posiada rozwiązujące rzędu 5-go i 6-go. Trzydzieści punktów $T=0$ stanowi właśnie wierzchołki pięciu foremnych ośmiościanów, których formy t są pierwiastkami równania rzędu 5-go. Z drugiej strony 12 wierzchołków dwudziestościanu rozkłada się na 6 par wierzchołków przeciwległych i jeżeli φ jest formą takiej pary, to φ^2 zależy od równania rzędu 6-go.

Okazuje się, że związki pomiędzy dwoma ostatniemi równaniami zgadzają się ze związkami w znanych badaniach Kroneckera, Hermite'a i Brioschi'ego nad ogólnem równaniem rzędu 5-go.

Dalsze rozwinięcie tego przedmiotu w rękach Kleina doprowadziło do tego, że dwudziestościan stał się punktem środkowym rozgałęzionej teoryi równań rzędu piątego [80].

Wspomnimy obecnie o związku, zachodzącym pomiędzy grupami skończonemi podstawień i ich formami, a równaniami różniczkowemi liniowemi.

Całki ogólne równania różniczkowego liniowego rzędu n-go o spółczynnikach, będących funkcyami wymiernemi, dają się wyrazić liniowo i jednorodnie za pomocą n całek szczególnych, liniowo niezależnych: $y_1, y_2 \ldots y_n$. Jeżeli zmienna obiega drogi zamknięte około punktów osobliwych równania, wtedy ilości y podstawiają się liniowo ze spółczynnikami stałemi [81]; te podstawienia stanowią „grupę" równania. Jeżeli równanie posiada tylko całki algebraiczne, to grupa jest skończoną, i odwrotnie. Taką jest podstawa pracy Fuchsa z r. 1875 [82], z którą wiążą się dalsze badania Jordana, Kleina, Brioschi'ego. Fuchs ma przedewszystkiem tę ważną zasługę, iż odkrył głębszy związek między należącemi do grupy formami $f(y_1, y_2 \ldots y_n)$, zachodzący wewnątrz teoryi równań różniczkowych liniowych.

Jeżeli równanie różniczkowe, dane u Fuchsa w postaci zredukowanej—niechaj niem będzie w szczególności równanie rzędu drugiego—ma posiadać tylko pierwiastki algebraiczne, to muszą istnieć pewne formy $f(y_1, y_2)$, które są pierwiastkami funkcyi wymiernej. Te formy „pierwsze" (Primformen) zlewają się z formami $\pi + \varkappa\pi'$ grupy równania (patrz wyżej); ich spółzmienniki są znowu formami pierwszemi [83]. Formy pierwsze rzędu najniższego n wyróżniają się tem, że wszystkie ich spółzmienniki rzędu niższego od n znikają tożsamościowo [84]. Stąd można wyprowadzić wniosek, że rząd n może przyjmować tylko ograniczoną liczbę wartości; Fuchs znajduje, że możliwemi wartościami są jedynie $n=2$, 4, 6, 8, 10, 12. Podane środki pomocnicze pozwalają dla każdego danego konkretnie równania różniczkowego rzędu 1-go określić kroki, których potrzeba użyć celem rozwiązania pytania o całkach algebraicznych.

Pytanie odwrotne o ustanowieniu wszystkich takich typów równań różniczkowych rzędu 2-go podjął Klein [85]) i doprowadził je do pewnego zakończenia. Przedewszystkiem, opierając się na poprzednich swoich pracach, mógł odrazu napisać pięć możliwych gatunków równań całkowych, którym powinien zadość czynić iloraz η dwóch rozwiązań algebraicznych szczególnych y_1, y_2. Stąd przeszedł do odpowiednich pięciu możliwych równań różniczkowych dla funkcyi η. Wystąpiło wtedy godne uwagi zjawisko, że te ostatnie równania powstają bezpośrednio z równania rzędu 3-go, zbadanego w przypadku hypergeometrycznym przez Schwarza, jeżeli (po podstawieniu odpowiednich wartości liczebnych za trzy zachodzące tam stałe dowolne) przemienimy argument x na dowolną funkcyę wymierną tego argumentu [86]. Przytem okazuje się także, że tablica Fuchsa możliwych „form pierwszych" najniższego rzędu zawiera w istocie przypadki zbyteczne [87].

Brioschi oryginalnym sposobem obliczył niezmienniki i spółzmienniki form pierwszych przez wprowadzenie form stowarzyszonych Hermite'a [88])

Gordan, pierwszy, przy pomocy zasad czysto-algebraicznych badał formy dwójkowe z podstawieniami liniowemi na same siebie [89]. Przedewszystkiem podstawienie dwójkowe S sprowadza do postaci normalnej [90]), w której obok formy kwadratowej, określającej oba zlewające się elementy (Coincidenzelemente) podstawienia S, występuje jeszcze kąt zmienny φ: argument podstawienia S. Wtedy wprost $n\,\varphi$ jest argumentem podstawienia S^n; jeżeli S ma należeć do grupy skończonej, to $n\,\varphi$ musi być wielokrotnością kąta π.

Jeżeli mamy dwa podstawienia S i T z argumentami φ, i jeżeli Φ, Ψ są argumentami podstawień ST i $T^{-1}S$, złożonych z tamtych, to pomiędzy temi czterema kątami zachodzi prosty związek [91])

$$\cos \Phi + \cos \Psi = \cos (\varphi + \psi) + \cos (\varphi - \psi).$$

Na podstawie tego związku oraz podziału podstawień według wielkości ich peryodów, zadanie pierwotne sprowadza się do zadania z teoryi liczb [92]), a mianowicie do rozwiązania równania

$$1 + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 = 0$$

za pomocą kątów wymiernych φ_1, φ_2, φ_3.

Badanie dalsze zależy co do swej istoty od twierdzenia Kroneckera o nieprzywiedlności uogólnionego równania podziału koła [93]). Wynik badania stanowi oczywiście pięć grup Kleina, które przybierają tu postać kanoniczną, bardzo dogodną w użyciu.

W następującej, tuż po poprzedniej, rozprawie przyjmuje Gordan[94]) za podstawę własność form pierwszych najniższego rzędu, dostrzeżoną przez Fuchsa, a polegającą na tem, że wszystkie ich spółzmienniki rzędu niższego od n, znikają tożsamościowo. Najprzód, przy pomocy należącego tu układu form, wykazuje, że formy f_6, f_{12} ośmiościanu i dwudziestościanu mają tę własność. Trudne do udowodnienia twierdzenie odwrotne, mianowicie, że formy f są jedynemi swego rodzaju, wyprowadza z własności tych spółzmienników najniższego rzędu, których ostatnie nasunięcie znika tożsamościowo wraz z formą f.

Wreszcie Wedekind i Brioschi[95]) przez bezpośrednie porównanie spółzmienników wykazali, że zauważone przez Kleina tożsamościowe znikanie czwartego nasunięcia formy dwójkowej na samą siebie, jeżeli odwrócimy uwagę od form f_n z $n-1$-krotnym czynnikiem, prowadzi wyłącznie po form f_4, f_6, f_{12} czworościanu, ośmiościanu i dwudziestościanu [96]).

C. Jordan podjął ogólne zagadnienie o grupach skończonych podstawień liniowych dla n zmiennych ze stanowiska teoryi podstawień [97]). Niechaj G będzie taką grupą; zawiera ona z pewnością podstawienia s, które zmieniają zmienne (jednorodne) tylko o czynniki, będące pewnemi pierwiastkami z jedności. Po kolei przekształca za pomocą wszystkich podstawień G wszystkie podgrupy F grupy G przemienne z podstawieniem s. Pomiędzy rzędami wszystkich tych podgrup F i rzędami grupy G zachodzi równanie diofantowe. Dyskusya tego równania dla $n=2$ daje znowu pięć znanych typów. Lecz już w najbliższym przypadku $n=3$ należy rozpatrzeć oddzielnie nadzwyczaj wielką liczbę przypadków. Nakoniec pozostaje 11 różnych typów jako rzeczywiście istniejących; pomiędzy niemi jest tylko jeden istotnie nowy, gdyż pozostałe albo są pospolitemi, albo należą w rzeczywistości do grup o 2 lub 1 zmiennej [98]). Wspomniana nowa grupa jest tak nazwaną grupą Hessego G_{216} (o 216 podstawieniach); własność jej[99]), zbadana najprzód przez Hessego, polega na tem, że pozostawia bez zmiany konfiguracyę czterech trójkątów zwrotnych krzywej płaskiej trzeciego rzędu.

Skutkiem błędu rachunkowego pominął Jordan inną, również istotnie nową grupę G_{168} (o 168 trójkowych podstawieniach), które odkrył Klein przy badaniu przekształceń 7-go rzędu funkcyj eliptycznych [100]). Odpowiednia rozwiązująca Galois'a (168-go rzędu) posiada mianowicie grupę 168 podstawień, gdyż jeden jej pierwiastek η, uważany za funkcyę stosunku ω peryodów, pozostaje właśnie niezmiennym przy tych 168 podstawieniach, które są kongruentne z tożsamością względem mod. 7. Wielkość η jest związana z niezmiennikiem bezwzględnym J całki eliptycznej równaniem (168-go rzędu względem η), które jest rodzaju trzeciego i zezwala również na 168 przekształceń jednoznacznych na samo siebie. Równanie to można znowu odnieść jednoznacznie do równania krzywej normalnej 4-go rzędu: $f = x_1{}^3 x_2 + x_2{}^3 x_3 + x_3{}^3 x_1 = 0$, przechodzącej na samą siebie za pomocą grupy G_{168} kolineacyj trójkowych, izomorficznej z grupą wyżej wspomnianą. Układ zupełny formy f [101]), a zarazem grupy, składa się oprócz f, jeszcze z trzech spółzmienników rzędów: 6, 14, 21, pomiędzy któremi zachodzi syzygia.

Geometrycznie łatwo widzieć, że rozwiązująca Galois'a posiada rozwiązującą 7-go i 8-go rzędu. Z jednej strony 56 punktów styczności 28 stycznych podwójnych krzywej f można wydzielić za pomocą 7 stożkowych [102]), zależących od równania rzędu 7-go. Następnie 24 styczne zwrotne krzywej f połączyć można w 8 trójboków, określonych równaniem rzędu 8-go[103]). Odwrotnie, każde równanie rzędu 7-go z grupą o 168 podstawieniach można sprowadzić do przypadku powyższego, a więc rozwiązać je za pomocą funkcyj eliptycznych, jak to najprzód pokazał Klein, a następnie szerzej rozwinął Gordan[104]).

Grupy skończone podstawień czwórkowych (i wyższych) nie są jeszcze wszystkie znanemi. Niedawno Klein na różnych drogach napotkał kilka ważnych przykładów grup czwórkowych. Dwie takie grupy stanowią jądro metody rozwiązania, podanej przez Kleina dla równań ogólnych rzędu 6-go i 7-go[105]).

Wyobraźmy sobie najprzód równania, sprowadzone do „formy głównej“, w której spółczynniki drugiego i trzeciego wyrazu są równe zeru, w której zatem suma pierwiastków oraz suma kwadratów pierwiastków jest zerem. Wtedy pierwiastki x można uważać za spółrzędne liniowe prostych pewnego oznaczonego kompleksu liniowego, albo też prostych zwyczajnej przestrzeni. Jeżeli teraz w przypadku 6-go rzędu poddamy pierwiastki wszystkim 6! przemianom, a w przypadku 7-go rzędu $\frac{1}{2}.7!$ przemianom parzystym, to spółrzędne punktów przestrzeni doznają tylko przekształceń liniowych, te zaś ostatnie tworzą obie skończone grupy, o które idzie. Równania dane sprowadza się do „układów równań,“ należących do tych grup.

Trzecią ważną grupę (czwórkową) odkrył Klein przy badaniach liniowo-geometrycznych [106]. Jeżeli proste przestrzeni odniesiemy do sześciu kompleksów zasadniczych $x=0$ (gdzie $\Sigma\, x^2=0$), to każda z 6! przemian ilości x i każda z 64 zmian znaku tych ilości daje kolineacyę lub dualistyczne przekształcenie przestrzeni. Wszystkie wynikające stąd przestawienia stosunków ilości x wytwarzają grupę skończoną o 32.6! podstawieniach, która jest „rozszerzeniem“ grupy, uważanej przy równaniach rzędu 6-go. Podgrupa tej grupy o 16.6! kolineacyach zlewa się z grupą [107], której podlegają „moduły,“ wprowadzone przez Borchardta dla funkcyj hyperliptycznych rodzaju 2 przy liniowem przekształceniu peryodów. Posiada ona grupę wyróżnioną o 64 podstawieniach. Maschke podał układ zupełny form tej grupy [108].

Jeżeli moduły Borchardta można było uważać za funkcye Jacobi'ego rzędu 2-go, to istnieją i takież funkcye rzędu 3-go, zachowujące się analogicznie, jak to spostrzegł był Klein, a następnie rozwinął Witting [109]. Prowadzą one do nowej grupy czwórkowej o 25920 kolineacyach. Maschke dowiódł, że grupa ta zawiera się znowu w grupie o podwójnej liczbie podstawień i dla tej ostatniej (nie zawierającej się już w żadnej grupie obszerniejszej) obliczył układ zupełny [110]. Można to było uskutecznić przez powrót do grupy G_{216} Hessego i przyrównanie do zera pewnej funkcyi czterech zmiennych.

Grupa, o której mówimy, jest z jednej strony izomorficzną z grupą podziału potrójnego funkcyi hypereliptycznej rzędu pierwszego; z drugiej zaś strony z tem równaniem rzędu 27-go, od którego zależy 27 prostych powierzchni rzędu trzeciego [111].

Kończąc o skończonych grupach podstawień [112], wspomnimy jeszcze odnośnie do grup o parametrach dowolnych, o badaniu Maurera [113], które wiąże się bezpośrednio z pytaniem, poruszonem na początku rozdziału; zasługuje ono na uwagę z powodu swej metody, gdyż ustanawia związek pomiędzy badaniami Liego o „układach zupełnych“ pewnych równań różniczkowych a dzielnikami elementarnemi Weierstrassa.

Jeżeli za pomocą pewnego podstawienia forma [114] $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ma przejść tożsamościowo na formę $f(y_1, y_2 \ldots y_n)$, to powstaje przez to układ S równań algebraicznych, któremu czynić winny zadość spółczynniki podstawienia. Pomiędzy utworami nieprzywiedlnemi, określonemi przez układ S, znajduje się zawsze jeden [115], zawierający podstawienie tożsamościowe i jemu to odpowiadającą grupę jedynie tu rozważać należy. Według Aronholda tożsamość $f(x) \equiv f(y)$ zamienia się na układ zupełny równań różniczkowych liniowo-niezależnych. Stąd wynika ważny rezultat, że podstawienie, zawierające m parametrów niezależnych, można zestawić z tyluż podstawień „elementarnych,“ t. j. zależnych od jednego tylko parametru.

Badanie takich grup elementarnych polega na własnościach dzielników elementarnych „wyznacznika zasadniczego“

$$| c_{11}-r,\ c_{12},\ c_{13}\ \ldots\ c_{1n} |,$$

gdzie liczby c są określone przez naturę grupy. Istnieją dwa [116] wyróżnione układy liczb c, w których jeden z parametrów zachodzi sposobem wymiernym; wszystkie inne przypadki dają się do tego jednego sprowadzić. Tym sposobem pozyskujemy kryteryum [117], że forma f powinna czynić zadość m równaniom różniczkowym liniowo-niezależnym postaci

$$\sum_\lambda \sum_\mu c^{(i)}_{\lambda\mu} \frac{df}{dx_\lambda}\, x_\mu = 0, \qquad (i=1, 2 \ldots m),$$

gdzie spółczynniki c są układami wyróżnionemi jednego z dwóch rodzajów. W przypadku niezmienników zwykłych m równa się oczywiście n^2, t. j. liczbie dowolnych spółczynników podstawienia [118].

PRZYPISY.

[1]. Math. Ann: XXX, s. 15—29, zwłaszcza str. 17.

[2]. Patrz „Wyznaczniki“ Baltzera. Patrz np. zastosowania do „zagadnienia o małych drganiach“ w pracy Pockelsa: „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$.“ Lipsk, 1891, s. 44—50, jako też do zagadnienia o drganiach „przytłumionych“ w dziele Routha: „Dynamics of a system of rigid bodies“ (1890) Part. II.

[3] Berliner Ber. 1858 s. 207—220. Dalsze rozwinięcie w pracy z r. 1868. Co do liczby rzeczywistych nierównoważnych przekształceń form rzeczywistych, patrz Hensel, Journ. f. Math. CXIII, p. 303—317, 1894.

[4] Str. 19

[5] Journ. f. Math. LXVIII, s. 273—285, lub Berliner Ber. paźdz. 1866. (Porówn. też rozdział o przekształceniu liniowem funkcyi Θ w dziele Clebscha i Gordana: „Abelsche Functionen,“ Lipsk, 1866). Pojęcie formy przyłączonej, podano tu na str. 179, pojęcie „formy normalnej,“ na którą można przekształcić każdą dwuliniową, na str. 275.

Frobenius w dalszym ciągu stosował przekształcenie Kroneckera do funkcyi ϑ z wielu zmiennemi, Journ. f. Math. XCV, s. 264 i dalsze (1883). Porówn. Weber: Anali. di Mat. (2), IX s. 127 i dalsze (1880) i Wiltheiss, Math. Ann. XXVI, s. 127 i dalsze (1886).

[6] Journ. f. Math. LXVIII, s. 253—272. Twierdzenie wymienione znajduje się na str. 262-ej. Niezmienniki bezwzględne formy dwuliniowej, której obie pary zmiennych są wzajemnemi (dualistycznemi), występują już w rozprawie Borchardta, Journ. f. Math. XXX, s. 38; porówn. str. 270—271 (1846).

[7]) Berliner Ber. 1868, s. 310—338. Dzielniki elementarne są wprowadzone na str. 311.

[8]) Porówn. traktowanie tego zadania w rozprawach Stickelbergera, Berlin 1874 i Maurera, Strassburg, 1887, jako też u Ed. Weyera, Prag. Jubiläumsfond der k. böhm. Ges. d. Wiss, 1889, oraz Wiener Monatshefte, 1896, t. I, które to prace opierają się na Cayle y'owskiej teoryi macierzy.

[9]) O dzielnikach elementarnych u Sylvestera patrz wyżej str. 18.

Za pomocą dzielników elementarnych zbadał niedawno Frobenius równoważność dwu form kwadratowych dwójkowych, oraz dwu kwadratowo-kwadratowych dwójkowych (Journ. f. Math. CVI, s. 125 do 188, 1890, § 4, 5, 14, porówn. także prace Deruytsa, o których później będzie mowa).

Klein bada bezpośrednio równoważność dwu form dwukwadratowych dwójkowych, oraz jednej takiej formy ze samą sobą za pomocą niezmienników niewymiernych (liczniki i mianowniki sześciu odnośnych stosunków podwójnego podziału). Patrz Klein-Fricke, Modulfunctionen, Lipsk, 1890, §§ 4, 5, 6.

Segre badał przekształcenia liniowe jednoczesne dwu form dwuliniowych na ich „wzajemne“ (Batt. G. XXII s. 29 do 33-ej, 1884).

W blizkim związku z badaniami Weierstrassa i Kroneckera jest praca Study'ego, który rozważa własności form dwuliniowych, wynikające z teoryi szeregów zwrotnych i opiera się przytem na układzie niezmienników niewymiernych tych form (Wiener Monatshefte, II, str. 1—32, 1891).

Poincaré i Picard badali równoważność formy dwuliniowej o trzech zmiennych jednorodnych z samą sobą w przypadku, gdy odpowiednie zmienne i spółzmienniki są wielkościami zespolonemi sprzężonemi (C. R. XCVIII, s. 344—352, C. R. XCVIII, str. 416-417, 1884).

Killing zajmuje się geometrycznem zastosowaniem dzielników elementarnych (Rozprawa, Berlin, 1872) do badania przecięć dwu powierzchni rzędu drugiego.

Patrz także Sauvage, Ann. de l'École Normale (3), VIII, str. 285—340, 1991.

[10]) Str. 312, 314, 326.

[11]) Berliner Ber. 1874, str. 60.

[12]) l. c., str. 319.

[13]) Porówn. uwagi o tem Kroneckera w Berliner Ber., 1874, str. 72.

[14]) Do form rzędu wyższego stosowano dotąd przeważnie postępowanie odwrotne, patrz Sylvester w Cambr. and Dublin Math. VI, str. 193.

[15]) Berliner Ber. 1868, str. 339—346.

[16]) Berliner Ber. 1874, str. 59—76, 149—156, 206—232.

[17]) l. c. str. 60.

[18]) l. c. str. 61.

[19]) C. R. grudzień, 1873. Po replice Kroneckera (Berliner Ber., 1874, str. 71—76) następują dalsze komunikaty Jordana w Journ. Liouville'a (2), XIX, str. 35—54 i w C. R., marzec 1874. Odpowiedź obszerną i ostateczną pomieścił Kronecker w Berliner Ber. 1874, str. 206—232. W szczególności patrz str. 226. Traktowanie form kwadratowych u Jordana w Journ. Liouville'a (2), XIX, str. 397—422 jest poprawne.

[20]) l. c. str. 156, 211, 212. Co do przekształcenia Jacobi'ego (Journ. f. Math t. III, str. 265—270), patrz zwłaszcza str. 398 i dalsze.

[21]) Berliner Ber., str. 397—447.

[22]) l. c. str. 410.

[23]) l. c. str. 430. Temi typami są:

I. $$\sum_k x_k\, y_k\,; \qquad k=0,1,\ldots,2m-1$$

II. $$\sum_k (x_k\, y_{k+1} + c y_k\, x_{k+1})\,; \qquad k=0,1,\ldots,2m-2,\ c^2 \gtreqless 1.\ ;$$

III. $$\sum_k ((-1)^m x_k\, y_{k+1} + (-1)^k y_k\, x_{k+1})\,; \qquad k=0,1,\ldots,2m-2.\ ;$$

IV. $$c' x_0\, y_0 + \sum_k (x_k\, y_{k-1} + (-1)^k y_k\, x_{k-1})\,; \qquad k=1,2,\ldots,n\,;\ c' \gtreqless 0.\ ;$$

[24]) l. c. str. 435—438. Porówn. Sauvage, cyt. $n^o 9$.

[25]) Berliner Ber. 1889, str. 1225—1237, 1375—1388, 1890, str. 9—17, 34—44.

[26]) Journ. f. Math. CVIII, str. 1—24, Beilage zum Programm der 4 höheren Bürgerschule zu Berlin, Ostern, 1891.

Rozwinięcie dalsze do form z n zmiennemi wymagałoby uprzedniej znajomości odnośnych układów niezmienników (algebraicznych), dotychczas bardzo niezupełnie jeszcze znanych. Porówn. Mertens: „O niezmiennikach jednej i dwóch form dwuliniowych alternujących,“ Pam. Akad. Krak. t. X, str. 26—56, 1886, oraz „O utworach niezmiennikowych form kwadratowych,“ tamże, t. XII, str. 1—93, 1886.

Rosenow w najnowszej pracy (Progr. der 4 Städt. hoh. Burgërschule, Berlin. Ostern, 1892) podaje jako zastosowanie poszukiwań poprzednich formy normalne dla 472 różnych „klas“ właściwych form dwuliniowych o 10 parach zmiennych przy kongruentnem przekształceniu tychże.

[27]) Journ. Liouv. (2), XIX, str. 347—396.

[28]) Porówn. z poprzedzającemi jeszcze: sprowadzenie formy dwuliniowej przez podstawienia biortogonalne do postaci kanonicznej: Beltrami, Batt. G. XI, str. 89—107 (1873), oraz nowsze prace Cosserata Ann. Toul. III, str. 1—12 i Sylvester C. R. CVIII, str. 651—623, Messenger (2), XIX, str. 1—5, 42—46.

[29]) Porówn. pracę Maurera w Journ. f. Math. CVIII, str. 89—116 (1890), który teoryę niezmienników form zniekształconych przyporządkowuje do pewnych grup przekształceń.

[30]) Journ. f. Math. LXXX, str. 52—72.

[31]) Porówn. dla najprostszego przypadku: Brioschi, Annali di Tort. V, str. 201—206 (1854). Ogólnie, własność wzajemności równania zasadniczego udowodnił Kronecker w 1866 (Journ. f. Math. LXVIII, str. 276).

[32]) l. c., str. 59—61.

[33]) Journ. f. Math. LXXXIV, str. 1—63. Porówn. C. R. LXXXV, str. 131—134. W związku z tem są dalsze prace tegoż autora w Journ. f. Math. LXXXVI, str. 44—71, 146—208 (1879) i tom LXXXVIII, str. 96—117 (1880).

[34]) Journ. f. Math. LXXXIV, str. 331—341; por. Tannery Bull. Darboux XI, str. 221—233 (1876).

[35]) Journ. f. Math. LXXVIII, str. 325—328 (1874).

[36]) l. c. str. 31.

[37]) l. c. str. 32, 35.

[38]) l. c. § 11.

[39]) Lipschitz: „Untersuchungen über die Summen von Quadraten,“ Bonn. 1886 Journ. de Math. (4), II, 373—440 (1886), Berliner Ber. 1890.

Kronecker, Berliner Ber. 1890, str. 525—541, 602—607, 691—699, 873—884, 1063—1080; 1375—1388; 1891, str. 9—17, 33—44.

[40]) Journ. f. Math. LXXXII, str. 230—315 (1877). Analogiczne zastosowanie równoważności dwu form kwadratowych znajdujemy już u Christoffela (1870) Journ. f. Math. LXX, str. 46—70, 241—261, który wyznacza równoważność dwóch form różniczkowych

odnośnie do nieskończonych grup punktów na drodze algebraicznej. Lipschitz za pomocą metod rachunku waryacyjnego dochodzi do tego samego wyniku, patrz Journ. für Math. LXX, str. 71—102, 274—287, 288—295; LXII, str. 1—56, oraz uogólnienia do form wyższych.

Porówn. Darboux w Bull. Darboux (2), VI, str. 14—36, 49—68, 1882. Pogląd zasadniczy tej pracy znajdujemy już u Natani'ego. Journ. f. Math. LXXXII, str. 301—328, 1861.

[41]) Morera później zbadał dokładniej ten układ ze stanowiska teoryi form, Atti di Torino XVIII, str. 383—403 (1883).

[42]) Progr. des Polytechnikums Zürich, 1877, str. 1—16.

[43]) Journ. f. Math. LXXXVI, str. 20—43 (1879). Porówn. rozprawę tegoż auto ra Berlin, 1879.

[44]) Göttinger Nachr., wrzesień (1887), str. 425—433; Münchener Abh. XVII, (1890), str. 3—121.

Voss w Münchener Ber. 1889, str. 175—211 bada w szczególności przekształcenie formy dwuliniowej na siebie samą, przy którem obie pary zmiennych podlegają podstawieniom sprzężonym.

[45]) Voss w Münchener Ber. 1889, str. 283—300 udowodnił to twierdzenie na innej drodze, na której tworzenie wszystkich form sprowadza do przejrzystego procesu, pozwalającego równocześnie na badanie funkcyi charakterystycznej form przemiennych z formą daną.

[46]) Math. Ann. XIII, str. 320—374 (1878).

[47]) Münchener Ber. 1889, str. 329—339.

[48]) Journ. de Math. (4), IV, str. 349—368. Porówn. poprzedzające tę pracę komunikaty w C. R.

[49]) Journ. für Math. XCI, str. 221—237 (1881).

[50]) Patrz np. de Presle S. M. F. Bull. XV, str. 179—181 (1887).

[51]) Patrz np. Benoit C. R. CI, str. 869—871 (1885); Nouv. Ann. (3) V, str. 30—36 (1885); de Presle S. M. F. Bull. XIV, str. 98—100 (1886); André S. M. F. Bull. XV, str. 188—192 (1888); Valyi Hoppe Arch. (2), VI, str. 445—448 (1888).

[52]) Patrz np. Studniczka, Prag. Ber., str. 256—265 (1888).

[53]) Math. Ann. XXXV, str. 113—160 (1889).

[54]) Rozprawy Tow. nauk w Chrystyanii (1885).

[55]) Math. Ann. XXXVI, str. 239—254 (1890).

[56]) Leipz. Ber., str. 95—99 (1887), cf. F. M. XIX, str. 356 (1881).

[57]) Math. Ann. XXXVI, str. 172 (1890).

[58]) Archiwum norwegskie, III, str. 112—116 (1874).

[59]) Math. Ann. XXXIX, str. 293—390 (1891) Porówn. Study Gött. Nach. 1889, str. 237—268, Leipz. Ber., 1889, str. 177—228, Wiener Monatshefte I, 1890, II, 1891. Dodamy jeszcze, że Stephanos badał układy liczb zespolonych, za pomocą środków pomocniczych, wziętych z teoryi form; Ateny, tom jubileuszowy (po grecku), 1888.

Poincaré pierwszy zauważył, że każdemu układowi liczb odpowiada grupa o parametrach, zachodzących liniowo (C. R. XCIX, str. 740—742, 1884).

[60]) Math. Ann., II, str. 373—382.

[61]) Najprostszym przykładem tego rodzaju jest forma dwójkowa 6-go stopnia z elementem potrójnym.

Niezwrócenie uwagi na tę okoliczność było przyczyną błędnego obliczenia, które podał Cayley dla modułów „klasy“ form trójkowych. Patrz Cayley, Math. Ann., str. 268—271, 1870.

Kryterya zachodzenia potrójnego pierwiastka dają się wyrazić za pomocą związków przez niezmienniki, lecz za pomocą kryteryów tych nie można oddzielić możliwych

tu jeszcze przypadków szczególnych. Bolza (Math. Ann. XXX, s. 546—552, 1887, obszerniej w Am. J., X, s. 47—70, 1887) wykazał, że dla wszystkich form dwójkowych 6-go stopnia, których zniekształcenie nie dosięga zniekształcenia potrójnego pierwiastka, równość niezmienników bezwzględnych wystarcza w rzeczy samej do równoważności. W szczególności podał Bolza cztery przypadki (Math. Ann. l. c., s. 549), w których metoda Clebscha odmawia usług, lecz w rozważaniu ich nie domaga się wymierności wzorów, służących do przekształcenia. Nadto kryteryum równości niezmienników bezwzględnych nie daje rezultatu, gdy wszystkie niezmienniki każdej z dwóch form znikają, a więc gdy niezmienniki bezwzględne stają się nieoznaczonemi.

Najprostszym jest przypadek dwóch form dwukwadratowych, z których jedna wykazuje element potrójny, druga poczwórny.

[62]) Przykłady z teoryi form rzędów 5-go i 6-go opierają się na rozprawie Clebscha i Gordana w Annali di Mat. (2), I, s. 23—79 (1867).

[63]) Math. Ann., VII, str. 230—241. Porówn. sposób przedstawienia Gundelfingera u „Fiedlera,“ str. 452—458 (1874), oraz rozważania Study'ego w jego dziele „Methoden“ i t. d. (1889), str. 104 i n. st.

[64]) Math. Ann. XIX, str. 280—290. Porówn. Study l. c.

[65]) Przypadek wyjątkowy, cytowany na str. 284 przez Christoffela, mianowicie $f=x_1{}^3+3x_2{}^2x_3$ jest właśnie tego rodzaju. Tu znikają oba niezmienniki Aronholda S i T, a więc wszystkie.

[66]) Prawie nic dotąd nie zrobiono jeszcze dla zbadania równoważności przekształceń wyższych (np. w przypadku form dwójkowych przy przekształceniu Tschirnhausena)

[67]) Patrz wyżej str. 25—26. Zwracamy jeszcze raz uwagę na to, że Lie przez grupę „skończoną“ rozumie taką, która zależy od skończonej liczby parametrów.

[68]) Klein i Lie badali krzywe i powierzchnie podległe gromadom podstawień (przemiennych) na siebie same, C. R. czerwiec, 1870, Math. Ann. IV, str. 50—84. Wspominamy tylko o późniejszych odpowiednich badaniach Liego, Halphena, Sylvestera, Poincarégo, Picarda.

U Liego z zagadnienia tego powstało inne daleko ogólniejsze, odnoszące się do badania systematycznego rownań różniczkowych o ciągłych (nietylko rzutowych) grupach przekształceń.

[69]) Journ. für Math. LXXV, str. 292—335. (Porówn. Verhandl. der Schweizer Naturf. Ges., 1871).

Poprzednia pokrewna literatura zebrana jest w VI rozdziale rozprawy Schwarza. Porówn. też przedstawienie rzeczy w dziele Darboux'a: „Theorie des surfaces,“ I, Livre II, Chap. IV.

[70]) l. c. str. 300. Wyrażenie po stronie lewej tego równania różniczkowego stało się później punktem wyjścia w teoryi wzajemników (Reciprocanten) Sylvestera. Cf. IIC. Dodatek.

[71]) Str. 311

[72]) Str. 316—317.

[73]) Punkt widzenia „skończonej grupy podstawień“ występuje dopiero u Kleina, zarówno jak i pojęcie i tworzenie odpowiedniego układu zupełnego. Schwarz nie operuje ani na zmiennych jednorodnych, ani na spółzmiennikach.

[74]) Zwłaszcza występuej najważniejsza z nich „forma dwudziestościenna“ (ikosaedrowa) w postaci kanonicznej $s\,(1-11\,s^5-s^{10})$ na str. 330-ej. Tamże znajduje się odpowiedni „związek.“

[75]) Erlanger Ber., czerwiec, 1874. W nocie późniejszej, tamże, grudzień, 1874, wyjaśnia autor stosunek swej pracy do pracy Schwarza. Według tego, do pierwotnego pojęcia Kleina dochodzi się wtedy, gdy trójki z łuków kołowych w rozprawie Schwarza zastąpiono wielokątami (które wszakże mnożyć należy nie według zasady przedłużania ana-

litycznego). Tu znajduje się także wzmianka, że „związek,“ o którym mowa w tekście, można uważać za szczególny przypadek znanego (od czasów H e s s e g o) w teoryi form twierdzenia o wyznacznikach funkcyjnych.

Trzecia nota, tamże, lipiec 1875, ma za przedmiot rozwiązującą 5-go i 6-go stopnia równania „dwudziestościanu.“ Nieco później (1875) ukazała się rozprawa, zbierająca powyższe badania w Math. Ann., IX, str. 183—208. (Pierwsza z niżej omówić się mających rozpraw F u c h s a została ogłoszona w Gött. Nachr., sierpień, 1875).

76) M ö b i u s pierwszy wprowadził stosunek podwójnego podziału czterech wartości zespolonych. W e d e k i n d przeniósł te rozważania na kulę. (Rozprawa, Erlangen, 1875, Beiträge etc., Erlangen, 1875, Math. Ann., IX, str. 209—217). B e l t r a m i od roku 1870 badał ze stanowiska teoryi niezmienników formy dwójkowe, zwłaszcza 3-go rzędu ze spółczynnikami zespolonemi. Mem. di Bologna X.

Ogólne przedstawienie przedmiotu tego znajduje się w Programie erlangeńskim K l e i n a z roku 1872 (Prace mat.-fiz., VI).

77) Porówn. np. L i n d e m a n n, Math. Ann., VII, str. 56 i dalsze. Dla zwyczajnego oznaczenia miarowego dawno już określono wszystkie skończone grupy ruchu. Uogólnienie rozważań K l e i n a do wyższych przestrzeni znajdujemy u B i e r m a n n a (Wien. Ber., XCV, str. 523—548, 1887), który wiąże podstawienia liniowe dwóch zmiennych zespolonych w przestrzeni pięciowymiarowej z odpowiedniemi ciałami foremnemi, a także u G o u r s a t a (C. R. CVI, str. 1786—1789, 1888), który za pomocą ciał foremnych w przestrzeni czterowymiarowej upraszcza zagadnienie o szukaniu grup podstawień liniowych i ortogonalnych rzędu skończonego z czterema zmiennemi.

Porówn. też C l e b s c h-L i n d e m a n n, II, 1, oddział 3, IX, X.

Rzeczywistemi grupami ruchu zajmował się szczegółowo J o r d a n, Annali di Mat. (2), II, str. 168—215; 320—345 (1869). Zupełna dyskusya tych z pomiędzy grup, przy których z ruchów tworzących nie można wyprowadzić dowolnie małych zmian miejsca, znajdujemy u S c h ö n f l i e s s a, Math. Ann. XXVII, str. 319—342, XXIX, str. 50—80 (1887); XXXIV, str. 172—203 (1889). Ostatnia z tych prac traktuje o takich grupach przekształceń skończonych przestrzeni w siebie, przy których dowolna figura przestrzenna przechodzi zawsze na przystającą lub symetrycznie równą.

78) Porówn. notę poprzednią.

79) l. c. § 4. Należy tu wszakże zauważyć, że oprócz utworów niezmienniczych ogólnej teoryi form, istnieją jeszcze utwory szczególne, uwarunkowane właściwością uważanych tu skończonych grup podstawień. Tak np. w przypadku formy „dwudziestościennej“ występuje specyficzny niezmiennik wymierny, lecz nie całkowito-wymierny, stopnia 1-go. Porówn. Math. Ann., IX, str. 198.

80) „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades,“ Lipsk, 1884. Porówn. Erlanger Ber. 1876—77, Math. Ann., XII, str. 503—560 (1877), dalej dwie późniejsze ważne prace G o r d a n a, Math. Ann., XXVIII, str. 152—166, XXIX, str. 318—326 (1887).

81) Porówn. podstawowe prace F u c h s a w Journ. für Math., LXVI, str. 121—160 (1866); LXVIII, str. 354—385 (1883). Twierdzenie to znajdnje się już u R i e m a n n a.

82) Gött. Nachr., 1875, str. 568—581. 612—613, Journ. für Math., LXXXI, str. 97—142 (1876). W drugiej rozprawie Journ. für Math., LXXXV, str. 1—26 (1875) bada systematycznie ogół form pierwszych.

83) Patrz notę 79-ą.

84) Puruszone przez F u c h s a pytanie o odwracalności twierdzenia rozstrzygnął twierdząco G o r d a n (patrz niżej).

85) Erlanger Ber., 1876 lub Math. Ann., XI str. 115—118 i Math. Ann., XII, str. 167—180 (1877).

Typy podane przez J o r d a n a w C. R. LXXXII, str. 605—607, LXXXIII, str. 1003—1037 nie były wyczerpującemi. Patrz uwagi, odnoszące się do literatury przedmiotu u K l e i n a: Math. Ann., XI, str. 118 u dołu (1876).

86) Odwrotnie do oznaczenia $R(x)$ z danego równania różniczkowego dla η podaną jest metoda, prowadząca do celu po skończonej liczbie prób.

B r i o s c h i w r. 1877 (Math. Ann., XI. str. 405—411, Rend. Ist. Lomb (2), X, str. 48—58, oznaczył funkcyę R w przypadku tylko trzech punktów szczególnych dla wszystkich „zredukowanych“ typów S c h w a r t z a (Journ. für Math., LXXV, str. 323), prócz trzech. Te trzy ostatnie podał K l e i n, Math. Ann., XII, str. 175, 176 (1877); porówn. sprostowanie C a y l e y'a, tamże XVII, str. 65, 66 (1880). (Dalsze przypadki dwudziestościenne obliczył O. F i s c h e r w rozprawie, ogłoszonej w Lipsku w r. 1885; patrz uwagi K l e i n'a w Math. Ann., XXVI, str. 463 (1886).

87) Patrz Math. Ann., XI, s. 118.

88) Math. Ann., XI, str. 461—411. Według F u c h s a, forma pierwsza $f(y_1, y_2)$ równa się $\varphi(x)$, gdzie φ jest pierwiatkiem z funkcyi wymiernej. Różniczkowanie względem x daje przeto:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi\psi,$$

gdzie φ jest znowu wymierne względem x; z drugiej strony twierdzenie E u l e r a dla funkcyi jednorodnych daje:

$$y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = nf = n\varphi.$$

Jeżeli obliczymy stąd $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ i $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ i te wartości wstawimy do wzorów przekształcenia H e r m i t e'a, to trzeba będzie jeszcze uwzględnić to, że spólny mianownik $y_2\frac{\partial y_1}{\partial x} - y_1\frac{\partial y_2}{\partial x}$, według jednego z twierdzeń A b e l a, jest ilością stałą.

89) Math. Ann., XII, str. 23—46 (1877). Z żalem nie mogę bliżej zająć się rozpatrzeniem subtelnych badań G o r d a n a, które słowami oddać daleko trudniej niż pokrewne prace geometryczne i teoretyczno-funkcyjne. Porówn. także H a l p h e n, Sav. étr., T. XXVIII, (1880—1883).

90) l. c., str. 24. Można ją napisać w postaci

$$(y-x)\cos\varphi = i\sin\varphi k\left\{(x-\alpha)(y-\beta) + (x-\beta)(y-\alpha)\right\},$$

gdzie α i β są dwoma elementami zlewającemi się, k zaś odpowiednio dobraną wartością liczbową.

Przejrzyściej przedstawia się G o r d a n o w s k a postać normalna podstawienia tak

$$\frac{y-\alpha}{y-\beta} = e^{2i\varphi}\cdot\frac{x-\alpha}{x-\beta},$$

gdzie φ przebiega wszystkie wartości zespolone.

91) l. c., str. 25.

92) l. c., str. 29.

93) Math. Ann., XII, str. 147—166 (1877).

94) Określenie G o r d a n a jest o tyle zmodyfikowane, że wyłącza z góry formy o czynniku wielokrotnym.

[95]) Wedekind, rozprawa habilitacyjna, 1876, Brioschi, Annali di Mat. (2), VIII, str. 24—43 (1877). Porówn. przedstawienie rzeczy u Gordana-Kerschensteinera, II, § 19. Równanie $(ff)_4 \equiv 0$ jest ze stanowiska teoryi form równoważnikiem poprzednio omówionego równania różniczkowego 3-go rzędu; w odczytach swoich przeprowadzał zwykle Gordan przejście od jednego do drugiego sposobu przedstawienia.

Co do równania rzędu 3-go patrz także Hurwitz, Math. Ann., XXXII., str. 345 — 352 (1889).

Brioschi zbadał także przypadek formy f_8, której czwarte nasunięcie na siebie samą zlewa się, prócz czynnika stałego, z formą pierwotną i doszedł także do postaci równania różniczkowego 3-go rzędu Schwarza (Chelini, Coll. Math., str. 213—219, 1881, C. R., XCVI, str. 1689—1692, 1883).

[96]) Hilbert udowodnił (Math. Ann., XXX. str. 561—570 (1887), że formy dwójkowe z przekształceniami liniowemi na siebie otrzymać można jako przypadek szczególnej obszerniejszej klasy form. Ta ostatnia występuje wtedy, gdy szukamy takich pęków $\varphi + \lambda\psi$, których trzecie nasunięcie formy φ na ψ znika tożsamościowo.

U Gordana-Kerschensteinera, II, § 13 znajdujemy piękny wywód „ciał foremnych" z form kwadratowych. Szuka się układu takich form, aby wszystkie dwuliniowe nasunięcia każdych dwu form znikały, albo miały wartość spólną, różną od zera, albo też wreszcie wartość spólną bez względu na znak. W pierwszym przypadku dochodzimy do trzech form kwadratowych, których iloczyn jest „ośmiościanem"; w drugim do dwu form, których iloczyn jest „sześcianam"; w trzecim wreszcie do trzech form, których iloczyn jest „dwudziestościanem".

[97]) C. R. LXXXIV, str. 1446—1448, Journ. für Math., LXXXIV, str. 85—215 (1877) Rewizyę i ciąg dalszy daje autor w pracy konkursowej, Atti di Napoli, VIII (1880). „Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire."

Stwierdzenie na innej drodze pojedyńczych wyników w przypadku $n = 3$ było pożądane, ponieważ w liczeniu Jordana błędy spostrzeżenia były nieuniknione. Pomijając pewne odstępstwa, sprawdzenie takie znajdujemy u Valentinera, Kjöb. Skrift (6), V str. 64—235 (1889), który bezpośrednio wyprowadza grupy za pomocą rozważań czysto-algebraicznych (przez przybranie prostych równań diofantowych). U Valentinera zostają ostatecznie trzy skończone grupy trójkowe: jedna G_{12}, powstająca przez „rozszerzenie" dwójkowej grupy czworościennej; druga G_{360}, powstająca analogicznie z dwójkowej grupy dwudziestościennej; i właściwa grupa trójkowa G_{168}, wymieniona w tekście. (Zauważymy mimochodem, że ostatnia grupa, jako grupa 7 liter została w r. 1858 odkryta przez Kroneckera). Godnem jest uwagi, że grupa G_{216}, wymieniona w tekście, nie jest u Valentinera właściwą grupę trójkową (p. Valentiner, l. c., str. 222).

Valentiner opiera swoje wywody na powtórzeniach podstawień. Kryteryum na to, aby podstawienie n zmiennych po n krotnem powtórzeniu dało podstawienie tożsamościowe, jest—jak to już zauważył był Lipschitz, Acta mathem., X, str. 137—144 (1887)—aby równanie charakterystyczne zawierało tylko n-te pierwiastki z jedności i aby jego dzielniki elementarne były rzędu pierwszego. (Porówn. co do podstawień ortogonalnych rozprawę Bermbacha, Bonn, 1888).

Valentiner dowodzi przedewszystkiem, że rząd grupy skończonej jest albo najmniejszą spólną wielokrotnością rzędów jej „podstawień zasadniczych," albo też podwójną lub potrójną, lub poszóstną wielokrotnością tejże (str. 226, tamże).

Wspomnijmy jeszcze, że, biorąc absrtakcyjnie, grupa dwudziestościenna G_{60} i grupa G_{168} tekstu, aż do rzędu 200-go są jedynemi pojedyńczemi grupami działań o rzędzie, który jest liczbą złożoną (Hölder, Math. Ann., XI, str. 55—88, 1892), i że Askwith podał wszystkie możliwe grupy podstawień, które dają się utworzyć z 3, 4, 5, 6, 7 liter (Quar. J., XXIV, str. 111—167, 1881). Wszakże brak u niego grupy G_{167}.

Własność form pierwszych Fuchsa rozszerzył Jordan na równanie różniczkowe rzędu wyższego niż drugi. Tak np. dla rzędu 3-go otrzymujemy twierdzenie, że forma pierwsza jest pierwiastkiem z funkcyi wymiernej zmiennej x i pewnej wielkości pomocniczej dołączonej, która sama zależy wogóle od równania algebraicznego rzędu n-go ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9$).

[98]) Nie wyłącza to wszakże faktu, że takie grupy „przejęte" mają znaczenie dla geometryi. Przypomnijmy np. grupę 18 kolineacyj, które przekształcają krzywą 3-go rzędu na siebie samą, albo grupę 16 kolineacyj (i 16 wzajemnych przekształceń), które toż samo czynią z powierzchnią Kummerowską.

Grupa G_{16} szesnastu przemiennych inwolucyjnych przekształceń, występująca u Kleina, Rohna i innych i porządkująca punkty lub płaszczyzny przestrzeni w konfiguracye Kummerowskie, była szczegółowo badaną (ustanowienie układu zupełnego i t. d.) przez Study'go (Leipz Ber., 1892, str. 122—161). Grupa ta służy temu autorowi tylko jako przykład teoryi systematycznej, opierającej badanie grup skończonych podstawień liniowych ze stanowiska teoryi form na pewnych rozwinięciach (mówimy o tem niżej w niniejszym referacie), przy których główną rolę gra pojęcie niebiegunowości. Najbardziej godnym uwagi wynikiem jest to, że do oznaczenia niezmienników takiej grupy w przypadku najmniej sprzyjającym potrzeba tylko rozwiązać równania czyste. (Patrz wyżej u Valentinera).

[99]) Grupę Hessego szczegółowo badał Maschke, Math. Ann., XXXIII, str. 324 i dalsze (1889). Zadanie rozwiązane przez Maschkego, mianowicie podanie zupełnego układu grupy G_{216}, doprowadziło bezpośrednio do innego zadania, tj. do oznaczenia zupełnego układu kombinantów krzywej C_3 i jej formy Hessego (Math. Ann., XXXIII, str. 328 i nast.).

Z wymienionemi w tekście pracami Wittinga i Maschkego porówn. Burkhardt, Math. Ann., XXXVIII, str. 161—224, (1891).

[100]) Math. Ann., XIV, str. 428—471; patrz zwłaszcza uwagę na str. 438 (1879). Teorya grupy G_{168} jest szczegółowo traktowana w dziele „Modulfunctionen" Kleina-Frickego, Dział III, rozdz. 6.

[101]) „Układ zupełny" formy f w tem znaczeniu, aby zostały uwzględnione i podstawienia zmiennych przeciwpodstawieniowych, a więc obejmujący przeciwzmienniki i formy pośrednie, podał pierwszy Gordan. Math. Ann., XVII. str. 217—233. Patrz zwłaszcza tablicę na końcu rozprawy.

[102]) Możliwe to jest w sposób dwojaki. Związek wzajemny pierwiastków dwóch odpowiednich równań rzędu 7-go stanowi u Gordana jądro teoryi. Spółczynniki obu równań rzędu 7-go tworzą według Gordana układ zupełny tak zwanych „Affectfunctionen," gdy tymczasem część ich wystarcza do otrzymania układu stowarzyszonego (Math. Ann., XX, str. 528). Kładziemy tu nacisk na ogólne uwagi, jakie poczynił tu Gordan nad pojęciem „afektu" w jego stosunku do teoryi niezmienników.

[103]) Porówn. Noether, Math. Ann., XV, str. 89—110 (1879).

[104]) Gordan, Math. Ann., XVII, str. 217—233 (1890), str. 359—378 (1880), XIX, 529—552 (1882), XX, str. 487—514, 515—530 (1882), XXV, str. 459—521 (1885).

Haskell zbadał dokładniej powierzchnię Riemanowską krzywej normalnej $f=0$, Amer. Jour. XIII, str. 1—52 (1890): (Idzie tu o podany przez Kleina, Math. Ann. VII, X „nowy" gatunek powierzchni Riemannowskich, powstający z punktów rzeczywistyth stycznych urojonych do krzywych).

[105]) Math. Ann., XXVIII, str. 499—532 (1887). Porówn. Cole, Amer. J. VIII, str. 265—275 (1886).

Grupę wymienioną na drugiem miejscu zbadał dokładniej ze stanowiska geometryi liniowej Maschke (1890) Math. Ann., XXXVI, str. 190—215. Prowadzi ona do godnej uwagi konfiguracyi 140 prostych w przestrzeni.

[106]) Math. Ann., IV, str. 346—358 (1871).

[107]) Porówn. Reichardt, Math. Ann., XXIII, str. 84—98 (1887).

108) Math. Ann., XXX, str. 496—515 (1887).

109) Math. Ann., XXIX, str. 157—170 (1887), cf. Reichardt, tamże XXVIII, s. 84—98 (1887).

110) Math. Ann., XXXIII, s. 317—344 (1889).

111) Jordan, Traité des substitutions, 1871.

Co do związku obu zagadnień patrz Klein, 1888, Journ. de Math. (4), IV, str. 169—177 i Burkhardt, Gött. Nachr. 1892, str. 1—5.

112) Z badaniami, poruszonemi w tekście, o ile odnoszą się do grup skończonych dwójkowych i trójkowych, znajduje się w związku ścisłym szereg prac Autonne'a, C. R., XCVII, str. 567—570; (1883), C. R., XCVIII, s. 565—567, IC, s. 646—649; (1889), C. R. CI, str. 53—56, Journ. de Math. (4) I, s. 431—454; (1885), C. R. CII, s. 313—316, CIII, s. 1176—1178, Journ. de Math. (4), II, s. 49—104; (1886); C. R. CIV, s. 767—770, 1422—1425, CV, s. 267—270, 929—95, Journ. de Math. (4), III, s. 63—85; (1887). Journ. de Math. (4), IV, s. 177—247; 407—464; (1888). W tych pracach autor założył sobie oznaczenie wszystkich skończonych grup i podgrup przekształceń Cremony (płaszczyzny), a specyalnie przekształceń kwadratowych i sześciennych. Couf. S. Kantor, Wien. Denk., 1882, s. 46.

113) Ueber allgemeinere Invarianten-Systeme, Münch. Ber., 1888, s. 103—150.

114) Pozostaje to w swej mocy, jak to zaznacza Maurer, gdy f jest wogóle funkcyą wymierną i jednorodną zmiennych x.

115) l. c., str. 107.

116) Wtedy wyznacznik funkcyjny ilości c albo równa się r_n. albo też ma dzielniki elementarne tylko pierwszego rzędu i nadto pierwiastki całkowito-liczbowe. Twierdzenie to podał i udowodnił autor jeszcze w rozprawie swej. Strasburg, 1887.

117) Str. 138.

118) W innej rozprawie (Journ. für Math.. CVII, str. 89—116, 1890) Maurer rozciągnął badania swoje na podstawienia nieliniowe.

PRZYCZYNEK DO OGÓLNEJ TEORYI RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH DOWOLNEGO RZĘDU

PRZEZ

SOPHUSA LIEGO.

Przełożył z niemieckiego za zezwoleniem autora

KAZIMIERZ ŻORAWSKI.

(Nowe teorye w tej pracy zawarte zakomunikowałem Królewskiemu Saskiemu Towarzystwu Umiejętności 11 Października 1893 r. Następnie rozwinąłem je szczegółowo w wykładach moich na Uniwersytecie w Lipsku podczas zimowego półrocza 1893/4.
Sophus Lie)

Teorya równań różniczkowych jest w całej matematyce współczesnej działem najważniejszym.

Zdanie, że pojęcia pochodnej i całki, których pierwsze początki spotykamy już u Archimedesa, w swych cechach zasadniczych wprowadzone zostały do nauki przez Keplera, Descartes'a, Cavalieri'ego, Fermata i Wallisa, wydaje się być zgodne z prawdą. Pomimo to jednakowoż, badaczy tych w żadnym razie nie można uważać, jako założycieli rachunku nieskończenie małych, co zdaje się wynikać stąd, że nie zauważyli oni, iż różniczkowanie i całkowanie są działaniami odwrotnemi. Wspaniałe to odkrycie [1]), dziś dla nas zupełnie widoczne, zawdzięczamy Newtonowi i Leibnizowi, którzy oprócz tego poznali niezmierzoną wartość tych

---

1) Dla rozstrzygnięcia dawnego sporu o pierwszeństwo w sprawie odkrycia rachunku nieskończenie małych, oczywiście bardzo ważną jest kwestya, czy Newton, czy też Leibniz pierwszy zauważył, że różniczkowanie i całkowanie są działaniami odwrotnemi. Pan Zeuthen, który tyle już zdziałał dla historyi matematyki, zamierza, o ile go dobrze zrozumiałem, kwestyę tę traktować w pracy, mającej niebawem opuścić prasę.