$$u + c = \frac{a_1}{a}\left(x^4+\frac{4x^3}{a}+\frac{12x^2}{a^2}+\frac{24x}{a^3}+\frac{24}{a^4}+12m^2t^2+12mtx^2+\frac{24mtx}{a}+\frac{24mt}{a^2}\right)$$
$$+\frac{a_2}{a}\left(x^3+\frac{3x^2}{a}+\frac{6x}{a^2}+\frac{6}{a^3}+6mtx+\frac{6mt}{a}\right)+\frac{a_3}{a}\left(x^2+\frac{2x}{a}+\frac{2}{a^2}+2mt\right)$$
$$+\frac{a_4}{a}\left(x+\frac{1}{a}\right);$$

stałych dowolnych jest w całce powyższej sześć: c, a, a_1, a_2, a_3, a_4.

Prostszy będzie kształt całki zupełnej z pięcioma stałemi:

$$u = c_1\,(x^4+4x^3+12x^2+24x+12m^2t^2+12mtx^2+24mtx+24mt)$$
$$+ c^2\,(x^3+3x^2+6x+6mtx+6mt) + c_3\,(x^2+2x+2mt) + c_4\,x + c_5\,.$$

Taki sam sposób całkowania można także zastosować do równania ruruchu ciepła w kierunku trzech wymiarów.

Płock, dnia 25 listopada 1894 r.

O RÓWNANIACH POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Treścią pracy niniejszej jest sposób ustanowienia równań pola elektromagnetycznego, w przypadku ogólnym, t. j. gdy się ośrodek odkształca i porusza (zmienia). Mniemam, że sposób ten jest dość ścisły, prosty i jasny; na pomysł zaś jego wpadłem, studyując wielki traktat Maxwella o elektryczności i magnetyzmie, oraz dzieło Poincare'go p. t. „Sur les oscillations électriques".

Sposób ten polega:

a) na fakcie stwierdzonym doświadczalnie, że w ośrodku nieruchomym, siła elektromotoryczna prądu zamkniętego jest proporcyonalna do pochodnej względem czasu strumienia indukcyi magnetycznej, przenikającego pole ograniczone tym prądem;

b) na określeniu energii elektrycznej, energii magnetycznej i ciepła Joule-Peltier; oraz

c) na określeniu istoty odosobnienia pola elektromagnetycznego.

§ 1.

Będziemy oznaczali przez X, Y, Z i L, M, N składowe prostokątne siły elektrycznej i siły magnetycznej, w punkcie (x, y, z) ośrodka w chwili t, a przez ε i μ współczynniki przenikliwości elektrycznej i magnetycznej.

$\varepsilon X dy dz$ wyobraża wtedy strumień indukcyi elektrycznej, przenikający element $dy dz$. Zależy on (strumień) od czasu t, wyraźnie i za pośrednictwem współrzędnych x, y, z, które w chwili $t+dt$ posiadają wartości

$$x + \xi\, dt, \quad y + \eta\, dt, \quad z + \zeta\, dt,$$

gdzie $\xi = dx/dt$, η i ζ są składowemi prędkości ośrodka.

Oznaczając więc przez $d\,(\varepsilon\, X\, dy\, dz)$ różniczkę zupełną względem t, będziemy mieli

$$d(\varepsilon X dy dz) = \left[\frac{\partial \varepsilon X}{\partial t} + \xi \frac{\partial \varepsilon X}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varepsilon X}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varepsilon X}{\partial z} + \varepsilon X\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right] dy\, dz\, dt\,.$$

Z przyczyny, że się ośrodek zmienia, element $dy\, dz$ odkształci się w czasie dt i obróci około swego wierzchołka, w ten sposób, że krawędzie jego dy i dz odchylą się: pierwsza — od kierunku siły Y ku osi x, na kąt $\partial\,(\xi\, dt)/\partial y$, druga — od kierunku siły Z ku osi x, na kąt $\partial\,(\xi\, dt)/\partial z$.

Stąd wynika, że w chwili $t+dt$, siły Y i Z nie tworzą już z normalną elementu $dy\, dz$ kątów prostych, ale tworzą kąty

$$\pi/2 + \frac{\partial \xi}{\partial y}\, dt \quad \text{i} \quad \pi/2 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\, dt$$

Siła przeto X, działająca normalnie do elementu $dy\, dz$, nabywa także przyrostu

$$Y \cos\left(\pi/2 + \frac{\partial \xi}{\partial y}\, dt\right) + Z \cos\left(\pi/2 + \frac{\partial \xi}{\partial 2}\, dt\right) = -\left(Y \frac{\partial \xi}{\partial y} + Z \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) dt\,.$$

a wskutek tego, przyrost strumienia $\varepsilon\, X\, dy\, dz$, oprócz wyrazu $d\,(\varepsilon\, X\, dy\, dz)$, zawierać jeszcze powinien wyraz następujący:

$$-\,\varepsilon\left(Y \frac{\partial \xi}{\partial y} + Z \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) dy\, dz\, dt\,.$$

To razem daje

$$d\,(\varepsilon\, X\, dy\, dz) - \varepsilon\left(Y \frac{\partial \xi}{\partial y} + Z \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) dy\, dz\, dt$$

$$= \left[\frac{\partial \varepsilon X}{\partial t} + \xi\left(\frac{\partial \varepsilon X}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon Y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon Z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\varepsilon\,(X\eta - Y\xi) - \frac{\partial}{\partial z}\varepsilon\,(Z\xi - X\zeta)\right] dy\, dz\, dt\,.$$

Załóżmy teraz dla krótkości

$$\frac{\delta \varepsilon X}{dt} = \frac{\partial \varepsilon X}{\partial t} + \xi\left(\frac{\partial \varepsilon X}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon Y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon Z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\varepsilon\,(X\eta - Y\xi) - \frac{\partial}{\partial z}\varepsilon\,(Z\xi - X\zeta) \qquad (1)$$

i otrzymajmy nadto odpowiednie wyrażenia dla $\delta \varepsilon Y/dt$ i $\delta \varepsilon Z/dt$. Wtedy

$$\delta \varepsilon X\,.\,dy\, dz, \quad \delta \varepsilon Y\,.\,dz\, dx, \quad \delta \varepsilon Z\,.\,dx\, dy$$

będą zmianami w czasie dt strumieni indukcyi elektrycznej

$$\varepsilon X\, dy\, dz, \quad \varepsilon Y\, dy\, dz, \quad \varepsilon Z\, dx\, dy.$$

Podobnie rozumując, otrzymamy łatwo

$$\frac{\delta \mu L}{dt} = \frac{\delta \mu L}{\partial t} + \xi\left(\frac{\partial \mu L}{\partial x} + \frac{\partial \mu M}{\partial y} + \frac{\partial \mu N}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\mu\,(L\eta - M\xi) - \frac{\partial}{\partial z}\mu\,(N\xi - L\zeta)\,, \qquad (2)$$

i także analogiczne wyrażenia na $\delta \mu M/dt$ i $\delta \mu N/dt$.

Tu znowu

$$\delta \mu L\,.\,dy\, dz, \quad \delta \mu M\,.\,dz\, dx, \quad \delta \mu N\,.\,dx\, dy$$

są zmianami w czasie dt strumieni indukcyi magnetycznej

$$\mu L\, dy\, dz, \quad \mu M\, dz\, dx, \quad \mu N\, dx\, dy.$$

§ 2.

W przypadku ośrodka nieruchomego mamy: $\xi = \eta = \zeta = 0$, i równania (1) i (2) redukują się do następujących:

$$\frac{\delta \varepsilon X}{dt} = \frac{\partial \varepsilon X}{\partial t}, \quad \frac{\delta \mu L}{dt} = \frac{\partial \mu L}{\partial t},$$

których strony prawe są pochodnemi względem czasu, w zwykłem tego pojęcia znaczeniu.

Możemy wszakże i w przypadku poruszania się ośrodka, uważać ten ośrodek również za nieruchomy, pod warunkiem atoli, że przez pochodne

względem czasu strumieni εX i μL rozumieć będziemy prawe strony równań (1) i (2), a tem samem, że za symbole tych pochodnych przyjmiemy znaki

$$\frac{\delta \varepsilon X}{dt} \text{ i } \frac{\delta \mu L}{dt}.$$

W ten sposób rozumowanie w dalszym ciągu bardzo się ułatwi, bo od tej chwili będziemy uważali nasz ośrodek jakby już nieruchomy.

§ 3.

Uważmy w płaszczyźnie prostopadłej do osi Z prąd elektryczny zamknięty, którego zatem siła elektromotoryczna wyraża się przez całkę pojedyńczą

$$\int (Y\,dy + Z\,dz),$$

wziętą po całym prądowym obwodzie. Ta całka równa się, jak wiadomo, całce podwójnej

$$\iint \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\,dz,$$

rozciągniętej na pole ograniczone powyższym obwodem.

W razie, jeżeli prąd krąży po obwodzie elementu $dy\,dz$, całka podwójna sprowadza się do jednego tylko elementu, a stąd siła elektromotoryczna prądu elementarnego równa się

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\,dz.$$

Ale na mocy faktu doświadczalnego a) i § 2, ta sama siła równa się także

$$A\,\frac{\delta \mu L}{dt}\,dy\,dz,$$

rozumiejąc przez A stałą. Stąd mamy równanie

$$A\,\frac{\delta \mu L}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \tag{3}$$

i dwa analogiczne dla osi y i z, które razem wzięte stanowią pierwszą grupę równań pola elektro-magnetycznego.

§ 4

Nazwijmy przez E i H energią elektryczną i energią magnetyczną pola elektro-magnetycznego, t. j. załóżmy

$$E = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{8\pi\varepsilon}\,\Sigma\,(\varepsilon X)^2, \quad H = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{8\pi\mu}\,\Sigma\,(\mu L)^2,$$

gdzie

$$\Sigma\,(\varepsilon X)^2 = \varepsilon^2\,(X^2 + Y^2 + Z^2), \quad \Sigma\,(\mu L)^2 = \mu^2\,(L^2 + M^2 + N^2),$$

a całkowanie rozciąga się do całej uważanej objętości pola.

Załóżmy nadto

$$J = \iiint dx\,dy\,dz\,\Sigma X u, \tag{4}$$

gdzie

$$\Sigma\,Xu = Xu + Yv + Zw,$$

a u, v, w są składowemi przewodnictwa elektrycznego. Całka J nazywa się ciepłem Joule-Peltier.

Ponieważ współczynniki ε i μ od czasu nie zależą, przeto zmiany energii E i H w czasie dt mają wyrażenia:

$$\delta\,E = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{4\pi}\,\Sigma\,X\,\delta\varepsilon H, \tag{5}$$

$$\delta\,H = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{4\pi}\,\Sigma\,L\,\delta\mu L.$$

Uwzględnijmy w δH równanie (3); otrzymamy

$$\delta\,H = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{4\pi A}\,\Sigma\,L\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dt,$$

a wykonywając całkowanie przez części, otrzymamy wreszcie

$$\delta H = -\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{4\pi A}\,\Sigma\,X\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) dt + \iint \frac{\Delta\,d\omega\,.\,dt}{4\pi A}, \tag{6}$$

gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X & Y & Z \\ L & M & N \end{vmatrix},$$

α, β, γ są dostawami kierunkowemi normalnej zewnętrznej elementu powierzchniowego $d\omega$, a całka podwójna rozciąga się do całej powierzchni pola elektromagnetycznego.

§ 5.

Z równań (4), (5) i (6) otrzymujemy:

$$J\,dt + \delta E + \delta H = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{4\pi A} \Sigma\, Xp\,dt + \iint \frac{\Delta\,d\omega\,.\,dt}{4\pi A} \tag{7}$$

gdzie

$$\Sigma\, Xp = Xp + Yq + Zr$$

zaś

$$p = A\frac{\delta\varepsilon X}{dt} - \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial N}{dy} + 4\pi u, \tag{8}$$

a q i r mają wyrażenia analogiczne.

Lewa strona równania (7) wyobraża przyrost energii pola elektromagnetycznego, a prawa pokazuje, że przyrost ten składa się z wyrazu odpowiadającego objętości pola i wyrazu odpowiadającego jego powierzchni. Ten wyraz drugi przypisać oczywiście należy wzajemnemu działaniu uważanej części pola, z jednej strony, i jej otoczenia, ze strony drugiej. Jeżeli więc ten wyraz zaniedbamy, t. j. jeżeli równanie (7) napiszemy pod postacią

$$J\,dt + \delta E + \delta H - \iint \frac{\Delta\,d\omega\,.\,dt}{4\pi A} = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{4\pi A} \Sigma\, Xp\,dt, \tag{9}$$

otrzymamy w ten sposób przyrost energii dla części odosobnionej pola elektromagnetycznego.

Ale w polu odosobnionem energia powinna już być stałą; mamy zatem równanie

$$J\,\delta t + \delta E + \delta H - \iint \frac{\Delta\,d\omega\,.\,dt}{4\pi A} = 0. \tag{10}$$

Równanie (10), w którem Δ jest rzutem wektora $YN - ZM, \ldots$ na normalną zewnętrzną elementu $d\omega$, wyraża twierdzenie Poyntinga uogólnione, a mianowicie, że i wtedy gdy się ośrodek porusza i odkształca, zmiana energii każdej części pola elektromagnetycznego równa się odpowiedniej ilości płynu energietycznego, przenikającego powierzchnię tej części.

§ 6.

Równanie (9) utrzymuje się widocznie dla jakiejbądź części pola elektromagnetycznego, którą możemy zatem zredukować do objętości $dx\,dy\,dz$; wtedy całka po prawej w (9) przywiedzie się do jednego jej elementu. Na zasadzie przeto równania (10) otrzymujemy związek

$$Xp + Yq + Zr = 0,$$

który wyraża, że przypływy energii w kierunkach osi x, y i z, do elementu pola elektromagnetycznego, znoszą się.

W ten sposób element naszego pola nie byłby jeszcze całkiem odosobniony, ale postawiony tylko w szczególnych warunkach swego otoczenia; odosobnionym zupełnie będzie on dopiero wtedy, kiedy nie będzie miał żadnego otoczenia, a zatem i żadnego przypływu energii, w żadnym z kierunków osi x, y i z.

Stąd wynikają warunki

$$p = q = r = 0, \tag{11}$$

albowiem X, Y, Z zerami wogóle być nie mogą.

Owóż, na zasadzie założenia (8), warunki (11) wymagają, równania

$$A\frac{\delta\varepsilon X}{dt} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi u \tag{12}$$

i dwóch analogicznych dla osi y i z. Jest to zatem druga grupa równań pola elektromagnetycznego; wymaga ona, gdy pierwsza (3) jest już wiadoma, uwzględnienia tego, co rozumieć należy przez istotę odosobnienia pola.

Warszawa, w listopadzie 1894.