

O WARUNKACH CAŁKOWALNOŚCI DLA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO W PRZYPADKU KILKU CAŁEK.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

Na wstępie niniejszego artykułu konieczną jest pewna uwaga nad wynikami pracy mojej o zagadnieniu Pfaffa, drukowanej w *Comptes rendus*¹⁾, tudzież w IV tomie *Prac matematyczno-fizycznych*²⁾.

Dla współczynników danego równania różniczkowego z n zmiennymi, w przypadku dwóch całek, wyprowadziłem był warunki całkowalności w kształcie

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0,$$

gdzie Δ_i oznaczają minory wyznacznika skośnego symetrycznego 5-go stopnia. Po upływie pewnego czasu spostrzegłem, że pięć napisanych powyżej warunków dla wskaźników i, k, l, m, r redukują się tylko do jednego równania, *pfaffianu*:

$$(k, l, r) \cdot (i, m, r) - (i, l, r) \cdot (k, m, r) + (l, m, r) \cdot (i, k, r) = 0,$$

w którym znaczenie symbolu (ρ, σ, τ) jest wiadome, (12).

Równanie ostatnie jest bardzo łatwe do dowiedzenia; należy tylko napisać wyznaczniki Δ_i w postaci rozwiniętej i odnaleźć wspólny dla wszystkich

kich dzielnik. Taka własność minorów wyznacznika skośnego symetrycznego jest bardzo zasługującą na uwagę i będzie niezbędną w pracy niniejszej.

Równanie różniczkowe z n zmiennymi

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n = 0,$$

jeżeli $n \geq 7$, może posiadać trzy całki i w tym przypadku współczynniki X_i powinny czynić zadość pewnym warunkom.

Celem rozprawy niniejszej będzie wyprowadzenie tych warunków. Dajmy, że równanie (1) posiada trzy całki

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i, \quad (i=1, 2, 3)$$

tudzież, że całki napisane sprawdzają odpowiednio trzy niezależne względem siebie równania różniczkowe

$$A_{i,1} dx_1 + A_{i,2} dx_2 + \dots + A_{i,n} dx_n = 0, \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

czyniące zadość znanym warunkom:

$$A_{i,r} \left(\frac{\partial A_{i,s}}{\partial x_t} - \frac{\partial A_{i,t}}{\partial x_s} \right) + A_{i,s} \left(\frac{\partial A_{i,t}}{\partial x_r} - \frac{\partial A_{i,r}}{\partial x_t} \right) + A_{i,t} \left(\frac{\partial A_{i,r}}{\partial x_s} - \frac{\partial A_{i,s}}{\partial x_r} \right) = 0. \quad (3)$$

Pomiędzy współczynnikami równań (1) i (2) istnieć powinna zależność

$$A_{1,k} + A_{2,k} + A_{3,k} = \alpha X_k, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

gdzie α jest nieznaną funkcją zmiennych.

Oznaczmy

$$A_{2,k} + A_{3,k} = Y_k, \quad (5)$$

wskutek tego będzie

$$A_{1,k} + Y_k = \alpha X_k. \quad (6)$$

Pomiędzy ilościami $A_{2,\rho}$, $A_{3,\sigma}$ i Y_τ możemy napisać związki, które wiadome nam są z dowiedzionych własności współczynników równania kształtu

$$Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + \dots + Y_n dx_n = 0, \quad (7)$$

w przypadku dwóch całek; mianowicie:

$$\begin{aligned} [k, l, m] A_{2,i} - [i, l, m] A_{2,k} + [i, k, m] A_{2,l} - [i, k, l] A_{2,m} &= 0, \\ [k, l, r] A_{2,i} - [i, l, r] A_{2,k} + [i, k, r] A_{2,l} - [i, k, l] A_{2,r} &= 0, \\ [k, m, r] A_{2,i} - [i, m, r] A_{2,k} + [i, k, r] A_{2,m} - [i, k, m] A_{2,r} &= 0, \\ [l, m, r] A_{2,i} - [i, m, r] A_{2,l} + [i, l, r] A_{2,m} - [i, l, m] A_{2,r} &= 0, \\ [l, m, r] A_{2,k} - [k, m, r] A_{2,l} + [k, l, r] A_{2,m} - [k, l, m] A_{2,r} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Znaczenie symbolu $[q, \sigma, \tau]$ jest

$$[q, \sigma, \tau] = Y_q \left(\frac{\partial Y_\sigma}{\partial x_\tau} - \frac{\partial Y_\tau}{\partial x_\sigma} \right) + Y_\sigma \left(\frac{\partial Y_\tau}{\partial x_q} - \frac{\partial Y_q}{\partial x_\tau} \right) + Y_\tau \left(\frac{\partial Y_q}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial Y_\sigma}{\partial x_q} \right). \quad (9)$$

Wiemy także z warunków całkowalności w omówionym wyżej przypadku, że, rugując ilości $A_{q,\sigma}$ z układu (8), dochodzimy do następującego równania pomiędzy samymi ilościami Y_q :

$$[k, l, r] \cdot [i, m, \tau] - [i, l, r] \cdot [k, m, \tau] + [l, m, \tau] \cdot [i, k, r] = 0. \quad (10)$$

Tym sposobem, mając równania (3) i (10), możemy utworzyć taki układ

$$\left. \begin{aligned} A_{1,i} Q_{k,l} + A_{1,k} Q_{l,i} + A_{1,l} Q_{i,k} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{k,m} + A_{1,k} Q_{m,i} + A_{1,m} Q_{i,k} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{k,r} + A_{1,k} Q_{r,i} + A_{1,r} Q_{i,k} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{k,s} + A_{1,k} Q_{s,i} + A_{1,s} Q_{i,k} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{l,m} + A_{1,l} Q_{m,i} + A_{1,m} Q_{i,l} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{l,r} + A_{1,l} Q_{r,i} + A_{1,r} Q_{i,l} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{l,s} + A_{1,l} Q_{s,i} + A_{1,s} Q_{i,l} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{m,r} + A_{1,m} Q_{r,i} + A_{1,r} Q_{i,m} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{m,s} + A_{1,m} Q_{s,i} + A_{1,s} Q_{i,m} &= 0, \\ A_{1,i} Q_{r,s} + A_{1,r} Q_{s,i} + A_{1,s} Q_{i,r} &= 0, \\ [k, l, r] \cdot [i, m, \tau] - [i, l, r] \cdot [k, m, \tau] + [l, m, \tau] \cdot [i, k, r] &= 0, \\ [k, l, s] \cdot [i, m, \tau] - [i, l, s] \cdot [k, m, \tau] + [l, m, \tau] \cdot [i, k, s] &= 0, \\ [l, m, s] \cdot [i, r, \tau] - [i, m, s] \cdot [l, r, \tau] + [m, r, \tau] \cdot [i, l, s] &= 0, \\ [k, m, s] \cdot [i, r, \tau] - [i, m, s] \cdot [k, r, \tau] + [m, r, \tau] \cdot [i, k, s] &= 0, \\ [k, l, s] \cdot [i, r, \tau] - [i, l, s] \cdot [k, r, \tau] + [l, r, \tau] \cdot [i, k, s] &= 0, \\ [l, m, s] \cdot [k, r, \tau] - [k, m, s] \cdot [l, r, \tau] + [m, r, \tau] \cdot [k, l, s] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

gdzie dla krótkości wprowadziliśmy oznaczenia

$$Q_{a,b} = \frac{\partial A_{1,a}}{\partial x_b} - \frac{\partial A_{1,b}}{\partial x_a}. \quad (a, b = i, k, l, m, r, s)$$

W ostatnich sześciu równaniach układu (11) zamiast Y_j należy podstawić

$$Y_j = \alpha X_j - A_{1,j}, \quad (j = i, k, l, m, r, s)$$

i wskutek tego wartość symbolów będzie

$$[q, \sigma, \tau] = -\alpha X_q Q_{\sigma,\tau} - \alpha X_\sigma Q_{\tau,q} - \alpha X_\tau Q_{q,\sigma} + \alpha^2 (q, \sigma, \tau) - A_{1,q} \left(\frac{\partial \alpha X_\sigma}{\partial x_\tau} - \frac{\partial \alpha X_\tau}{\partial x_\sigma} \right) - A_{1,\sigma} \left(\frac{\partial \alpha X_\tau}{\partial x_q} - \frac{\partial \alpha X_q}{\partial x_\tau} \right) - A_{1,\tau} \left(\frac{\partial \alpha X_q}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \alpha X_\sigma}{\partial x_q} \right),$$

gdzie symbol (q, σ, τ) oznacza:

$$(q, \sigma, \tau) = X_q \left(\frac{\partial X_\sigma}{\partial x_\tau} - \frac{\partial X_\tau}{\partial x_\sigma} \right) + X_\sigma \left(\frac{\partial X_\tau}{\partial x_q} - \frac{\partial X_q}{\partial x_\tau} \right) + X_\tau \left(\frac{\partial X_q}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial X_\sigma}{\partial x_q} \right). \quad (12)$$

Ponieważ ostateczne równanie, które otrzymamy jako wypadek rugowania ilości Q z układu (11), nie może być zależnym od funkcji α , więc dla ułatwienia rachunków możemy przyjąć $\alpha = 1$ we wszystkich symbolach $[q, \sigma, \tau]$.

Ażeby z układu (11) wyrugować wszystkie ilości $Q_{a,b}$ możliwie najprostszym sposobem, należy z dziesięciu początkowych równań układu (11) wyznaczyć $Q_{k,l}, Q_{k,m}, Q_{k,r}, Q_{k,s}, Q_{l,m}, Q_{l,r}, Q_{l,s}, Q_{m,r}, Q_{m,s}, Q_{r,s}$ i otrzymane stąd wartości podstawić w sześć pozostałych równań tego samego układu. Po dokonaniu wszelkich redukcji, rugujemy pozostałe ilości Q z wspomnianych wyżej sześciu równań i jako ostateczny wypadek otrzymamy równanie postaci:

$$\begin{aligned} & \{ (l, m, s) \cdot (k, r, \tau) - (k, m, s) \cdot (l, r, \tau) + (m, r, \tau) \cdot (k, l, s) \} A_{1,i} \\ & - \{ (l, m, s) \cdot (i, r, \tau) - (i, m, s) \cdot (l, r, \tau) + (m, r, \tau) \cdot (i, l, s) \} A_{1,k} \\ & + \{ (k, m, s) \cdot (i, r, \tau) - (i, m, s) \cdot (k, r, \tau) + (m, r, \tau) \cdot (i, k, s) \} A_{1,l} \\ & - \{ (k, l, s) \cdot (i, r, \tau) - (i, l, s) \cdot (k, r, \tau) + (l, r, \tau) \cdot (i, k, s) \} A_{1,m} \\ & + \{ (k, l, s) \cdot (i, m, \tau) - (i, l, s) \cdot (k, m, \tau) + (l, m, \tau) \cdot (i, k, s) \} A_{1,r} \\ & - \{ (k, l, r) \cdot (i, m, \tau) - (i, l, r) \cdot (k, m, \tau) + (l, m, \tau) \cdot (i, k, r) \} A_{1,s} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie symbole (q, σ, τ) mają znaczenie (12).

Wprowadziliśmy dla krótkości nowe symbole

$$(q, \sigma, \tau, \xi, \varphi) = (\sigma, \tau, \varphi) \cdot (q, \xi, \varphi) - (q, \tau, \varphi) \cdot (\sigma, \xi, \varphi) + (\tau, \xi, \varphi) \cdot (q, \sigma, \varphi),$$

napiszemy układ podobnych równań, jak (13), dla siedmiu wskaźników

$$i, k, l, m, r, s, t$$

w następującym kształcie:

$$\left. \begin{aligned}
 &A_{1,i}(k,l,m,r,s) - A_{1,k}(i,l,m,r,s) + A_{1,i}(i,k,m,r,s) - A_{1,m}(i,l,l,r,s) \\
 &\quad + A_{1,r}(i,k,l,m,s) - A_{1,s}(i,k,l,m,r) = 0, \\
 &A_{1,i}(k,l,m,r,t) - A_{1,k}(i,l,m,r,t) + A_{1,i}(i,k,m,r,t) - A_{1,m}(i,k,l,r,t) \\
 &\quad + A_{1,r}(i,k,l,m,t) - A_{1,t}(i,k,l,m,r) = 0, \\
 &A_{1,i}(k,l,m,s,t) - A_{1,k}(i,l,m,s,t) + A_{1,i}(i,k,m,s,t) - A_{1,m}(i,k,l,s,t) \\
 &\quad + A_{1,s}(i,k,l,m,t) - A_{1,t}(i,k,l,m,s) = 0, \\
 &A_{1,i}(k,l,r,s,t) - A_{1,k}(i,l,r,s,t) + A_{1,i}(i,k,r,s,t) - A_{1,r}(i,k,l,s,t) \\
 &\quad + A_{1,s}(i,k,l,r,t) - A_{1,t}(i,k,l,r,s) = 0, \\
 &A_{1,i}(k,m,r,s,t) - A_{1,k}(i,m,r,s,t) + A_{1,m}(i,k,r,s,t) - A_{1,r}(i,k,m,s,t) \\
 &\quad + A_{1,s}(i,k,m,r,t) - A_{1,t}(i,k,m,r,s) = 0, \\
 &A_{1,i}(l,m,r,s,t) - A_{1,l}(i,m,r,s,t) + A_{1,m}(i,l,r,s,t) - A_{1,r}(i,l,m,s,t) \\
 &\quad + A_{1,s}(i,l,m,r,t) - A_{1,t}(i,l,m,r,s) = 0, \\
 &A_{1,k}(l,m,r,s,t) - A_{1,l}(k,m,r,s,t) + A_{1,m}(k,l,r,s,t) - A_{1,r}(k,l,m,s,t) \\
 &\quad + A_{1,s}(k,l,m,r,t) - A_{1,t}(k,l,m,r,s) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ażeby dalej ułatwić pisanie, użyjemy oznaczeń:

$$\begin{aligned}
 (k,l,m,r,s) &= a_1, \quad (i,l,m,r,s) = a_2, \quad (i,k,m,r,s) = a_3, \quad (i,k,l,r,s) = a_4, \\
 (i,k,l,m,s) &= a_5, \quad (i,k,l,m,r) = a_6, \quad (k,l,m,r,t) = \beta_1, \quad (i,l,m,r,t) = \beta_2, \\
 (i,k,m,r,t) &= \beta_3, \quad (i,k,l,r,t) = \beta_4, \quad (i,k,l,m,t) = \beta_5, \quad (k,l,m,s,t) = \gamma_1, \\
 (i,l,m,s,t) &= \gamma_2, \quad (i,k,m,s,t) = \gamma_3, \quad (i,k,l,s,t) = \gamma_4, \quad (k,l,r,s,t) = \delta_1, \\
 (i,l,r,s,t) &= \delta_2, \quad (i,k,r,s,t) = \delta_3, \quad (k,m,r,s,t) = \varepsilon_1, \quad (i,m,r,s,t) = \varepsilon_2, \\
 (l,m,r,s,t) &= \eta_1.
 \end{aligned}$$

Wyznacznik układu (14)

$$W = \begin{vmatrix}
 a_1 & -a_2 & a_3 & -a_4 & a_5 & -a_6 & 0 \\
 \beta_1 & -\beta_2 & \beta_3 & -\beta_4 & \beta_5 & 0 & -a_6 \\
 \gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_3 & -\gamma_4 & 0 & \beta_5 & -a_5 \\
 \delta_1 & -\delta_2 & \delta_3 & 0 & -\gamma_4 & \beta_4 & -a_4 \\
 \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 0 & \delta_3 & -\gamma_3 & \beta_3 & -a_3 \\
 \eta_1 & 0 & -\varepsilon_2 & \delta_2 & -\gamma_2 & \beta_2 & -a_2 \\
 0 & \eta_1 & -\varepsilon_1 & \delta_1 & -\gamma_1 & \beta_1 & -a_1
 \end{vmatrix} = 0,$$

jako skośny symetryczny nieparzystego stopnia, jest zawsze tożsamościowo równy zeru. Oznaczmy minory, odpowiadające elementom pierwszego wiersza wyznacznika W , przez $W_1, W_2, \dots, W_7$, natenczas według znanego twierdzenia będzie

$$A_{1,i} : A_{1,k} : A_{1,l} : A_{1,m} : A_{1,r} : A_{1,s} : A_{1,t} = W_1 : W_2 : W_3 : W_4 : W_5 : W_6 : W_7.$$

Ponieważ jednak, jak to łatwo zauważyć, taki sam układ (14) istnieje i dla współczynników dwóch pozostałych równań (2), więc też będzie także

$$A_{2,i} : A_{2,k} : A_{2,l} : A_{2,m} : A_{2,r} : A_{2,s} : A_{2,t} = W_1 : W_2 : W_3 : W_4 : W_5 : W_6 : W_7,$$

tudzież

$$A_{3,i} : A_{3,k} : A_{3,l} : A_{3,m} : A_{3,r} : A_{3,s} : A_{3,t} = W_1 : W_2 : W_3 : W_4 : W_5 : W_6 : W_7.$$

Wiemy jednak, że współczynniki równań (2) nie mogą być nigdy względem siebie proporcjonalne; wynika stąd wniosek, że koniecznym jest

$$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = W_5 = W_6 = W_7 = 0,$$

czyli po skróceniu pozostanie jeden wspólny dzielnik

$$\begin{aligned}
 &\beta_1\gamma_2\delta_3 - \beta_1\gamma_3\delta_2 + \beta_1\gamma_4\varepsilon_2 - \beta_2\gamma_1\delta_3 + \beta_2\gamma_3\delta_1 - \beta_2\gamma_4\varepsilon_1 + \beta_3\gamma_1\delta_2 - \beta_3\gamma_2\delta_1 + \beta_3\gamma_4\varepsilon_1 \\
 &\quad - \beta_4\gamma_1\varepsilon_2 + \beta_4\gamma_3\varepsilon_1 - \beta_4\gamma_5\eta_1 + \beta_5\delta_1\varepsilon_2 - \beta_5\delta_2\varepsilon_1 + \beta_5\delta_3\eta_1 = 0.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Równanie ostatnie ma kształt *pfaffianu* i przedstawia warunek całkowalności, odpowiadający wskaźnikom i, k, l, m, r, s, t . Podobnych warunków (15) dla współczynników równania (1) możemy napisać tyle, ile jest kombinacji n liczb po siedem.

W przypadku, gdy równanie (1), przy $n \geq 9$, posiadać będzie cztery całki, znajdziemy podobnie:

$$\begin{aligned}
 &(k,l,m,r,s,t,u) A_i - (i,l,m,r,s,t,u) A_k + (i,k,m,r,s,t,u) A_l - (i,k,l,r,s,t,u) A_m \\
 &+ (i,k,l,m,s,t,u) A_r - (i,k,l,m,r,t,u) A_s + (i,k,l,m,r,s,u) A_t - (i,k,l,m,r,s,t) A_u = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie symbole, napisane we współczynnikach, oznaczają *pfaffiany* kształtu (15) z odpowiednią zamianą wskaźników.

Układ ostatni będzie składał się z dziewięciu równań, które łatwo napisać. Tak na przykład, dla drugiego równania zastępujemy w powyższym u przez v , dla trzeciego zamieniamy u przez v , tudzież t przez u i t. d. Wyznacznik takiego układu będzie tożsamościowo równy zeru, a minory, odpowiadające elementom pierwszego wiersza, zrównane do zera, dadzą po skróceniu warunek całkowalności w kształcie *pfaffianu*.

Na zasadzie rozważanych dwóch przypadków wypowiemy twierdzenie, że wogóle równanie (1), w którym $n \geq 2k+1$, może posiadać k całek. Warunki całkowalności przedstawiać się będą w kształcie funkcji Pfaffa, które otrzymamy po skróceniu odpowiednich wyznaczników stopnia $2k$, zrównanych, do zera.

O sposobach całkowania przy istnieniu warunków (15) pomówimy w jednym z następnych tomów *Prac matematyczno-fizycznych*.

Płock, dnia 17 lipca 1894 roku.

ROZWAŻANIA PORÓWNAWCZE O NOWSZYCH BADANIACH GEOMETRYCZNYCH. ¹⁾

PRZEZ

FELIKSA KLEINA.

Z A UPOWAŻNIENIEM AUTORA PRZEŁOŻYŁ *)

S. DICKSTEIN.

Pomiędzy pracami ostatnich lat pięćdziesięciu w dziedzinie geometrii pierwsze miejsce zajmuje wydoskonalenie geometrii rzutowej. Zdawało się początkowo, jakoby związki, tak nazwane metryczne, nie nadawały się do traktowania za pomocą tej geometrii, ponieważ nie pozostają niezmiennymi przy rzucie; w nowych wszakże czasach zdołano i te związki ująć z rzutowego punktu widzenia, tak że obecnie metoda rzutowa obejmuje całą geome-

¹⁾ Program ogłoszony z okoliczności wstąpienia do fakultetu filozoficznego i do senatu Uniwersytetu w Erlangen w r. 1872.

[Mój poniższy powtórnie tu przedrukowany program był już przed niedawnym czasem ogłoszony w przekładzie włoskim i francuskim (Annali di Matematica, serya II, tom 17, 1890, przekład p. G. F a n o; Annales de l'École Normale supérieure, serya III, tom 8, 1891, przekład p. P a d é **). Wprowadziłem tam w pewnych miejscach poprawki, które uwi- doczniłem za pomocą nawiasów [-]. Te poprawki, zachowane i w przedruku niniejszym,

*) Z tomu 43-go dziennika „Mathematische Annalen“, 1893.

**) Przekład angielski p. M. W. H a s k e l l a ogłoszony został w „Bulletin of the New-York Mathematical Society“, t. II, 1893. S. D.