O OZNACZENIU UKŁADU ZASADNICZEGO DLA DANEGO OBSZARU GATUNKOWEGO FUNKCYJ ALGEBRAICZNYCH ZMIENNEJ x.

NAPISAŁ

F. MERTENS.

1.

Niechaj będzie dane równanie algebraiczne nieprzywiedlne

$$F(y) = y^n + G_1(x)\, y^{n-1} + G_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + G_n(x) = 0\,,$$

w którem współczynnik najwyższej potęgi niewiadomej równa się jedności, pozostałe zaś współczynniki są funkcyami całkowitemi zmiennej x. Każdy pierwiastek tego równania będzie funkcyą algebraiczną zmiennej x; ogół zaś wszystkich funkcyj wymiernych tej zmiennej i jednego określonego pierwiastku y nazywa się według Kroneckera obszarem gatunkowym funkcyj algebraicznych zmiennej x. Taki obszar gatunkowy oznaczać tu będziemy przez $\mathfrak{G}$.

Każda funkcya φ w obszarze $\mathfrak{G}$ daje się przedstawić w postaci:

$$\varphi = r_0 + r_1\, y + r_2\, y^2 + \ldots + r_{n-1}\, y^{n-1}\,,$$

[1]) Z „Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, II, Band, V Heft".

gdzie $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ są funkcyami wymiernemi zmiennej x, i czyni zadość równaniu algebraicznemu:

$$t^n + R_1\, t^{n-1} + R_2\, t^{n-2} + \ldots + R_n = 0\,,$$

które otrzymujemy, przyrównywając do zera rugownik funkcyj $F(y)$ i $t - \varphi$ względem y; w równaniu tem współczynniki $R_1, R_2, \ldots R_n$ są funkcyami wymiernemi zmiennej x.

Jeżeli w szczególności współczynniki te są funkcyami całkowitem zmiennej x, to φ nazywa się funkcyą algebraiczną całkowitą tej zmiennej Funkcya φ jest zawsze algebraicznie całkowitą, jeżeli współczynniki $r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$, występujące w jej przedstawieniu jako funkcya całkowita ilości y nie przekraczająca rzędu n—1-tego, są funkcyami całkowitemi zmiennej x i Lecz może ona być algebraicznie całkowitą i przy współczynnikach ułamkowych $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$. Oznaczenie wszystkich funkcyj algebraicznych całkowitych obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$ należy do najważniejszych zagadnień nauki o funkcyach tego obszaru. Kronecker [1]) rozwiązał to zagadnienie przez wskazanie tak zwanego układu zasadniczego, t. j. takiego układu n funkcyj całkowitych algebraicznych $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$, czyniących zadość warunkowi, aby wyrażenie

$$g_1\, \omega_1 + g_2\, \omega_2 + \ldots + g_n\, \omega_n$$

dało nam wszystkie możliwe funkcye algebraiczne całkowite w $\mathfrak{G}$ i tylko te funkcye, jeżeli za $g_1, g_2, \ldots g_n$ podstawiamy wszystkie możliwe funkcye całkowite zmiennej x.

Wskażemy tu postępowanie, które pozwala nam zbudować układ zasadniczy obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$ jedynie przy pomocy równań liniowo-jednorodnych.

2.

Niechaj

$$\varphi(y) = r_0 + r_1\, y + r_2\, y^2 + \ldots + r_{n-1}\, y^{n-1}$$

będzie pewną funkcyą algebraiczną całkowitą, gdzie y jest pierwiastkiem równania $F(y) = 0$; $r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$ zaś oznaczają funkcye wymierne zmiennej x.

[1]) Kronecker, Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln, Crelle's J. t. 91, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, tamże t. 92. Dedekind-Weber. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. tamże, t. 92. Hensel Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale, tamże, t. 109.

Niechaj t, z, u oznaczają zmienne, $F_1(t)$ iloraz

$$F_1(t) = \frac{F(t) - F(z)}{t - z},$$

D i D_1 — wyróżniki funkcyj $F(t)$ i $F(t_1)$, $\Theta(u)$ — rugownik funkcyj

$$F(z), \qquad F'(z) + \varphi(z) F_1(t) u,$$

$\Theta_1(u)$ zaś—rugownik funkcyj

$$F(z), \qquad 1 - D_1 \varphi^2(z) F_1^2(t) u$$

względem z. Ponieważ zakładamy, że funkcya $\varphi(y)$ jest algebraicznie całkowitą, współczynniki zaś pojedyńczych potęg zmiennej z w $F(z)$, $F_1(t)$, D_1 są funkcyami całkowitemi zmiennych x i t, przeto i współczynniki rugowników $\Theta(u)$ i $\Theta_1(u)$ są również funkcyami całkowitemi. Ponieważ nadto, według wzoru interpolacyjnego Lagrange'a współczynnik przy u w $\Theta(u)$ równa się $D\varphi(t)$, przeto $\Theta(u)$ jest postaci:

$$\Theta(u) = D + D\varphi(t)\, u + g u^2 + \ldots$$

gdzie g oznacza funkcyą całkowitą zmiennych x i t.

Iloczyn $\Theta(Du) . \Theta(-Du)$ jest rugownikiem funkcyj

$$F(z), \qquad F'(z)^2 - \varphi^2(z) F_1^2(t) D^2 u^2;$$

jeżeli zważymy, że wyróżnik D jest postaci

$$D = D_1 F'(z)^2 + H F(z)$$

gdzie H jest funkcyą całkowitą zmiennej z, że więc skutkiem tego:

$$F'(z)^2 - \varphi^2(z) F_1^2(t) D^2 u^2 = F'(z)^2 (1 - D_1 \varphi^2(z) F_1^2(t) Du^2) - H \varphi^2(z) F_1^2(t) Du^2 F(z),$$

to powyższy iloczyn może być uważany także jako rugownik funkcyj

$$F(z), \qquad F'(z)^2 (1 - D_1 \varphi^2(z) F_1^2(t) Du^2)$$

i rozpada się na rugownik D^2 funkcyj

$$F(z), \qquad F'(z)^2$$

oraz na rugownik $\Theta_1(Du^2)$ funkcyj

$$F(z), \quad 1 - D_1 \varphi^2(z) F_1^2(t) Du^2.$$

Jest więc

$$\Theta(Du) . \Theta(-Du) = D^2 \Theta_1(Du^2).$$

Porównanie współczynników przy u^2 w tej tożsamości prowadzi do związku

$$2 D^3 g - D^4 \varphi^2(t) = D^3 g_1,$$

lub

$$D \varphi^2(t) = 2g - g_1$$

gdzie przez g_1 oznaczyliśmy współczynnik przy u w $\Theta(u)$.

Wynika stąd, że $D\varphi^2(t)$ jest funkcyą całkowitą zmiennych x i t. Jeżeli więc Q^2 oznacza kwadrat stopnia najwyższego względem x, będący dzielnikiem funkcyi D, to $Q^2 \varphi^2(t)$ i $Q\varphi(t)$ muszą być funkcyami całkowitemi zmiennych x i t. Warunkiem więc koniecznym, by funkcya $\varphi(y)$ była algebraicznie całkowitą jest, aby

$$Qr_0, \; Qr_1, \ldots, Qr_{n-1}$$

były funkcyami całkowitemi zmiennej x.

Można ten warunek wyrazić inaczej. Jeżeli nazwiemy funkcyą algebraiczną całkowitą ω zmiennej x podzielną przez funkcyą M tejże zmiennej wtedy, gdy $\frac{\omega}{M}$ jest algebraiczną całkowitą, to funkcya

$$Q\varphi = h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + \ldots + h_{n-1} y^{n-1}$$

musi mieć za współczynniki $h_0, h_1 \ldots h_{n-1}$ funkcye całkowite zmiennej x i być podzielną przez Q.

Zadanie oznaczenia wszystkich funkcyj algebraicznych całkowitych obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$ sprowadza się do oznaczenia wszystkich funkcyj

$$h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + \ldots + h_{n-1} y^{n-1}$$

ze współczynnikami całkowitemi $h_0, h_1 \ldots h_{n-1}$, podzielnych przez daną funkcyą całkowitą zmiennej x.

3.

Formę liniowo-jednorodną

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$ nazywać będziemy całkowitą, gdy jej współczynniki $a_1, a_2, \ldots a_n$ są funkcyami całkowitemi zmiennej x. O takiej formie całko-

witej f mówimy, że jest przedstawialna w „sposób całkowity“ przez inne takież formy $z_1, z_2, \ldots z_m$, jeżeli

$$f = g_1 z_1 + g_2 z_2 + \ldots + g_m z_m,$$

gdzie $g_1, g_2, \ldots g_m$ są funkcyami całkowitemi zmiennej x. O układzie form całkowitych liniowo-jednorodnych zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$ mówimy, że jest przedstawialny przez drugi takiż układ, jeżeli wszystkie formy pierwszego układu dają się przedstawić w sposób całkowity przez formy drugiego. Jeżeli układ form S daje się przedstawić w sposób całkowity przez układ S', ten zaś układ w podobny sposób przedstawić się daje przez trzeci układ S'', wtedy układ S' przedstawić się daje w sposób całkowity przez S''.

Jeżeli w układzie $f_1, f_2 \ldots f_m$ m funkcyj całkowitych liniowo-jednorodnych zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$ znajduje się n form liniowo-niezależnych t. j. form o nieznikającym tożsamościowo wyznaczniku, to można zbudować układ n form całkowitych liniowo-jednorodnych $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ tychże samych zmiennych, mający następujące własności:

1. Każdy z obu układów daje się przedstawić przez drugi w sposób całkowity.
2. ψ_k zawiera tylko zmienne $x_1, x_2, \ldots x_k$ i jest postaci:

$$\psi_k = c_{k1} x_1 + c_{k2} x_2 + \ldots + c_{kk} x_k$$

Jeżeli taki układ istnieje, to mamy tożsamości postaci

$$\begin{aligned}
\psi_n &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_m f_m, \\
f_1 &= A_1 \psi_1 + B_1 \psi_2 + \ldots + L_1 \psi_n, \\
f_2 &= A_2 \psi_1 + B_2 \psi_2 + \ldots + L_2 \psi_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_m &= A_m \psi_1 + B_m \psi_2 + \ldots + L_m \psi_n,
\end{aligned}$$

w których $a_1, a_2, \ldots A_1, \ldots L_m$ oznaczają funkcye całkowite zmiennej x. Jeżeli wybierzemy w tych tożsamościach wyrazy mające za czynnik x_n i oznaczymy współczynniki przy x_n w funkcyach $f_1, f_2 \ldots f_m, \psi$, przez $l_1, l_2, \ldots l_m, c_{nn}$, to będzie:

$$\begin{aligned}
c_{nn} &= l_1 a_1 + l_2 a_2 + \ldots + l_m a_m \\
l_1 &= L_1 c_{nn}, \; l_2 = L_2 c_{nn} \ldots \; l_m = L_m c_{nn}
\end{aligned}$$

Z tych równań wynika, że c_{nn} musi być największym wspólnym dzielnikiem funkcyj $l_1, l_2 \ldots l_m$, które nie mogą wszystkie znikać tożsamościowo; funkcye zaś $a_1, a_2 \ldots a_m$ stanowią rozwiązanie równania

$$l_1 z_1 + l_2 z_2 + \ldots + l_m z_m = c_{nn}, \qquad (1)$$

składające się z funkcyj całkowitychzmiennej x.

Odwrotnie, jeżeli c_{nn} jest największym wspólnym dzielnikiem funkcyj $l_1, l_2 \ldots l_m$, zaś $a_1, a_2 \ldots a_m$ jednem z rozwiązań w funkcyach całkowitych równania (1), wtedy układ form $\psi_n, f_1', f_2' \ldots f_m'$, określonych przez równania

$$\begin{aligned}
\psi_n &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_m f_m, \\
f_1' &= f_1 - \frac{l_1}{c_{nn}} \psi_n, \\
f_2' &= f_2 - \frac{l_2}{c_{nn}} \psi_n, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
f_m' &= f_m - \frac{l_m}{c_{nn}} \psi_n
\end{aligned}$$

ma za współczynniki funkcye całkowite zmiennej x, i daje się przedstawić w sposób całkowity przez układ pierwotny $f_1, f_2 \ldots f_m$, który odwrotnie jest przedstawialny w tenże sposób przez układ $\psi_n, f_1', f_2', \ldots, f_m'$.

Gdy $n=1$, wtedy $f_1', f_2' \ldots f_m'$ znikają tożsamościowo i mamy układ żądany $\psi_1 = c_{11} x_1$.

Gdy przeciwnie $n > 1$, to pomiędzy formami $f_1', f_2' \ldots f_m'$, zawierającemi tylko zmienne $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, musi znajdować się $n-1$ form liniowo-niezależnych, gdyż w przeciwnym razie układ $f_1' f_2' \ldots f_m'$ dałby się wyrazić przez mniej niż $n-1$ form, układ zaś $f_1, f_2 \ldots f_m$ byłby, wbrew założeniu, przedstawialny przez mniej niż n form. Oznaczmy współczynniki przy x_{n-1} w formach $f_1', f_2' \ldots f_n'$ przez $k_1, k_2 \ldots k_m$, ich największy wspólny dzielnik przez $c_{n-1\,n-1}$, jedno zaś z rozwiązań równania

$$k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots + k_m z_m = c_{n-1\,n-1}$$

w funkcyach całkowitych zmiennej x przez $b_1, b_2 \ldots b_m$ i połóżmy

$$\psi_{n-1} = b_1 f_1' + b_2 f_2' + \ldots + b_m f_m',$$

$$f_1'' = f_1' - \frac{k_1}{c_{n-1\,n-1}}\,\psi_{n-1},$$

$$f_2'' = f_2' - \frac{k_2}{c_{n-1\,n-1}}\,\psi_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_m'' = f_m' - \frac{k_m}{c_{n-1\,n-1}}\,\psi_{n-1},$$

to otrzymamy układ form całkowitych $\psi_{n-1}, f_1'', f_2'' \ldots f_m''$, który daje się przedstawić w sposób całkowity przez formy $f_1', f_2' \ldots f_m'$, i odwrotnie ten ostatni układ daje się przedstawić podobnież przez pierwszy. Wtedy i układy form

$$\psi_n,\ f_1',\ f_2' \ldots f_m',$$

$$\psi_n,\ \psi_{n-1}\ f_1'',\ f_2'' \ldots f_m''$$

są przedstawialne jeden przez drugi w sposób całkowity. Jeżeli zastosujemy to samo postępowanie do form $f_1'', f_2'' \ldots f_m''$, o ile $n > 2$, i będziemy je stosowali tak długo, dopóki nie dojdziemy do form tożsamościowo znikających: $f_1^{(n)}, f_2^{(n)} \ldots f_m^{(n)}$, to otrzymamy układ form całkowitych $\psi_n, \psi_{n-1} \ldots \psi_1$, posiadający żądane własności 1. i 2

Można także sprawić, aby współczynniki zmiennej x_k w funkcyach $\psi_{k+1}, \psi_{k+2}, \ldots \psi_n$ nie dosięgały stopnia funkcyi c_{kk}. Jeżeli bowiem formy $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ nie spełniają jeszcze tego warunku, to niechaj pierwsza z nich, której współczynniki stanowią wyjątek od tego warunku, będzie formą ψ_μ i niechaj $c_{\mu k}$ będzie pierwszy pomiędzy współczynnikami zmiennych $x_{\mu-1}, x_{\mu-2} \ldots x_1$ w tej formie ψ_μ, którego stopień dosięga stopnia funkcyi c_{kk} lub jest od niego wyższy. Niechaj $c'_{\mu k}$ będzie resztą pozostającą po podzieleniu $c_{\mu k}$ przez c_{kk} i niedosięgającą stopnia współczynnika c_{kk}; połóżmy $c_{\mu k} = g c_{kk} + c'_{\mu k}$. Jeżeli formę ψ_μ zastąpimy przez $\psi_\mu - g\psi_k$, to nowy układ i pierwotny będą wzajemnie przedstawialnemi jeden przez drugi w sposób całkowity. Lecz nowy układ ma nadto własność 2. i spełnia o jeden więcej warunek niż układ $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ z pomiędzy $n\frac{(n-1)}{2}$ warunków, aby współczynnik zmiennej x_k w ψ_i nie dosięgał stopnia współczynnika c_{kk}, gdy $i > k$. Stosując to postępowanie, o ile będzie potrzeba, do otrzymanego układu i powtarzając je w miarę potrzeby dalej, dojdziemy najwyżej po $n\frac{(n-1)}{2}$ krokach do układu form z żądanemi własnościami.

4.

Zadanie. Niechaj

$$f_1 = r_{11} + r_{12}\,y + r_{13}\,y^2 + \ldots + r_{1n}\,y^{n-1},$$

$$f_2 = r_{21} + r_{22}\,y + r_{23}\,y^2 + \ldots + r_{2n}\,y^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n = r_{n1} + r_{n2}\,y + r_{n3}\,y^2 + \ldots + r_{nn}\,y^{n-1},$$

będą danemi funkcyami algebraicznemi całkowitemi obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$, liniowo niezależnemi to jest spełniającemi warunek; że wyznacznik utworzony z ich współczynników,

$$\Sigma \pm r_{11}\, r_{22} \ldots r_{nn},$$

nie znika tożsamościowo; niechaj M będzie dana funkcya całkowita zmiennej x, nie mająca wspólnego dzielnika ze swą pochodną M'; niechaj dalej P_s oznacza ogólnie iloczyn s funkcyj szeregu $f_1, f_2 \ldots f_n$, albo jednę z tych funkcyj lub wreszcie jedność, stosownie do tego, czy $s > 1$, $s = 1$ lub $s = 0$. Przyjmijmy, że suma ΣP_s wartości sprzężonych P_s, odpowiadających n pierwiastkom równania $F(y) = 0$, dla wszystkich możliwych iloczynów P_s od $s = 1$ do $s = n$ jest podzielną przez M^{μ_1}, gdzie wykładniki $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ są liczbami całkowitemi, nieujemnemi, spełniającemi dla wszystkich wyżej podanych wartości s warunek:

$$\frac{\mu_s}{s} \leqq \frac{\mu}{1} \leqq 1.$$

Oznaczmy wszystkie funkcye całkowite $u_1, u_2, \ldots u_n$ zmiennej x, dla których funkcya algebraiczna całkowita

$$f = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$$

jest podzielna przez M.

Jeżeli ułamki

$$\frac{\mu_1}{1},\ \frac{\mu_2}{2},\ \ldots,\ \frac{\mu_n}{n}$$

są wszystkie równe jedności, to wyrażenie

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$$

dla każdego dowolnego układu funkcyj całkowitych $u_1, u_2 \ldots u_n$ zmiennej x jest przez M podzielne i funkcye $u_1, u_2 \ldots u_n$ pozostają nieoznaczone.

Jeżeli bowiem

$$C_1,\ C_2\ \ldots\ C_n$$

oznaczają funkcye symetryczne elementarne, zaś

$$S_1,\ S_2\ \ldots\ S_n$$

są n pierwszemi sumami potęgowemi n wartości sprzężonych jednej którejkolwiek z funkcyj $f_1, f_2 \ldots f_n$ np. funkcyi f_i, to C_r daje się przedstawić przez funkcye $S_1, S_2 \ldots S_n$, jako suma wyrazów postaci

$$c\ {S_1}^{a_1}\ {S_2}^{a_2}\ \ldots\ {S_n}^{a_n},$$

gdzie $a_1, a_2 \ldots a_n$ są liczby całkowite nieujemne, czyniące zadość równaniu

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = r.$$

Wyraz taki jest podzielny przez M w potędze

$$a_1\,\mu_1 + a_2\,\mu_2 + \ldots + a_n\,\mu_n = a_1 + 2\,a_2 + \ldots + n\,a_n = r,$$

gdyż S_k, jako suma $\Sigma\, P_k$, według założenia, jest podzielna przez $M^{\mu_k} = M^k$. Ponieważ tedy M^r dzieli każdy z wyrazów zachodzących w C_r a więc i samo C_r, jest więc $\frac{f_i}{M}$ dla każdego i, a stąd i funkcya

$$\frac{f}{M} = u_1\,\frac{f_1}{M} + u_2\,\frac{f_2}{M} + \ldots + h_n\,\frac{f_n}{M}$$

jest algebraiczną całkowitą dla każdego układu funkcyj całkowitych $u_1, u_2 \ldots u_n$ zmiennej x.

Jeżeli zaś przynajmniej jeden z ułamków

$$\frac{\mu_1}{1},\ \frac{\mu_2}{2},\ \ldots,\ \frac{\mu_n}{n}$$

jest od jedności mniejszy, to niechaj $\frac{\mu_m}{m}$, przy możliwie największem m, będzie z tych ułamków najmniejszym. Jest wtedy $\frac{\mu_m}{m} < 1$, $m > 1$, a według założenia

$$\frac{\mu_2}{2} \leqq \frac{\mu_1}{1},\ \frac{\mu_3}{3} \leqq \frac{\mu_1}{1},\ \ldots,\ \frac{\mu_n}{n} \leqq \frac{\mu_1}{1}.$$

Jeżeli

$$C_1',\ C_2'\ \ldots\ C_n'$$

oznaczają funkcye symetryczne elementarne n wartości sprzężonych funkcyi f_i^m, to przedstawiając je za pomocą funkcyj $S_1, S_2 \ldots S_n$, otrzymamy C_r' jako sumę wyrazów postaci

$$c\ {S_1}^{a_1}\ {S_2}^{a_2}\ \ldots\ {S_n}^{a_n},$$

gdzie $a_1, a_2 \ldots a_n$ są liczby całkowite nieujemne, czyniące zadość równaniu

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + n\,a_n = mr.$$

Taki wyraz jest podzielny przez M w potędze

$$a_1\,\mu_1 + a_2\,\mu_2 + \ldots + a_n\,\mu_n.$$

Ponieważ zaś

$$a_1\,\mu_1 + a_2\,\mu_2 + \ldots + a_n\,\mu_n = \frac{\mu_1}{1}\,a_1 + \frac{\mu_2}{2}\,.\,2\,a_2 + \ldots + \frac{\mu_n}{n}\,.\,na_n$$

$$\geqq \frac{\mu_m}{m}\,(a_1 + 2\,a_2 + \ldots + n\,a_n)$$

$$\geqq r\,\mu_m,$$

to $M^{r\mu_m}$ jest dzielnikiem każdego z wyrazów zachodzących w C_r', a więc i samego C_r'. Funkcya f_i^m jest więc dla każdego i podzielna przez M^{μ_m}, a stąd iloczyn P_s^m podzielny przez $M^{s\mu_m}$.

Jeżeli f jest jedną z funkcyj szukanych, to M^m jest dzielnikiem funkcyi f^m, $M^{\mu+s\mu_m}$ dzielnikiem iloczynu $f^m\,P_s^m$. Wtedy zaś suma S wartości sprzężonych funkcyi $f\,P_s$ musi być podzielna przez M^{q_s}, gdzie q_s jest największą liczbą całkowitą zawartą w $\frac{m + s\mu_m + m - 1}{m}$.

Aby tego dowieść, przyjmijmy, że

$$x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n,\ x_{n+1}\ \ldots\ x_{mn}$$

są ilości nieoznaczone w liczbie mn, zaś

$$\chi_1,\ \chi_2\ \ldots\ldots\ldots\ \chi_{mn}$$

ich funkcye symetryczne elementarne;

$$\sigma_1,\ \sigma_2\ \ldots\ \sigma_n$$

funkcye symetryczne elementarne n nieoznaczonych

$$x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n;$$

dalej

$$\sigma_1'\ \sigma_2'\ \ldots\ \sigma_{mn-n}$$

takież funkcye pozostałych nieoznaczonych

$$x_{n+1},\ x_{n+2}\ \ldots\ x_{mn};$$

wreszcie

$$\tau_1,\ \tau_2\ \ldots\ \tau_n$$

takież funkcye ilości

$$x_1^{m_1},\ x_2^{m_2}\ \ldots\ x_n^{m_n}.$$

Funkcya

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

czyni zadość równaniu algebraicznemu

$$\sigma_1^N - \Gamma_1\ \sigma_1^{N-1} + \Gamma_2\ \sigma^{N+2} - \ldots \pm \Gamma_N = 0$$

stopnia

$$N = \frac{mn\ (mn-1)\ (mn-2)\ \ldots\ (mn-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ n},$$

w którem współczynniki Γ_1, Γ_2 ... są funkcyami całkowitemi ilości $\chi_1, \chi_2 \ldots$; Γ_r jest funkcyą jednorodną względem $x_1, x_2 \ldots$ stopnia r. Jeżeli pomyślimy, że w równaniu tem wyrażono ilości $\chi_1, \chi_2 \ldots$ przez $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ i $\sigma_1', \sigma_2', \ldots$, to równanie stanie się tożsamościowem względem $\sigma_1'\ \sigma_2'\ \ldots\ \sigma'_{mn-n}$ i można te ostatnie ilości zastąpić przez współczynniki iloczynu

$$(z^{m-1}+x_1 z^{m-2}+x_1^2 z^{m-3}+\ldots+x_1^{m-1})\ (z^{m-1}+x_2 z^{m-2}+x_2^2\ z^{m-3}+\ldots+x_2^{m-1})\ \ldots$$
$$\ldots\ (z^{m-1}+x_n z^{m+2}+x_n^2 z^{m-3}+\ldots+x_n^{m-1}).$$

Wychodzi to na to samo, jak gdybyśmy funkcye $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_{mn}$ zastąpili przez współczynniki iloczynu

$$(z^m-x_1^m)\,(z^m-x_2^m)\ldots(z^m-x_n^m) = z^{mn}-\tau_1\ z^{mn-1} + \tau_2\ z^{mn-2} - \ldots \pm \tau_n .$$

Wtedy funkcye Γ_1, Γ_2 ... przechodzą na funkcye całkowite ilości $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ lub na zero, stosownie do tego czy ich skaźniki są podzielne lub niepodzielne przez m; mamy więc tożsamościowo:

$$\sigma_1^N + H_m\ \sigma_1^{N-m} + H_{2m}\ \sigma_1^{N-2m} + \ldots + H_N = 0,$$

gdzie H_{mr} oznacza funkcyą całkowitą ilości $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ i składa się z wyrazów postaci:

$$c\ \tau_1^{a_1}\ \tau_2^{a_2}\ \ldots\ \tau_n^{a_n},$$

przy warunku

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = r.$$

Jeżeli w miejsce $x_1, x_2 \ldots x_n$ podstawimy n wartości sprzężonych $f\ P_s$ i położymy dla skrócenia $m+s\mu_m = \lambda$, to $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ staną się funkcyami całkowitemi zmiennej x, podzielnemi odpowiednio przez M^λ, $M^{2\lambda} \ldots M^{n\lambda}$; a stąd H_{mr} jest funkcyą całkowitą podzielną przez $M^{r\lambda}$, której można dać postać $B_r\ M^{r\lambda}$; będzie tedy

$$S^N + B_1\ M^\lambda\ S^{N-m} + B_2\ M^{2\lambda}\ S^{N-2m} + \ldots = 0.$$

Jeżeli przez p oznaczymy największą liczbę całkowitą zawartą w $\frac{\lambda}{m}$, przez T największy wspólny dzielnik funkcyj S i M^p i położymy

$$S = T\ S_0, \quad M^p = T\ L,$$

to będzie:

$$S_0^N + B_1\ M^{\lambda-mp}\ L^m\ S_0^{N-m} + B_2\ M^{\lambda-2mp}\ L^{2m}\ S_0^{N-2m} + \ldots = 0$$

Funkcya L musi być stopnia zero, gdyż inaczej miałaby z funkcyą S_0 dzielnik wspólny; S jest więc podzielne przez M^p. Ponieważ dalej M jest dzielnikiem funkcyi S_0^N, gdy $\lambda > mp$, wyróżnik zaś funkcyi M nie jest zerem, więc M jest dzielnikiem funkcyi S_0, M^{p+1} dzielnikiem funkcyi S.

Niechaj ν oznacza każdą liczbę szeregu $0,1,2 \ldots n-1$, która czyni zadość warunkowi

$$\frac{m-1}{m} + \nu\ \frac{\mu_m}{m} - \mu_{\nu+1} \geq 0.$$

Między temi liczbami musi się znajdować liczba $m-1$, gdyż

$$\frac{m-1}{m} + (m-1)\ \frac{m_\mu}{m} - \mu_m = \frac{m-1-\mu_m}{m} \geq 0.$$

Jest tedy:

$$q_\nu - \mu_{\nu+1} \leqq \frac{m+\nu\mu_m+m-1}{m} - \mu_{\nu+1} \leqq \frac{2\,m-1}{m} + \nu\ \frac{\mu_{\nu+1}}{\nu+1} - \mu_{\nu+1} < 2$$

$$q_\nu - \mu_{\nu+1} > \frac{m-1+\nu\mu_m}{m} - \mu_{\nu+1} > 0$$

stąd wynika:

$$q_\nu = 1 + \mu_{\nu+1}.$$

Suma $\Sigma f P_\nu$ dla każdej z szukanych funkcyj f i dla wszystkich możliwych iloczynów P_ν, odpowiadających pojedyńczym liczbom ν, musi być podzielna przez $M^{1+\mu_{\nu+1}}$. Ponieważ f jest postaci:

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n,$$

to współczynniki funkcyj $u_1, u_2 \ldots u_n$ w $\Sigma f P_\nu$ są sumami $\Sigma P_{\nu+1}$, a więc według założenia przez $M^{\mu_{\nu+1}}$ podzielnemi. Można przeto napisać:

$$\frac{1}{M^{\mu_{\nu+1}}} \Sigma f P_\nu = L_1 u_1 + L_2 u_2 + \ldots + L_n u_n$$

gdzie $L_1, L_2 \ldots L_n$ oznaczają znane funkcye całkowite zmiennej x; wszystkie zaś wyrażenia

$$L_1 u_1 + L_2 u_2 + \ldots + L_n u_n,$$

odpowiadające wszystkim możliwym iloczynom P_ν, muszą być przez M podzielne. Jeżeli znajdziemy wszystkie funkcye całkowite zmiennej x, które to sprawiają i oznaczymy odpowiadające im wyrażenia $u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$ przez $\overline{f}$, to szukane funkcye f znajdują się w każdym razie pomiędzy funkcyami $\overline{f}$.

Niechaj $u_1, u_2 \ldots u_n$ będzie jeden z układów funkcyj, dla którego wszystkie wyrażenia $L_1 u_1 + L_2 u_2 + \ldots + L_n u_n$ są podzielne przez M i niechaj

$$\begin{aligned} u_1 &= s_1 + Q_1 M \\ u_2 &= s_2 + Q_2 M \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= s_n + Q_n M \end{aligned}$$

gdzie $s_1, s_2 \ldots s_n$ są resztami funkcyi $u_1, u_2 \ldots u_n$ względem dzielnika M stopnia niższego niżeli stopień dzielnika.

Będzie tedy

$$L_1 u_1 + L_1 u_2 + \ldots + L_n u_n = L_1 s_1 + L_2 s_2 + \ldots + L_n s_n + M(L_1 Q_1 + L_2 Q_2 + \ldots + L_n Q_n),$$

wszystkie zatem wyrażenia $L_1 s_1 + L_2 s_2 + \ldots + L_n s_n$ muszą być przez M podzielne. Aby więc otrzymać wszystkie funkcye $u_1, u_2 \ldots u_n$, trzeba

tylko znaleść wszystkie funkcye całkowite $s_n, s_2 \ldots s_n$ stopnia niższego niż funkcya M, i dodać do nich dowolne funkcye całkowite zmiennej x, podzielne przez M.

Warunki konieczne i dostateczne podzielności wyrażeń $L_1 s_1 + L_2 s_2 + \ldots + L_n s_n$ przez M daje znany układ równań liniowych jednorodnych na nieznane współczynniki funkcyj $s_1, s_2 \ldots s_n$. Równania te posiadają albo jedno rozwiązanie

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0 \ldots s_n = 0$$

albo jedno lub więcej rozwiązań liniowo-niezależnych

$$\begin{aligned} &s_1' \; s_2' \ldots s_n, \\ &s_1'' \; s_2'' \ldots s_n'', \\ &\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

rozwiązanie ogólne daje się przedstawić przez nie w postaci

$$\begin{aligned} s_1 &= p' s_1' + p'' s'' + \ldots \\ s_2 &= p' s_2' + p'' s_2'' + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= p' s_n' + p'' s_n'' + \ldots \end{aligned}$$

gdzie $p', p'' \ldots$ oznaczają stałe.

Wszystkie przeto funkcye $u_1, u_2 \ldots u_n$, dostarczające szukanych funkcyj f, są zawarte we wzorach

$$u_i = Q_i M; \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

lub ewentualnie we wzorach

$$u_i = Q_i M + p' s_i' + p'' s_i'' + \ldots \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

gdzie $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ oznaczają funkcye całkowite dowolne zmiennej x. Kładąc więc:

$$M f_1 = \Phi_1, \quad M f_2 = \Phi_2 \ldots M f_n = \Phi_n,$$

i w razie potrzeby

$$\begin{aligned} s_1 f_1 + s_2' f_2 + \ldots + s_n' f_n &= \Phi_{n+1} \\ s_1'' f_1 + s_2'' f_2 + \ldots + s_n'' f_n &= \Phi_{n+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

mamy we wszystkich przypadkach szereg funkcyj

$$\Phi_1,\ \Phi_2\ \ldots\ \Phi_\mu$$

przez które wszystkie funkcye $\overline{f}$ wyrażają się w postaci:

$$\overline{f} = g_1\,\Phi_1 + g_2\,\Phi_2 + \ldots + g_\mu\,\Phi_\mu$$

w ten sposób, że $g_1, g_2 \ldots g_\mu$ są funkcyami całkowitemi zmiennej x. Ponieważ funkcye Φ można uważać za formy liniowo-jednorodne funkcyj $f_1, f_2 \ldots f_n$ funkcye $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_\mu$ są liniowo-niezależnemi, można zatem według 3. oznaczyć n funkcyj liniowo-niezależnych $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$, które są formami liniowo-jednorodnemi funkcyj Φ, a więc i funkcyj $f_1, f_2 \ldots f_n$, przez te zaś funkcye φ dają się wszystkie funkcye $\overline{f}$ przedstawić w postaci:

$$\overline{f} = v_1\,\varphi_1 + v_2\,\varphi_2 + \ldots + v_n\,\varphi_n$$

w ten sposób, że $v_1, v_2 \ldots v_n$ są funkcyami całkowitemi zmiennej x.

Jeżeli określimy liczby

$$\mu_1'\ \mu_2'\ \ldots\ \mu_n'$$

tak, by $\mu_s = 1 + \mu_s$ lub $= \mu_s$ stosownie do tego, czy $s-1$ należy lub nie do liczb ν; jeżeli P_s' oznacza którykolwiek z iloczynów złożonych z s różnych lub różnych funkcyj szeregu $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ albo też jednę taką funkcyą lub wreszcie jedność, stosownie do tego, czy $s > 1$, $s = 1$, lub $s = 0$, to suma $\Sigma\, P_s'$ wartości sprzężonych od $s = 1$ do $s = n$ jest podzielną przez M w potędze μ_s'. Albowiem $\Sigma\, P_s'$ rozpada się na wyrazy postaci $g\,\Sigma\, P_s$, gdzie g jest funkcyą całkowitą zmiennej x i jest podzielną przez $M^{\mu_s'} = M^{\mu_s}$, jeżeli $s-1$ nie należy do liczb ν. Przeciwnie zaś, gdy $s-1$ do tych liczb należy, wtedy

$$P'_{\nu+1} = \varphi_i\,P'_\nu$$

i $\Sigma\, P'_{\nu+1}$ rozpada się na wyrazy postaci $g\,\Sigma\,\varphi_i\,P_\nu$, gdzie g jest funkcyą całkowitą zmiennej x, i zaś oznacza jednę z liczb $1, 2 \ldots n$. Wszystkie te wyrazy są podzielne przez M w potędze $1+\mu_{\nu+1} = \mu'_{\nu+1}$, ponieważ według powyższego $\Sigma\,\varphi_i\,P_\nu$ ma tę własność. Prócz tego, dla wszystkich skaźników s od 1 do n jest

$$\frac{\mu'_s}{s} \leqq \frac{\mu'_1}{1} \leqq 1\,.$$

Jeżeli mianowicie $\mu_1 = 0$, a więc także $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n = 0$, wtedy $m=n$, wszystkie liczby $0, 1, 2 \ldots n-1$ należą do liczb ν, skąd wynika $\mu'_1=1$; lecz jeżeli $\mu_1=1$, to 0 nie należy do liczb ν, i wtedy μ'_1 również $= 1$. Należy więc okazać tylko, że $\frac{\mu'_s}{s} \leqq 1$, co wymaga dowodzenia tylko w tym przypadku, gdy $s-1$ należy do liczb ν. Z określenia liczb wynika wszakże

$$\mu_{\nu+1} \leqq \frac{m-1}{m} + \frac{\nu\,\mu_m}{m} < 1 + \nu\,,$$

a więc

$$\mu'_{\nu+1} = 1 + \mu_{\nu+1} \leqq 1 + \nu\,.$$

Znaleźliśmy przeto układ funkcyj

$$\varphi_1,\ \varphi_2\ \ldots\ \varphi_n\,,$$

mających podobne własności, jak układ $f_1, f_2 \ldots f_n$ lecz posiadający zarazem tę wyższość, że przynajmniej jeden z ułamków

$$\frac{\mu'_1}{1},\ \frac{\mu'_2}{2}\ \ldots\ \frac{\mu'_n}{n}$$

jest większy, żaden zaś nie jest mniejszy od ułamka zajmującego odpowiednie miejsce w szeregu

$$\frac{\mu_1}{1},\ \frac{\mu_2}{2},\ \ldots\ \frac{\mu_n}{n}\,.$$

Jeżeli każdy z ułamków

$$\frac{\mu'_1}{1},\ \frac{\mu'_2}{2}\ \ldots\ \frac{\mu'_n}{n}$$

jest już równy 1, to funkcye $v_1, v_2 \ldots v_n$ pozostają nieoznaczonemi, i wzór

$$f = v_1\,\varphi_1 + v_2\,\varphi_2 + \ldots + v_n\,\varphi_n$$

daje zupełne rozwiązanie zagadnienia. Jeżeli zaś nie wszystkie z tych ułamków są równemi 1, wtedy funkcyj f szukać należy pomiędzy funkcyami

$$\overline{f} = v_1\,\varphi_1 + v_2\,\varphi_2 + \ldots + v_n\,\varphi_n\,;$$

wtedy wskazane postępowanie można stosować do oznaczenia funkcyj całkowitych $v_1, v_2 \ldots v_n$ i powtarzać je tyle razy, póki nie dojdziemy do układu funkcyj $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$, dla którego $\Sigma\, P_s$, jeżeli P_s jest iloczynem s funkcyj tego układu, jest przez M^s podzielne. Wzór

$$f = t_1\,\omega_1 + t_2\,\omega_2 + \ldots + t_n\,\omega_n$$

zawiera wszystkie funkcye szukane i tylko te funkcye, jeżeli za $t_1, t_2 \ldots t_n$ podstawimy wszystkie możliwe funkcye całkowite zmiennej x. Funkcye $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ są funkcyami liniowo-jednorodnemi form $f_1, f_2 \ldots f_n$.

5.

Zagadnienie rozwiązane w N-rze poprzedzającym daje nam możność oznaczenia wszystkich funkcyj

$$f = h_0 + h_1\,y + h_2\,y^2 + \ldots + h_{n-1}\,y^{n-1},$$

których współczynniki $h_0, h_1 \ldots h_{n-1}$ są funkcyami całkowitemi zmiennej x i które są podzielne przez dowolnie daną funkcyą całkowitą zmiennej x.

Niechaj M_1 będzie czynnikiem funkcyi N o wyróżniku nierównym zeru; połóżmy w zagadnieniu rozdziału poprzedzającego:

$$f_1=1,\ f_2=y,\ f_3=y^2 \ldots f_n=y^{n-1}$$
$$M = M_1;$$

otrzymamy wtedy na wszystkie funkcye f podzielne przez M_1 wyrażenie:

$$t_1\,\varphi_1 + t_2\,\varphi_2 + \ldots + t_n\,\varphi_n,$$

gdzie $t_1, t_2 \ldots t_n$ są funkcyami nieoznaczonemi zmiennej x; $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ — znanemi funkcyami liniowo-jednorodnemi form $1, y, y^2 \ldots y^{n-1}$.

Jeżeli M_1 jest równe N, wtedy mamy rozwiązanie ogólne

$$f = t_1\,\varphi_1 + t_2\,\varphi_2 + \ldots + t_n\,\varphi_n.$$

Jeżeli zaś przeciwnie $G = M_1\,G_1$, G_1 zaś stopnia wyższego od zera, to niechaj M_2 będzie czynnikiem funkcyi G_1 o wyróżniku nierównym zeru; szukajmy wszystkich funkcyj f podzielnych przez $M_1\,M_2$. Funkcye te zlewają się z funkcyami podzielnemi przez M_2, zawartemi w wyrażeniu

$$t_1\,\frac{\varphi_1}{M_1} + t_2\,\frac{\varphi_2}{M_1} + \ldots + t_n\,\frac{\varphi_n}{M_1}.$$

Wtedy należy położyć w zagadnieniu rozdziału poprzedzającego

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{M_1},\ f_2 = \frac{\varphi_2}{M_1} \ldots f_n = \frac{\varphi_n}{M_1}.$$
$$M = M_2$$

Otrzymamy tedy wyrażenie wyczerpujące

$$t_1\,\psi_1 + t_2\,\psi_2 + \ldots + t_n\,\psi_n$$

dla wszystkich funkcyj podzielnych przez M_2 powyższej postaci; tu $t_1, t_2 \ldots t_n$ są funkcyami całkowitemi nieoznaczonemi zmiennej x; $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ — formami liniowo-jednorodnemi funkcyj $\frac{\varphi_1}{M_1}, \frac{\varphi_2}{M_1} \ldots \frac{\varphi_n}{M_1}$. Jeżeli więc położymy

$$M_1\,\psi_1 = \chi_1,\ M_1\,\psi_2 = \chi_2 \ldots M_1\,\psi_n = \chi_n,$$

to wyrażenie

$$t_1\,\chi_1 + t_2\,\chi_2 + \ldots + t_n\,\chi_n$$

zawierać będzie wszystkie funkcye f podzielne przez $M_1\,M_2$.

Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy do wszystkich funkcyj f podzielnych przez N i mających postać

$$f = t_1\,\vartheta_1 + t_2\,\vartheta_2 + \ldots + t_n\,\vartheta_n,$$

gdzie $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_n$ są znanemi formami liniowo-jednorodnemi funkcyj $1, y, y^2 \ldots y^{n-1}$; zaś $t_1, t_2 \ldots t_n$ są funkcyami całkowitemi nieoznaczonemi zmiennej x.

Kładąc $N=Q$, gdzie Q^2 oznacza kwadrat stopnia najwyższego, względem x, zawarty w wyróżniku D, znajdziemy we wzorze

$$f = t_1\,\vartheta_1 + t_2\,\vartheta_2 + \ldots + t_n\,\vartheta_n$$

wszystkie funkcye f podzielne przez Q, funkcye zaś

$$\omega_1 = \frac{\vartheta_1}{Q},\quad \omega_2 = \frac{\vartheta_2}{Q} \ldots \omega_n = \frac{\vartheta_n}{Q}$$

tworzą układ zasadniczy obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$, odpowiadającego równaniu $F(y) = 0$.

6.

Jeżeli w równaniu

$$F(y) = y^n + G_1(x)\, y^{n-1} + G_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + G_n(x) = 0$$

określającem funkcyą algebraiczną y, położymy $x = \frac{1}{\xi}$, i najniższą potęgą zmiennej ξ, przez którą należy pomnożyć $G_k\left(\frac{1}{\xi}\right)$, aby otrzymać funkcyą całkowitą H_k zmiennej ξ, oznaczymy przez ξ^{m_k}, największą zaś z liczb całkowitych, zawartych w ułamkach

$$\frac{m_1}{1},\ \frac{m_2+1}{2},\ \frac{m_3+2}{3}\ \ldots\ \frac{m_n+n-1}{n},$$

przez m, wtedy funkcya $\eta=\xi^m y$ czyni zadość równaniu nieprzywiedlnemu

$$G(\eta) = \eta^n + \xi^{m-m_1} H_1\, \eta^{n-1} + \xi^{2m-m_2} H_2\, \eta^{n-2} + \ldots + \xi^{nm-m_n} H_n = 0,$$

jest przeto funkcyą algebraiczną całkowitą zmiennej ξ.

Każda funkcya algebraiczna całkowita φ obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$ przechodzi przez podstawienie $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ na funkcyą wymierną zmiennych ξ i η; istnieje wykładnik najmniejszy całkowity i nieujemny e taki, że $\xi^e \varphi$ jest funkcyą algebraiczną całkowitą zmiennej ξ. Wykładnik ten nazywa się (według Dedekinda-Webera) wykładnikiem funkcyi φ. Układ zasadniczy $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$ nazwiemy układem zasadniczym normalnym, gdy funkcye $\frac{\omega_1}{x^{e_1}}, \frac{\omega_2}{x^{e_2}} \ldots \frac{\omega_n}{x^{e_n}}$, w których $e_1, e_2 \ldots e_n$ są wykładnikami funkcyj $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$, przechodzą przez podstawienia $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ na funkcye $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$, tworzące układ zasadniczy równania $G(\eta) = 0$.

Niechaj $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ będą funkcyami danego układu zasadniczego obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$; $e_1, e_2 \ldots e_n$ ich wykładnikami; niechaj ω_i za pomocą podstawienia $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ przechodzi na $\frac{\omega'_i}{\xi^{e_i}}$. Aby funkcye $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$ tworzyły układ zasadniczy równania $G(\eta) = 0$, jest koniecznem i wystarczającem, by wszystkie funkcye $\varphi'_1, \varphi'_2 \ldots \varphi'_n$ oznaczonego układu zasadniczego tego równania mogły być przedstawionemi jako formy liniowo-jednorodne funkcyj $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$.

Niechaj φ'_i przez podstawienie $\xi = \frac{1}{x}$, $\eta = \frac{y}{x^m}$ przechodzi na $\frac{\varphi_i}{x^e}$, gdzie φ_i jest funkcyą algebraiczną całkowitą zmiennej x niepodzielną przez x; wtedy jest:

$$\varphi_i = g_1(x)\, \omega_1 + g_2(x)\, \omega_2 + \ldots + g_n(x)\, \omega_n;$$

tu $g_1, g_2 \ldots g_n$ oznaczają funkcye całkowite zmiennej x. Kładąc tu $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ i mnożąc przez ξ^e, znajdziemy

$$\varphi'_i = \xi^{e-e_1} g_1\left(\frac{1}{\xi}\right) \omega'_1 + \xi^{e-e_2} g_2\left(\frac{1}{\xi}\right) \omega'_2 + \ldots + \xi^{e-e_n} g_n\left(\frac{1}{\xi}\right) \omega'_k.$$

Gdy przeto jedna z funkcyj $g_1(x), g_2(x) \ldots$ np. funkcya $g_k(x)$ jest stopnia wyższego od $e-e_k$, to $\xi^{e-e_k} g_k\left(\frac{1}{\xi}\right)$ nie jest funkcyą całkowitą zmiennej ξ, φ'_i nie może być przedstawioną jako forma liniowo-jednorodna funkcyj $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$. Jeżeli w tym przypadku ν_h oznacza ogólnie stopień funkcyi g_h, gdy ta nie znika tożsamościowo, d jest największą z różnic $\nu_h + e_h - e$, i ta różnica odpowiada funkcyi g_r, to współczynnik przy x^{ν_r} w funkcyi g_r jest różny od zera. Kładąc wtedy

$$\xi^{e-e_h+d} g_h\left(\frac{1}{\xi}\right) = a_h + \xi\, g'_h,$$

$$g'_1\, \omega'_1 + g'_2\, \omega'_2 + \ldots + g'_n\, \omega'_n = g'$$

znajdziemy

$$\xi^d \varphi'_i - \xi g' = a_1 \omega'_1 + a_2 \omega'_2 + \ldots + a_n \omega'_n,$$

gdzie a_r nie równa się zeru. Ponieważ φ' i g' są funkcyami algebraicznemi całkowitemi względem ξ, więc $\xi^d \varphi'_i - \xi g'$ jest podzielne przez ξ, i istnieje funkcya przez ξ podzielna postaci $a_1 \omega'_1 + a_2 \omega'_2 + \ldots + a_n \omega'_n$, w której $a_1, a_2 \ldots a_n$ są stałemi różnemi od zera. Funkcye $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$ tworzą układ zasadniczy lub nie tworzą takiego układu, stosownie do tego, czy istnieje lub nie funkcya podzielna przez ξ poprzednio wskazanej postaci.

Aby to rozstrzygnąć, szukajmy według **4.** wszystkich przez ξ podzielnych funkcyj postaci:

$$f' = u_\alpha \omega'_\alpha + u_\beta \omega'_\beta + \ldots + u_\nu \omega''_\nu,$$

gdzie $u_\alpha, u_\beta \ldots u_\nu$ są funkcyami całkowitemi zmiennej ξ, skaźniki zaś $1, 2 \ldots n$, wzięto w takim porządku, że

$$e_\alpha \leqq e_\beta \leqq e_\gamma \ldots \leqq e_\nu .$$

Znajdziemy

$$f' = t_1 \psi'_1 + t_2 \psi'_2 + \ldots + t_n \psi'_n ,$$

gdzie $t_1, t_2 \ldots t_n$ są funkcyami całkowitemi nieoznaczonemi; $\psi'_1 \psi'_2 \ldots \psi'_n$ znanemi formami liniowo-jednorodnemi funkcyj $\omega'_1 \omega'_2 \ldots \omega'_n$. Można tym funkcyom $\psi'_1 \psi'_2 \ldots$ nadać postaci

$$\begin{aligned}
\psi'_\alpha &= c_{\alpha\alpha}\, \omega'_\alpha , \\
\psi'_\beta &= c_{\beta\alpha}\, \omega'_\alpha + c_{\beta\beta}\, \omega'_\beta , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t'_\nu &= c_{\nu\alpha}\, \omega'_\alpha + c_{\nu\beta}\, \omega'_\beta + \ldots + c_{\nu\nu}\, \omega'_\nu ,
\end{aligned}$$

gdyż w razie potrzeby można $\psi'_1, \psi_2 \ldots$ według **3.** zastąpić przez inny układ funkcyj mający postać żądaną.

Współczynniki $c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta} \ldots c_{\nu\nu}$ mogą być albo stałemi, a więc $= 1$, albo $= \xi$. Ponieważ $\xi\omega'_\varepsilon$ jest podzielne przez ξ, przeto:

$$\xi\, \omega'_\varepsilon = k_\alpha\, \psi'_\alpha + k_\beta\, \psi'_\beta + \ldots + k_\nu\, \psi'_\nu$$

gdzie $k_\alpha, k_\beta \ldots k_\nu$ są funkcyami całkowitemi zmiennej x. Tu wszystkie współczynniki k_i, których skaźnik i następuje po ε w szeregu $\alpha, \beta \ldots \nu$ muszą być zerami i dla każdego skaźnika ε będzie $\xi = k_\varepsilon\, c_{\varepsilon\varepsilon}$. Jeżeli $c_{\varepsilon\varepsilon} = \xi$, to ψ'_ε sprowadza się do $\xi\, \omega'_\varepsilon$. To wymaga dowodu tylko wtedy, gdy ε nie równa się α. Ponieważ $\psi_\varepsilon - c_{\varepsilon\varepsilon}\, \omega'_\varepsilon$ jest podzielne przez ξ, przeto

$$\psi'_\varepsilon - c_{\varepsilon\varepsilon}\, \omega'_\varepsilon = l_\alpha\, \psi'_\alpha + l_\beta\, \psi'_\beta + \ldots + l_\nu\, \psi'_\nu$$

gdzie $l_\alpha, l_\beta \ldots l_\nu$ są funkcyami całkowitemi zmiennej ξ. Tu muszą $l_\varepsilon \ldots l_\nu$ znikać i otrzymujemy $c_{\varepsilon\delta} = l_\delta\, c_{\delta\delta}$. Ponieważ wolno przyjąć, że stopień współczynnika $c_{\varepsilon\delta}$ jest niższy od stopnia współczynnika $c_{\delta\delta}$, przeto jest $c_{\varepsilon\delta} = 0$. A zatem

$$c_{\varepsilon\gamma} = 0 \ldots c_{\varepsilon\alpha} = 0.$$

Jeżeli więc wszystkie współczynniki $c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta} \ldots c_{\nu\nu}$ są równe ξ, to $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$ tworzą według poprzedzającego układ zasadniczy równania $G(\eta) = 0$, zaś $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ układ zasadniczy normalny obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$.

Jeżeli przeciwnie niektóre z współczynników $c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta} \ldots c_{\nu\nu}$ są równe 1, to $\omega'_1 \omega'_2 \ldots \omega'_n$ nie tworzą układu zasadniczego. Lecz można wtedy z $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ wyprowadzić układ zasadniczy normalny w sposób następujący:

Położmy dla każdego skaźnika ε:

$$\psi_\varepsilon = c_{\varepsilon\alpha}\, x^{e_\varepsilon - e_\alpha}\, \omega_\alpha + c_{\varepsilon\beta}\, x^{e_\varepsilon - e_\beta}\, \omega_\beta + \ldots + \omega_\varepsilon$$

lub $\psi_\varepsilon = \omega_\varepsilon$, stosownie do tego, czy $c_{\varepsilon\varepsilon} = 1$ lub $= \xi$. Ponieważ funkcye $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ dają się przedstawić jako formy liniowo-jednorodne funkcyj $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$, to ostatnie tworzą także układ zasadniczy obszaru $\mathfrak{G}$. Ponieważ dalej ψ_ε, przy podstawieniu $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ przechodzi na $\frac{\psi'_\varepsilon}{\xi^{e_\varepsilon}}$ lub $\frac{\omega'_\varepsilon}{\xi^{e_\varepsilon}}$, stosownie do tego czy $c_{\varepsilon\varepsilon} = 1$ lub $= \xi$, przeto wykładnik przy ψ_ε jest w pierwszym przypadku mniejszy od e_ε, w drugim równy e_ε. Jeżeli więc $e'_1, e'_2 \ldots e'_n$ są wykładnikami funkcyj $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$, to

$$e'_1 + e'_2 + \ldots + e'_n < e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

Jeżeli do układu zasadniczego $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ zastosujemy to samo postępowanie, które stosowaliśmy do $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$, to układ ten albo okaże się odrazu jako układ zasadniczy normalny, albo też otrzymamy nowy układ zasadniczy $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_n$, w którym suma wykładników jego funkcyj jest mniejsza od $e'_1 + e'_2 + \ldots + e'_n$. W ten sposób można postępować dalej i można wskazać granicę dla liczby kroków, jakie uczynić należy, aby dojść do układu zasadniczego normalnego.

Jeżeli dla jakiegokolwiek układu zasadniczego $f_1, f_2 \ldots f_n$ obszaru gatunkowego $\mathfrak{G}$ utworzymy sumę

$$\Sigma\, f_i\, f_k = a_{ik}(x) ,$$

rozciągającą się na wszystkie wartości sprzężone ilości y, to wyznacznik $\Delta(x) = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$, z wyjątkiem czynnika stałego, zostaje niezmiennym dla wszystkich układów zasadniczych obszaru $\mathfrak{G}$ i nazywa się wyróżnikiem obszaru. Ponieważ dla jakiegokolwiek drugiego układu zasadniczego $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_n$ zachodzi n rownań postaci:

$$\vartheta_i = g_{i1}\, f_1 + g_{i2}\, f_2 + \ldots + g_{in}\, f_n ; \qquad (i = 1\ 2 \ldots n)$$

gdzie $g_{i1}, g_{i2} \ldots$ są funkcyami całkowitemi zmiennej x, to wyznacznik n^2 elementów $\Sigma\, \vartheta_i\, \vartheta_n$ jest przez Δ podzielny. Ponieważ ma miejsce i własność odwrotna, więc oba wyznaczniki mogą różnić się tylko czynnikiem stałym.

Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ są wykładnikami ilości $f_1, f_2 \ldots f_n$ i jeżeli przez podstawienie $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ funkcye $x^{\alpha_1} f_1$, $x^{\alpha_2} f_2 \ldots x^{\alpha_n} f_n$ przechodzą na $f'_1, f'_2 \ldots f'_n$, to mamy

$$\sum \frac{f'_i f'_k}{\xi^{\alpha_i+\alpha_k}} = a_{ik}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

lub

$$\sum f'_i f'_k = \xi^{\alpha_i+\alpha_k} a_{ik}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie wartości sprzężone ilości η. Wyznacznik n^2 elementów $\sum f'_i f'_k$ jest równy przeto $\xi^{2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}\,\Delta\left(\frac{1}{\xi}\right)$, a ponieważ musi być funkcyą całkowitą zmiennej ξ, więc

$$2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) \geqq \sigma$$

gdzie σ jest stopień ilości $\Delta(x)$.

Jeżeli τ jest największą liczbą całkowitą zawartą w $\frac{\sigma}{2}$, to wystarczy zastosować powyższe postępowanie najwyżej $e_1+e_2+\ldots+e_n-\tau$ razy, aby dojść do układu zasadniczego normalnego.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

§ 1. Teorya całkowania równań różniczkowych cząstkowych, którą podałem w V-tym tomie *Prac matematycz.-fizycz.* [1]), daje dla wielu równań drogę bardzo łatwą do znalezienia całki zupełnej. Bywają jednakże i takie równania różniczkowe, w których metoda moja napotyka znaczne trudności przy rozwiązywaniu wielkiej liczby równań algebraicznych. Dogodną jest ona w następujących przypadkach:

Kształt ogólny równania danego jest

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n) = X, \qquad (1)$$

gdzie strona pierwsza wyobraża funkcyą wymierną, o współczynnikach stałych względem samych tylko ilości p_i,

$$p_i = \frac{\partial x}{\partial x_i},$$

[1]) „O całkowaniu równań różniczkowych cząstkowych ogólnych rzędu 1-go, str. 17—182.