

$$\frac{\gamma}{|x|^a} \geq |a_\alpha| \geq \frac{\gamma'}{|x|^a},$$

albo

$$\gamma \geq |a_\alpha x^\alpha| \geq \gamma'.$$

To znaczy: wartości γ i γ' są także granicami bezwzględnych wartości każdego z dodajników a_α funkcji $f(x)$, jeżeli tylko n tak obrano, że $n > m' + a$ i $n > m - a$, $a = m', m' - 1, \dots + 1, -2, \dots - m$.

We Lwowie, w styczniu 1894 r.

O WYRAŻENIACH SYMETRYCZNYCH Z WARTOŚCI FUNKCYI mod. m .

NAPISZAŁ

WŁODZIMIERZ LEWICKI.

Rozważanie funkcji symetrycznej

$$f(x) + f(x_{\varepsilon_1}) + f(x_{\varepsilon_2}) + \dots + f(x_{\varepsilon_{m-1}}),$$

gdzie $f(x)$ przedstawia funkcję analityczną o elemencie $\mathfrak{P}(x)$, zbieżnym w kole $|x| < R$; $x, x_{\varepsilon_1}, x_{\varepsilon_2}, \dots, x_{\varepsilon_{m-1}}$ są wartościami argumentu x w wierzchołkach m -boku foremnego; $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}$ — pierwiastkami równania $z^{m-1} = 0$, doprowadziło do godnych uwagi związków między tą funkcją symetryczną a teorią pozostałości (residuów) Cauchy'ego. Związki te tak dla funkcji wymiernych jak i analitycznych, przy dowolnem m , podał prof. Puzyrna¹⁾.

Uogólnimy rzecz powyższą, rozważając w pierw funkcję symetryczną postaci:

$$\sum f(x_{\varepsilon_\lambda}) f(x_{\varepsilon_\mu}),$$

¹⁾ Rozprawę Wydz. mat.-przyr. Akademii Umiej. w Krakowie, t. XXVI, str. 311 i dalsze.

gdzie $f(x)$ przedstawia funkcją wymierną lub analityczną

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^q a_{\lambda} x^{\lambda}; \quad q \leq \infty,$$

a w dalszym ciągu rozważymy ogólną funkcją symetryczną:

$$\sum f(x_{\varepsilon_1}) f(x_{\varepsilon_2}) \dots f(x_{\varepsilon_r}); \quad r \leq m,$$

zwłaszcza w przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcją całkowitą wymierną.

1. Dla funkcji $f(x)$ wymiernej całkowitej stopnia n będzie:

$$\begin{aligned} & f(x_{\varepsilon_0}) [f(x_{\varepsilon_1}) + f(x_{\varepsilon_2}) + \dots + f(x_{\varepsilon_{m-1}})] \\ & + f(x_{\varepsilon_1}) [f(x_{\varepsilon_0}) + f(x_{\varepsilon_2}) + \dots + f(x_{\varepsilon_{m-1}})] \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$+ f(x_{\varepsilon_{m-1}}) [f(x_{\varepsilon_0}) + f(x_{\varepsilon_1}) + \dots + f(x_{\varepsilon_{m-2}})] = 2 \sum_{\substack{\lambda=0, 1, 2, \dots, m-1 \\ \mu=0, 1, 2, \dots, m-1}} f(x_{\varepsilon_{\lambda}}) f(x_{\varepsilon_{\mu}}) \quad \{\lambda < \mu\}$$

$$(\varepsilon_0 = 1).$$

Przy $m > n$ istnieje, jak wiemy, związek: ¹⁾

$$f(x_{\varepsilon_0}) + f(x_{\varepsilon_1}) + \dots + f(x_{\varepsilon_{m-1}}) = m a_0, \quad (2)$$

czyli

$$\begin{aligned} & f(x_{\varepsilon_0}) + f(x_{\varepsilon_1}) + \dots + f(x_{\varepsilon_{l-1}}) + f(x_{\varepsilon_{l+1}}) + \dots \\ & \dots + f(x_{\varepsilon_{m-1}}) = m a_0 - f(x_{\varepsilon_l}). \end{aligned}$$

Stosując ten związek do równania (1), otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2 \sum f(x_{\varepsilon_1}) f(x_{\varepsilon_{\mu}}) &= m^2 a_0^2 - [f(x_{\varepsilon_0})^2 + f(x_{\varepsilon_1})^2 + \dots + f(x_{\varepsilon_{m-1}})^2] \\ &= m^2 a_0^2 - \sum_{\alpha=0, 1, 2, \dots} a_{\alpha}^2 x^{2\alpha} [\varepsilon_0^{2\alpha} + \varepsilon_1^{2\alpha} + \dots + \varepsilon_{m-1}^{2\alpha}] \\ &\quad - \sum_{\substack{\alpha=0, 1, 2, \dots \\ \beta=0, 1, 2, \dots}} 2 a_{\alpha} a_{\beta} x^{\alpha+\beta} [\varepsilon_0^{\alpha+\beta} + \varepsilon_1^{\alpha+\beta} + \dots + \varepsilon_{m-1}^{\alpha+\beta}] \quad \{\alpha < \beta\} \end{aligned} \quad (3)$$

¹⁾ Loc. cit. str. 323.

Pierwiastki ε mają tę własność, że gdy:

$$2\alpha \equiv 0 \pmod{m}, \quad \alpha + \beta \equiv 0 \pmod{m},$$

to:

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1} \varepsilon_{\lambda}^{2\alpha} = m \quad \sum_{\lambda=0}^{m-1} \varepsilon_{\lambda}^{\alpha+\beta} = m;$$

w każdym zaś innym razie sumy te są zerem.

Ze względu na to, wyrażenie (3) dla m parzystego przybierze postać

$$\begin{aligned} 2 \sum f(x_{\varepsilon_1}) f(x_{\varepsilon_{\mu}}) &= m^2 a_0^2 - m a_0^2 - a_m^2 m x^{2m} - a_{2m}^2 m x^{4m} - a_{3m}^2 m x^{6m} - \dots \\ &\quad - a_{m/2}^2 m x^m - a_{3m/2}^2 m x^{3m} - \dots - \sum_{\alpha < km-\alpha} 2 a_{\alpha} a_{km-\alpha} m x^{km}. \end{aligned}$$

Utwórzmy wyrażenie:

$$\frac{\sum f(x_{\varepsilon_1}) f(x_{\varepsilon_{\mu}})}{\binom{m}{2}} = H_2(x, m);$$

widoczną jest rzeczą, że dla m parzystego:

$$\begin{aligned} H_2(x, m) &= a_0^2 - \frac{x^m}{m-1} [a_0 a_m + a_1 a_{m-1} + \dots + a_{\frac{m}{2}-1} a_{\frac{m}{2}+1} + a_{\frac{m}{2}}^2] \\ &\quad - \frac{x^{2m}}{m-1} [a_0 a_{2m} + a_1 a_{2m-1} + \dots + a_{m-1} a_{m+1} + a_m^2] \\ &\quad - \frac{x^{3m}}{m-1} [a_0 a_{3m} + a_1 a_{3m-1} + \dots + a_{\frac{3m}{2}-1} a_{\frac{3m}{2}+1} + a_{\frac{3m}{2}}^2] - \dots \end{aligned} \quad (a)$$

Analogicznie dla m nieparzystego: ¹⁾

$$\begin{aligned} H_2(x, m) &= a_0^2 - \frac{x^m}{m-1} [a_0 a_m + a_1 a_{m-1} + \dots + a_{\frac{m-1}{2}} a_{\frac{m+1}{2}}] \\ &\quad - \frac{x^{2m}}{m-1} [a_0 a_{2m} + a_1 a_{2m-2} + \dots + a_m^2] \\ &\quad - \frac{x^{3m}}{m-1} [a_0 a_{3m} + a_1 a_{3m-1} + \dots + a_{\frac{3m-1}{2}} a_{\frac{3m+1}{2}}] - \dots \end{aligned} \quad (b)$$

¹⁾ Dla nieparzystego m odpadną $a_{\frac{m}{2}}, a_{\frac{3m}{2}}, a_{\frac{5m}{2}}, \dots$

Jak długo:

$$m > n > E\left(\frac{m}{2}\right),$$

gdzie ostatni symbol oznacza największą liczbę całkowitą, zawartą w $\frac{m}{2}$, lub mniejszą od $\frac{m}{2}$, gdy $\frac{m}{2}$ jest całkowite, tak długo $a_m = a_{2m} = \dots = a_{m+1} = \dots = 0$, a $a_m \neq 0$ lub $a_{\frac{m-1}{2}}, a_{\frac{m+1}{2}} \neq 0$, i wtedy wyrażenia $H_2(x, m)$ zawierają w sobie potęgę argumentu x .

Skoro jednak wykreślimy na płaszczyźnie m -bok foremny taki, że

$$n < E\left(\frac{m}{2}\right), \text{ czyli, że } m > 2n,$$

to wtedy tak w (a) jak w (b) utrzymuje się tylko wyraz wolny, czyli

$$H_2(x, m)_{m > 2n} = a_0^2. \quad (4)$$

W przypadku granicznym, gdy

$$n = \frac{m}{2}, \text{ a więc } m \text{ jest parzyste,}$$

mamy:

$$H_2(x, m) = a_0^2 - \frac{1}{m-1} a_2^2 x^{\frac{m}{2}}, \text{ czyli}$$

$$H_2(x, 2n) = a_0^2 - \frac{1}{2n-1} a_2^2 x^{2n}.$$

Wyrażenie: $H_2(x, m)_{m > 2n} = a_0^2$ ostaje się widocznie i wtedy, gdy:

$$\lim m = \infty,$$

t. j. gdy m -bok foremny przechodzi w koło o środku $x=0$.

Wypadek $\lim m = \infty$ stoi w ścisłym związku z teorią pozostałości Cauchy'ego.

Widoczna, że:

$$\lim_{m=\infty} H_2(x, m) = \frac{1}{2} \lim_{m=\infty} \frac{\sum f(x_{\varepsilon_k}) f(x_{\varepsilon_\mu})}{\binom{m}{2}},$$

gdzie czynnik $\frac{1}{2}$ po prawej stronie bierze się stąd, że przechodząc do $m=\infty$ bierzemy w sumie po prawej stronie i dodajnik $f(x_{\varepsilon_k}) f(x_{\varepsilon_\mu})$ i $f(x_{\varepsilon_\mu}) f(x_{\varepsilon_k})$. Że zaś:

$$2 \binom{m}{2}_{m=\infty} = m^2, \text{ więc}$$

$$\lim_{m=\infty} H_2(x, m) = \lim_{m=\infty} \frac{\sum f(x_{\varepsilon_k}) f(x_{\varepsilon_\mu})}{m^2}. \quad (5)$$

Położmy:

$$x_{\varepsilon_k} = re^{i\varphi}, \quad x_{\varepsilon_\mu} = re^{i\psi},$$

i pomnożmy w (5) po prawej stronie licznik i mianownik przez iloczyn $i d\varphi \cdot i d\psi$, to wtedy będzie:

$$\lim_{m=\infty} H_2(x, m) = \lim_{m=\infty} \frac{\sum f(re^{i\varphi}) f(re^{i\psi}) i d\varphi i d\psi}{m d\varphi i \cdot m d\psi i}.$$

Lecz

$$\left[m d\varphi \right]_{m=\infty} = \left[m d\psi \right]_{m=\infty} = 2\pi, \text{ więc:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m=\infty} H_2(x, m) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) f(re^{i\psi}) i d\varphi \cdot i d\psi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) i d\varphi \int_0^{2\pi} f(re^{i\psi}) i d\psi. \end{aligned}$$

Z uwagi jednak na to, że:

$$i d\psi = i d\varphi = \frac{dx}{x},$$

i że

$$\int_{(r)} \frac{f(x_{\varepsilon_k})}{x} dx = \int_{(r)} \frac{f(x_{\varepsilon_\mu})}{x} dx = \int_{(r)} \frac{f(x)}{x} dx,$$

otrzymamy:

$$\lim_{m=\infty} H_2(x, m) = \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{f(x)}{x} dx \right]^2 = \left[\sum_{(r)} \text{Res} \frac{f(x)}{x} \right]^2.$$

Że zaś:

$$\lim_{m=\infty} H_2(x, m) = H_2(x, m)_{m > 2n}$$

więc mamy twierdzenie:

Wyrażenie $H_2(x, m)$, będące średnią wartością z iloczynów (amb) wartości jednej i tej samej funkcji całko-

witej wymiernej $f(x)$ w wierzchołkach m -boku foremnego, przedstawia przy $m > 2n$ kwadrat sumy pozostałości funkcji $\frac{f(x)}{x}$ przy dowolnym x .

2. Przejdźmy teraz do funkcji analitycznej $f(x)$, której element $\mathfrak{Y}(x)$ ma zakres zbieżności $|x| = R$.

Oczywistą jest rzeczą, że i tu

$$H_2(x, m) = \frac{\sum \mathfrak{Y}(x_{\varepsilon_1}) \mathfrak{Y}(x_{\varepsilon_m})}{\binom{m}{2}} = a_0^2 + \frac{1}{m-1} [c_m x^m + c_{2m} x^{2m} + \dots], \quad (c)$$

wyrażenie bowiem $H_2(x, m)$, jako funkcja symetryczna elementów x_{ε_1} i x_{ε_m} , może zawierać takie tylko potęgi argumentu x , których wykładniki są kongruentne z 0 (mod. m).

Aby ostatnie wyrażenie zbadać na całej płaszczyźnie, szczególnie w wypadku, gdy $m = \infty$, musimy wyrażeniu temu nadać inną postać. Widoczną jest bowiem rzeczą, że $H_2(x, m)$ posiada na obwodzie koła (R) pewną ilość punktów szczególnych, zależną od m .

Chcąc zbadać zachowanie się tego wyrażenia po za kołem, musimy $H_2(x, m)$ przeprowadzić po za zakres (R). Gdy jednak m wzrasta bez końca, wzrasta i ilość punktów szczególnych na obwodzie koła (R), a gdy wreszcie m -bok przejdzie w koło, t. j. przy

$$\lim m = \infty,$$

pokrywa się koło (R) wszędzie—gęstą mnogością punktów szczególnych i w ogólnym przypadku po za (R) wyjść nie można.

Położmy przeto, zakładając jeszcze m skończone,

$$\frac{\sum \mathfrak{Y}(x_{\varepsilon_1}) \mathfrak{Y}(x_{\varepsilon_m})}{\binom{m}{2}} = a_0^2 + \frac{1}{m-1} \varphi(x, m), \quad (6)$$

to dobierając takie μ , że od $m = \mu$ począwszy, mamy zawsze związek (6), możemy położyć:

$$\begin{aligned} \lim_{m=\infty} \frac{\sum \mathfrak{Y}(x_{\varepsilon_1}) \mathfrak{Y}(x_{\varepsilon_m})}{\binom{m}{2}} &= a_0^2 + \lim_{m=\infty} \frac{1}{m-1} \varphi(x, m) \\ &= a_0^2 + \frac{1}{\mu-1} \varphi(x, \mu-1) + \left[\frac{1}{\mu} \varphi(x, \mu) - \frac{1}{\mu-1} \varphi(x, \mu-1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left[\frac{1}{\mu+1} \varphi(x, \mu+1) - \frac{1}{\mu} \varphi(x, \mu) \right] + \dots \\ &= a_0^2 + \frac{1}{\mu-1} \varphi(x, \mu-1) + \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} \Phi(x, \lambda) = A(x), \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \varphi(x, \lambda) - \frac{1}{\lambda-1} \varphi(x, \lambda-1).$$

Wartości takiego wyrażenia analitycznego $A(x)$ przedstawiają, przy zwiększającym się $|x|$ kolejno wartości wyrażenia $\lim_{m=\infty} H_2(x, m)$.

Opierając się na rachunku całkowym, widzimy, że i tu jak dla funkcji wymiernych będzie:

$$\lim_{m=\infty} H_2(x, m) = \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(x)}{x} dx \right]^2 = \left[\sum_{(c)} \text{Res} \frac{f(x)}{x} \right]^2.$$

Widzimy przeto, że kolejne wartości wyrażenia analitycznego $A(x)$ przedstawiają nam kolejne zmiany wartości kwadratu całki $\frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(x)}{x} dx$, branej po kołach współśrodkowych z zakresem zbieżności.

Jak długo pozostajemy w kole (R), tak długo:

$$A(x) = a_0^2,$$

po za (R) wartość ta ulega zmianie. Na kołach współśrodkowych z (R), zawierających punkty szczególne funkcji analitycznej $f(x)$, wyrażenie $A(x)$ traci znaczenie.

Stąd wynika:

Na podstawie funkcji symetrycznej (c) można zawsze utworzyć wyrażenie analityczne tak się zachowujące, że dla wszelkich $|x| = r$ ma ono wartość $= \left[\sum_{(r)} \text{Res} \frac{f(x)}{x} \right]^2$ danej naprzód funkcji analitycznej $f(x)$ ¹⁾.

Gdy istnieją takie x , że przy $|x| > r$ okazuje się stałe

$$A(x) = \text{stałe},$$

¹⁾ J. Tannery pierwszy podał przykład tworzenia analogicznych wyrażeń. Patrz np. Weierstrass: *Abhandlungen aus der Functionentheorie* str. 102 et sqts. Porów. także J. Puzyna: *Ueber eine methodische Bildung der analyt. Ausdrücke..* (Monatshefte für Mathematik u. Physik, Wien. Tom V, str. 67 et sqts.).

to wtedy w kole (r) mieszczą się już wszystkie punkty szczególne funkcji analitycznej $f(x)$, a po za (r) dla x skończonych ani jednego takiego punktu nie znajdziemy.

3. Weźmy np. szereg potęgowy

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

zbieżny w kole $|x| = 1$.

Łatwo się przekonać, że

$$\begin{aligned} H_2(x, m) &= 1 - \frac{1}{m-1} \{ [2m-1-(m-1)] x^{2m} + [3m-1-(m-1)] x^{3m} + \dots \} \\ &= 1 - \frac{mx^{2m}}{m-1} \{ 1 + 2x^m + 3x^{2m} + \dots \}. \end{aligned}$$

Aby ten szereg zesumować, położmy:

$$x^m = \zeta;$$

wtedy:

$$u = 1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + 4\zeta^3 + \dots$$

Zcałkujmy ten szereg, to dostaniemy:

$$v = \int_0^\zeta u d\zeta = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \dots = \zeta \frac{1}{1-\zeta};$$

a więc:

$$u = \frac{dv}{d\zeta} = \frac{1}{(1-\zeta)^2} = \frac{1}{(1-x^m)^2}.$$

Teraz

$$\begin{aligned} H_2(x, m) &= 1 - \frac{m x^{2m}}{m-1} \frac{1}{(1-x^m)^2} = 1 - \frac{m x^{2m}}{(m-1) x^{2m}} \frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2} \\ &= 1 - \frac{m}{m-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2}. \end{aligned}$$

Położmy:

$$H_2(x, m) = 1 + \frac{1}{m-1} \varphi(x, m),$$

to:

$$\varphi(x, m) = -m \frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2}.$$

Łatwo się przekonać, że:

$$\frac{1}{m} \varphi(x, m+1) - \frac{1}{m-1} \varphi(x, m) = \frac{m^2 (1-x^{m+1})^2 - (m^2-1) (1-x^m)^2}{(1-x^m)^2 (1-x^{m+1})^2} \frac{x^{2m}}{m(m-1)}.$$

Jeżeli położymy $\mu = 2$, otrzymamy wyrażenie:

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 - \frac{2x^4}{(1-x^2)^2} + \frac{x^4}{2} \frac{4(1-x^2)^2 - 3(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2 (1-x^3)^2} \\ &\quad + \frac{x^6}{2 \cdot 3} \frac{9(1-x^4)^2 - 8(1-x^3)^2}{(1-x^3)^2 (1-x^4)^2} + \dots, \end{aligned}$$

które dla $|x| < 1$ jest $= 1$, a dla $|x| > 1$ jest $= 0$ aż do nieskończoności; to wynika już i ze związku:

$$\begin{aligned} A(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} H_2(x, m) = 1 - \frac{m}{m-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2} \Bigg|_{m \rightarrow \infty} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2} \Bigg|_{m \rightarrow \infty} \\ &= \begin{cases} +1, & \text{gdy } |x| < 1. \\ 0, & \text{,, } |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Przystąpmy teraz do rozważania funkcji symetrycznej:

$$\Sigma f(x_{\varepsilon_{\lambda_1}}) f(x_{\varepsilon_{\lambda_2}}) \dots f(x_{\varepsilon_{\lambda_\nu}}); \quad \nu > 2$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_\nu$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją całkowitą wymierną lub analityczną. Ponieważ suma powyższa jest funkcją symetryczną wszystkich pierwiastków $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1}$, więc analogicznie i tu musi być

$$\Sigma f(x_{\varepsilon_{\lambda_1}}) f(x_{\varepsilon_{\lambda_2}}) \dots f(x_{\varepsilon_{\lambda_\nu}}) = c_0 + c_m x^m + c_{2m} x^{2m} + \dots,$$

gdzie

$$c_0 = \binom{m}{\nu} a_0^\nu.$$

Widoczną jest rzeczą, że gdy tu utworzymy wyrażenie:

$$H_\nu(x, m) = \frac{\Sigma f(x_{\varepsilon_{\lambda_1}}) \dots f(x_{\varepsilon_{\lambda_\nu}})}{\binom{m}{\nu}},$$

to:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H_\nu(x, m) = \left[\sum \operatorname{Res} \frac{f(x)}{x} \right]^\nu = \mathfrak{H}(x) = A(x)^{\frac{\nu}{2}}.$$

Przejdźmy do funkcji całkowitej wymiernej $f(x)$ stopnia n .

Gdy $n < m$, to podług (2) mamy:

$$H_1(x, m) = a_0,$$

gdzie:

$$H_1(x, m) = \frac{f(x\varepsilon_0) + f(x\varepsilon_1) + \dots + f(x\varepsilon_{m-1})}{m}.$$

Podług (4), gdy $m > 2n$, mamy:

$$H_2(x, m) = a_0^2.$$

Pytanie zachodzi, w jakim stosunku mają n i m , przy danym n , pozostawać, jeżeli żądamy, aby było:

$$H_\nu(x, m) = a_0^\nu. \quad (7)$$

W rozwinięciu:

$$\sum f(x\varepsilon_{i_1}) f(x\varepsilon_{i_2}) \dots f(x\varepsilon_{i_\nu}) = c_0 + c_m x^m + c_{2m} x^{2m} + \dots$$

jest:

$$c_{km} = \sum L a_{\beta_1} a_{\beta_2} \dots a_{\beta_\nu},$$

gdzie wszystkie iloczyny w tej sumie odnoszą się do równych i różnych $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu$ takich, że ich suma:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu = km;$$

L są pewne stałe ilości.

W c_m jest:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu = m;$$

znajdziemy tu pewną ilość dodajników takich, że gdy w nich po porządku będziemy przechodzili $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu$, i wyjmiemy jakikolwiek znaczek β_k , to w innych dodajnikach znajdziemy zawsze znaczek większy od β_k .

Niech mianowicie t będzie najmniejszą resztą dodatnią ilorazu $\frac{m}{\nu}$, $a - \tau$ najmniejszą resztą ujemną tego ilorazu i zauważmy s współczynników $\frac{a_{m+t}}{\nu}$, a $(\nu - s)$ współczynników $\frac{a_{m-\tau}}{\nu}$, to w dodajniku $L \left(\frac{a_{m+t}}{\nu} \right)^s \left(\frac{a_{m-\tau}}{\nu} \right)^{\nu-s}$ ma być:

$$s \frac{m+t}{\nu} + (\nu-s) \frac{m-\tau}{\nu} = m,$$

czyli

$$s \frac{t+\tau}{\nu} - \tau = 0.$$

Ponieważ jednak $t+\tau=\nu$, więc

$$s = \tau.$$

Stąd wynika, że dodajnik

$$L \left(\frac{a_{m+t}}{\nu} \right)^s \left(\frac{a_{m-\tau}}{\nu} \right)^{\nu-s} \quad (a)$$

będzie taki, że znaczki jego czynników leżą najbliżej ułamka $\frac{m}{\nu}$; że zaś znaczki te są całkowite, więc są one równe liczbom całkowitym $E \left(\frac{m}{\nu} \right)$ lub $E \left(\frac{m}{\nu} \right) + 1$, gdzie co do $E \left(\frac{m}{\nu} \right)$ należy zrobić to samo zastrzeżenie, jakiegoś zrobili wyżej co do $E \left(\frac{m}{2} \right)$. W innych dodajnikach, które nie mają postaci (a), musi być bodaj jeden znaczek β_k większy, bo inaczej nie spełniłyby się warunek:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k = m.$$

Wystarczy więc obrać m takie, żeby

$$n < E \left(\frac{m}{\nu} \right), \quad \left(\text{gdy } \frac{m}{\nu} \text{ jest liczbą całkowitą, to} \right.$$

$$n = \frac{m}{\nu} - 1 \Big), \text{ ale już: } n > \frac{m}{\nu+1},$$

a wtedy będzie $c_m = c_{2m} = \dots = 0$, czyli:

$$H_\nu(x, m) = a_0^\nu \text{ dla } n < E \left(\frac{m}{\nu} \right).$$

Stąd wynika:

Związek (7) zachodzi wtedy, gdy:

$$\frac{m}{\nu+1} < n < \frac{m}{\nu}.$$

Zapytajmy teraz, jakie ma być n , aby przy dowolnie obranem $m > n$, wyrażenia $H_1(x, m)$, $H_2(x, m)$, $\dots$ $H_m(x, m)$ jak najdłużej okazywały się stałymi, tak że

$$H_r(x, m) = a_0^r.$$

Jeżeli ta stałość tych wyrażeń ma sięgać aż do m , to musi być:

$$\left. \begin{array}{l} n < m \\ n < \frac{m}{2} \\ n < \frac{m}{3} \\ \vdots \\ n < \frac{m}{r} \\ \vdots \\ n < \frac{m}{m-1} \\ n < \frac{m}{m} \end{array} \right\} \quad (\beta)$$

Gdybyśmy stanęli na nierówności przedostatniej, to wynikłoby:

$$n < \frac{m}{m-1}, \text{ czyli}$$

$$n = 1, \text{ więc:}$$

$$f(x) = ax + b,$$

gdybyśmy zaś posunęli się dalej, to musiałoby być:

$$n < 1, \text{ czyli: } n=0, \text{ a więc}$$

$$f(x) = \text{stała}.$$

Stąd wynika: Z wyrażeń $H_1, H_2, \dots, H_m$ najwięcej ich, bo aż do $H_{m-1}(x, m)$, zostaje o stałej wartości, gdy $f(x)$ jest funkcją stopnia pierwszego.

5. Gdy $\frac{m}{r+1} < n < \frac{m}{r}$, to mamy taki szereg funkcji symetrycznych:

$$\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{\varepsilon_i}) = m a_0 = h_1(x, m),$$

$$\sum f(x_{\varepsilon_{i_1}}) f(x_{\varepsilon_{i_2}}) = \binom{m}{2} a_0^2 = h_2(x, m),$$

$$\sum f(x_{\varepsilon_{i_1}}) f(x_{\varepsilon_{i_2}}) f(x_{\varepsilon_{i_3}}) = \binom{m}{3} a_0^3 = h_3(x, m),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum f(x_{\varepsilon_{i_1}}) f(x_{\varepsilon_{i_2}}) \dots f(x_{\varepsilon_{i_r}}) = \binom{m}{r} a_0^r = h_r(x, m),$$

$$\sum f(x_{\varepsilon_{i_1}}) f(x_{\varepsilon_{i_2}}) \dots f(x_{\varepsilon_{i_{r+1}}}) = \binom{m}{r+1} a_0^{r+1} + \gamma_{r+1, m} x^m + \gamma_{r+1, 2m} x^{2m} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f(x_{\varepsilon_{i_1}}) f(x_{\varepsilon_{i_2}}) \dots f(x_{\varepsilon_{i_{r+1}}}) \dots f(x_{\varepsilon_{i_m}}) = a_0^m + \gamma_{m, m} x^m + \gamma_{m, 2m} x^{2m} + \dots$$

Utwórzmy równanie:

$$u^m - h_1 u^{m-1} + h_2 u^{m-2} - \dots \pm h_m = 0, \quad \text{czyli}$$

$$u^m - m a_0 u^{m-1} + \binom{m}{2} a_0^2 u^{m-2} - \dots \pm \binom{m}{r} a_0^r u^{m-r}$$

$$\mp \left[\binom{m}{r+1} a_0^{r+1} + \gamma_{r+1, m} x^m + \dots \right] u^{m-(r+1)} \pm \dots$$

$$\dots \pm [a_0^m + \gamma_{m, m} x^m + \dots] = 0,$$

to pierwiastkami tego równania są właśnie wartości funkcji $f(x)$ we wierzchołkach m -boku foremnego, czyli:

$$u_s = f(x_{\varepsilon_s}).$$

Równanie ostatnie można napisać w postaci:

$$(u - a_0)^m - [u^{m-(r+1)} G_{r+1}(x) + u^{m-(r+2)} G_{r+2}(x) + \dots + G_m(x)] = 0,$$

gdzie:

$$\pm G_{r+2}(x) = \gamma_{r+2, m} x^m + \gamma_{r+2, 2m} x^{2m} + \dots$$

A więc:

$$(u - a_0)^m = u^{m-(r+1)} G_{r+1}(x) + u^{m-(r+2)} G_{r+2}(x) + \dots + G_m(x). \quad (8)$$

Taki związek zachodzi między funkcjami $G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_m$, które występują w funkcjach symetrycznych od $(r+1)$ -szej począwszy.

Jeżeli z pośród tych m wartości wybierzemy $m - (v+1)$ wartości

$$f(x_{\varepsilon_{a_1}}) = u_1, f(x_{\varepsilon_{a_2}}) = u_2, \dots, f(x_{\varepsilon_{a_{m+(v+1)}}}) = u_{m-(v+1)}$$

i założymy, że: $f(x_{\varepsilon_s}) \neq f(x_{\varepsilon_t})$, gdy $s \neq t$, to kładąc dla krótkości $m - (v+1) = \mu$, dostaniemy μ takich związków:

[illegible]

Ponieważ wyznacznik tych równań jest:

$$U = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & . & . & . & u_1^\mu \\ 1 & u_2 & u_2^2 & . & . & . & u_2^\mu \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & u_\mu & u_\mu^2 & . & . & . & u_\mu^\mu \end{vmatrix} = \Pi (u_s - u_t) \neq 0,$$

przezo z równań (8) można obliczyć funkcje $G_{\nu+1}, G_{\nu+2}, \dots, G_m$. Całe przezo zagadnienie budowy funkcji symetrycznych z danej a priori funkcji całkowitej wymiernej sprowadza się do rozwiązania układu równań (9), liniowych co do $G_{\nu+1}, G_{\nu+2}, \dots, G_m$. Charakterystyczną przytem jest ta okoliczność, że funkcje symetryczne $H_{\nu+1}, H_{\nu+2}, \dots, H_m$, zależne od m wartości $f(x), f(x_{e_1}), \dots, f(x_{e_{m-1}})$, można obliczyć jedynie z $m - (\nu + 1)$ którekolwiek tych wartości.

Przy tem zauważymy:

$$\begin{array}{lcl} \text{Gdy:} & G_{v+1} = S_{v+1} & (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_\mu) \\ & G_{v+2} = S_{v+2} & (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_\mu) \\ & \vdots & \vdots \\ & G_m = S_m & (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_\mu) \end{array}$$

są rozwiązaniami równań (9), to ponieważ lewe strony są symetrycznymi funkcjami wszystkich ilości $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$, muszą i prawe strony być symetrycznymi funkcjami ze względu na mieszczące się w nich wartości: $u_1, u_2, \dots, u_\mu$. Stąd wynika, że: $H_{\nu+1}, H_{\nu+2}, \dots, H_m$ można uważać za symetryczne (ale nie elementarne) funkcje którychkolwiek $[m-(\nu+1)]$ wartości $f(x_{\varepsilon_k})$.

Dołączając do równań (9) jeszcze równanie:

$$u_{\mu+1}^{\mu} G_{\nu+1}(x) + u_{\mu+1}^{\mu-1} G_{\nu+2}(x) + \dots + u_{\mu+1}^0 G_{m-1}(x) + G_m(x) = [u_{\mu+1} - a_0]^m,$$

dostajemy:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^\mu & (u_1 - a_0)^m \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^\mu & (u_2 - a_0)^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_{\mu+1} & u_{\mu+1}^2 & \dots & u_{\mu+1}^\mu & (u_{\mu+1} - a_0)^m \end{array} \right| = 0. \quad (10)$$

Taki identyczny związek zachodzi między $(\mu - \nu)$ któremikolwiek wartościami $f(x_{\epsilon_k})$ funkcji $f(x)$.

Lwów, luty 1894.