Na zasadzie rozważanych dwóch przypadków wypowiemy twierdzenie, że wogóle równanie (1), w którem $n \geqq 2k+1$, może posiadać k całek. Warunki całkowalności przedstawiać się będą w kształcie funkcyj Pfaffa, które otrzymamy po skróceniu odpowiednich wyznaczników stopnia $2k$, zrównanych, do zera.

O sposobach całkowania przy istnieniu warunków (15) pomówimy w jednym z następnych tomów *Prac matematyczno-fizycznych.*

Płock, dnia 17 lipca 1894 roku.

ROZWAŻANIA PORÓWNAWCZE O NOWSZYCH BADANIACH GEOMETRYCZNYCH. [1])

PRZEZ

FELIKSA KLEINA.

ZA UPOWAŻNIENIEM AUTORA PRZEŁOŻYŁ *)

S. DICKSTEIN.

Pomiędzy pracami ostatnich lat pięćdziesięciu w dziedzinie geometryi pierwsze miejsce zajmuje wydoskonalenie geometryi rzutowej. Zdawało się początkowo, jakoby związki, tak nazwane metryczne, nie nadawały się do traktowania za pomocą tej geometryi, ponieważ nie pozostają niezmiennemi przy rzucie; w nowych wszakże czasach zdołano i te związki ująć z rzutowego punktu widzenia, tak że obecnie metoda rzutowa obejmuje całą geome-

[1]) Program ogłoszony z okoliczności wstąpienia do fakultetu filozoficznego i do senatu Uniwersytetu w Erlangen w r. 1872.

[Mój poniższy powtórnie tu przedrukowany program był już przed niedawnym czasem ogłoszony w przekładzie włoskim i francuskim (Annali di Matematica, serya II, tom 17, 1890, przekład p. G. Fano; Annales de l' École Normale supérieure, serya III, tom 8, 1891, przekład p. Padé) **). Wprowadziłem tam w pewnych miejscach poprawki, które uwidoczniłem za pomocą nawiasów [—]. Te poprawki, zachowane i w przedruku niniejszym,

*) Z tomu 43-go dziennika „Mathematische Annalen", 1893.

**) Przekład angielski p. M. W. Haskella ogłoszony został w „Bulletin of the New-York Mathematical Society", t. II, 1893. *S. D.*

tryą. Własności metryczne są w niej już nie własnościami utworów przestrzennych w sobie, lecz związkami tych ostatnich z utworem zasadniczym, z kołem urojonem w nieskończoności [1]).

Jeżeli wyobrażenia geometryi zwykłej (elementarnej) porównamy ze zdobytym tak stopniowo sposobem pojmowania utworów przestrzennych, to powstaje pytanie, jaka jest zasada ogólna, według której obie metody rozwinąć się mogły. Pytanie to tem jest ważniejsze, że obok geometryi elementarnej i rzutowej, występuje szereg innych metod, mniej wprawdzie rozwiniętych, którym wszakże przyznać należy tożsamo prawo samodzielnego istnienia. Należą tu: geometrya promieni odwrotnych, geometrya przekształceń wymiernych i t. d., jak je poniżej jeszcze wymienimy i przedstawimy.

Podejmując tu poniżej ustanowienie takiej zasady, nie rozwijamy, właściwie mówiąc, żadnej istotnie nowej myśli; określamy tylko jasno i wyraźnie to, o czem w sposób mniej lub więcej określony myśleli już inni. Lecz zdawało nam się, że ogłoszenie podobnych rozważań porównawczych jest usprawiedliwionem, zwłaszcza przez to, iż geometrya, która przecież co do materyi swej jest jednolitą, rozpadła się, przy szybkim rozwoju w ostatnim czasie, na szereg prawie oddzielnych nauk, rozwijających się w dalszym ciągu, prawie niezależnie jedna od drugiej [2]). Był wszakże przytem i cel specyalny, a mianowicie: przedstawienie metod i punktów widzenia, które Lie i ja rozwinęliśmy w nowszych pracach. Nasze prace obustronne, lubo odnosiły się do przedmiotów różnych, prowadziły jednak do przedstawionego tu ogólnego pojmowania rzeczy, tak, że było prawie koniecznością wyjaśnić to pojmowanie, by scharakteryzować te prace, tak co do ich treści, jak i dążenia.

Jakkolwiek mówiliśmy dotąd tylko o badaniach geometrycznych, należy wszakże podciągnąć pod tę nazwę i badania o rozmaitościach wielokrotnie rozciągłych, które, po odwróceniu uwagi od obrazów przestrzen-

stanowią jedyne odstępstwo od oryginału pierwotnego. Z dzisiejszego mojego stanowiska wprowadziłbym chętnie i większe zmiany do programu. Tak naprzykład mówiłbym mniej o funkcyach algebraicznych, a więcej o analitycznych. Mówiłbym nietylko o utworach, które przedstawiamy przez przyrównanie funkcyj do zera, lecz o samych funkcyach; w ten sposób np. ujawniłbym samoistność teoryi niezmienników liniowych, obok geometryi rzutowej. Dalej starałbym się wciągnąć tu *wszelkie* zastosowania nauki o rozmaitościach, a więc zastosowania nietylko do geometryi ale i do mechaniki i fizyki matematycznej. Z drugiej strony należałoby wyzyskać bogaty materyał, jaki przybył wciągu upłynionych lat dwudziestu, a zwłaszcza wyniki teoryi grup ciągłych Lie'go; dalej związki geometryczne, ukryte w teoryi funkcyj automorficznych. Pracuję właśnie nad przygotowaniem podobnego przedstawienia w większym wykładzie. Lecz widzę niemożność nadania tej pracy w blizkim czasie postaci ostatecznej. Niechaj więc wystarczy tymczasem przedruk pierwotnego programu. Getynga, koniec marca 1893. F. Klein].

[1]) Porówn. Notę 1 „Dodatku".

[2]) Porówn. Notę II.

nych [1]), nie mających znaczenia istotnego w badaniu czysto-matematycznem, rozwinęły się z geometryi [2]). Przy badaniu rozmaitości występują właśnie takież typy różne, jak w geometryi, i należy tak, jak w geometryi, uwidocznić to, co jest wspólnego a co różnego w badaniach podejmowanych niezależnie. Biorąc rzecz abstrakcyjnie, wystarczyłoby mówić poniżej tylko o rozmaitościach wielokrotnie rozciągłych, lecz nawiązanie do podatniejszych wyobrażeń przestrzennych uczyni przedstawienie prostszem i zrozumialszem. Wychodząc z uważania utworów geometrycznych i rozwijając na nich, jako na przykładzie, myśli ogólne, idziemy tą samą drogą, jaką postępowała w rozwoju swym umiejętność; tę zaś drogę najdogodniej przyjąć za podstawę wykładu.

Wskazanie uprzednio treści, poniżej omówić się mającej, nie jest możliwem, ponieważ z trudnością ująć by się dała w formę bardziej zwięzłą [3]); nadpisy nad paragrafami wskażą ogólny bieg myśli. Na końcu dodałem szereg not, w których rozwinąłem niektóre punkty szczególne, o ile uważałem to za pożyteczne dla ogólnego wykładu w tekście, lub też starałem się abstrakcyjno-matematyczny punkt widzenia, zasadniczy dla rozważań tekstu, odgraniczyć od innych z nim pokrewnych.

§ 1.

Grupy przekształceń przestrzennych. Grupa główna. Ustanowienie zagadnienia ogólnego.

Pojęcie istotnem i koniecznem w rozważaniach poniższych jest pojęcie *grupy* przekształceń przestrzennych.

Połączenie dowolnej liczby przekształceń przestrzeni [4]) daje zawsze znowu takie przekształcenie. Jeżeli szereg przekształceń ma tę własność,

[1]) Porówn. Notę III.

[2]) Porówn. Notę IV.

[3]) Ta forma zwięzła stanowi wadę naszego przedstawienia i obawiam się, że utrudni ona zrozumienie wykładu. Możnaby temu zaradzić jedynie przez daleko szersze przedstawienie, w którem pojedyńcze, dotknięte tu zaledwie, teorye byłyby rozwinięte wyczerpująco.

[4]) Rozumiemy, że przekształcenia, stosują się jednocześnie do ogółu wszystkich utworów przestrzennych, i mówimy dlatego o przekształceniach przestrzeni. Przekształcenia takie, jak np. dualistyczne, mogą wprowadzać zamiast punktów inne elementy; w tekście tego nie rozróżniamy.

że każde przekształcenie, złożone z przekształceń do niego należących, samo do szeregu należy, nazywa się *grupą przekształceń* [1]).

Przykładem grupy przekształceń jest ogół ruchów (każdy ruch uważany jako działanie wykonane na całej przestrzeni). Grupą w niej zawartą są np. obroty około punktu [2]). Odwrotnie, grupę, obejmującą grupę ruchów, można przedstawić przez ogół przekształceń homograficznych. Przeciwnie, ogół przekształceń dualistycznych nie tworzy grupy, gdyż dwa przekształcenia dualistyczne dają razem przekształcenie homograficzne; otrzymujemy wszakże znowu grupę, jeżeli ogół przekształceń dualistycznych połączymy z ogółem przekształceń homograficznych [3]).

Istnieją przekształcenia przestrzenne, które wogóle nie zmieniają własności utworów przestrzennych. Własności geometryczne są mianowicie z istoty swej niezależne od położenia, które utwór badany zajmuje w przestrzeni, od jego wielkości bezwzględnej, wreszcie od porządku [4]) w układzie jego części. Własności tedy utworu przestrzennego pozostają niezmienionemi przez wszystkie ruchy przestrzeni, przez przekształcenia z podobieństwem, przez proces odzwierciadlania, jako też przez wszystkie przekształcenia z poprzednich złożone. Ogół tych wszystkich przekształceń oznaczamy jako *grupę główną* [5]) przekształceń przestrzennych; *własności geometryczne nie zmieniają się skutkiem przekształceń grupy głównej*. Można też powiedzieć odwrotnie: *własności geometryczne cechuje niezmienność wobec przekształceń grupy głównej*. Jeżeli na chwilę uważać będziemy przestrzeń za nieruchomą i t. d., jako rozmaitość stałą, to każda figura mieć będzie indywidualność własną; z własności zaś, jakie posiada jako indywiduum, tylko właściwie geometryczne zachowują się bez zmiany, przy przekształceniach grupy głównej. Myśl ta, sformułowana tu w sposób nieco niewyraźny, stanie się jaśniejszą w dalszym przebiegu rozważań.

[1]) Pojęcie i nazwa są wzięte z *Teoryi podstawień*, w której tylko zamiast przekształceń dziedziny ciągłej występują przemiany skończonej liczby wielkości przerywanych. [Określenie to wymaga jeszcze dopełnienia. Przy grupach, o których mowa w tekscie, zakłada się mianowicie milcząco, że obok każdego działania, jakie zawierać mogą, zawierają jeszcze i działania względem tych odwrotne; to zaś, jak to pierwszy wykazał Lie, przy nieskończonej liczbie działań, nie wynika bynajmniej z pojęcia grupy, jako takiej; nasze założenie powinnoby zatem być wyraźnie dodane do danej w tekście definicyi grupy].

[2]) Camille Jordan oznaczył wszystkie grupy zawartę w grupie ruchów: Sur les groupes de mouvements, Annali di matematica, t. II.

[3]) Niema zresztą konieczności, aby przekształcenia grupy stanowiły następstwo ciągłe, jakkolwiek takiemi mają być zawsze grupy, jakiemi zajmujemy się w tekście. Grupę tworzy np. i skończony szereg ruchów, które ciało foremne sprowadzają do przystawania do samego siebie, lub też szereg nieskończony lecz przerywany, który sinusojdę zamienia na siebie samą.

[4]) Mowa tu o tej własności *), na której polega różnica między figurą daną a symetryczną do niej (obrazem zwierciadlanym). W ten sposób różni się linia śrubowa prawoskrętna od lewoskrętnej.

[5]) Z pojęcia grupy wynika koniecznie, że te przekształcenia tworzą grupę.

*) Sinn po niemiecku, Sens po francusku. *S. D.*

Usuńmy teraz uwagę od obrazu materyalnego, nie mającego istotnego znaczenia matematycznego, i uważajmy przestrzeń, jedynie jako rozmaitość wielokrotnie rozciągłą, lub — przyjmując zwykłe wyobrażenie punktu, jako elementu przestrzeni, — za wielokrotność trójkrotnie rozciągłą. Przez analogią tedy do przekształceń przestrzennych, mówimy o przekształceniach rozmaitości; i te przekształcenia tworzą *grupy*. Lecz niema tu już, jak w przestrzeni, grupy wyróżniającej się znaczeniem swem od pozostałych; tu każda grupa jest równouprawniona z każdą inną. Powstaje tedy jako uogólnienie geometryi zagadnienie następujące:

Dana jest rozmaitość i w niej grupa przekształceń; należy zbadać utwory należące do rozmaitości ze względu na takie ich własności, które nie zmieniają się przez przekształcenia grupy.

Stosując zaś nowszy sposób wyrażania się, którego, co prawda, używamy zwykle przy pewnej grupie określonej, a mianowicie przy grupie przekształceń liniowych, możemy powiedzieć:

Dana jest rozmaitość i w niej grupa przekształceń; rozwinąć teoryą niezmienników do niej należących.

Oto jest zagadnienie ogólne, obejmujące w sobie nietylko geometryą zwykłą, lecz także i nowsze metody geometryczne, o których mówić mamy i rozmaite metody badania rozmaitości wielokrotnie rozciągłych. Zaznaczamy ze szczególnym naciskiem na zachodzącą tu dowolność w wyborze grupy przekształceń, mającej być dołączoną i na wynikające stąd uprawnienie wszystkich metod badania, czyniących zadość temu ogólnemu warunkowi.

§ 2.

Grupy przekształceń, z których jedna obejmuje drugą, dołączają się po kolei. Różne typy badania geometrycznego i ich stosunek wzajemny.

Ponieważ własności geometryczne utworów przestrzennych pozostają bez zmiany przy wszystkich przekształceniach grupy głównej, jest więc niedorzecznością pytać o takie własności, przy których to zachodzi tylko przy pewnej części przekształceń. Pytanie takie wszakże jest uzasadnionem, lubo tylko *formalnie*, gdy badamy utwory przestrzenne w ich stosunku do

elementów przyjętych za stałe. Uważajmy np. jak to ma miejsce w trygonometryi kulistej, utwory przestrzenne przy wyróżnieniu szczególnem jednego punktu. Wtedy powstaje najprzód zadanie: rozwinąć własności niezmiennicze odnośnie do dołączonej grupy głównej, nie już utworów przestrzennych w sobie, lecz układu utworzonego z nich i z punktu danego. To zadanie możemy przyoblec w inną postać: zbadać utwory przestrzenne w sobie co do takich ich własności, które pozostają niezmiennemi przy przekształceniach grupy głównej, mogących zachodzić jeszcze i wtedy, gdy jeden punkt przyjmiemy za stały. Innemi słowy: Jest jedno i to samo, czy utwory przestrzenne badamy ze względu na grupę główną i dołączamy do nich punkt dany; czy też, gdy nie dołączając nic danego, zastępujemy grupę główną przez grupę w niej zawartą, a której przekształcenia punkt ten pozostawiają bez zmiany.

Jest to zasada, którą często stosować będziemy poniżej i dlatego formułujemy ją odrazu ogólnie w sposób następujący:

Dana jest rozmaitość i do badania jej odnośna grupa przekształceń. Niechaj będzie postawione zadanie zbadania utworów zawartych w rozmaitości, ze względu na utwór dany. *Można wtedy: albo do układu utworów dołączyć utwór dany i pytać o własności układu rozszerzonego odnośnie do grupy danej — lub też — pozostawiając układ nierozszerzonym, ograniczyć natomiast przekształcenia, będące podstawą badania, do tych przekształceń w danej grupie zawartych, które utwór dany pozostawiają bez zmiany (i które z konieczności znowu tworzą grupę).*

W przeciwstawieniu do pytania poruszonego na początku paragrafu, zajmie nas teraz bezpośrednio jasne pytanie odwrotne. Pytamy o własności utworów przestrzennych, pozostające niezmiennemi przy grupie przekształceń, która grupę główną jako część obejmuje w sobie. Każda własność, jaką znajdujemy przy takiem badaniu, jest własnością geometryczną utworu w sobie; odwrotność wszakże niema miejsca. Przy odwróceniu występuje właśnie dopiero co wyłożona zasada: grupa główna jest wtedy grupą mniejszą. Otrzymujemy tedy:

Jeżeli grupę główną zastąpimy grupą obszerniejszą, to tylko część własności geometrycznych zachowa się bez zmiany. Pozostałe własności nie są już własnościami utworów przestrzennych w sobie, lecz własnościami układu, który powstaje, gdy do niego dodajemy pewien utwór wyróżniony. Ten utwór szczególny, o ile jest oznaczonym [1]) *określa się w ten sposób, że gdy przyjmiemy go za stały, to wtedy pomiędzy przekształceniami grupy danej tylko przekształcenia grupy głównej dadzą się do przestrzeni stosować.*

[1]) Otrzymujemy np. taki utwór, jeżeli do dowolnego elementu początkowego, który przez żadne przekształcenie grupy danej nie daje się odtworzyć, zastosujemy przekształcenia grupy głównej.

Na tem twierdzeniu polega właściwość omawianych tu nowszych kierunków geometrycznych i ich stosunek do metody elementarnej. Kierunki te cechują się właśnie tem, że za podstawę badania, zamiast grupy głównej, przyjmują grupę rozszerzoną przekształceń przestrzennych. O ile ich grupy zawierają się jedna w drugiej, o tyle ich stosunek wzajemny jest określony przez odpowiednie twierdzenie. Toż samo stosuje się do rozmaitych tu rozważanych sposobów badania rozmaitości wielokrotnie rozciągłych. Pokażemy to niżej na metodach oddzielnych, a twierdzenia, które w tym i poprzednich paragrafach były postawione ogólnie, znajdą tu swoje wyjaśnienie na przedmiotach konkretnych.

§ 3.

Geometrya rzutowa.

Każde przekształcenie przestrzenne, nie należące wprost do grupy głównej, może być użyte do przeniesienia własności znanych utworów na utwory nowe. W ten sposób spożytkowujemy geometryą płaszczyzny dla geometryi powierzchni, dających się odwzorować na płaszczyźnie; w ten sposób, dawno już przed powstaniem właściwej geometryi rzutowej, z własności figury danej wnioskowano o własnościach innych figur, powstałych z pierwszej za pomocą rzutu. Geometrya rzutowa powstała wszakże dopiero wtedy, gdy nauczono się uważać figurę pierwotną za istotnie identyczną ze wszystkiemi wyprowadzalnemi z niej rzutowo, oraz wypowiadać w ten sposób własności zachowujące się przy rzutach, aby niezależność ich od zmiany związanej z rzutem występowała widocznie. Przez to właśnie, za podstawę rozważań, o jakich mowa w § 1, *przyjęto grupę wszystkich przekształceń rzutowych i przez to właśnie przeciwstawiono geometryą rzutową geometryi zwykłej.*

Podobny do opisanego wywód można by pomyśleć przy przekształceniu przestrzennem wszelkiego rodzaju, do czego w następstwie często jeszcze wracać będziemy. W samej geometryi rzutowej rozwój ten w dwóch poszedł kierunkach. Raz przez włączenie przekształceń *dualistycznych* do grupy przekształceń zasadniczych. Z dzisiejszego punktu widzenia dwie figury dualistycznie wzajemne nie są uważane za dwie figury różne, lecz są istotnie jednakowe. Krok drugi polegał na rozszerzeniu pierwotnej grupy przekształceń homograficznych i dualistycznych, przez włączenie odpowiednich przekształceń *urojonych*. Krok ten wymagał uprzedniego rozszerzenia

zakresu właściwych elementów przestrzeni, przez przyłączenie do nich elementów urojonych—zupełnie tak samo, jak włączenie przekształceń dualistycznych do grupy zasadniczej pociąga za sobą wprowadzenie jednoczesne punktu i płaszczyzny, jako elementu przestrzeni. Nie tu miejsce wykazywać pożytek wprowadzenia elementów urojonych, przez które dopiero dało się osiągnąć dokładne przystosowanie nauki o przestrzeni do raz obranej dziedziny działań algebraicznych. Należy wszakże położyć nacisk na to, że powód wprowadzenia tkwi właśnie w uważaniu działań algebraicznych, nie zaś w grupie przekształceń rzutowych i dualistycznych. Jak w tych ostatnich moglibyśmy się ograniczyć do przekształceń rzeczywistych — gdyż już przekształcenia rzeczywiste homograficzne i dualistyczne tworzą grupę — podobnie możemy wprowadzić elementy przestrzeni urojone, nawet i wtedy, gdy nie stajemy na stanowisku rzutowem; winniśmy nawet to uczynić, o ile tylko badamy przedewszystkiem utwory algebraiczne.

Twierdzenie ogólne, podane w paragrafie poprzedzającym, określa, w jaki sposób ze stanowiska rzutowego należy pojmować własności metryczne. Własności te należy uważać za związki rzutowe odnośnie do utworu zasadniczego, koła urojonego w nieskończoności [1]); utworu, posiadającego tę własność, że przechodzi sam w siebie tylko skutkiem takich przekształceń grupy rzutowej, które są zarazem przekształceniami grupy głównej. Twierdzenie, w ten sposób wypowiedziane, wymaga jeszcze niezbędnego dopełnienia, które odpowiada ograniczeniu zwykłego poglądu do elementów rzeczywistych przestrzeni (i do przekształceń rzeczywistych). Aby uwzględnić ten punkt widzenia, trzeba do koła urojonego w nieskończoności wyraźnie dołączyć układ elementów rzeczywistych przestrzeni (punktów); własności odnośnie do geometryi elementarnej są, biorąc rzutowo: albo własnościami utworów w sobie, lub związkami z tym układem elementów rzeczywistych, lub z kołem urojonem w nieskończoności, lub wreszcie z jednym i drugim.

Można tu wspomnieć jeszcze o sposobie, w jaki v. Staudt buduje w swej „Geometryi położenia“ geometryą rzutową, t. j. tę geometryą rzutową, której grupa składa się tylko ze wszystkich przekształceń rzeczywistych rzutowo-dualistycznych [2]). Wiadomo, że ze zwykłego materyału poglądowego wydziela on tylko te momenty, które zachowują się także przy przekształceniach rzutowych. Gdyby chciano tym sposobem pójść dalej aż do rozważania własności metrycznych, należałoby te ostatnie wprowadzić właśnie, jako związki z kołem urojonem w nieskończoności. Tak uzupełniony bieg myśli ma dla niniejszych rozważań wielkie znaczenie, gdyż jest rzeczą możliwą zbudować w odpowiedni sposób geometryą dla każdej z metod, które mamy jeszcze rozważać.

[1]) Ten pogląd należy uważać za jednę z najpiękniejszych produkcyj [szkoły francuskiej]; on dopiero nadaje treść ścisłą podziałowi własności na opisowe (położenia) i miarowe (metryczne), które stawiamy na czele geometryi rzutowej.

[2]) Dopiero w dziele swem „Beiträge zur Geometrie der Lage“ przyjął v. Staudt za podstawę grupę obszerniejszą, obejmującą i przekształcenia urojone.

§ 4.

Przeniesienie za pomocą odwzorowania.

Zanim przejdziemy do dalszego omówienia metod geometrycznych, które stawiają się obok geometryi elementarnej i rzutowej, rozwiniemy kilka uwag ogólnych; z uwag tych często jeszcze będziemy czynili użytek poniżej, a teorye wyżej wyłożone dostarczą nam do nich dostatecznej liczby przykładów. Niniejszy i następujący paragraf poświęcamy temu przedmiotowi.

Dajmy, że zbadano rozmaitość A, przy przyjęciu za podstawę grupy B. Jeżeli za pomocą pewnego przekształcenia rozmaitość A przekształcamy w inną A', to z grupy B przekształceń, które przekształcały rozmaitość A w siebie samą, utworzy się grupa B', której przekształcenia odnoszą się do rozmaitości A'. Jest wtedy zasadą, widoczną samą przez się, że ze sposobu *badania rozmaitości A na podstawie grupy B wynika sposób badania rozmaitości A' na podstawie B'*; t. j. że wszelka własność, którą utwór zawarty w rozmaitości A posiada ze względu na grupę B, wydaje własność odpowiedniego utworu w rozmaitości A' ze względu na grupę B'. Niechaj np. A oznacza prostą, B—potrójnie nieskończoną mnogość przekształceń liniowych, przeprowadzających prostą w samą siebie. Sposób badania utworu A jest właśnie ten, jaki algebra nowa nazywa teoryą form dwójkowych. Lecz prostą można odnieść do stożkowej A' na płaszczyźnie, za pomocą rzutu z każdego punktu stożkowej. Z przekształceń liniowych B, które odtwarzają prostą, powstają wtedy, jak to łatwo okazać, przekształcenia liniowe B', odtwarzające stożkową, t. j. przekształcenia stożkowej, związane z temi przekształceniami liniowemi płaszczyzny, które odtwarzają stożkową.

Lecz według zasady, podanej w paragrafie drugim [1]), wychodzi na to samo: badać geometryą na stożkowej, gdy tę uważa się za stałą i zwraca się jedynie uwagę na odtwarzające ją przekształcenia płaszczyzny; czy też badać geometryą na stożkowej, rozważając przekształcenia liniowe płaszczyzny i zmieniając jednocześnie stożkową. Własności, które znajdujemy w układach punktów na stożkowej, są więc rzutowemi w znaczeniu zwykłem. Po

[1]) Jeżeli chcemy, zasada ta jest tu użytą w postaci nieco ogólniejszej.

łączenie ostatniej uwagi z wyprowadzonym dopieroco wynikiem doprowadza do twierdzenia:

Teorya form dwójkowych i geometrya rzutowa układu punktów na stożkowej są równoważne, t. j. każdemu twierdzeniu z tej nauki odpowiada twierdzenie o takich układach punktów, i odwrotnie [1]).

Oto inny przykład, wyjaśniający ten rodzaj rozważań: Jeżeli zwiążemy powierzchnią stopnia drugiego z płaszczyzną, za pomocą rzutu stereograficznego, to na powierzchni występuje punkt zasadniczy: środek rzutu; na płaszczyźnie są dwa takie punkty: obrazy tworzących, przechodzących przez środek rzutu. Można łatwo okazać, że przekształcenia liniowe płaszczyzny, nie zmieniające obu punktów zasadniczych, przechodzą za pomocą odwzorowania na przekształcenia liniowe powierzchni drugiego stopnia odtwarzające ją, lecz tylko na takie, które środek rzutu pozostawiają bez zmiany. Przez przekształcenia liniowe powierzchni odtwarzające ją należy rozumieć te przekształcenia, których doznaje powierzchnia, jeżeli wykonywamy przekształcenia liniowe przestrzeni, sprowadzające powierzchnią do przystawania z samą sobą. Jest tedy badanie rzutowe płaszczyzny, przy przyjęciu za podstawę dwóch punktów, identycznem z badaniem rzutowem powierzchni stopnia drugiego, przy przyjęciu jednego punktu. Pierwsze z tych badań,—jeżeli wciągamy do niego i elementy urojone,—jest badaniem płaszczyzny w tem znaczeniu, w jakiem to czyni geometrya elementarna. Albowiem grupa główna przekształceń płaskich składa się właśnie z takich przekształceń liniowych, które pozostawiają bez zmiany parę punktów (punkty kołowe nieskończenie odległe). Otrzymujemy tedy ostatecznie:

Geometrya elementarna płaszczyzny i badanie rzutowe powierzchni stopnia drugiego z jednym punktem zasadniczym są równoważne.

Przykładów tych możnaby dać dowolnie wiele [2]); wybraliśmy dwa poprzednie dlatego, że będziemy mieli jeszcze sposobność do nich powrócić.

§ 5.

O dowolności wyboru elementów przestrzeni. Zasada przeniesienia Hessego. Geometrya liniowa.

Za element prostej, płaszczyzny, przestrzeni i wogóle wszelkiej badanej rozmaitości można wybrać każdy utwór zawarty w rozmaitości: grupę punktów, w szczególności krzywą, powierzchnią i t. d. [1]). Ponieważ z góry nic nie określa liczby dowolnych parametrów, od których chcemy utwór ten uczynić zależnym, przeto prosta, płaszczyzna, przestrzeń mogą mieć dowolną liczbę wymiarów, stosownie do wyboru elementu. *Lecz jak długo podstawą badania geometrycznego jest ta sama grupa przekształceń, treść geometryi pozostaje niezmienną*, t. j. z każdego twierdzenia, które otrzymaliśmy przy *pewnym* wyborze elementu przestrzeni, otrzymujemy twierdzenie, odpowiadające innemu dowolnemu przyjęciu; ulegają tylko zmianie porządek i połączenie twierdzeń.

Istotną rzeczą jest grupa przekształceń; liczba zaś wymiarów, którą chcemy nadać rozmaitości, ma znaczenie drugorzędne.

Zestawiając tę uwagę z zasadą, podaną w paragrafie poprzedzającym, otrzymujemy szereg pięknych zastosowań; rozwiniemy tu niektóre z nich, ponieważ te przykłady daleko lepiej, niż długi wykład, wyjaśniają nam znaczenie tego ogólnego rozważania.

Geometrya rzutowa na prostej (teorya form dwójkowych) jest, według poprzedzających paragrafów, równoważna z geometryą rzutową na stożkowej. Przyjmijmy na stożkowej za element parę punktów, zamiast punktu. Można ustanowić odpowiedniość między ogółem par punktów stożkowej a ogółem prostych płaszczyzny, przyporządkowując każdą prostą tej parze punktów, w której przecina stożkową. Przy tem odwzorowaniu, przekształcenia liniowe, odtwarzające stożkową, przechodzą na przekształcenia liniowe płaszczyzny (uważanej za złożoną z prostych), pozostawiające bez zmiany stożkową. Według § 2, uważanie grupy, złożonej z tych ostatnich przekształceń, jest równoważne przyjęciu za podstawę ogółu przekształceń liniowych płaszczyzny, z dołączeniem stożkowej do badanych utworów tej płaszczyzny. Zbierając to wszystko, możemy powiedzieć:

Teorya form dwójkowych i geometrya rzutowa płaszczyzny, przy przyjęciu stożkowej za utwór zasadniczy, są równoznaczne.

Ponieważ nakoniec geometrya płaszczyzny ze stożkową zasadniczą, z powodu równości grupy, zlewa się z geometryą rzutową metryczną, którą można w płaszczyźnie oprzeć na stożkowej [2]), przeto możemy też powiedzieć:

Teorya form dwójkowych i ogólna geometrya rzutowa metryczna na płaszczyźnie są równoznaczne.

Zamiast stożkowej na płaszczyźnie, można w poprzedzającem uważaniu wziąć krzywą trzeciego rzędu w przestrzeni i t. p., lecz tego nie będziemy rozwijali. Wyłożony tu związek geometryi płaszczyzny, przestrzeni lub dowolnie rozciągłej rozmaitości zgadza się co do swej istoty z zasadą przeniesienia, podaną przez Hessego (Dziennik Borchardta T. 66).

[1]) Zamiast stożkowej na płaszczyźnie można wziąć krzywą skośną trzeciego rzędu, lub w ogóle wprowadzić utwór odpowiedni w przypadku rozmaitości n-wymiarowej.

[2]) Inne przykłady, a w szczególności rozszerzenie ich do rozmaitości więcej wymiarowych znaleść można w mojej rozprawie: „O geometryi liniowej i geometryi metrycznej“ (Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie) Math. Ann. t. V, 2, oraz w pracach Lie'go, o których zaraz mówić będziemy.

[1]) Porówn. Notę III.

[2]) Porówn. Notę V.

Przykład zupełnie podobny daje geometrya rzutowa przestrzeni, albo, inaczej mówiąc, teorya form czwórkowych. Jeżeli za element przestrzeni weźmiemy prostą i nadamy jej, jak to ma miejsce w geometryi liniowej, sześć współrzędnych jednorodnych, pomiędzy któremi zachodzi jedno równanie warunkowe stopnia drugiego, wtedy przekształcenia liniowe i dualistyczne przestrzeni stają się przekształceniami liniowemi sześciu zmiennych, za niezależne uważanych, przeprowadzającemi równanie warunkowe w samo siebie. Przez połączenie podobnych rozumowań, dochodzimy do twierdzenia:

Teorya form czwórkowych zlewa się z rzutowem oznaczeniem miarowem rozmaitości utworzonej przez sześć zmiennych jednorodnych.

Bliższe rozwinięcie tego poglądu będzie podane w niezadługo mającej wyjść pracy: „O tak nazwanej geometryi nieeuklidesowej“ (Math. Annalen t. VI) oraz w Nocie na końcu niniejszego artykułu [1]).

Do poprzedzających rozważań nawiązuję jeszcze dwie uwagi. Jedna z nich zawarta jest wprawdzie implicite w powyższem, lecz wymaga rozwinięcia, ponieważ przedmiot, do którego się odnosi, może łatwo prowadzić do nieporozumień.

Jeżeli wprowadzamy dowolne utwory, jako elementy przestrzeni, ta ostatnia otrzymuje dowolną liczbę wymiarów. Jeżeli wszakże utrzymujemy zwykły punkt widzenia (elementarny lub rzutowy), to grupa, jaką winniśmy wziąć za podstawę dla rozmaitości wielokrotnie rozciągłej, jest daną z góry; jest nią właśnie grupa główna lub grupa przekształceń rzutowych. Gdybyśmy za podstawę chcieli wziąć inną grupę, musielibyśmy odstąpić od zwykłego lub rzutowego poglądu. Jakkolwiek więc prawdą jest, że przy odpowiednim wyborze elementów przestrzeni, taż przestrzeń przedstawia rozmaitości o dowolnej liczbie wymiarów, to z drugiej strony ważną jest rzeczą dodać, *że przy tem przedstawieniu albo należy przyjąć z góry określoną grupę za podstawę badania rozmaitości, lub też, jeżeli chcemy rozporządzać grupą, musimy przystosować odpowiednio nasz pogląd geometryczny.* Bez tego zastrzeżenia możnaby np. szukać przedstawienia geometryi liniowej w sposób następujący. Prosta ma w geometryi liniowej sześć współrzędnych; tyleż współczynników ma stożkowa na płaszczyźnie. Obrazem przeto geometryi liniowej byłaby geometrya układu stożkowych, wydzielonego z ogółu stożkowych za pomocą równania stopnia drugiego pomiędzy współczynnikami. Jest to prawdą, jeżeli za grupę geometryi płaskiej przyjmiemy ogół przekształceń, przedstawionych przez przekształcenia liniowe współczynników stożkowej, przeprowadzające równanie warunkowe stopnia drugiego samo w siebie. Lecz jeżeli utrzymujemy punkt widzenia geometryi płaskiej elementarnej lub rzutowej, to nie otrzymujemy *żadnego* obrazu.

Uwaga druga odnosi się do następującego pojęcia. Niechaj w przestrzeni będzie grupa; dajmy na to, grupa główną. Wybierzmy pojedyńczy utwór przestrzenny np. punkt lub prostą albo elipsoidę i t. p. i zastosujmy do

[1]) Porówn. Notę VI.

niej wszystkie przekształcenia grupy głównej. Otrzymujemy wtedy wielokrotnie nieskończoną rozmaitość o liczbie wymiarów, równej wogóle liczbie parametrów dowolnych zawartych w grupie; ta liczba w przypadkach szczególnych obniża się, gdy mianowicie utwór pierwotnie wybrany ma tę własność, że może być odtworzony przez nieskończenie wiele przekształceń grupy. Każda tak utworzona rozmaitość nazywa się ze względu na grupę tworzącą *ciałem* [1]). Jeżeli tedy badamy przestrzeń na podstawie grupy i wyróżniamy przytem utwory oznaczone, jako elementy przestrzeni, z drugiej zaś strony nie chcemy, by przedmioty równoważne były przedstawione w sposób różny, *to musimy, oczywiście, elementy przestrzeni wybrać w ten sposób, aby ich rozmaitość była ciałem, lub mogła być rozłożona na ciała* [2]). Z tego oczywistego spostrzeżenia zrobimy później (§ 9) użytek. Pojęcie ciała będzie jeszcze raz w paragrafach końcowych omówione w związku z pojęciami pokrewnemi.

§ 6.

Geometrya promieni odwrotnych. Wyjaśnienie znaczenia zmiennej $x + iy$.

Powracamy znów do rozpoczętego w §§ 2 i 3 omówienia rozmaitych kierunków badania geometrycznego.

Obok sposobów widzenia geometryi rzutowej zasługuje pod wieloma względami na uwagę klasa rozważań geometrycznych, w których czyni się ciągły użytek z przekształcenia za pomocą promieni odwrotnych. Należą tu badania o tak nazwanych cyklidach i powierzchniach anallagmatycznych,

[1]) Wybieram tę nazwę, idąc za Dedekindem, który nazywa w Teoryi liczb ciałem dziedzinę liczbową, gdy powstała z elementów danych za pomocą działań danych. (Wydanie drugie „Odczytów“ Dirichleta).

[2]) [W tekście nie zwrócono należytej uwagi na to, że grupa, o którą idzie, może zawierać w sobie podgrupy, zwane wyróżnionemi. Jeżeli utwór geometryczny pozostaje niezmienionym przy działaniach podgrupy wyróżnionej, wtedy to samo miejsce dla wszystkich utworów, które powstają z niego przez działania grupy całkowitej, t. j. dla wszystkich utworów wynikającego z niej ciała. Tak utworzone ciało byłoby wszakże zupełnie nieprzydatnem do przedstawienia działań grupy. Należy więc w tekście rozumieć tylko ciała, powstające z elementów przestrzeni, które nie pozostają bez zmiany przy żadnej podgrupie wyróżnionej grupy danej].

o ogólnej teoryi układów ortogonalnych, dalej badania nad potencyałem i t. d. Jeżeli rozważań w nich zawartych nie zebrano dotąd, jak to uczyniono z geometryą rzutową, w oddzielną geometryą, *w której grupą zasadniczą byłaby grupa przekształceń, powstających przez połączenie grupy głównej z przekształceniem za pomocą promieni odwrotnych*, — to należy to przypisać okoliczności przypadkowej, skutkiem której teorye te dotąd nie były przedstawione w związku ze sobą; pojedyńczy autorowie, którzy w tym kierunku pracowali, zapewne nie byli dalecy od podobnego metodycznego rozważania.

Analogia pomiędzy geometryą promieni odwrotnych a geometryą rzutową ujawnia się sama przez się, skoro tylko postawimy pytanie o ich porównaniu; z tego to powodu, nie wchodząc w szczegóły, zwrócimy tu w ogólności uwagę na punkty następujące:

W geometryi rzutowej pojęciami elementarnemi są: punkt, prosta, płaszczyzna. Koło i kula są tylko szczególnemi przypadkami stożkowej i powierzchni stopnia drugiego. Utwór nieskończenie odległy geometryi elementarnej jest płaszczyzną; utworem zasadniczym, odpowiadającym geometryi elementarnej, jest stożkowa urojona w nieskończoności.

W geometryi promieni odwrotnych pojęciami elementarnemi są: punkt, koło i kula. Prosta i płaszczyzna są szczególnemi przypadkami tych ostatnich, charakteryzującemi się tem, że zawierają punkt pewien nieskończenie odległy, który zresztą w metodzie tej nie jest już więcej wyróżniony od innych. Geometrya elementarna powstaje wtedy, gdy ten punkt uważamy jako stały.

Geometrya promieni odwrotnych nadaje się do przedstawienia, które ją stawia obok teoryi form dwójkowych i geometryi liniowej, jeżeli te ostatnie traktujemy w sposób, wskazany w poprzedzających paragrafach. Aby to okazać, ograniczmy najprzód rozważanie do geometryi płaskiej, a więc i do geometryi promieni odwrotnych na płaszczyźnie [1]).

Już wspomnieliśmy o związku, zachodzącym pomiędzy geometryą płaszczyzny i geometryą rzutową powierzchni stopnia drugiego, której jeden punkt jest wyróżniony (§ 4). Jeżeli odwrócimy uwagę od punktu wyróżnionego i będziemy przeto uważali geometryą rzutową na powierzchni w sobie, to otrzymamy obraz geometryi promieni odwrotnych na płaszczyźnie. Gdyż łatwo przekonać się można, iż [2]) grupie przekształceń promieni odwrotnych na płaszczyźnie odpowiada przez odwzorowanie powierzchni stopnia drugiego ogół przekształceń tej ostatniej w samą siebie. A zatem:

[1]) Geometrya promieni odwrotnych jest równoznaczna z badaniem rzutowem prostej, ponieważ odpowiednie przekształcenia są te same w obu przypadkach. Można i w geometryi promieni odwrotnych mówić o stosunku anharmonicznym („podwójnego podziału") czterech punktów prostej i o takimże stosunku czterech punktów koła.

[2]) Porówn. cytowaną już pracę. „O geometryi liniowej i geometryi metrycznej" Mathematische Annalen, t. V.

Geometrya promieni odwrotnych na płaszczyźnie i geometrya rzutowa na powierzchni stopnia drugiego są równoznaczne; i także:

Geometrya promieni odwrotnych w przestrzeni jest równoznaczna z geometryą rzutową rozmaitości, określonej za pomocą równania stopnia drugiego pomiędzy pięcioma zmiennemi jednorodnemi.

Tak więc geometrya przestrzeni przez geometryą promieni odwrotnych zostaje wprowadzoną w taki sam związek z rozmaitością czterowymiarową, w jakim, dzięki geometryi liniowej, pozostaje z rozmaitością pięciowymiarową.

Jeżeli ograniczymy się jedynie na przekształceniach *rzeczywistych*, wtedy geometrya promieni odwrotnych na płaszczyźnie prowadzi i do innego jeszcze interesującego przedstawienia i zastosowania. Jeżeli zmienną zespoloną $x+iy$ rozmieścimy w sposób zwykły na płaszczyźnie, to jej przekształceniom liniowym odpowiada grupa promieni odwrotnych, ograniczona, jak powiedziano, do przekształceń rzeczywistych [1]). Badanie zaś funkcyi zmiennej urojonej, którą poddaje się dowolnym przekształceniom wymiernym, stanowi to samo, co przy zmienionym nieco sposobie przedstawienia, nazywa się teoryą form dwójkowych. A zatem:

Teorya form dwójkowych znajduje swoje przedstawienie w geometryi promieni odwrotnych na płaszczyźnie rzeczywistej i to w ten sposób, że wartości zmiennej zespolonej znajdują także swoje przedstawienie.

Aby dojść do dziedziny zwyklejszego wyobrażenia przekształceń rzutowych, wznieśmy się od płaszczyzny do powierzchni stopnia drugiego. Ponieważ rozważaliśmy tylko elementy rzeczywiste płaszczyzny, wybór więc powierzchni nie jest rzeczą obojętną; nie należy tylko, oczywiście, brać powierzchni prostoliniowej. W szczególności możemy, jak to się zresztą czyni przy interpretacyi zmiennej zespolonej, pomyśleć tę powierzchnią jako kulę; otrzymamy wtedy twierdzenie:

Teorya form dwójkowych zmiennej zespolonej znajduje swoje przedstawienie w rzutowej geometryi powierzchni kuli rzeczywistej.

Nie mogłem sobie odmówić jeszcze pokazania w Nocie [2]), jak pięknie obraz ten wyjaśnia teoryą form dwójkowych trzeciego i czwartego stopnia.

[1]) [Wyrażenie w tekście jest niedokładne. Przekształceniom liniowym $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (gdzie $z' = x' + iy'$ $z = x + iy$) odpowiadają tylko te działania z grupy promieni odwrotnych, przy których nie zachodzi odwrócenie kątów (przy których oba punkty kołowe płaszczyzny nie ulegają wzajemnej przemianie). Jeżeli chcemy objąć całkowitą grupę promieni odwrotnych, musimy do tych przekształceń dodać i inne (nie mniej ważne): $z' = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}$, gdzie $z' = x' + iy$, lecz $z_1 = x - iy$].

[2]) Porówn. Notę VII.

§ 7.

Rozwinięcie uwag poprzedzających. Geometrya kulista Lie'go.

Do teoryi form dwójkowych, geometryi promieni odwrotnych i geometryi liniowej, których współrzędność wyżej wykazaliśmy i które zdają się różnić od siebie tylko liczbą zmiennych, można zastosować pewne uogólnienia, które teraz przedstawimy. Mają one służyć do objaśnienia na nowych przykładach myśli, iż grupa, określająca sposób badania danych utworów, może być dowolnie rozszerzona; prócz tego było naszym zamiarem wskazać związek, w jakim pomysły Lie'go, przedstawione w świeżej jego pracy [1]), pozostają z niniejszemi rozważaniami. Droga, jaką dojdziemy do geometryi kulistej Lie'go, różni się od drogi, przyjętej przez samego Lie'go, tem, że on opiera się na pojęciach liniowo-geometrycznych, gdy my tymczasem, by nie odstąpić od zwykłego poglądu geometrycznego i zachować związek z poprzedzającym wykładem, przyjmujemy tu mniejszą liczbę zmiennych. Uważania te, jak to Lie sam zaznaczył (Göttinger Nachrichten, 1871, Nr 7, 22), są niezależne od liczby współrzędnych. Należą one do wielkiego koła poszukiwań, odnoszących się do badania rzutowego równań stopnia drugiego z dowolną liczbą zmiennych; badań tych dotknęliśmy już częściej i napotkamy je jeszcze kilkakrotnie (porówn. § 10 i inne).

Nawiązuję rzecz do związku pomiędzy płaszczyzną rzeczywistą a powierzchnią kuli, otrzymanego wyżej za pośrednictwem rzutu stereograficznego. Już w § 5 związaliśmy geometryą płaszczyzny z geometryą na stożkowej, przyporządkowując prostej na płaszczyźnie parę punktów, w których ta prosta spotyka stożkową. Podobnież możemy ustanowić związek pomiędzy geometryą przestrzeni a geometryą na kuli, przyporządkowując każdej płaszczyźnie koło, według którego płaszczyzna ta przecina kulę. Jeżeli tedy geometryą kuli, za pomocą rzutu stereograficznego, przeniesiemy z niej na płaszczyznę — przez co każde koło przechodzi na koło—wtedy odpowiadać sobie będą wzajemnie:

Geometrya przestrzeni, w której elementem jest płaszczyzna; grupą — grupa tych przekształceń liniowych, które przekształcają kulę samą w siebie;

Geometrya płaska, której elementem jest koło; grupą zaś — grupa promieni odwrotnych.

[1]) Partielle Differentialgleichungen und Complexe, Math. Ann., t. V.

Pierwszą z tych geometryj uogólnimy w dwóch kierunkach, biorąc, zamiast jej grupy, grupę obszerniejszą. Otrzymane stąd rozszerzenie przenosi się wprost przez odwzorowanie na geometryą płaską.

Zamiast przekształceń liniowych przestrzeni, składającej się z płaszczyzn, i przekształcających kulę w samą siebie, można — jak to widzieć łatwo, — wziąć ogół przekształceń liniowych przestrzeni lub też ogół przekształceń płaszczyznowych przestrzeni, które [w znaczeniu poniżej podać się mającem] pozostawiają kulę niezmienioną; w pierwszym razie odwracamy uwagę od kuli, w drugim od charakteru liniowego stosowanych przekształceń. Pierwsze uogólnienie jest zrozumiałem bez dalszych wyjaśnień; rozpatrzymy je więc najprzód i zbadamy jego znaczenie dla geometryi płaskiej; później zajmiemy się drugiem, przyczem przedewszystkiem trzeba będzie oznaczyć odpowiednie najogólniejsze przekształcenie.

Przekształcenia liniowe przestrzeni mają tę własność wspólną, że przeprowadzają pęki i wiązki płaszczyzn w takież pęki i wiązki. Przeniesiony na kulę pęk płaszczyzn daje pęk kół, t. j. pojedyńczo — nieskończony szereg kół o wspólnych punktach przecięcia; wiązka płaszczyzn daje wiązkę kół, t. j. podwójnie nieskończony szereg kół prostopadłych do koła stałego (do koła, którego płaszczyzna jest płaszczyzną biegunową punktu wspólnego płaszczyznom danej wiązki). Przekształceniom liniowym przestrzeni odpowiadają przeto na kuli, a więc i na płaszczyźnie, przekształcenia kołowe, mające tę własność charakterystyczną, że przekształcają pęki i wiązki kołowe w takież pęki i wiązki [1]). *Geometrya płaska, oparta na grupie takich przekształceń, jest obrazem zwykłej rzutowej geometryi przestrzeni.* W geometryi tej nie będzie można przyjąć punktu za element płaszczyzny, ponieważ punkty dla obranej grupy przekształceń nie tworzą ciała (§ 5), lecz trzeba będzie obrać koła jako elementy.

Przy drugiem ze wspomnionych uogólnień należy przedewszystkiem rozstrzygnąć pytanie co do istoty odpowiedniej grupy przekształceń. Idzie o znalezienie takich przekształceń, które z każdego [pęka płaszczyzn, której oś dotyka kuli, znowu wytwarzają taki pęk]. Dla uproszczenia wysłowienia, odwróćmy najprzód pytanie to dualistycznie i zejdźmy o krok jeden niżej w liczbie wymiarów: zapytajmy więc, jakie są przekształcenia punktowe płaszczyzny, które z każdej stycznej do danej stożkowej wytwarzają znów styczną. W tym celu uważajmy płaszczyznę z jej stożkową za obraz powierzchni stopnia drugiego, którą z punktu przestrzeni, nie znajdującego się na powierzchni, rzucono na płaszczyznę tak, że stożkowa przedstawia krzywą przejścia. Stycznym stożkowej odpowiadają tworzące powierzchni, i pytanie nasze sprowadza się do pytania o znalezieniu ogółu

[1]) Te przekształcenia rozpatruje okolicznościowo Grassmann w swojej „Ausdehnungslehre“ (Wydanie z r. 1862, str. 278).

przekształceń punktowych, które odtwarzają powierzchnią, a przy których tworzące pozostają tworzącemi.

Takich przekształceń jest nieskończenie wiele, tyle razy, ile chcemy, bo potrzeba tylko punkt powierzchni uważać, jako przecięcie tworzących dwojakiego rodzaju i przekształcić w sam siebie każdy z tych układów. Lecz pomiędzy przekształceniami znajdują się w szczególności przekształcenia liniowe i na te jedynie zwrócimy uwagę. Gdybyśmy bowiem mieli do czynienia nie z powierzchnią, lecz z rozmaitością wielokrotnie rozciągłą, przedstawioną przez równanie stopnia drugiego, pozostałyby tylko przekształcenia liniowe, inne by odpadły [1]).

Te przekształcenia liniowe odtwarzające powierzchnią, gdy je przeniesiemy za pomocą rzutu (nie stereograficznego) na płaszczyznę, dają przekształcenia punktowe o znaczeniu podwójnem, mocą których z każdej stycznej do stożkowej, tworzącej krzywą przejścia, powstaje znów styczna; z każdej zaś innej prostej powstaje w ogólności stożkowa, podwójnie dotykająca krzywej przejścia. Ta grupa przekształceń daje się należycie scharakteryzować, jeżeli zbudujemy oznaczenie miarowe rzutowe na stożkowej, stanowiącej krzywą przejścia. Przekształcenia mają wtedy tę własność, że punkty, które przy oznaczeniu miarowem mają odległość równą zeru, oraz punkty, mające od innego punktu odległość stałą, przechodzą na takież same punkty.

Wszystkie te rozważania można zastosować do przypadku dowolnej liczby zmiennych, a więc w szczególności do pierwotnie postawionego pytania, odnoszącego się do kuli i do płaszczyzny, jako elementu. Można wtedy wynik przedstawić w formie szczególnie przejrzystej, gdyż kąt, jaki tworzą dwie płaszczyzny, przy oznaczeniu miarowem opartem na kuli, jest równy kątowi, jaki tworzą, w znaczeniu zwykłem, koła, według których te płaszczyzny przecinają kulę.

Otrzymujemy przeto na kuli, a więc i na płaszczyźnie, grupę przekształceń kołowych, mających własność, że *koła wzajemnie się dotykające (tworzące kąt zero), jako też koła, przecinające inne koło pod kątem równym, przekształcają w takież koła.* Do grupy tych przekształceń należą na kuli odpowiednie przekształcenia liniowe; na płaszczyźnie przekształcenia grupy promieni odwrotnych [2]). Geometrya koła, dająca się oprzeć na takiej grupie, stanowi analogon do geometryi kuli, którą dla przestrzeni utworzył Lie, a która zdaje się posiadać wyjątkowo ważne znaczenie przy badaniach krzywizny powierzchni. Obejmuje ona w sobie geometryą promieni odwrotnych w takiem samem znaczeniu, w jakiem ta ostatnia obejmuje w sobie geometryą elementarną.

Tak otrzymane przekształcenia kołowe (kuliste) mają własność szczególną, że przekształcają koła (kule) dotykające się w takież koła (kule). Jeżeli uważać będziemy wszystkie krzywe (powierzchnie), jako utwory powłóczące kół (kul), to skutkiem tych przekształceń krzywe (powierzchnie) dotykające się przechodzą na takież krzywe (powierzchnie). Przekształcenia te należą tedy do klasy przekształceń, poniżej rozpatrzyć się mających i zwanych *stycznemi*, t. j. takich przekształceń, w których dotykanie utworów punktowych jest związkiem niezmiennym. Wspomniane na pierwszem miejscu w tym paragrafie przekształcenia kołowe, obok których postawić można analogiczne przekształcenia kuliste, nie są przekształceniami stycznemi.

Powyższe dwojakie uogólnienie nawiązaliśmy do geometryi promieni odwrotnych; stosują się one także w sposób podobny i do geometryi liniowej i w ogóle do badania rzutowego rozmaitości, wydzielonej za pomocą równania stopnia drugiego, co już wyżej zaznaczono, czego wszakże tu dalej rozwijać nie będziemy.

[1]) Jeżeli uskuteczniemy rzut stereograficzny rozmaitości, to otrzymamy znane twierdzenie: „W dziedzinach wielokrotnie rozciągłych w przestrzeni, po za grupą przekształceń, znajdujących się w grupie promieni odwrotnych, nie ma żadnych przekształceń punktowych podobnych. W płaszczyźnie natomiast jest ich nieskończenie wiele. Porówn. cytowane prace Lie'go.

[2]) [Rozważanie w tekście staną się znacznie jaśniejszemi przez dodanie następujących kilku form analitycznych: Niechaj równanie kuli, którą rzucamy stereograficznie na naszą płaszczyznę, wyraża się w zwyczajnych współrzędnych czworościennych w ten sposób:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Ilości x, związane z tem równaniem warunkowem, otrzymują wtedy dla nas znaczenie współrzędnych tetracyklicznych w płaszczyźnie:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

staje się ogólnem równaniem koła na płaszczyźnie. Obliczając promień tego koła, natrafiamy na pierwiastek kwadratowy

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2},$$

który oznaczmy przez iu_5. Możemy teraz uważać koła jako elementy płaszczyzny. Grupę promieni odwrotnych przedstawia wtedy ogół przekształceń jednorodnych liniowych ilości u_1, u_2, u_3, u_4, przy których wyrażenie

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

przechodzi w wielokrotność samego siebie. Grupa zaś rozszerzona tej geometryi koła, która odpowiada geometryi kulistej Lie'go, składa się z przekształceń jednorodnych liniowych *pięciu* zmiennych, przetwarzających ilość

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

w wielokrotność samej siebie.

§ 8.

Wyliczenie dalszych metod, których podstawą jest grupa przekształceń punktowych.

Geometrya elementarna, geometrya promieni odwrotnych i geometrya rzutowa, jeżeli odwrócimy uwagę od przekształceń dualistycznych, związa-

nych ze zmianą elementu przestrzeni, są tylko przykładami pojedyńczemi wielkiego mnóstwa pomyśleć się dających metod, w których za podstawę bierzemy grupy przekształceń punktowych. Zaznaczymy tu tylko trzy następujące metody, które mają ten sam charakter, co wyżej wymienione. Jakkolwiek metody te nie rozwinęły się dotąd na samodzielne nauki w tym stopniu, w jakim rozwinęła się geometrya rzutowa, występują już jednak wyraźnie w badaniach nowszych [1]).

1. Grupa przekształceń wymiernych:

Przy przekształceniach wymiernych należy odróżnić, czy są wymiernemi dla *wszystkich* punktów dziedziny, poddanej działaniom, a więc przestrzeni, płaszczyzny i t. d., czy też tylko dla punktów pewnej rozmaitości, w tej dziedzinie zawartej, jak dla powierzchni, linii krzywej. Tylko pierwsze przekształcenia stosować można, gdy idzie o zbudowanie geometryi przestrzeni lub płaszczyzny w znaczeniu dotychczasowem; drugie z tych przekształceń, z danego tu punktu widzenia, nabierają znaczenia dopiero wtedy, gdy badamy geometryą na danej powierzchni lub linii krzywej. Toż samo rozróżnienie stosuje się i do niżej omawianej „Analysis situs“.

Dotychczasowe badania tam, jak i tu, zajmowały się istotnie tylko przekształceniami drugiego rodzaju. O ile szło nie o geometryą na powierzchni lub linii krzywej, lecz tylko o znalezienie kryteryów, aby dwie powierzchnie, dwie krzywe mogły być wzajemnie przekształcalne, badania te wychodzą z zakresu tu uważanych [2]). Ustanowiony tu schematyzm ogólny nie obejmuje całości badania matematycznego, lecz sprowadza tylko pewne kierunki pod jeden ogólny punkt widzenia.

---

[1]) Gdy w dotychczasowych przykładach mieliśmy do czynienia z grupami o skończonej liczbie parametrów, to obecnie w tekście występują już grupy nieskończone.

[2]) [Z innego znów punktu widzenia, o czem w roku 1872 nie wiedziałem jeszcze, należą one do rozważań tekstu. Mając jakiś utwór algebraiczny (krzywą, powierzchnią...), przenieśmy go do przestrzeni wyższej, wprowadzając jako współrzędne jednorodne, stosunki:

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p = dw_1 : dw_2 : \ldots : dw_p$$

gdzie $w_1, w_2 \ldots w_p$ są odpowiadającemi krzywej całkami pierwszego gatunku. W tej przestrzeni należy wziąć za podstawę wprost grupę przekształceń liniowych jednorodnych ilości φ. Porówn. różne rozprawy pp. Brilla, Nöthera, Webera oraz moją własną rozprawę: „O teoryi funkcyj Abelowych“ (Zur Theorie der Abel'schen Functionen), Math. Annalen, t. 36.

Dotąd istnieją zaledwie początki geometryi przekształceń wymiernych, jaka wypłynąć musi z przyjęcia za podstawę przekształceń rodzaju pierwszego. W dziedzinie stopnia pierwszego, na prostej, przekształcenia wymierne są identyczne z liniowemi i nie dają nic nowego. Na płaszczyźnie znamy wprawdzie ogół wszystkich przekształceń wymiernych (przekształcenia Cremony); wiemy, że dają się utworzyć przez zestawienie przekształceń kwadratowych. Znamy też cechy niezmiennicze krzywych płaskich: ich rodzaj, istnienie modułów; lecz we właściwą geometryą płaszczyzny, w znaczeniu tu omawianem, rozważania te nie rozwinęły się dotąd. Dla przestrzeni cała ta teorya jest dopiero w zaczątku. Znamy dotąd przekształceń wymiernych niewiele i stosujemy je do związania powierzchni znanych z nieznanemi za pomocą odwzorowania.

2. Analysis situs.

W tak nazwanej „Analysis situs“ szukamy tego, co pozostaje niezmiennem przy takich przekształceniach, które powstają ze złożenia nieskończenie małych odkształceń. I tu, jak już powiedziano, należy rozróżnić, czy cała dziedzina, jak np. przestrzeń, ma być poddana przekształceniom, czy też ma być z niej wydzielona pewna rozmaitość np. powierzchnia. Przekształcenia pierwszego rodzaju należałoby wziąć za podstawę geometryi przestrzeni. Ich grupa byłaby zbudowana zupełnie inaczej, niż grupy uważane dotąd. Ponieważ grupa ta obejmuje wszystkie przekształcenia, składające się z nieskończenie małych przekształceń punktowych, przyjętych za rzeczywiste, przeto już z tego względu jest ograniczona zasadniczo do rzeczywistych elementów przestrzeni i odpowiada dziedzinie funkcyi dowolnej. Można tę grupę przekształceń rozszerzyć, łącząc ją przekształceniami homograficznemi rzeczywistemi, które zmieniają i elementy nieskończenie odległe.

3. Grupa wszystkich przekształceń punktowych.

Jakkolwiek odnośnie do tej grupy żadna powierzchnia nie posiada już własności indywidualnych, ponieważ każda może być przeprowadzona w każdą inną, przy pomocy przekształceń grupy, — to wszakże, przy badaniu utworów wyższych, grupa ta z korzyścią może być stosowana. Przy pojmowaniu geometryi takiem, jak je tu przedstawiamy, może być rzeczą obojętną, że utwory te dotąd uważano nie za geometryczne lecz za analityczne, które okolicznościowo znajdowały zastosowanie geometryczne; oraz że przy ich badaniu stosowano procesy (jak np. dowolne przekształcenie punktowe), które dopiero w ostatnich czasach zaczęto świadomie uznawać za przekształcenia geometryczne. Do tych utworów analitycznych należą przedewszyst-

kiem wyrażenia różniczkowe jednorodne, następnie też równania różniczkowe cząstkowe. Do badania wszakże ogólnego tych ostatnich, bardziej odpowiednią się zdaje grupa obszerniejsza: grupa przekształceń stycznych, jak to będzie wskazane w paragrafie następnym.

Twierdzeniem głównem w geometryi, zbudowanej na podstawie grupy wszystkich przekształceń punktowych, jest to, że *przekształcenie punktowe dla nieskończenie małej części przestrzeni jest równoważne z przekształceniem liniowem.* Wywody geometryi rzutowej mają tedy wartość dla nieskończonej małości, i w tem właśnie — bez względu na wybór grupy do badania rozmaitości — *tkwi wybitny charakter metody rzutowej.*

Już na samym początku mówiliśmy o stosunku sposobów badania opartych na grupach, obejmujących jedna drugą; tu damy jeszcze jeden przykład teoryi ogólnej wyłożonej w § 2-gim. Zadajmy sobie pytanie: jak ze stanowiska „wszystkich przekształceń punktowych" należy pojmować własności rzutowe; odwróćmy przytem uwagę od przekształceń dualistycznych, należących właściwie do grupy geometryi rzutowej. To pytanie nie różni się od następującego: jaki warunek wydziela grupę przekształceń liniowych z ogółu przekształceń punktowych? Cechą charakterystyczną tych ostatnich jest to, że każdej płaszczyźnie odpowiada płaszczyzna; są to te przekształcenia punktowe, dzięki którym rozmaitość płaszczyzn (albo co na jedno wychodzi— prostych) zostaje zachowaną. *Geometrya rzutowa daje się otrzymać z geometryi wszystkich przekształceń punktowych, przez dołączenie rozmaitości płaszczyzn, zupełnie w ten sam sposób, w jaki geometrya elementarna otrzymuje się z rzutowej, przez dołączenie koła urojonego w nieskończoności.* W szczególności np. ze stanowiska wszystkich przekształceń punktowych oznaczenie powierzchni, jako algebraicznej pewnego rzędu, należy uważać za związek niezmienniczy względem rozmaitości płaszczyzn. Staje się to dopiero jasnem, gdy wraz z Grassmannem tworzenie utworów algebraicznych zwiążemy z ich konstrukcyą linijną.

§ 9.

O grupie wszystkich przekształceń stycznych.

Przekształcenia styczne rozważano wprawdzie już oddawna w pojedyńczych przypadkach; Jacobi też w badaniach analitycznych używał najogólniejszych przekształceń stycznych. Do żywego poglądu geometrycznego

zostały one wprowadzone dopiero przez najnowsze prace Lie'go [1]). Nie jest przeto zbytecznem wyraźnie tu wyłożyć, czem jest przekształcenie styczne; przytem, jak zwykle, ograniczymy się do przestrzeni punktowej o trzech wymiarach.

Pod nazwą przekształcenia stycznego, mówiąc analitycznie, rozumieć należy wszelkie podstawienie, które wyraża wartości zmiennych x, y, z i ich pochodne cząstkowe $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ przez ilości nowe x', y', z', p', q'. Widoczna, że przez to powierzchnie wzajem się dotykające przechodzą wogóle na takież powierzchnie, co usprawiedliwia nazwę przekształcenia stycznego. Jeżeli wychodzimy z punktu, jako elementu przestrzeni, to przekształcenia styczne rozpadają się na trzy klasy: takie, które potrójnie nieskończonej wielości punktów przyporządkowują punkty — są to właśnie wyżej rozpatrzone przekształcenia punktowe—; takie, które je przekształcają na krzywe; takie wreszcie, które je przekształcają na powierzchnie. Tego podziału nie należy zresztą uważać za istotny, gdyż, przy użyciu potrójnie nieskończonej wielości innych elementów przestrzeni np. płaszczyzn, znowu zachodzi podział na trzy grupy, nie zlewający się wszakże z podziałem, odnoszącym się do przypadku, w którym punkt przyjęto za element.

Jeżeli do punktu zastosujemy wszystkie przekształcenia styczne, to otrzymamy ogół wszystkich punktów, krzywych i powierzchni. Ogół dopiero wszystkich punktów, krzywych i powierzchni tworzy *ciało* naszej grupy. Można stąd wyciągnąć prawidło ogólne, że traktowanie formalne zagadnienia, (a więc naprzykład teorya równań różniczkowych cząstkowych, o której zaraz mowa będzie) musi być niedoskonałem ze stanowiska wszystkich przekształceń stycznych, jeżeli używamy tylko współrzędnych punktowych (lub płaszczyznowych), gdyż elementy przestrzeni, przyjęte za podstawę badania, nie tworzą ciała.

Gdy wszakże pragniemy trzymać się metod zwykłych, to wprowadzenie, wszystkich indywiduów zawartych w ciele, jako elementów przestrzeni, nie może mieć miejsca, ponieważ liczba tych elementów jest nieskończenie — wielokrotnie nieskończona. Stąd wypływa konieczność wprowadzenia do tych badań, jako *elementu przestrzeni*, nie punktu, ani krzywej, ani też powierzchni, lecz *elementu powierzchniowego*, t. j. układu wartości x, y, z, p, q. Przy każdem przekształceniu stycznem, z każdego elementu powierzchniowe-

[1]) Patrz w szczególności cytowaną już pracę „O równaniach różniczkowych i kompleksach" (Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe) Math. Ann. t. V. Wyjaśnienia o równaniach różniczkowych podane w tekście zawdzięczam głównie komunikatom ustnym Lie'go. Porówn. notę tegoż o teoryi równań różniczkowych cząstkowych. (Zur Theorie partieller Differentialgleichungen), Göttinger Nachrichten, październik 1872.

go powstaje nowy; pięciokrotnie nieskończona wielość elementów powierzchniowych tworzy tedy ciało.

Z tego stanowiska, należy punkt, krzywą, powierzchnią uważać jednakowo za agregaty elementów powierzchniowych o dwukrotnie nieskończonej wielości. Powierzchnia bowiem pokryta jest ∞^2 elementami, krzywa przez tyleż elementów jest dotykana, przez punkt tyleż ich przechodzi. Lecz te dwu krotnie nieskończone agregaty elementów mają jeszcze inną wspólną własność charakterystyczną. Nazwijmy *położeniem zjednoczonem* dwóch kolejnych elementów powierzchniowych x, y, z, p, q i $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $p+dp$, $q+dq$ związek, przedstawiony przez równanie

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

Będą tedy zarówno punkt, krzywa, powierzchnia *dwukrotnie — nieskończonemi rozmaitościami elementów, z których każdy z nieskończenie wielu sąsiedniemi znajduje się w położeniu zjednoczonem.* Skutkiem tego punkt, krzywa, powierzchnia charakteryzują się w sposób jednakowy, i tak też należy je przedstawiać analitycznie, jeżeli bierzemy za podstawę grupę przekształceń stycznych.

Położenie zjednoczone elementów kolejnych jest związkiem niezmienniczym, przy dowolnem przekształceniu stycznem. Lecz i odwrotnie; można przekształcenia styczne określić, *jako takie podstawienia pięciu zmiennych x, y, z, p, q, przy których związek $dz - pdx - qdy = 0$ zostaje przekształcony sam w siebie.* W tych badaniach należy uważać przestrzeń za rozmaitość pięciowymiarową; i rozmaitość tę należy badać, biorąc za grupę zasadniczą ogół wszystkich przekształceń zmiennych, pozostawiających niezmiennym oznaczony związek pomiędzy różniczkami.

Przedmiotem badania są tu w pierwszym rzędzie rozmaitości, przedstawiane przez jedno lub więcej równań pomiędzy zmiennemi, t. j. równania *różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu i ich układy.* Pytaniem głównem jest: w jaki sposób z rozmaitości elementów, czyniących zadość równaniom danym, wydzielić można jedno i dwukrotnie — nieskończone szeregi elementów, takie, aby każdy z elementów był zjednoczony w położeniu z sąsiednim. Do takiego naprzykład pytania sprowadza się zadanie rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu. Zadanie to można wyrazić w ten sposób: z czterokrotnie nieskończonej wielości elementów, czyniących zadość równaniu, wydzielić wszystkie dwukrotnie—nieskończone rozmaitości wskazanej natury. W szczególności, zadanie rozwiązania zupełnego przyjmuje obecnie formę ścisłą: rozłożyć czterokrotnie nieskończoną wielość elementów, czyniących zadość równaniu, na dwukrotnie nieskończone wielości takich rozmaitości.

Nie mam zamiaru dalej rozwijać uwag nad równaniami różniczkowemi cząstkowemi i odsyłam w tym przedmiocie do cytowanych prac Lie'go.

Zaznaczę tylko, że ze stanowiska przekształceń stycznych równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego nie ma niezmiennika; że każde takie równanie może być przekształcone na każde inne; że mianowicie równania liniowe nie wyróżniają się od innych. Różnice występują dopiero wtedy, gdy wracamy do stanowiska przekształceń punktowych.

Grupy przekształceń stycznych, przekształceń punktowych, wreszcie przekształceń rzutowych, dają się scharakteryzować w sposób jednolity, którego pominąć tu nie mogę [1]). Przekształcenia styczne określiliśmy już, jako takie, przy których zachowuje się położenie zjednoczone kolejnych elementów powierzchniowych. Przekształcenia punktowe mają przeciwnie tę własność charakterystyczną, że zjednoczone w położeniu kolejne elementy liniowe przekształcają na takież elementy; wreszcie przekształcenia homograficzne i dualistyczne zachowują położenie zjednoczone kolejnych elementów koneksowych. Pod nazwą elementu koneksowego rozumiem połączenie elementu powierzchniowego z zawartym w nim elementem liniowym; kolejne elementy koneksowe nazywają się zjednoczonemi w położeniu, jeżeli nie tylko punk lecz i element liniowy jednego jest zawarty w elemencie powierzchniowym drugiego. Wyrażenie (zresztą tymczasowe) „element koneksowy" stosuje się do utworów, świeżo przez Clebscha [2]) do geometryi wprowadzonych. Elementy te określamy za pomocą równania, które jednocześnie zawiera szereg współrzędnych punktowych, szereg współrzędnych płaszczyznowych i szereg współrzędnych liniowych i których analogon na płaszczyźnie Clebsch oznacza mianem koneksów.

§ 10.

O rozmaitościach o dowolnej liczbie wymiarów.

Już wielokrotnie zaznaczyliśmy, że nawiązując, jak to uczyniono wyżej, rozważania nasze do wyobrażenia przestrzeni, kierowaliśmy się życzeniem łatwiejszego rozwinięcia pojęć abstrakcyjnych, przez oparcie ich na przykładach dostępnych dla wyobraźni. W istocie rzeczy wszakże, rozważania te są

[1]) Zawdzięczam te określenia uwadze Lie'go.

[2]) Götting. Abhandlungen, 1872, (t. 17): „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie", jako też Götting. Nachrichten 1872, Nr 22: „Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene".

niezależne od obrazu zmysłowego i należą do dziedziny ogólnej badania matematycznego, którą nazywamy nauką o rozmaitościach rozciągłych, albo (według Grassmanna) krótko — *nauką o rozciągłości* (Ausdehnungslehre). Widoczna, w jaki sposób można poprzedzające rozważania przenieść z przestrzeni na pojęcie rozmaitości. Zauważmy tylko ponownie, że w badaniach abstrakcyjnych, w przeciwstawieniu do geometryi, mamy tę korzyść, że możemy obrać za podstawę badania zupełnie dowolną grupę przekształceń, gdy tymczasem w geometryi grupa najmniejsza, główna, była z góry dana.

Wspomnimy tu jeszcze w krótkości o następujących trzech metodach:

1. Metoda rzutowa lub algebra nowoczesna (teorya niezmienników).

Jej grupa składa się z ogółu przekształceń liniowych i dualistycznych ilości zmiennych, służących do przedstawienia elementu rozmaitości; jest to uogólnienie geometryi rzutowej. Zaznaczono już, w jaki sposób metoda ta stosuje się przy badaniu nieskończonej małości w rozmaitości, mającej o jeden wymiar więcej. Zawiera ona w sobie poniższe dwie metody w tem znaczeniu, że jej grupa obejmuje ich grupy zasadnicze.

2. Rozmaitość o krzywiźnie stałej.

Pojęcie takiej rozmaitości powstało u Riemanna z pojęcia ogólniejszego rozmaitości, w której danem jest wyrażenie różniczkowe zmiennych. Grupa składa się tu z ogółu przekształceń ilości zmiennych, pozostawiających bez zmiany wyrażenie dane. Z drugiej strony dochodzimy do wyobrażenia rozmaitości o krzywiźnie stałej, jeżeli, w myśl geometryi rzutowej, uzasadnimy oznaczenie miarowe na równaniu stopnia drugiego pomiędzy zmiennemi. Przy takiem uważaniu dochodzimy do rozszerzenia pojęcia Riemannowskiego przez wprowadzenie zmiennych zespolonych; jakkolwiek potem możemy znowu ograniczyć zmienność do dziedziny rzeczywistej. Należy tu rozległy szereg badań wspomnianych w §§ 5, 6 i 7.

3. Rozmaitość płaska.

Rozmaitością płaską nazywa Riemann rozmaitość o stałej krzywiźnie równej zeru. Jej teorya jest bezpośredniem uogólnieniem geometryi elementarnej. Jej grupa — podobnie jak grupa główna geometryi — może być wydzielona z grupy rzutowej przez to, że za stały przyjmujemy utwór, określony przez dwa równania: jedno liniowe, drugie kwadratowe. Jeżeli chcemy przytem utrzymać postać, pod jaką zwykle przedstawiają tę teoryą,

należy rozróżnić dziedzinę rzeczywistą od urojonej. Tu należą przedewszystkiem sama geometrya elementarna, potem uogólnienia teoryi krzywizny, powstałe w ostatnich czasach i t. d.

Uwagi końcowe.

Na zakończenie uczynimy jeszcze dwie uwagi, pozostające w ścisłym związku z powyższym wykładem. Jedna z tych uwag dotyczy formalizmu, za pomocą którego chcemy przedstawiać pojęcia wyżej podane; druga zaś ma wskazać niektóre zagadnienia, których podjęcie, w myśl podanych tu objaśnień, byłoby ważnem i płodnem.

Często czyniono geometryi analitycznej zarzut, iż przez wprowadzenie układu współrzędnych daje przewagę elementom dowolnym; zarzut ten odnosi się zarówno do każdej metody badania rozmaitości rozciągłych, w której element określa się za pomocą wartości ilości zmiennych. Jeżeli zarzut ten był istotnie usprawiedliwiony przy wadliwym sposobie, w jakim dawniej używano metody współrzędnych, to znika natomiast przy racyonalnem stosowaniu metody. Wyrażenia analityczne, które powstawać mogą przy badaniu rozmaitości w odniesieniu do grupy, muszą, wedle samego znaczenia swego, być niezależnemi od przypadkowo obranego układu współrzędnych. Idzie więc o to, aby tę niezależność uwidocznić *formalnie*. Że to jest możliwem i jak to uskutecznić można, pokazuje algebra nowoczesna, w której najwybitniej odznacza się pojęcie formalne niezmienników, o które tu chodzi. Nauka ta posiada ogólne i wyczerpujące prawo tworzenia wyrażeń niezmienniczych i operuje tylko na takich wyrażeniach. Podobne żądanie należy stawiać metodzie formalnej i wtedy, gdy wzięto w niej za podstawę inne grupy, różne od rzutowej [1]). Formalizm bowiem winien zgadzać się z tworzeniem pojęć, bez względu na to, czy bierzemy go za wyraz dokładny i przejrzysty pojęcia, czy też przy pomocy jego przenikamy do dziedzin jeszcze nie badanych.

Wspomnimy o jednem jeszcze postawieniu zagadnienia, wynikającem z porównania wyłożonych wyżej poglądów z teoryą równań, zwaną teoryą Galois'a.

W teoryi Galois'a, jak i tu, interes koncentruje się w *grupach* przekształceń. Przedmioty, do których odnoszą się przekształcenia, są wprawdzie inne; tam mamy do czynienia ze skończoną liczbą elementów niecięgłych, tu zaś z liczbą nieskończoną elementów rozmaitości ciągłej. Lecz po-

[1]) [Naprzykład, takim formalizmem dla grupy obrotów trójwymiarowej przestrzeni około punktu stałego są kwaterniony].

równanie, skutkiem tożsamości pojęcia grupy, można posunąć dalej [1]); zaznaczamy to tem chętniej, że przez to charakteryzujemy stanowisko, jakie zajmują pewne badania rozpoczęte przez Lie'go oraz przezemnie w kierunku poglądów, jakie tu przedstawiłem [2]).

W teoryi Galois'a, jak ją przedstawił Serret w „Traité d'Algèbre supérieure" lub C. Jordan w „Traité des substitutions", właściwym przedmiotem badania jest teorya grup lub podstawień; teorya zaś równań wypływa z niej, jako zastosowanie. Podobnież żądamy *teoryi przekształceń*, t. j. nauki o grupach, które mogą być wytworzone z przekształceń natury danej. Pojęcia przemienności, podobieństwa i t. d. występują tu, jak i w teoryi podstawień. Jako zastosowanie teoryi przekształceń otrzymamy tu metodę badania rozmaitości, wypływającą z przyjęcia za podstawę grupy przekształceń.

W teoryi równań interesują nas przedewszystkiem funkcye symetryczne współczynników; następnie takie wyrażenia, które pozostają niezmiennemi, jeżeli nie przy wszystkich, to przynajmniej przy większej liczbie przemian pierwiastków. Badając rozmaitość na podstawie grupy, pytamy również, co stanowi w niej ciała (§ 5), t. j. utwory, pozostające niezmiennemi przy przekształceniach grupy. Istnieją utwory, do których stosują się nie wszystkie przekształcenia grupy, lecz tylko niektóre; takie właśnie utwory są szczególnie interesującemi w badaniu, opartem na podstawie grupy; one to mają wyróżniające się własności. Tak to, ze stanowiska geometryi zwykłej, wyróżniamy ciała symetryczne, foremne, powierzchnie obrotowe i śrubowe. Wychodząc ze stanowiska geometryi rzutowej i przy żądaniu, aby przekształcenia, przy których utwory przechodzą same w siebie, były przemiennemi, dochodzimy do utworów, badanych przez Lie'go i przezemnie w cytowanej pracy, oraz do zagadnienia ogólnego, postawionego w § 6. Dane tam w §§ 1 i 3 oznaczenie wszystkich grup nieskończenie wielu przekształceń przemiennych na płaszczyźnie stanowi część dopiero co omówionej ogólnej teoryi przekształceń [3]).

---

[1]) Przypominam, że Grassmann we wstępie do pierwszego wydania swojej „Ausdehnungslehre" (1844) przeprowadził paralelę między kombinatoryką i nauką o rozciągłości.

[2]) Porówn. wspólną naszą pracę: „Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlichen vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen". Math. Ann. t. IV.

[3]) Nie mogę pozwolić w sobie wskazania w tekście, jak płodnem jest dla teoryi równań różniczkowych cząstkowych rozważanie nieskończenie małych przekształceń. Równania różniczkowe zwyczajne, które dopuszczają te same nieskończenie małe przekształcenia, przedstawiają te same trudności całkowania. Lie pokazał w rozmaitych miejscach, a w szczególności w cytowanej rozprawie (Math. Ann. V) i objaśnił na rozmaitych przykładach (porówn. Sprawozdania Akademii w Chrystyanii, Maj 1872), jak spożytkować można te rozważania dla nauki o równaniach różniczkowych.

Noty.

1. O przeciwieństwie kierunku syntetycznego i analitycznego w geometryi nowszej.

Różnica pomiędzy nową syntezą a nową geometryą analityczną nie może już być obecnie uważana jako istotna, ponieważ treść myślowa i sposób rozumowania w obu stopniowo się upodobniły. Dlatego to do oznaczenia jednej i drugiej wybraliśmy w tekście słowo: „geometrya rzutowa". Jeżeli metoda syntetyczna w metodach swych opiera się bardziej na poglądzie przestrzennym, przez co jej pierwsze, najprostsze wywody zyskują powab niezwykły, to jednak przez to dziedzina poglądu przestrzennego nie jest zamknięta i dla metody analitycznej; owszem można wzory geometryi analitycznej uważać za wyraz dokładny i przejrzysty związków geometrycznych. Z drugiej strony, nie można niedoceniać korzyści, jakie wypływają dla postępu badania z dobrze przystosowanego formalizmu, który w pewnej mierze wyprzedza myśl. Należy wprawdzie zawsze pamiętać o tem, że przedmiot badania matematycznego nie jest wyczerpany, póki nie stał się pojęciowo oczywistym; przenikanie dalsze przy pomocy formalizmu jest tylko krokiem pierwszym, lecz zarazem i bardzo ważnym.

II. Rozdział dzisiejszej geometryi na oddzielne nauki.

Jeżeli zauważymy np. że fizyk matematyczny lekceważy korzyści, które mógłby mu zapewnić w wielu razach pogląd rzutowy, nawet nieco tylko wyrobiony—, z drugiej zaś strony, że badacz geometryi rzutowej pozostawia nietkniętą bogatą kopalnią prawd matematycznych, którą odsłoniła teorya krzywizny powierzchni, to trzeba będzie uznać dzisiejszy stan wiedzy geometrycznej za niedoskonały i prawdopodobnie za przejściowy.

III. O wartości poglądu przestrzennego.

Jeżeli w tekście nazywamy pogląd przestrzenny czemś podrzędnem, to rozumiemy to przez wzgląd na treść czysto-matematyczną rozważań, których sformułowanie mieliśmy na celu; dla tych to rozważań pogląd ten ma tylko wartość jako uzmysłowienie, mające zresztą wysoką doniosłość pod wzglę-

dem pedagogicznym. Tak np. model geometryczny, z tego punktu widzenia, jest bardzo pouczającym i interesującym. Zupełnie inaczej przedstawia się pytanie o wartości poglądu przestrzennego wogóle; tę uważam za samoistną. Istnieje geometrya właściwa, która w przeciwieństwie do badań omówionych w tekście, nie chce być jedynie formą uzmysłowioną badań bardziej abstrakcyjnych. W takiej geometryi figury przestrzenne są pojmowane w całej ich rzeczywistości postaciowej i — co właśnie stanowi stronę matematyczną — związki do nich się odnoszące są pojmowane, jako wyniki widoczne twierdzeń zasadniczych poglądu przestrzennego. Model wykonany, spostrzegany, lub tylko żywo wyobrażany, jest dla tej geometryi nie środkiem do osiągnięcia pewnego celu, lecz rzeczą samą.

Jeżeli w ten sposób, obok i niezależnie od matematyki czystej, umieszczamy geometryą, jako naukę samoistną, nie wypowiadamy przez to oczywiście nic nowego. Jest wszakże do życzenia, aby położono znowu wyraźny nacisk na ten punkt widzenia, pomijany prawie zupełnie w dzisiejszych badaniach. Z tem wiąże się okoliczność, iż odwrotnie rzadko stosowano nowe badania do ujmowania stosunków postaciowych utworów przestrzennych, mimo, że i w tym kierunku badania też mogłyby być bardzo płodnemi.

IV. O rozmaitościach o dowolnej liczbie wymiarów.

Że przestrzeń, jako miejsce punktów, ma tylko trzy wymiary — tego niema potrzeby dyskutować z matematycznego punktu widzenia; podobnież ze stanowiska matematycznego, nie można nikomu przeszkodzić, by twierdził, że przestrzeń ma właściwie cztery lub nieskończenie wiele wymiarów, z których tylko trzy spostrzegamy. Teorya rozmaitości wielokrotnie rozciągłych, występująca coraz bardziej na plan pierwszy w nowszych badaniach matematycznych, jest, co do istoty swej, zupełnie niezależna od podobnego twierdzenia. Lecz przyjął się w niej sposób mówienia, wypływający z takiego wyobrażenia. Zamiast o elementach rozmaitości, mówimy o punktach przestrzeni wyższej i t. d. Ten sposób mówienia ma w sobie tę dobrą stronę, że przypominając poglądy geometryczne, ułatwia pojmowanie; lecz miał zarazem ten niekorzystny skutek, iż badania nad rozmaitościami o wielu wymiarach uznano w szerszych kołach za nierozerwalne ze wspomnianym poglądem na istotę przestrzeni. Niema nic bardziej bezzasadnego nad to mniemanie. Odpowiednie badania matematyczne znalazłyby oczywiście odrazu zastosowanie geometryczne, gdyby to wyobrażenie było prawdziwem; lecz wartość jego i cel spoczywa, zupełnie niezależnie od tego wyobrażenia, w ich własnej treści matematycznej.

Zupełnie odmienną jest znowu teorya Plückera, który uważa przestrzeń rzeczywistą za rozmaitość o dowolnej liczbie wymiarów, wprowadzając, jako element przestrzeni, utwór zależny od dowolnej liczby parametrów (krzywą, powierzchnią i t. d., (porówn. § 5 tekstu).

Pierwszy to Grassmann w swojej „Ausdehnungslehre“ (1844) rozwinął ten sposób przedstawienia, w którym element dowolnie rozciągłej rozmaitości uważa się jako analogon punktu przestrzeni. Grassmanna pomysł ten jest zupełnie wolny od wspomnianego wyobrażenia natury przestrzeni; to ostatnie napotykamy już w okolicznościowych uwagach Gaussa, wplecione zaś do badań Riemanna nad rozmaitościami wielokrotnie rozciągłemi, stało się znanem w szerokich kołach.

Oba poglądy Grassmanna i Plückera mają swoje właściwe przymioty; można stosować z korzyścią oba na przemian: to jeden to drugi.

V. O tak nazwanej geometryi nieeuklidesowej.

Geometrya miarowa rzutowa, o której mowa w tekście, zlewa się, jak uczą nowsze badania, co do istoty swej, z geometryą miarową, którą otrzymujemy, odrzucając pewnik o równoległych, a która obecnie pod nazwą geometryi nieeuklidesowej jest przedmiotem wielu rozpraw i dyskusyj. Jeżeli w tekście nie wymieniliśmy tej nazwy, to stało się dla powodów, związanych z wyjaśnieniami, podanemi w nocie poprzedzającej. Zwykle łączy się z nazwą geometryi nieeuklidesowej mnóstwo wyobrażeń niematematycznych, które jedni z wielkim zapałem pielęgnują, inni z równym zapałem odrzucają; z naszemi atoli rozważaniami czysto-matematycznemi wyobrażenia te nie mają nic wspólnego. Życzenie nasze przyczynienia się do rozjaśnienia pojęć w tym kierunku niechaj usprawiedliwi następujące uwagi:

Badania nad teoryą linij równoległych oraz ich rozwinięcie mają wartość matematyczną w dwóch kierunkach:

Po pierwsze, wskazują — i pod tym względem sprawę można uważać za zamkniętą, — że pewnik o liniach równoległych nie jest wynikiem matematycznym z pewników, zwykle przed nim stawianych, lecz jest istotnie nowym faktem poglądowym, nie poruszonym w poprzednich rozważaniach, a ujawniającym się właśnie w tym pewniku. Podobne badania należałoby przeprowadzić odnośnie do każdego pewnika, i to nietylko w geometryi; doszłoby się tym sposobem do zgłębienia wzajemnego stanowiska pewników.

Powtóre, badania te obdarzyły nas cennem pojęciem matematycznem, a mianowicie pojęciem rozmaitości o krzywiznie stałej. Wiąże się to pojęcie najściślej, jak w § 10 tekstu bliżej wskazano, z oznaczeniem miarowem rzutowem, niezależnem od wszelkiej teoryi linij równoległych. Już badanie te-

go oznaczenia miarowego przedstawia samo w sobie wysoki interes matematyczny i pozwala na liczne zastosowania; prócz tego zawiera ono w sobie, jako przypadek szczególny (graniczny), oznaczenie miarowe dane w geometryi i uczy nas, jak można pojmować to ostatnie z wyższego stanowiska.

Zupełnie niezależnem od rozwiniętych tu punktów widzenia jest pytanie, na jakich zasadach opiera się pewnik o liniach równoległych, bez względu na to, czy uważać go będziemy, jako dany absolutnie — jak chcą jedni — czy też jako sprawdzony tylko przybliżenie za pomocą doświadczenia,—jak mówią inni. Jeżeliby istniały zasady do przyjęcia ostatniego poglądu, to badania matematyczne dałyby nam sposób zbudowania geometryi ściślejszej. Lecz pytanie to jest oczywiście natury filozoficznej i odnosi się w ogóle do ogólnych podstaw naszego poznania. Matematyk, *jako taki*, nie interesuję się tem pytaniem i życzy sobie, aby badania jego nie były uważane za zależne od odpowiedzi, którą jedna lub druga strona dać może.

VI. Geometrya liniowa, jako badanie rozmaitości o krzywiźnie stałej.

Jeżeli łączymy geometryą liniową z rzutowem oznaczeniem miarowem w rozmaitości pięciokrotnie rozciągłej, musimy zwrócić uwagę na to, że w prostych mamy, (ze względu na oznaczenie miarowe), tylko nieskończenie odległe elementy rozmaitości; trzeba będzie przeto zastanowić się nad tem, jaką wartość ma rzutowe oznaczenie miarowe dla jej elementów w nieskończoności. Przedstawimy teraz tę rzecz, aby usunąć trudności, jakie przeciwstawiają się pojmowaniu geometryi liniowej, jako geometryi miarowej, nawiązując te wyjaśnienia do przykładu konkretnego, który przedstawia rzutowe oznaczenie miarowe, odniesione do powierzchni stopnia drugiego.

Dwa dowolnie przyjęte punkty przestrzeni mają odnośnie do powierzchni niezmiennik bezwzględny: jest nim stosunek anharmoniczny punktów przecięcia z powierzchnią prostej, która je łączy. Jeżeli te punkty znajdują się na powierzchni, wtedy stosunek anharmoniczny, niezależnie od położenia punktów, jest równy zeru, wyjąwszy przypadek, w którym oba punkty leżą na tworzącej; wtedy stosunek ten jest nieoznaczony. Jest to jedyny przypadek szczególny, który może nastąpić w ich związku, gdy nie zlewają się ze sobą; mamy przeto twierdzenie:

Rzutowe oznaczenie miarowe, które można zbudować w przestrzeni na powierzchni stopnia drugiego, nie daje jeszcze oznaczenia miarowego dla geometryi na powierzchni.

Z tem wiąże się okoliczność, że za pomocą przekształceń liniowych powierzchni na samą siebie, trzy dowolne jej punkty mogą zejść się z każdemi trzema innemi [1]).

Chcąc mieć oznaczenie miarowe na samej powierzchni, trzeba ograniczyć grupę przekształceń, co osiągamy, utrwalając jeden punkt przestrzeni (lub jego płaszczyznę biegunową). Załóżmy najprzód, że punkt przestrzeni nie leży na powierzchni. Uczyńmy z tego punktu rzut powierzchni na płaszczyznę; otrzymamy wtedy stożkową, jako krzywą przejścia. Na tej stożkowej zbudujmy oznaczenie miarowe na płaszczyźnie i przenieśmy je powrotnie na powierzchnią [2]). Jest to właściwe oznaczenie miarowe o krzywiźnie stałej; mamy tedy twierdzenie:

Na powierzchni otrzymujemy takie oznaczenie miarowe, utrwalając punkt położony zewnątrz powierzchni.

Podobnież znajdujemy [3]):

Oznaczenie miarowe o krzywiźnie równej zeru otrzymujemy na powierzchni, jeżeli za punkt stały obierzemy punkt samej powierzchni.

Dla tych wszystkich oznaczeń miarowych na powierzchni tworzące powierzchni są liniami o długości zero. Wyrażenie elementu łuku na powierzchni dla różnych oznaczeń różni się tylko czynnikiem. Nie ma na powierzchni bezwzględnego elementu łukowego. Można wszakże mówić o kącie, który na powierzchni tworzą za sobą dwa kierunki.

Wszystkie te twierdzenia i rozważania można spożytkować wprost dla geometryi liniowej. Dla przestrzeni liniowej nie istnieje z góry żadne właściwe oznaczenie miarowe. Powstaje ono dopiero wtedy, gdy utrwalimy pewien kompleks liniowy i wtedy ma ono krzywiznę stałą lub równą zeru, stosownie do tego, czy kompleks ten jest ogólny, czy specyalny (prosta). Z wyborem tego kompleksu wiąże się także znaczenie elementu bezwzględnego. Niezależnie zaś od tego, kierunki do sąsiednich prostych, przecinających daną, są długości zero, i można też mówić o kącie, jaki dwa dowolne kierunki przesunięć ze sobą tworzą [4]).

---

[1]) Te stosunki zmieniają się w geometryi miarowej zwykłej; w niej dwa punkty nieskończenie odległe mają niezmiennik bezwzględny. Sprzeczność, jaką możnaby napotkać przy odliczaniu przekształceń liniowych powierzchni nieskończenie odległej na siebie samą, znosi się przez to, że znajdujące się pomiędzy niemi przesunięcia oraz przekształcenia z podobieństwem nie zmieniają dziedziny nieskończenie odległej.

[2]) Porówn. § 7 tekstu.

[3]) Porówn. § 4 tekstu.

[4]) Porówn. rozprawę: „Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie“ Math. Ann. t. V, str. 271.

VII. O interpretacyi form dwójkowych.

Pokażemy tu jeszcze, jak przejrzystą postać nadać można układowi form dwojkowych trzeciego i czwartego stopnia, biorąc za podstawę interpretacyą zmiennej $x + iy$ na powierzchni kuli.

Forma trzeciego stopnia f ma współczynnik sześcienny Q, kwadratowy Δ i niezmiennik R [1]). Z f i Q można utworzyć cały szereg współzmienników szóstego stopnia

$$Q^2 + \lambda \,.\, R f^2,$$

pomiędzy któremi zawiera się Δ^3. Można pokazać [2]), że każdy współzmiennik formy sześciennej rozkłada się na takie grupy sześciu punktów. Jeżeli λ może przyjmować wartości zespolone, wielość grup jest dwukrotnie nieskończona.

Tak określony układ form może być przedstawiony na kuli w sposób następujący [3]). Za pomocą odpowiedniego przekształcenia liniowego kuli na siebie samą przenieśmy trzy punkty przedstawiające f na trzy punkty równoodległe koła wielkiego. Nazwijmy to koło równikiem; trzy punkty f na niem mają długości geograficzne $0^0, 120^0, 240^0$. Wtedy Q będzie przedstawione przez trzy punkty równika o długościach $60^0, 180^0, 300^0$; Δ przez oba bieguny. Każda forma $Q^2 + \lambda R f^2$ będzie przedstawiona przez sześć punktów, których szerokość i długość geograficzną przedstawia następujący schemat, gdzie α i β oznaczają liczby dowolne:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \alpha & \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \beta & 120+\beta & 240+\beta & -\beta & 120-\beta & 240-\beta \end{array}$$

Badając te układy punktów na kuli, można spostrzedz fakt interesujący, że f i Q powstają z nich liczone podwójnie, Δ zaś potrójnie.

Forma stopnia czwartego ma współzmiennik również stopnia czwartego H, współzmiennik stopnia szóstego T, dwa niezmienniki i i j. Szczególną zwrócić należy uwagę na szereg form czwartego stopnia $iH + \lambda j f$, które

[1]) Porówn. ostatnie rozdziały dzieła Clebscha: „Theorie der binären Formen.

[2]) Przez rozważanie przekształceń liniowych, przeprowadzających formę f w siebie samą. Porówn. Math. Ann. t. IV, str. 352.

[3]) [Porówn. też Beltrami: „Ricerche sulle geometria delle forme binarie cubiche, Accademia di Bologna, Memorie, 1870].

należą wszystkie do tego samego T, a pomiędzy niemi trzy czynniki kwadratowe, na które można rozłożyć formę T, liczone są podwójnie.

Przez środek kuli przesuńmy trzy osi wzajemnie prostopadłe OX, OY, OZ. Ich sześć punktów przecięcia z kulą tworzy formę T. Cztery punkty czwórki $iH + \lambda j f$ przedstawia poniższy schemat, w którym x, y, z są współrzędnemi dowolnego punktu kuli:

$$\begin{array}{rrr} x, & y, & z, \\ x, & -y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -y, & -z. \end{array}$$

Te cztery punkty tworzą zawsze wierzchołki czworościanu symetrycznego, którego krawędzie przeciwległe są przepołowione przez osi układu współrzędnych, co cechuje rolę, jaką odgrywa T w teoryi równań czwartego stopnia, jako rozwiązująca formy $H + \lambda j f$.