O ZAGADNIENIU PFAFFA.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

Wyniki, otrzymane w poprzednich pracach moich [1]) wystarczają do zupełnego rozwiązania zagadnienia Pfaffa. Niech będzie równanie różniczkowe

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n = 0\,, \qquad (n \geqq 2j+1)\,. \tag{1}$$

$$(i,\,k,\,l) = X_i\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_l} - \frac{\partial X_l}{\partial x_k}\right) + X_k\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_l}\right) + X_l\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right). \tag{2}$$

Jeżeli sprawdziany (2), w których i, k, l oznaczają kombinacye liczb $1, 2, \ldots, n$ po trzy, są zerami, wtedy równanie (1) posiada jedną tylko całkę. Gdyby zaś sprawdziany (2) nie były równe zeru, natenczas próbować należy sprawdziany rzędu 2-go, które, jak wiemy, mają postać funkcyj Pfaffa

$$(i,k,l,m,r) = (k,l,r)\,(i,m,r) - (i,l,r)\,(k,m,r) + (l,m,r)\,(i,k,r)\,, \tag{3}$$

gdzie i,k,l,m,r oznaczają kombinacye liczb $1, 2, \ldots, n$ po pięć, zaś symbole (a, b, c) mają wartości takie, jak (2).

W przypadku, gdy sprawdziany (3) będą zerami, równanie (1) będzie miało tylko dwie całki. Wiemy, że natenczas istnieją równania kształtu

[1]) Comptes rendus, Nr 17 (sem. II) 1892 i Nr 11 (sem. II), 1894, tudzież obszerniej w „Pracach mat.-fiz.", t. IV (str. 56—62), t. VI (str. 20—26).

$$(k,l,m)\,A_{1,i} - (i,l,m)\,A_{1,k} + (i,k,m)\,A_{1,l} - (i,k,l)\,A_{1,m} = 0\,, \tag{4}$$

gdzie ilości A oznaczają spółczynniki równania różniczkowego

$$A_{1,1}\,dx_1 + A\,dx_2 + \ldots + A_{1,n}\,dx_n = 0\,, \tag{5}$$

któremu czyni zadość tylko jedna z całek równania danego (1).

Zupełnie podobne równanie, jak (4), istnieje jednocześnie i dla spółczynników równania, odpowiadającego drugiej z szukanych całek. Wiadomo, że spółczynniki równania (5), pomnożone przez czynnik całkujący μ, dają

$$\mu\,A_{1,s} = \frac{\partial F}{\partial x_s}\,, \tag{6}$$

gdzie funkcya F oznacza całkę równania (5). Wskutek tego, równanie (4) pomnożone przez μ, daje nam łatwo związek następujący:

$$(k,l,m)\,\frac{\partial F}{\partial x_i} - (i,l,m)\,\frac{\partial F}{\partial x_k} + (i,k,m)\,\frac{\partial F}{\partial x_l} - (i,k\;l)\,\frac{\partial F}{\partial x_m} = 0.$$

Napiszmy to równanie dla skaźników i, $n-2$, $n-1$, n:

$$(n-2, n-1, n)\,\frac{\partial F}{\partial x_i} - (i, n-1, n)\,\frac{\partial F}{\partial x_{n-2}} + (i,\,n-2, n)\,\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}$$
$$- (i,\,n-2, n-1)\,\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0\,.$$

Uważając następnie i za skaźnik zmienny, otrzymujący po kolei wszystkie wartości od 1 do $n-3$ włącznie, mieć będziemy układ równań różniczkowych cząstkowych, którego postacią normalną jest

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{(i,\,n-1,\,n)}{(n-2,\,n-1,\,n)}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_{n-2}} + \frac{(i,\,n-2,\,n)}{(n-2,\,n-1,\,n)}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}$$
$$- \frac{(i,\,n-2,\,n-1)}{(n-2,\,n-1,\,n)}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0\,. \tag{7}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-3)$$

Każda z dwóch całek równania (1) będzie jednocześnie całką spólną układu (7). Powyższy układ normalny zastąpić możemy odpowiednim układem pomocniczym o różniczkach zupełnych

$$\left.\begin{aligned} dx_{n-2} &= -\sum_{i=1}^{i=n-3} \frac{(i,\, n-1,\, n)}{(n-2,\, n-1,\, n)} \,.\, dx_i\,, \\ dx_{n-1} &= \sum_{i=1}^{i=n-3} \frac{(i,\, n-2,\, n)}{(n-2,\, n-1,\, n)} \,.\, dx_i\,, \\ dx_n &= -\sum_{i=1}^{i=n-3} \frac{(i,\, n-2,\, n-1)}{(n-2,\, n-1,\, n)} \,.\, dx_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dla zcałkowania układu (8) można zawsze użyć metody powszechnej, jaką jest *oddzielanie zmiennych*, i która polega na tem, że z równań (8) tworzymy jedno równanie kształtu

$$\alpha\, dx_{n-2} + \beta\, dx_{n-1} + \gamma\, dx_n$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-3} \left[\frac{-\alpha\,.\,(i,\, n-1,\, n)}{(n-2,\, n-1,\, n)} + \frac{\beta\,.\,(i,\, n-2,\, n)}{(n-2,\, n-1,\, n)} + \frac{-\gamma\,.\,(i,\, n-2,\, n-1)}{(n-2,\, n-1,\, n)}\right] dx_i\,.$$

Jeżeli ilości α, β, γ wybierzemy tak udatnie, iż równanie powyższe stanie się całkowalnem, natenczas związek, otrzymany po dokonanej kwadraturze, będzie całką szukaną równania (1).

W przypadku, gdy sprawdziany (3) nie będą zerami, natenczas probujemy dalej sprawdziany rzędu 3-go, które mają kształt funkcyj Pfaffa 3-go stopnia:

$$\left.\begin{aligned} &(i,k,l,m,r,s,t) \\ &= (k,l,m,r,t)\,[(i,l,m,s,t)\,(i,k,r,s,t) - (i,k,m,s,t)\,(i,l,r,s,t) + (i,k,l,s,t)\,(i,m,r,s,t)] \\ &- (i,l,m,r,t)\,[(k,l,m,s,t)\,(i,k,r,s,t) - (i,k,m,s,t)\,(k,l,r,s,t) + (i,k,l,s,t)\,(k,m,r,s,t)] \\ &+ (i,k,m,r,t)\,[(k,l,m,s,t)\,(i,l,r,s,t) - (i,l,m,s,t)\,(k,l,r,st) + (i,k,l,s,t)\,(l,m,r,s,t)] \\ &- (i,k,l,r,t)\,[(k,l,m,s,t)\,(i,m,r,s,t) - (i,l,m,s,t)\,(k,m,r,s,t) + (i,k,m,s,t)\,(l,m,r,s,t)] \\ &+ (i,k,l,m,t)\,[(k,l,r,s,t)\,(i,m,r,s,t) - (i,l,r,s,t)\,(k,m,r,s,t) + (i,k,r,s,t)\,(l,m,r,s,t)] \\ &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

gdzie symbole (a,b,c,d,e) oznaczają pfaffiany kształtu (3).

Jeżeli wszystkie równania warunkowe, podobne jak (9), sprawdzają się, oznaczać to będzie, iż równanie dane posiada trzy całki.

Atoli wiemy, że w tym przypadku istnieją równania:

$$(k,l,m,r,s)\,A_{1,i} - (i,l,m,r,s)\,A_{1,k} + (i,k,m,r,s)\,A_{1,l} - (i,k,l,r,s)\,A_{1,m}$$
$$+ (i,k,l,m,s)\,A_{1,r} - (i,k,l,m,r)\,A_{1,s} = 0\,,$$

z których, po pomnożeniu przez czynnik całkujący μ, otrzymamy

$$(k,l,m,r,s)\frac{\partial F}{\partial x_i} - (i,l,m,r,s)\frac{\partial F}{\partial x_k} + (i,k,m,r,s)\frac{\partial F}{\partial x_l} - (i,k,l,r,s)\frac{\partial F}{\partial x_m}$$
$$+ (i,k,l,m,s)\frac{\partial F}{\partial x_r} - (i,k,l,m,r)\frac{\partial F}{\partial x_s} = 0\,.$$

Napiszmy w postaci normalnej podobne, jak powyżej, równanie dla skaźników i, $n-4$, $n-3$, $n-2$, $n-1$, n

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{(i,n-3,n-2,n-1,n)}{(n-4,n-3,n-2,n-1,n)}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_{n-4}} + \frac{(i,n-4,n-2,n-1,n)}{(n-4,n-3,n-2,n-1,n)}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_{n-3}}$$
$$- \frac{(i,n-4,n-3,n-1,n)}{(n-4,n-3,n-2,n-1,n)}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_{n-2}} + \frac{(i,n-4,n-3.n-2,n)}{(n-4,n-3,n-2,n-1,n)}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}$$
$$- \frac{(i,n-4,n-3,n-2,n-1)}{(n-4,n-3,n-2,n-1,n)}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0\,.$$

Zmieniając w ostatnim równaniu skaźnik i od 1 do $n-5$ włącznie, mieć będziemy układ normalny równań różniczkowych cząstkowych, które łatwo zastąpić odpowiednim układem równań o różniczkach zupełnych:

$$\left.\begin{aligned} dx_{n-4} &= -\sum_{i=1}^{i=n-5} \frac{(i,\, n-3,\, n-2,\, n-1,\, n)}{(n-4,\, n-3,\, n-2,\, n-1,\, n)}\, dx_i\,, \\ dx_{n-3} &= \sum_{i=1}^{i=n-5} \frac{(i,\, n-4,\, n-2,\, n-1,\, n)}{(n-4,\, n-3,\, n-2,\, n-1,\, n)}\, dx_i\,, \\ dx_{n-2} &= -\sum_{i=1}^{i=n-5} \frac{(i,\, n-4,\, n-3,\, n-1,\, n)}{(n-4,\, n-3,\, n-2,\, n-1,\, n)}\, dx_i\,, \\ dx_{n-1} &= \sum_{i=1}^{i=n-5} \frac{(i,\, n-4.\, n-3,\, n-2,\, n)}{(n-4,\, n-3,\, n-2,\, n-1,\, n)}\, dx_i\,, \\ dx_n &= -\sum_{i=1}^{i=n-5} \frac{(i,\, n-4,\, n-3,\, n-2,\, n-1)}{(n-4,\, n-3,\, n-2,\, n-1,\, n)}\, dx_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Układ ten jest tylko pomocniczym, i jeżeli zdołamy w układzie (10) oddzielić zmienne metodą, podobną do wyżej objaśnionej, wtedy odnajdziemy całki szukane równania (1). Jeżeli sprawdziany (9) nie będą równe zeru, natenczas przechodzimy dalej do następnych sprawdzianów wyższych i tym sposobem wypróbujemy wszystkie po kolei aż do sprawdzianów, przedstawiających funkcye Pfaffa stopnia j-go. Metoda postępowania niczem nie będzie się różniła od wyłożonych powyżej dwóch przypadków. Gdy już żadne ze sprawdzianów, branych po kolei aż do j-go stopnia, nie stają się zerami, czyli, inaczej mówiąc, jeżeli spółczynniki równania danego (1) nie czynią zadość żadnym warunkom, natenczas rozróżniamy dwa przypadki: gdy liczba zmiennych n w równaniu (1) jest parzystą $n=2j$, albo też jest nieparzystą $n=2j+1$. W przypadku pierwszym liczba całek jest równą j, w drugim zaś zagadnienie staje się nieoznaczonem i jednę z całek można wybrać zupełnie dowolnie. Dla tej przyczyny, zajmiemy się tylko przypadkiem, gdy $n=2j$ i spółczynniki równania (1) nie czynią zadość żadnym zgoła warunkom. W tym ogólnym przypadku, podobnie jak i w przypadkach szczególnych, roztrząsanych powyżej, istnieje, jak to łatwo zauważyć, jeden związek pomiędzy spółczynnikami równania (1) tudzież (5) w kształcie:

$$\begin{gathered}(2,3,4,\ldots,n)A_{1,1}-(1,3,4,\ldots,n)A_{1,2}+(1,2,4,\ldots,n)A_{1,3}-\ldots\\ \ldots\pm(1,2,\ldots,g-1,g+1,\ldots,n)\,A_{1,g}\mp\ldots-(1,2,3,\ldots,n-1)\,A_{1,n}=0\,,\end{gathered}\tag{11}$$

gdzie symbole $(a, b, c, \ldots, n)$ oznaczają odpowiednie funkcye Pfaffa, do których zawsze dojść musimy, próbując kolejno wszystkie sprawdziany. Tak naprzykład, w przypadku, gdy równanie dane zawiera tylko cztery zmienne, mamy:

$$(2,3,4)\,A_{1,1}-(1,3,4)A_{1,2}+(1,2,4)\,A_{1,3}-(1,2,3)\,A_{1,4}=0\,.$$

W przypadku, gdy w równaniu (1) $n=6$ i spółczynniki X nie czynią zadość żadnym warunkom, będzie:

$$\begin{gathered}(2,3,4,5,6)\,A_{1,1}-(1,3,4,5,6)\,A_{1,2}+(1,2,4,5,6)\,A_{1,3}-(1,2,3,5,6)\,A_{1,4}\\ +(1,2,3,4,6)\,A_{1,5}-(1,2,3,4,5)\,A_{1,6}=0\,.\end{gathered}$$

W przypadku, gdy w równaniu (1) $n=8$ i spółczynniki X nie sprawdzają równań warunkowych, będziemy mieli

$$\begin{gathered}(2,3,4,5,6,7,8)\,A_{1,1}-(1,3,4,5,6,7,8)\,A_{1,2}+(1,2,4,5,6,7,8)\,A_{1,3}\\ -(1,2,3,5,6,7,8)\,A_{1,4}+(1,2,3,4,6,7,8)\,A_{1,5}-(1,2,3,4,5,7,8)\,A_{1,6}\\ +(1,2,3,4,5,6,8)\,A_{1,7}-(1,2,3,4,5,6,7)\,A_{1,8}=0\,.\end{gathered}$$

Podobnie łatwo napisać równanie dla $n=10$, i t. d.

Równanie (11), pomnożone przez czynnik μ, daje w roztrząsanych przypadkach jedno równanie różniczkowe cząstkowe

$$\begin{gathered}(2,3,4,\ldots,n)\frac{\partial F}{\partial x_1}-(1,3,4,\ldots,n)\frac{\partial F}{\partial x_2}+\ldots\pm(1,2,3,\ldots,g-1,g+1,\ldots,n)\frac{\partial F}{\partial x_g}\pm\ldots\\ \ldots-(1,2,3,\ldots,n-1)\frac{\partial F}{\partial x_n}=0\,,\end{gathered}\tag{12}$$

z którego otrzymujemy zawsze układ pomocniczy o różniczkach zupełnych:

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{(2,3.4,\ldots,n)}=\frac{dx_2}{-(1,3,4,\ldots,n)}=\ldots=\frac{dx_g}{\pm(1,2,3,\ldots,g-1,g+1,\ldots,n)}=\ldots\\ \ldots=\frac{dx_n}{-(1,2,3,\ldots,n-1)}\,.\end{gathered}\tag{13}$$

Każda całka równania (1), w przypadku ogólnym, omówionym powyżej, będzie także czyniła zadość równaniu (12), lecz układ (13) jest tylko pomocniczym i, jak widzimy, zawiera całek więcej, aniżeli wymaga teorya. Wskutek tego, po przecałkowaniu układu ostatniego, wybrać i sprawdzić jeszcze należy, które całki będą jednocześnie szukanemi całkami równania danego.

Płock, dnia 10 marca 1895 r.