$$\sum \frac{f'_i\, f'_k}{\xi^{\alpha_i+\alpha_k}} = a_{ik}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

lub

$$\sum f'_i\, f'_k = \xi^{\alpha_i+\alpha_k}\, a_{ik}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie wartości sprzężone ilości η. Wyznacznik n^2 elementów $\Sigma f'_i\, f'_k$ jest równy przeto $\xi^{2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}\,\Delta\left(\frac{1}{\xi}\right)$, a ponieważ musi być funkcyą całkowitą zmiennej ξ, więc

$$2\,(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) \geqq \sigma$$

gdzie σ jest stopień ilości $\Delta\,(x)$.

Jeżeli τ jest największą liczbą całkowitą zawartą w $\frac{\sigma}{2}$, to wystarczy zastosować powyższe postępowanie najwyżej $e_1+e_2+\ldots+e_n-\tau$ razy, aby dojść do układu zasadniczego normalnego.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

---

§ 1. Teorya całkowania równań różniczkowych cząstkowych, którą podałem w V-tym tomie *Prac matematycz.-fizycz.* [1]), daje dla wielu równań drogę bardzo łatwą do znalezienia całki zupełnej. Bywają jednakże i takie równania różniczkowe, w których metoda moja napotyka znaczne trudności przy rozwiązywaniu wielkiej liczby równań algebraicznych. Dogodną jest ona w następujących przypadkach:

Kształt ogólny równania danego jest

$$F\,(p_1, p_2, \ldots p_n) = X, \tag{1}$$

gdzie strona pierwsza wyobraża funkcyą wymierną, o współczynnikach stałych względem samych tylko ilości p_i,

$$p_i = \frac{\partial x}{\partial x_i},$$

---

[1]) „O całkowaniu równań różniczkowych cząstkowych ogólnych rzędu 1-go, str. 17—182.

druga zaś strona jest funkcyą wymierną zmiennych niezależnych x_i lub w szczególnym przypadku równą zeru. Dla tej klasy równań zawsze można uczynić

$$p_i = \frac{M_i}{N_i}, \tag{2}$$

gdzie M_i, N_i są funkcye całkowite ze stosownie dobranemi współczynnikami nieoznaczonemi. Podstawiając wartości (2) w równanie (1), otrzymamy wogóle

$$F\left(\frac{M_1}{N_1}, \frac{M_2}{N_2}, \ldots, \frac{M_n}{N_n}\right) = X.$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i uproszczeniu ostatniego równania możemy zawsze utworzyć tożsamość, porównywając współczynniki przy jednakowych potęgach obydwóch stron równania.

Inną klasą równań, do których sposób mój stosuje się łatwo, jest

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{3}$$

gdzie F oznacza funkcyą wymierną, jednorodną względem $p_1, p_2 \ldots p_n$. W tym przypadku przyjmujemy

$$p_i = P_i . U, \tag{4}$$

gdzie P_i są funkcye wymierne całkowite lub ułamkowe ze współczynnikami nieoznaczonemi, a U jest pewną funkcyą niewiadomą. Podstawiając (4) w równanie (3), wskutek znanej własności funkcyj jednorodnych, otrzymamy

$$U^s . F(x_1, x_2, \ldots, x_n, P_1, P_2, \ldots, P_n) = 0, \tag{5}$$

gdzie s oznacza stopień jednorodności. Przyrównywając do zera wszystkie współczynniki, przy potęgach zmiennych, zamienimy równanie (5) na tożsamość, niezależnie od wartości funkcyi U, która może być tutaj jakąkolwiek. Kształt funkcyi U oznaczymy z układu równań

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(P_k . U) = \frac{\partial}{\partial x_k}(P_i . U). \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

Układ ostatni będzie układem równań różniczkowych cząstkowych liniowych dla jednej tylko funkcyi nieznanej U. Jeżeli trudno będzie nadać zgóry kształt funkcyi U taki, ażeby wszystkie równania (6) zamieniły się na tożsamości, natenczas możemy układ tych równań całkować zwykłemi sposobami, szukając całki szczególnej. Jeżeli dane równanie różniczkowe cząstkowe nie jest jednorodnem względem ilości p_i, natenczas, jak wiemy, zawsze uczynić je można jednorodnem zapomocą wprowadzenia nowej zmiennej

$$\xi = \xi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wnioskujemy stąd, że sposób całkowania, który wyłożyłem powyżej dla równań jednorodnych względem p_i, stosuje się także wogóle i do równań niejednorodnych.

Zastosujemy tę teoryą do kilku przykładów.

1) $$yz\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} . \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Według przyjętych oznaczeń będzie

$$yz\, p_1^2 + x^2 p_2 p_3 = 0. \tag{7}$$

Kładziemy

$$p_1 = ax\, U, \quad p_2 = by\, U, \quad p_3 = cz\, U.$$

Podstawiając te wartości w równanie (7), otrzymamy dla stałych a, b, c warunek

$$a^2 + bc = 0.$$

Dla funkcyi U mamy tu dwa równania różniczkowe

$$ax \frac{\partial U}{\partial y} = by \frac{\partial U}{\partial x}, \quad ax \frac{\partial U}{\partial z} = cz \frac{\partial U}{\partial x},$$

które możemy łatwo rozwiązać, kładąc

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2\alpha y, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2\beta x, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 2\gamma z,$$

t. j.

$$U = \beta x^2 + \alpha y^2 + \gamma z^2.$$

Stałe $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$, oprócz związku (8), powinny jeszcze sprawdzać równania

$$a\alpha = b\beta, \quad a\gamma = c\beta,$$

czyli, że

$$b = -\frac{a^2}{c}, \quad \alpha = -\frac{a\beta}{c}, \quad \gamma = \frac{c\beta}{a}.$$

Mamy zatem:

$$p_1 = \frac{\beta x}{c}\,(acx^2 - a^2y^2 + c^2z^2)\,,$$

$$p_2 = -\frac{a\beta}{c^2}\,y\,(acx^2 - a^2y^2 + c^2z^2)\,,$$

$$p_3 = \frac{\beta}{a}\,z\,(acx^2 - a^2y^2 + c^2z^2).$$

Całkując równanie różniczkowe

$$du = p_1\,dx + p_2\,dy + p_3\,dz\,,$$

otrzymamy

$$u+k = a\beta\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\,y^2z^2\right) - \frac{a^2\beta}{c}\cdot\frac{x^2y^2}{2} + c\beta\frac{x^2z^2}{2} + \frac{a^3\beta}{c^2}\cdot\frac{y^4}{4} + \frac{\beta c^2}{a}\,\frac{z^4}{4}\,.$$

Jestto całka zupełna równania (7). Ilości k, a, β, c są stałemi dowolnemi.

2) $$p_1\,p_2 = (p_3 - y + x)^2 - z^2\,, \tag{9}$$

gdzie mamy

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}\,, \qquad (i, k = 1, 2, 3),\ (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z). \tag{10}$$

Połóżmy

$$p_1 = M - z\,, \quad p_2 = M + z\,, \quad p_3 = M + y - x \tag{11}$$

i niech M ma wartość

$$M = \frac{a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}}{x + y + z}\,,$$

gdzie a_i są pewne stałe.

Jeżeli w równaniach (10) zastąpimy p_i przez ich wartości (11), natenczas, przyrównywając do zera współczynniki, będziemy mieli

$$a_4 = a_5 = a_6 = 2a_1 = 2a_2 = 2a_3\,,$$
$$a_7 = a_8 = a_9\,.$$

Wskutek tego będzie

$$M = \frac{a_1\,(x+y+z)^2 + a_7\,(x+y+z) + a_{10}}{x + y + z}\,.$$

Całkę szukaną równania (9) łatwo otrzymamy z równania

$$du = p_1\,dx + p_2\,dy + p_3\,dz$$

w kształcie

$$u + c_0 = zy - zx + c_1 \lg\,(x+y+z) + c_2\,(x+y+z) + c_3\,(x+y+z)^2\,;$$

c_0, c_1, c_2, c_3 oznaczają stałe dowolne.

3) Niechaj będzie równanie różniczkowe

$$p_1 \cdot p_2 \ldots p_{n-1} = [p_n + 2x_n\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})]^{n-1}\,, \tag{12}$$

w którem

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\,, \quad \text{tudzież} \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}\,. \tag{13}$$

Załóżmy

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_{n-1} = M - x^2_n\,,$$

$$p_n = M - x^2_n - 2x_n\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})\,,$$

gdzie M oznacza funkcyą wymierną całkowitą n-go stopnia.

Podstawiając wartości powyższe w równania warunkowe (13), otrzymamy

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = \frac{\partial M}{\partial x_k}\,, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

wskutek czego:

$$M = a_0 + a_1\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + a_2\,(x_1 + y_2 + \ldots + x_{n-1})^2 + \ldots$$

Całkując równanie

$$du = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n\,,$$

otrzymamy całkę szukaną równania (12) w kształcie

$$u+c_0 = -x^2_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}) - \frac{1}{3}x^3_n + c_1(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})$$
$$+ c_2(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^2 + \ldots + c_{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{n-1}.$$

§ 2. Moja metoda całkowania równań różniczkowych cząstkowych pożyteczną także bywa przy całkowaniu równań różniczkowych zwyczajnych z dwiema zmiennemi. Niech będzie równanie:

$$M\,dx + N\,dy = 0, \tag{14}$$

gdzie M i N oznaczają pewne funkcye zmiennych x, y. Wiadomo, że czynnik całkujący μ powinien spełniać warunek

$$\mu\,.\,(M\,dx + N\,dy) = df,$$

wskutek którego mamy

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

czyli

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Stąd łatwo otrzymamy

$$-N\frac{\partial \log \mu}{\partial x} + M\frac{\partial \log \mu}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Oznaczywszy

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = p_1, \qquad \frac{\partial \log \mu}{\partial y} = p_2,$$

będziemy mieli

$$d\log \mu = p_1\,dx + p_2\,dy, \tag{16}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_2}{\partial x},$$

tudzież z równania (15)

$$-N p_1 + M p_2 + \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \tag{17}$$

czyli

$$-N\left(p_1 - \frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial y}\right) + M\left(p_2 - \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0.$$

Widzimy więc, że, jeżeli przyjąć

$$p_1 = \frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial y}, \qquad p_2 = \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}$$

i przypuścić istnienie warunku niezbędnego

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}\right), \tag{18}$$

wtedy czynnik całkujący μ znajduje się łatwo z równania (16). Drugi przypadek otrzymamy, jeżeli równaniu (17) nadamy kształt:

$$-N\left(p_1 + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial x}\right) + M\left(p_2 + \frac{1}{M}\cdot\frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0$$

i przyjmiemy

$$p_1 = -\frac{1}{N}\cdot\frac{\partial N}{\partial x}, \quad p_2 = -\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y};$$

oprócz tego niezbędny jest warunek

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{19}$$

Przy istnieniu warunków (18) lub (19) czynnik całkujący równania (14) jak widzimy, znajduje się bardzo łatwo. Wogóle zaś, gdy współczynniki równania danego (14) nie sprawdzają żadnego z warunków (18) lub (19), można zawsze założyć

$$p_1 = \frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\Phi}{N}, \qquad p_2 = \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\Phi}{M},$$

gdzie Φ jest pewna niewiadoma funkcya zmiennych.

Równanie (17) staje się tożsamością bezwzględną:

$$-N\left(\frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\Phi}{N}\right) + M\left(\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\Phi}{M}\right) + \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0;$$

mamy więc tylko jedno równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\Phi}{N}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\Phi}{M}\right). \tag{20}$$

Funkcyom p_1 i p_2 można także nadawać kształt:

$$p_1=-\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\Psi}{N},\quad p_2=-\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\Psi}{M},$$

natenczas koniecznym jest jeszcze warunek

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\Psi}{N}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\Psi}{M}\right). \tag{21}$$

Jeżeli można odnaleźć taką funkcyą Φ, ażeby warunek (20) został tożsamościowo spełniony, lub też taką funkcyą Ψ, ażeby sprawdzał się warunek (21), natenczas czynnik całkujący równania (14) będzie wiadomym. Znajomość całki zupełnej równania różniczkowego (20) lub (21) jest tu zbyteczną, gdyż tak funkcya Φ jak i Ψ powinny sprawdzać tożsamościowo jedno tylko równanie (20) lub (21), a do tego zupełnie wystarczy znajomość jakiejkolwiek całki szczególnej. Gdy M i N w równaniu danem (14) mają kształt funkcyj wymiernych, natenczas udaje się rozwiązać nasze zagadnienie, kładąc zgóry obraną postać funkcyi Φ lub Ψ i używając takich sposobów, jakie wyłożyłem w wzmiankowanej na wstępie pracy.

§ 3. Dla zakończenia rozprawki niniejszej zastosujemy metodę podobną dla znalezienia całki zupełnej równania ruchu ciepła w kierunku jednego tylko wymiaru. Równanie wspomniane ma kształt:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{a}$$

Założywszy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y_1,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=y_2,$$

można równanie to napisać tak

$$y_2=m\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial y_1}{\partial u}y_1\right). \tag{b}$$

Oprócz tego będzie

$$du=y_1\,dx+y_2\,dt, \tag{c}$$

tudzież znany warunek

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial y_1}{\partial u}y_2=\frac{\partial y_2}{\partial x}+\frac{\partial y_2}{\partial u}y_1. \tag{d}$$

Dla y_1 i y_2 możemy przyjąć następujące wartości:

$$y_1=\alpha u+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5t^2+a_6tx^2+a_7tx+a_8t+a_9,$$

$$y_2=\beta u+b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2+b_4x+b_5t^2+b_6tx^2+b_7tx+b_8t+b_9.$$

Przyjmując pod uwagę ostatnie związki, z równań (b) i (d) łatwo otrzymamy:

$$\beta=m\alpha^2,\quad b_1=m\alpha a_1,\quad b_2=4a_1m+\alpha a_2m$$
$$b_3=3a_2m+\alpha a_3m,\quad b_4=2a_3m+\alpha a_4m,$$
$$b_5=\alpha ma_5,\quad b_6=\alpha ma_6,\quad b_7=2ma_6+\alpha ma_7,$$
$$b_8=ma_7+\alpha ma_8,\quad b_9=ma_4+\alpha ma_9,$$
$$a_6=12a_1m,\quad a_7=6a_2m,\quad a_5=ma_6,\quad a_8=2a_5m.$$

Dla b_5, b_6, b_7, b_8 z równań powyższych wypływają wartości

$$b_5=\alpha m^2a_6,\quad b_6=12\alpha m^2a_1,\quad b_7=24m^2a_1+6\alpha m^2a_2,$$
$$b_8=6m^2a_2+2\alpha m^2a_3.$$

Widzimy więc, że kształt funkcyj y_1 i y_2 będzie następujący:

$$y_1=\alpha u+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+ma_6t^2+12ma_1tx^2+6ma_2tx$$
$$+2ma_3t+a_9,$$

$$y_2=m\alpha^2u+m\alpha a_1x^4+(4ma_1+\alpha ma_2)x^3+(3ma_2+m\alpha a_3)x^2$$
$$+(2ma_3+m\alpha a_4)x+m^2\alpha a_6t^2+12m^2\alpha a_1tx^2$$
$$+(24m^2a_1+6m^2\alpha a_2)tx+(6m^2a_2+2m^2\alpha a_3)t+ma_4+m\alpha a_9.$$

Mając wartości na y_1 i y_2, całkujemy równanie dokładne

$$e^{-\alpha x-\alpha^2mt}(du-y_1\,dx-y_2\,dt)=0$$

i otrzymujemy

$$u + c = \frac{a_1}{a}\left(x^4+\frac{4x^3}{a}+\frac{12x^2}{a^2}+\frac{24x}{a^3}+\frac{24}{a^4}+12m^2t^2+12mtx^2+\frac{24mtx}{a}+\frac{24mt}{a^2}\right)$$
$$+\frac{a_2}{a}\left(x^3+\frac{3x^2}{a}+\frac{6x}{a^2}+\frac{6}{a^3}+6mtx+\frac{6mt}{a}\right)+\frac{a_3}{a}\left(x^2+\frac{2x}{a}+\frac{2}{a^2}+2mt\right)$$
$$+\frac{a_4}{a}\left(x+\frac{1}{a}\right);$$

stałych dowolnych jest w całce powyższej sześć: c, a, a_1, a_2, a_3, a_4.

Prostszy będzie kształt całki zupełnej z pięcioma stałemi:

$$u = c_1\,(x^4+4x^3+12x^2+24x+12m^2t^2+12mtx^2+24mtx+24mt)$$
$$+ c^2\,(x^3+3x^2+6x+6mtx+6mt) + c_3\,(x^2+2x+2mt) + c_4\,x + c_5\,.$$

Taki sam sposób całkowania można także zastosować do równania ruruchu ciepła w kierunku trzech wymiarów.

Płock, dnia 25 listopada 1894 r.

O RÓWNANIACH POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Treścią pracy niniejszej jest sposób ustanowienia równań pola elektromagnetycznego, w przypadku ogólnym, t. j. gdy się ośrodek odkształca i porusza (zmienia). Mniemam, że sposób ten jest dość ścisły, prosty i jasny; na pomysł zaś jego wpadłem, studyując wielki traktat Maxwella o elektryczności i magnetyzmie, oraz dzieło Poincare'go p. t. „Sur les oscillations électriques".

Sposób ten polega:

a) na fakcie stwierdzonym doświadczalnie, że w ośrodku nieruchomym, siła elektromotoryczna prądu zamkniętego jest proporcyonalna do pochodnej względem czasu strumienia indukcyi magnetycznej, przenikającego pole ograniczone tym prądem;

b) na określeniu energii elektrycznej, energii magnetycznej i ciepła Joule-Peltier; oraz

c) na określeniu istoty odosobnienia pola elektromagnetycznego.

§ 1.

Będziemy oznaczali przez X, Y, Z i L, M, N składowe prostokątne siły elektrycznej i siły magnetycznej, w punkcie (x, y, z) ośrodka w chwili t, a przez ε i μ współczynniki przenikliwości elektrycznej i magnetycznej.