

SPRAWOZDANIA Z PIŚMIENNICTWA POLSKIEGO

W DZIEDZINIE NAUK MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.

ROK 1893.

I. MATEMATYKA.

1. **Baraniecki M. A.** *Podręcznik Algebry dla uczniów klas wyższych gimnazjów i szkół realnych w Galicji.* Kraków 1893, w druk. Uniw. Jagiel., 8-ka str. VIII i 322.

Jeden z zasłużonych naszych matematyków zwykł mawiać, że pisarzy naukowych można podzielić na trzy kategorie: jedni piszą o rzeczach, których sami dobrze nie rozumieją; drudzy piszą to, co widzą; trzeci nakoniec daleko więcej wiedzą, niż to, o czym piszą. Ci ostatni tylko przynoszą prawdziwy pożytek, mianowicie gdy chodzi o dzieła dla uczących się przeznaczone. Do tych właśnie pisarzy należy zaliczyć autora książki niniejszej. Czytając ją, widzimy odrazu, że jest napisana z gruntowną znajomością rzeczy, z wielką starannością o ścisłość teorii i wywodów, a także i o zakreszenie właściwych granic nauce elementarnej. Wobec nadzwyczajnych wymagań, jakie w obecnych okolicznościach przywiązujemy do tego rodzaju podręczników, pozwolimy sobie na kilka uwag, dotyczących się raczej układu i kilku szczegółów, nie uwłaczających bynajmniej wartości naukowej dzieła w jego całości i treści.

A najprzód pytamy, dla czego autor odłożył aż na sam koniec dzieła określenie algebry? Pojmujemy, że aby rzecz dokładnie określić, trzeba ją

pierwej poznać w całości; jestto postępować bardzo filozoficznie, lecz my pragnęlibyśmy zgóry wiedzieć, o czym będzie mowa i do czego zmierzamy. Wprawdzie autor na końcu książki określił nam algebrę, jako naukę o równaniach i t. d. a określenia tego na początku umieścić nie mógł; ale czy określenie to jest rzeczywiście najstosowniejszem dla algebry elementarnej? Wszak traktujemy tu, oprócz równań, także o nierównościach, o ułamkach ciągłych, o postępkach, o logarytmach, o trójmianach drugiego stopnia, roztrząsamy wyrażenia nie przyrównane do zera? Równania są *narzędziem* algebraicznym, narzędziem najważniejszym, obejmującym niemal całość algebry, ale nie są jej *istotą*; ta jest nieco ogólniejszą. Wprawdzie niektórzy autorowie przyjęli to określenie; między innymi J. A. Serret powiada na wstępie swej „Algebry wyższej”: „l'Algèbre est à proprement parler, l'analyse des équations” ale to wyrażenie *właściwie mówiąc* oznacza, że jest to nie określenie bezwzględne, ale niejako *omówienie* rodzaju figury retorycznej, w której się bierze część za całość. Dla algebry początkowej wolelibyśmy stare określenie Newtona, lub jakie inne wyprowadzone z tamtego. Określenie to polega w gruncie rzeczy na różnicy pojęcia ilości w algebrze od pojęcia *liczby* w arytmetyce; gdyby nadto te pojęcia były oznaczone przez właściwe im wyrazy i wyjaśnione na przykładach, nie tylko zadowolilyby początkującego, ale nadto zaciekałyby go co do dalszego wykładu; ten ostatni zaś wzgląd nie jest do pominięcia.

Brak takiego określenia czy objaśnienia czuć się daje zaraz z początku przy wprowadzeniu ilości (liczb) ujemnych. Jestto dla początkującego twardy orzech do zgryzienia. Jeden ze sławnych matematyków zeszłego stulecia utrzymywał nawet, że pojęcie ujemnych jest trudniejszym do zrozumienia od pojęcia urojonych. Nie idąc tak daleko, wolelibyśmy, żeby autor wyprowadził je jako ogólnienie pewnych, z początku najprostszych wzorów, a następnie wyjaśnił je na przykładach. Przykład kierunków, liczonych w prawo lub w lewo od pewnego początku, jest wyborynym, niezbędnym, bardzo jasno przedstawionym, ale jest tylko przykładem. Pojęcie algebraiczne ujemnych jest znacznie ogólniejszem od pojęcia kierunku geometrycznego. Początkujący rozumie właściwie całe znaczenie ujemnych, dopiero przy roztrząsaniu wypadków rozwiązań równań stopnia pierwszego; dla tego zdałby się większy nacisk na rozwiązania ujemne tych równań, a następnie na wprowadzenie ujemnych w same dane zagadnień. Autor, który tak jasno, ściśle i gruntownie wyłożył całą teorię działań algebraicznych, zbyt pobieżnie, naszym zdaniem, zastanawia się nad tą delikatną teorią rozwiązań ujemnych.

Jako przeciwstawienie teorii ujemnych zaznaczymy teorię urojonych i zespolonych, którą autor wprowadza i rozwija naturalnie, jasno a zarazem ściśle i wyczerpująco tak, że uczeń miernych nawet zdolności nie znajdzie najmniejszej trudności w zrozumieniu i przyswojeniu sobie tego pojęcia, tak ważnego w dalszej analizie. Toż samo powiemy o całej teorii równań stopnia

drugiego, roztrząsaniu trójmianu i elementarnej teorii największości i najmniejszości.

Logarytmy nie są umieszczone na właściwym miejscu; należało umieścić ten rozdział po postępkach i ułamkach ciągłych, aby pokazać przynajmniej możliwość obliczania tablic za pomocą działań elementarnych. Rozumie się, że nikt nie będzie obliczał logarytmów przez wstawianie średnich wyrazów w postępy, ani nawet za pomocą ułamków ciągłych; ale wydaje się nieracjonalnym i niemethodycznym uczyć użytku tablic, nie wskazawszy, w jaki sposób były lub przynajmniej mogły być obliczonemi. Wszak nikt dziś nie oblicza liczby π przez kolejne wpisywanie w koło wielokątów o zwiększającej się liczbie boków; a mimo to, sposób ten nie może być pominiętym w żadnej elementarnej geometrii.

Teoria ułamków ciągłych jest bardzo dobrze traktowana: ściśle, jasno i przystępnie. Zwłaszcza teoria przybliżeń, do jakich się przez nie dochodzi, wyłożona jest zupełnie i nawet zastosowana do obliczenia jednego logarytmu.

Teoria postępków jest uzupełniona przez elementarzy pogląd na szeregi i zastosowaną do procentów (odsetek) składanych i wkładek kolejno po sobie następujących. Wszakże życzylibyśmy można więcej jeszcze zastosowań i przykładów rozwiniętych i roztrząsanych, odnoszących się amortyzacji (umorzeń), w towarzystwach kredytowych, papierów publicznych i t. p. Może to się wydawać za specjalne; ale właśnie dla tego, że z temi obliczeniami ustawicznie się w życiu spotykamy, należałoby im dać tu odpowiednie miejsce takie, jakie np. w arytmetyce zajmuje rachunek odsetek. Autor zrozumiał to bardzo dobrze w rozdziale odnoszącym się do teorii prawdopodobieństwa, którą wyłożył elementarnie w sposób nader prosty, wnet zastosował do ubezpieczeń na życie, podając nawet odpowiednią tablicę śmiertelności.

Na szczególne zaznaczenie zasługuje rozdział o wyznacznikach, który autor postawił na właściwym miejscu i opracował zwięźle i starannie, i tak kompletnie, o ile to w elementarnym podręczniku było możliwem.

Wreszcie zalety tego podręcznika uzupełnia bogaty zbiór ćwiczeń i zadań wyborowych, podanych przy końcu każdej części z odpowiedniami rozwiązaniami.

Co się tyczy języka, musimy wyrazić najzupełniejsze uznanie zaznaczone w wstępie usiłowaniom autora o utrzymanie najtroskliwsze tradycyi naukowej naszego piśmiennictwa. Już w początkach bieżącego stulecia, Śniadecki (we wstępie do „Jęz. geografii”) podnosi ów „szacowny języka polskiego przymiot, że gdzie idzie o wyłożenie z jasnością i precyzją najgłębszych prawd i najogólniejszych w fizyce i matematyce myśli, nie da się w tem przewyższyć językiem zagranicznym”. Ten przymiot należy cenić, ale go nie nadużywać, przez wprowadzanie do mowy naszej coraz nowych wyrazów i zwrotów tam, gdzie się przyjęły już inne, dawniej wskazane przez wzoro-

wych pisarzy naszych; a przedewszystkiem nie zwracać przyjętych wyrazów z ich pierwotnego znaczenia, nadając im inne ¹⁾.

Autor nie użył, zdaje nam się, właściwych wyrazów na oznaczenie *liczby* i *ilości*. Określiwszy liczbę w znaczeniu arytmetycznym (wprawdzie dopiero w ostatnim ustępie), określił także jej uogólnienie algebraiczne; ale zamiast używać wyrazu *ilość*, używa omówień jak: *liczba ogólna*, *liczba wyrażona przez litery* i t. p. Znajdujemy tam takie wyrażenia jak: „wartość liczebna liczby“ (lub *litery*); albo „liczby zmieniające się (w sposób ciągły)“; a za to w innym miejscu dowiadujemy się, że są *ilości* „parzyste“ lub „nieparzyste“. Są to wyrażenia, których można było z łatwością uniknąć, zachowując wyrazom ich właściwe, od wieku w naszym języku przyjęte znaczenie.

Mimo tych uwag, które pozwoliliśmy sobie uczynić ze względu na to, iż w obecnych stosunkach poprawność naszych podręczników szkolnych powinna być nawet w najdrobniejszych szczegółach wzorową, podręcznik Baranieckiego, stanowi, zdaniem naszym, ważny postęp na polu wydawnictw szkolnych. Styl jego jest czystym, płynnym i jasnym, a jednak wolnym od szkolnej pedanterii. Co do treści, jakśmy już powiedzieli, metoda wykładu jest głęboko obmyślaną i systematycznie przeprowadzoną, zgodnie z dzisiejszym stanem nauki.

W. F.

2. *Dickstein S. Zasady teorii liczb Wrońskiego*. Rozprawy Wyd. matemat.-przpr. Akad. Um. t. XXIV, str. 73—104.

Zadaniem tej pracy jest przedstawienie mało lub prawie wcale nieznanym badaczom Wrońskiego, odnoszących się do teorii liczb, które ogłosił w swojej „Filozofii matematyki“ (1811) i „Reformie wiedzy ludzkiej“ (1847). Po krótkim wstępie historycznym autor streszcza w trzynastu ustępach najważniejsze pomysły Wrońskiego w dziedzinie teorii liczb i podaje odpowiednie do nich objaśnienia. W pierwszym ustępie mówi o stanowisku teorii liczb w systemie matematyki Wrońskiego; w drugim—o funkcjach „alef“; w trzecim i czwartym—o kongruencyach i o dawniejszej metodzie Wrońskiego rozwiązywania kongruencji; w piątym—o twierdzeniach Fermata i Wilsona; w szóstym—o prawie wzajemności liczb pierwszych; w siódmym—o trzech prawach teleologicznych“. W ostatnich ustępach podane są oparte na poprzednio wyłożonej teorii: metody rozwiązywania kongruencji $x^m \equiv a \pmod{M}$; $x^n - ay^n \equiv 0 \pmod{M}$; rozkład liczb pierwszych na czynniki; rozwiązywanie kongruencji $A_0 + A_1 x + \dots$

$\dots + A_m x^m \equiv 0 \pmod{M}$, rozwiązywanie kongruencji rzędów wyższych, rozwiązywanie równań nieoznaczonych.

Wł. G.

3. *Dickstein S. O rozwiązywaniu kongruencji $z^n - ay^n \equiv \pmod{M}$* . Rozpr. Ak. Um., Wyd. mat. przpr. XXVI, str. 155—159.

Jest to przyczynek do rozprawy autora dawniejszej, p. t. „Zasady teorii liczb Wrońskiego“ (Rozpr. Wyd. mat.-przpr. XXIV, str. 91), wywołany spostrzeżeniem p. G. Vivanti'ego, że jakkolwiek pewna kongruencya, postaci w tytule przytoczonej, nie czyni zadość warunkowi rozwiązalności przez Wrońskiego wymaganemu, to jednak jest ona mimo to rozwiązalną, i p. Vivanti podaje jej rozwiązanie. To daje powód p. Dicksteinowi do uogólnienia warunku Wrońskiego, co też i w pracy swej skutecznie.

Wł. G.

4. *Dickstein S. O szeregach logarytmowych Wrońskiego*. Prace mat.-fiz. IV, str. 88—94.

W dziele „Réforme des mathématiques“ podał Wroński szeregi logarytmowe, jako przykład „tworzenia neutralnego“ („génération neutre“) polegającego na tem, że otrzymuje się w niem kolejno funkcje wymierne zmiennej x , odtwarzające w tym przypadku $\log x$, tem dokładniej, im dalej posuwamy się w tworzeniu, oraz odpowiednie szeregi „dopełniające“, które należy dodawać do owych funkcji wymiernych, aby otrzymać ściśle $\log x$.

Hanegraeff w „Méthode générale d'intégration, 1856, powtórzył wzory Wrońskiego, sposobem w zasadzie do metody Wrońskiego podobnym.

W pracy swojej, podaje autor sposób oryginalny otrzymania pomienionych rozwinieć $\log x$, i tem ciekawszy, że elementarny i dający od razu rozwiniecie stopnia n , podczas gdy sposób Wrońskiego daje rozwinięcia kolejne: stopnia 1, 2, 3, ...

Sposób autora polega na znanem rozwinięciu, w szereg nieskończony całki

$$S_{m,n} = \int_0^u \frac{u^m}{U^n} du, \quad (|u| < 1)$$

w której $U = 1 - u^2$, a m i n są liczby całkowite, oraz na wyrażeniu tej samej całki za pomocą wzorów polegających na całkowaniu przez części.

Z porównania tych dwóch wyrażeń całki $S_{m,n}$ dla m parzystego i po założeniu

$$\frac{1-u}{1+u} = \frac{x}{a},$$

¹⁾ Uwagi te nastroją nam się z powodu treściwej, ale jasno rzeczy przedstawiającej rozprawki p. Puchewicza p. t. *Liczba i ilość* (umieszczonej w zeszytach styczniowym 1895 „Muzeum“ Lwowskiego).

otrzymuje autor wzór Wrońskiego, wraz z szeregiem dopełniającym, odpowiadający stopniowi tworzenia n .

Wł. G.

5. *Dickstein S. Matematyka i rzeczywistość. Szkic.* 8^o str. 40. Warszawa 1893.

Referat niżej (p. Varia).

6. *Dickstein S. Artykuły w Wielkiej Encyklopedyi powszechnej ilustrowanej,* 1893.

Całka, tom X, str. 965—955, *Całkowy rachunek*, tamże str. 969.

7. *Fafara J. i Soleski J. Nauka rachunków dla szkół wydziałowych żeńskich na I i II klasę.* Wydanie 2-gie, Lwów 1893, str. 2 i 108.

Podręcznik ten składa się z dwóch części. Część pierwsza obejmuje rozdziały: I. Liczby i sposób ich pisanie. II. Działania rachunkowe. III. Własności liczb. IV. O ułamkach. Część druga rozdziały: I. Powtórzenie materiału z poprzedniej klasy. II. Nauka o stosunkach i proporcjach. III. Rozwiązanie zagadnień rachunkowych z życia praktycznego. IV. Rachunek procentu. V. Miary i wagi i monety używane w monarchii austriacko-węgierskiej. W każdym rozdziale znajdują się odpowiednie ćwiczenia.

Przedstawienie jest treściwe, niewszędzie jednak wolne od usterek przeciwko jasności i ścisłości. Za domagające się zmiany uważamy: wyjaśnienie pojęcia liczby (str. 1), w którym występują bez należytego odróżnienia pojęcia: wielkości, liczby, miary i t. d.; niektóre ustępy § 6 o dodawaniu (str. 10, ustępy 4, 5); przejście od mnożenia przez liczbę całkowitą do mnożenia przez ułamek dziesiętny (str. 26); pominięcie dzielenia „liczby wielorakiej” przez wieloraką (str. 38); prawidło podane na odszukanie największej wspólnej miary dwóch liczb (str. 44); wywód mnożenia przez ułamek (str. 56) i t. d. i t. d. Pod względem językowym rażą nas takie wyrażenia: jak *wynachodzimy* zamiast *znajdujemy*; *mnożymy* *czynnikami* *trzecim* zamiast *przez czynnik* *trzeci* i t. d.

S. D.

8. *Jabłoński E. Teorya przemian i wariacji kołowych zupełnych.* Prace mat.-fiz. IV, str. 71—87.

Jeżeli elementy dane (litery) rozmieszczamy na linii prostej lub ogólniej wzdłuż jakiegokolwiek linii niezamkniętej, mamy przemiany i wariacje prostoliniowe; jeżeli przypuścimy, że elementy są rozmieszczone na okręgu koła lub na obwodzie jakiegokolwiek linii zamkniętej, otrzymujemy przemiany i wariacje, zwane *kołowymi*. Oznaczenie liczby przemian i wariacji koło-

wych i wysnuć stąd pewnych rezultatów ogólnych stanowi przedmiot rozprawy.

Autor rozpoczyna od oznaczenia najprostszego, znanego zresztą przypadku przemian kołowych o m elementach bez powtórzeń; liczba Q_m takich przemian równa się $\frac{P_m}{m}$, gdzie P_m jest liczba przemian prostoliniowych o m elementach. Potem przechodzi do przemian kołowych z powtórzeniem, w których elementy $a, b, c, \dots, l$ powtarzają się odpowiednio $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ razy tak, że $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m$. Jeżeli liczby te nie mają wspólnego dzielnika, wtedy szukana liczba przemian równa się

$$\frac{(m-1)!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!}.$$

Jeżeli zaś wspólnym dzielnikiem liczb $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ jest $d_n > 1$, to niechaj $d_1, d_2, \dots, d_n$ będą dzielnikami tej liczby d_n , t. j. dzielnikami wspólnymi liczb $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$. Dzielimy przemiany prostoliniowe na tyle kategorii, ile jest dzielników d_n , tak, że przemiana prostoliniowa do każdej kategorii należąca może być podzielona na d_p grup identycznych o m_p elementach; ($m = m_p d_p$). Jeżeli Q_p , ($p = 1, 2, \dots, n$), oznacza liczbę przemian tej kategorii, to każdą z nich oznaczyć można, a mając je znajdziemy szukaną liczbę prze-

mian kołowych z powtórzeniami równą: $\frac{Q_m}{m} + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{Q_p}{m_p}$.

Potem przechodzi autor do oznaczenia wariacji kołowych z powtórzeniami. I tu uważa wariacje prostoliniowe, t. j. grupy o m elementach, dające się utworzyć z p elementów rozmieszczonych na prostej, z których każdy może być powtórzony aż do m razy. Te wariacje można rozłożyć na przemiany z powtórzeniami o m elementach. Nazwijmy skażnikami rozwiązania całkowite dodatnie równania $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m$; oznaczmy całkowitą liczbę przemian, odpowiadających każdemu z układów skażników. Od każdej zaś takiej liczby przemian prostoliniowych utworzonych z k elementów, wziętych z pomiędzy p elementów, przechodzimy do przemian kołowych z tych samych elementów z temi samymi powtórzeniami, jak to okazuje wzór w poniższem twierdzeniu 2-giem.

Z twierdzeń i wzorów ogólnych, które autor otrzymuje, stosując badanie teoretyczno-liczbowe, wymieniamy następujące: 1) Liczba przemian kołowych elementów różnych, powtarzających się odpowiednio $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ razy, jest:

$$\frac{1}{m} \sum_{d=1}^d P\left(\frac{D}{d}\right) \varphi(d), \quad \varphi(1) = 1$$

gdzie $m = \alpha + \beta + \dots + \lambda$; D jest największym wspólnym dzielnikiem liczb $\alpha, \beta, \dots, \lambda$; d jednym z dzielników liczby D , włączając w nie 1 i D ; wreszcie $P\left(\frac{D}{d}\right)$ jest liczbą przemian prostoliniowych tych samych elementów o skażnikach $\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}, \dots, \frac{\lambda}{d}$; φ jest funkcją w teorii liczb wiadomego znaczenia; 2) Liczba wariacji kołowych zupełnych m -ej klasy o m elementach różnych jest

$$\frac{1}{m} S_p (p-1) \dots (p-k+1) \sum_1^n P\left(\frac{n}{d}\right) \varphi(d)$$

gdzie suma S rozciąga się na wszystkie różne układy rozwiązań całkowitych dodatnich równania $\alpha + \beta + \dots + \lambda = m$; k oznacza liczbę skażników nierównych zeru w jednym układzie n — największy wspólny dzielnik skażników tego samego układu; wreszcie liczby $i_1, i_2, \dots, i_k$, których suma jest k , oznaczają, ile jest w tym samym układzie skażników o wartościach równych⁴.

Wreszcie pokazuje autor, że metoda przezeń użyta może być stosowana do zagadnień ogólniejszej natury z algebry i teorii liczb.

S. D.

9. **Jaglarz A.** *Siatka i tkanica przecięć stożkowych.* Sprawozdanie Dyrektora c. k. gimnazjum w Tarnowie za rok 1892/3. Tarnów, str. 3—23.

Po krótkich objaśnieniach o współrzędnych punktowych i liniowych, o rzędzie i klasie krzywej, autor mówi o siatce przecięć stożkowych, określa krzywą *Jacobi'ego* i *Hermite'a* i wyprowadza niektóre ich własności.

Jeżeli każde przecięcie stożkowe we współrzędnych punktowych jest sprzężone z przecięciem stożkowym we współrzędnych liniowych, to grupa utworzona ze współrzędnych punktowych trzech krzywych przez związek liniowy, będzie sprzężona z grupą współrzędnych liniowych, utworzoną przez związek liniowy. Pierwsza grupa zowie się siatką, druga zaś tkaną przecięć stożkowych. Krzywa *Hermite'a* i tkanica jest identyczną z krzywą *Jacobi'ego* siatki sprzężonej. Mowa jest następnie o siatce biegunowych drugiego stopnia i wyprowadzone formy, wyrażające krzywe *Hessego* i *Cayley'a*. Z przeprowadzonych rachunków autor wyprowadza własności, zachodzące między przecięciami stożkowymi siatki i tkaną sprzężoną. W końcu określa pęki i gromady przecięć stożkowych: pierwsze przez grupę przecięć stożkowych, przechodzących przez 4 punkty zwane głównymi; drugie zaś przez odpowiednią grupę przecięć stożkowych drugiej klasy, a po wyprowadzeniu niektórych ich własności, kończy pracę swoją kilku słowami o siatce kołowej.

A. Cz.

10. **Jeske A.** *Arytmetyka.* Kurs elementarny, Cztery działania z liczbami całkowitymi, liczby wielorakie i system metryczny, ułamki zwyczajne i dziesiętne, stosunki, proporcje i reguła trzech. Na podstawie rachunku pamięciowego wyłożył... Wydanie czwarte, opracowane i uzupełnione przez Zbigniewa Kamińskiego. Warszawa, 1892, 8° mal. str. 252.

11. **Kępiński S.** *O całkach rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych liniowych jednorodnych rzędu 2-go.* Rozprawy Wydz. mat.-przr. Akad. Umiej. w Krakowie, tom XXV, str. 264—328.

Przedmiotem rozprawy tej są funkcje, które otrzymują się przez całkowanie rozwiązań równań różniczkowych liniowych i jednorodnych rzędu 2-go. Badania te opierają się z jednej strony na teorii t. zw. funkcji automorficznych¹⁾, którym liczne prace poświęcili *Fuchs*, *Klein* i *Poincaré*; z drugiej traktują o pewnych funkcjach analogicznych do całek abelowych trzeciego gatunku, a więc łączą się z pewnymi pracami *Abela*, *Jacobi'ego*, *Fuchsa*, *Frobeniusa* i *Kleina* z tego zakresu.

Rozdział I zawiera streszczenie najgłówniejszych twierdzeń o równaniach różniczkowych zwyczajnych, liniowych i jednorodnych rzędu 2-go, należących do kategorii równań liniowych, wyszczególnionej przez *Fuchsa* w 66-tym tomie *Dziennika Crelle'a*. Szczegóły w tym rozdziale zawarte możemy pominąć, a sformułujemy tylko związek, jaki zachodzi pomiędzy powyższymi równaniami i funkcjami automorficznymi. Niech będzie mianowicie równanie:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1-k'_i-k''_i}{z-e_i} + \frac{y}{\prod_{i=1}^{i=n} (z-e_i)} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} k'_i k''_i (e_i-e_1) \dots (e_i-e_n) \right. \\ \left. + A z^{n-4} + B z^{n-3} + \dots + N \right\} = 0,$$

w którym e_i oznaczają punkty osobliwe równania, k'_i i k''_i są wykładnikami rozwiązań y_1 i y_2 tego równania w odpowiednich punktach osobliwych, związaniem warunkiem:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (k'_i + k''_i) = n - 2,$$

¹⁾ Jest to termin *Kleina*. *Poincaré* funkcje te nazywa „fuchsienne”, względnie „kleinennes”.

stałe zaś $A, B, \dots, N$ są tak zwanymi przez Kleina parametrami akcesoryjnymi równania (1). Przy obiegach około punktów osoblwych e_i rozwiązywania y_1 i y_2 przekształcają się za pomocą podstawień liniowych:

$$\begin{aligned} A_i) \quad y_1' &= \alpha_i y_1 + \beta_i y_2, \\ y_2' &= \gamma_i y_1 + \delta_i y_2, \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

związanych jednym warunkiem: $A_1 A_2 \dots A_n = 1$, i stanowiących $n-1$ podstawień rodzących grupy Γ równania (1). Jeżeli utworzymy iloraz:

$$\eta = \frac{y_1}{y_2},$$

natenczas odwrotność tej funkcji $z(\eta)$ będzie funkcją, nie zmieniającą się przy grupie Γ' podstawień liniowych z podstawieniami rodzącymi:

$$\begin{aligned} A_i') \quad \eta' &= \frac{\alpha_i \eta + \beta_i}{\gamma_i \eta + \delta_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ A_1' A_2' \dots A_n' &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Grupa ta jest izomorficzną z grupą Γ , a funkcja $z(\eta)$ nazywa się funkcją automorficzną.

Przy pewnych warunkach dla parametrów akcesoryjnych oraz, jeżeli:

$$k_i' = k_i'' = \frac{1}{l_i},$$

gdzie l_i są liczbami całkowitymi, skąd wynika:

$$k_i' = \frac{r_i + 1}{l_i}, \quad k_i'' = \frac{r_i}{l_i},$$

funkcja $z(\eta)$ jest jednowartościową funkcją zmiennej η .

η jako funkcja zmiennej z czyni zadość pewnemu równaniu różniczkowemu rzędu 3-go, które w przypadku wspomnianej jednowartościowości ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} (z - e_i)} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{l_i^2} \right)}{z - e_i} (e_i - e_1) \dots (e_i - e_n) \right. \\ &\quad \left. + A z^{n-4} + B z^{n-3} + \dots + N \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Równanie to daje wyrażenie *schwarzianu* funkcji η .

Wychodząc w Rozdziale II z funkcji jednowartościowej automorficznej $z(\eta)$, istniejącej w pewnym obszarze np. w połowie płaszczyzny η , autor stawia sobie zagadnienie badania całek z rozwiązań y_1 i y_2 , których ilorazem jest odwrotność tej funkcji $\eta(z)$. Oczywiście, że takich rozwiązań może być nieskończenie wiele; innymi słowy, może być nieskończenie wiele równań (1), odpowiadających jednemu równaniu (4). To równanie wybiera autor tak, ażeby funkcje y_1 i y_2 były na powierzchni Riemanna, wyznaczonej przez funkcje automorficzne, nierozgałęzione, i wykazuje, że wówczas y_1 i y_2 , jako funkcje zmiennej η , są jednowartościowe. Koniecznym i dostatecznym warunkiem istnienia takich równań (1) jest to, aby w przypadku, gdy wszystkie liczby l_i są skończone, nieparzysta ich ilość nie zawierała jako czynnika najwyższej potęgi liczby 2, zachodzącej w którymkolwiek l_i .

Z podstawień rodzących (3) grupy Γ' funkcji automorficznej wynika, że podstawienia rodzące grupy Γ równania (1) mają postać:

$$y_1' = \sigma_i (\alpha_i y_1 + \beta_i y_2), \quad y_2' = \sigma_i (\gamma_i y_1 + \delta_i y_2).$$

Okazuje się, że w przypadku wspomnianego wyboru, czynniki σ_i mają postać:

$$\sigma_i = \pm e^{\frac{2r_i + 1}{l_i} \pi i},$$

gdy l_i ma wartość skończoną, zaś:

$$\sigma_i = \pm e^{2r_i \pi i},$$

gdy l_i ma wartość nieskończenie wielką; w tym ostatnim przypadku r_i jest dowolną wielkością rzeczywistą.

Następnie przechodzi autor do właściwego zadania pracy, mianowicie do badania całek:

$$j_1 = \int_{z_0}^z y_1 dz, \quad j_2 = \int_{z_0}^z y_2 dz,$$

gdzie z_0 nie jest żadnym punktem osoblwym na wspomnianej wyżej powierzchni Riemanna. Przy powyższych warunkach całki te mogą mieć w obszarze płaszczyzny η tylko jednego gatunku punkty rozgałęzienia, mianowicie punkty logarytmiczne. Jeżeli jednak założymy, że punkt $z = \infty$ jest punktem osoblwym, to i ta możliwość upadnie, i całki te, jako funkcje zmiennej z , będą nierozgałęzione na powierzchni Riemanna i jednowartościowe we wspomnianym obszarze płaszczyzny η .

Dalej autor zaznacza, że przy obiegach naokoło punktów rozgałęzienia powierzchni Riemanna całki j_1 i j_2 przekształcają się za pomocą podstawień:

$$j_1' = \alpha_i j_1 + \beta_i j_2 + p_i, \quad j_2' = \gamma_i j_1 + \delta_i j_2 + q_i.$$

Te podstawienia są rodzajami pewnej grupy G , izomorficznej z grupami Γ i Γ' . Otaczając z jednej strony wszystkie punkty osobliwe, z drugiej zaś przez uważanie pewnych podstawień eliptycznych, zachodzących w grupie, dochodzi autor do pewnych związków liniowych pomiędzy wielkościami p_i , q_i .

Powyżej omówione badanie przeprowadza autor w szczególach na przykładzie, wziętym z teorii funkcji modułowych. Okazuje on, że tu stałe p_i , q_i można przy pomocy owych związków liniowych i przez obranie odpowiednich krawców dolnych całkowania zupełnie wyznaczyć. Wskutek tego stałe p , q jakiegokolwiek podstawienia grupy G będą określone zupełnie dokładnie. Istotnie przedstawia autor te stałe, jako funkcje jednowartościowe arytmetyczne stałych grupy Γ , w które wchodzi symbol Legendre'a , używany w teorii liczb

W Rozdziale III autor bada inne funkcje, utworzone także przez całkowanie rozwiązań równań różniczkowych liniowych jednorodnych rzędu 2-go. Funkcje te są analogiczne do całek abelowych gatunku trzeciego. Te ostatnie zależą, jak wiadomo, od dwu zmiennych, z których jedna zowie się parametrem, druga argumentem, i posiadają tę ważną własność, że pozostają bez zmiany przy zamianie ze sobą właśnie parametru i argumentu. Tę własność rozciągnął Abel na funkcje inne, utworzone przy pomocy rozwiązań równań różniczkowych, a jego rezultaty znacznie później uprościł Jacobi . Pomimo tego jednak wzory, przedstawiające ową własność u Jacobi 'ego, są jeszcze bardzo skomplikowane. Jako zadanie tedy postawił sobie autor, przedstawić owe funkcje w formie prostej, przejrzystej, analogicznej do formy całek abelowych gatunku trzeciego, wyprowadzonej przez Kleina . W tym celu uważa on równanie różniczkowe:

$$A_2(z)y'' + A_1(z)y' + A_0(z)y = 0, \quad (5)$$

t. zw. ze sobą sprzężone, t. j. takie, w którym:

$$A_2 = [f_n(z)]^2, \quad A_1 = \frac{dA_2}{dz}, \quad A_0 = \frac{n-1}{2(2n-1)} \frac{d^2 A_2}{dz^2} + h_{2n-4}(z),$$

gdzie $f_n(z)$ jest wielomianem całkowitym stopnia n , zaś $h_{2n-4}(z)$ wielomianem całkowitym stopnia $2n-4$. Dla takich równań, używając pewnej funkcji U dwu zmiennych z i ζ , utworzonej przy pomocy wielomianów A_2 , A_0 , dochodzi autor do określenia funkcji:

$$Q = \int_{\gamma} \int_{\eta}^{\xi} (y_1 v_2 - y_2 v_1) \left[\frac{F_{(f_n)}^{(n)}}{(f_n)} + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 \frac{F_{(h_{2n-4})}^{(n-2)}}{(h_{2n-4})} \right] \frac{dz d\zeta}{(z-\zeta)^3},$$

gdzie y_1, y_2 są rozwiązaniami równania (5), v_1, v_2 otrzymują się z y_1 i y_2 przez zamianę w nich z na ζ , $F_{(f_n)}^{(n)}$ jest n -tą biegunową wielomianu f_n^2 ze

względem na wielkość ζ , zaś $F_{(h_{2n-4})}^{(n-2)}$ $(n-2)$ -gą biegunową wielomianu h_{2n-4}

ze względu na wielkość ζ . Odtąd, mozołnie wyprowadzoną przez Abel i Jacobi 'ego własność niezmienną funkcji Q przy zamianie ze sobą parametru i argumentu z formuły tej można odczytać bezpośrednio. Nadto funkcje Q mają charakter niezmienny względem podstawień liniowych, wykonywanych na zmiennych z i ζ . W końcu podaje autor inne przedstawienie funkcji Q przy pomocy całek pojedynczych, dogodne przy badaniu owej funkcji w razie obiegów zmiennych z i ζ około punktów osobliwych równania różniczkowego.

Wreszcie nadmienić wypada, że dla jasności przeprowadził autor powyższe postępowanie naprzód na równaniach różniczkowych rzędu 1-go, które doprowadziło go do całek hypereliptycznych gatunku trzeciego.

K. Ż.

12. *Kępiński S. Z teorii nieciągłych grup podstawień liniowych posiadających współczynniki rzeczywiste. Rozprawy Wydz. mat.-przr. Akad. Umiej. w Krakowie, tom XXVI, str. 37—66.*

W teorii funkcji automorficznych rolę zasadniczą odgrywają grupy nieciągłe podstawień liniowych. Arytmetyczne określanie współczynników podstawień, do jednej i tej samej grupy należących, nie zostało objęte dotychczas przez żadną metodę ogólną. Należało tedy zwrócić się do metod specjalnych, umożliwiających określanie to, przynajmniej w pewnych przypadkach. Jedną z metod takich zawiądzamy Poincaré mu. Polega ona na tem, że każdemu podstawieniu liniowemu:

$$\omega' = \frac{a\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\omega = x + iy) \quad (1)$$

gdzie a, β, γ, δ są stałe rzeczywiste i czynią zadość warunkowi:

$$\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = +1,$$

odpowiada jedno podstawienie liniowe, jednorodne, całkowite pewnych zmiennych X, Y, Z , które nie zmienia formy:

$$XZ - Y^2 \quad (2)$$

i nawzajem, każdemu podstawieniu pewnej kategorii, nie zmieniającemu formy (2) — jedno podstawienie liniowe (1).

Jeżeli zamiast zmiennych X, Y, Z wprowadzimy przy pomocy liniowego, całkowitego, jednorodnego przekształcenia zmienne: ξ, η, ζ , natenczas forma (2) przejdzie wogóle w inną formę kwadratową, a podstawienia jej nie zmieniające—w podstawienia nie zmieniające tej nowej formy.

W ten sposób uzyskuje autor podstawienia, nie zmieniające formy:

$$q\xi^2 - s\eta^2 - r\zeta^2,$$

w której przyjął, iż q, r, s są całkowitemi liczbami pierwszymi. Jeżeli założymy, że współczynniki tych podstawień są liczbami całkowitemi, to zbiór wszystkich takich podstawień o współczynnikach całkowitych oczywiście tworzyć będzie *nieciągłą* grupę podstawień. Jej odpowiadać będzie *nieciągła* grupa podstawień liniowych (1), której wyznaczenie arytmetyczne i zbadanie stanowi właśnie cel pracy autora.

Okazuje się, że grupy te, które autor oznacza przez $\Gamma^{(qrs)}$, zawierają po 16 różnych typów podstawień i są uogólnieniem grup Frickego, który za podstawę badań swoich przyjął formę kwadratową mniej ogólną.

Jeżeli do podstawień grupy $\Gamma^{(qrs)}$ dołączymy podstawienia, które taką samą drogą otrzymać można, zakładając, że:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = -1,$$

to otrzymamy grupę uzupełnioną $\bar{\Gamma}^{(qrs)}$. To drugą kategorią podstawień uzyskać można także, wykonywając na podstawieniach grupy $\Gamma^{(qrs)}$ podstawienie: $\omega' = -\bar{\omega}$, gdzie $\bar{\omega} = x - iy$.

Przystępując do badania cech grupy $\Gamma^{(qrs)}$, autor wyznacza naprzód różne związki, jakie zachodzą między podstawieniami 16 typów tej grupy. Zastosowaniem tych związków jest wyznaczenie różnych grup częściowych grupy $\Gamma^{(qrs)}$.

Bardzo ważne jest następnie znaczenie geometryczne grup podstawień liniowych. Obszar możliwie największy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, który nie zawiera w sobie żadnej takiej pary punktów, aby od jednego z nich do drugiego można było przejść za pomocą jakiegokolwiek podstawienia grupy, nazywa się obszarem zasadniczym. Obszar ten, w przypadku grup podstawień liniowych ze współczynnikami rzeczywistymi, można zawsze obrać tak, że będzie on ograniczony kołami, których środki leżą na osi rzeczywistych. Wyznaczanie wieloboków zasadniczych wogóle jest zagadnieniem trudnym. Fricke zastosował pewną metodę, w której używa kół symetrycznych oraz t. zw. podstawień eliptycznych i parabolicznych do wyznaczania owych wieloboków. P. Kępiński, rozwiązawszy zagadnienie, kiedy grupa $\Gamma^{(qrs)}$ nie posiada podstawień parabolicznych, stosuje ową metodę do oznaczenia wieloboku zasadniczego w kilku przypadkach tej kategorii. Nadto autor zaznacza związki istniejące pomiędzy $\Gamma^{(qrs)}$ i pewnymi formami kwa-

dratowemi podwójnemi. Okazuje się, że i do tych form stosują się pewne twierdzenia, dotyczące form kwadratowych podwójnych o współczynnikach całkowitych.

K. Ż.

13. **Kretkowski W.** *O funkcjach równych co do wielkości i różnych co do natury.* Rozprawy Wydziału mat.-przyr. Ak. Um., tom XXVI, str. 141—144. Autor rozpatruje funkcję u , określoną za pomocą wzoru

$$u = \sum_{m=1}^{m=n} a_m K_{l_m=0} \{l_m f_m(l_m^{-1} z)\},$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią skończoną; ilości a_m dla $m=1, 2, \dots, n$ są n ilościami stałymi dowolnemi; $K_{l_m=0}$ ma wyrażać, że należy wziąć kres,

t. j. granicę wyrażenia $l_m f_m(l_m^{-1} z)$ dla $l_m = 0$; z jest ilością zmienną; f_m dla $m=1, 2, \dots, n$ są znakami n funkcji takich, aby kresy n wyrażen $l_m f_m(l_m^{-1} z)$ dla $l_m = 0$ były zerami. Pochodną tej funkcji otrzymuje w postaci:

$$D_x u = \sum_{m=1}^{m=n} a_m K_{l_m=0} \frac{D_y}{l_m^{-1}} f_m(y),$$

gdzie znak $\frac{D_y}{l_m^{-1}}$ ma oznaczać, że w pochodnej $D_y f_m(y)$ zamiast y podstawić należy $l_m^{-1} z$. Z uwagi, że funkcja u równa zero ma pochodną od zera różną, wyprowadza autor możliwość istnienia funkcji, o jakich mowa w nagłówku. Dodamy tu, że przedmiot, poruszony w tym artykule, był już dawniej podjęty przez Wł. Gosiewskiego w rozprawie: „O różniczkowaniu i całkowaniu funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej“. (Pam. Tow. Nauk Ścisłych w Paryżu, t. XII, 1881).

W. F.

14. **Kretkowski W.** *O pewnej tożsamości.* Rozprawy Wydziału mat.-przyr. Akad. Um., t. XXVI, str. 151—154.

Niechaj $(a_{n,m})$ będzie układem lub macierzą $l(l-1)$ ilości dowolnych rzeczywistych $a_{n,m}$ ($m=1, 2, 3, \dots, l$; $n=1, 2, 3, \dots, l-1$), które ustawić można w układ prostokątny o $l-1$ wierszach poziomych i l wierszach pionowych; podnieśmy macierz tę do kwadratu, wykonywając mnożenie wierszami poziomymi. Oznaczywszy

$$A_{n,p} = \sum_{m=1}^{m=l} a_{n,m} a_{p,m}; \quad (n, p = 1, 2, 3, \dots, l-1)$$

autor stwierdza, że wyznacznik symetryczny

$$A_l = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,l-1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,l-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{l-1,1} & A_{l-1,2} & \dots & A_{l-1,l-1} \end{vmatrix}$$

równa się sumie l kwadratów tyłuż wyznaczników $(l-1)$ -go stopnia, które otrzymujemy z macierzy danej, opuszczając w niej kolejno wiersze poziome $m = 1, 2, \dots, l$.

S. D.

15. **Moskwa R.** *O sześciokącie Pascala i sześcioboku Brianchona.* Sprawozdanie Dyrekcyi c. k. gimnazjum w Drohobyczu, Lwów 1893, str. 3—37.

Porówn. „Sprawozdania z piśmiennictwa i t. d.” za rok 1892 (Prace mat.-fiz., t. V, str. 201—202).

16. **Nauka rachunków na III klasę szkół sześcioklasowych.** Cena 10 centów czyli 20 hellerów. Lwów, 1893, 8-ka mała, str. 80.

Stanowi niejako dalszy ciąg nauki podanej w „Rachunkach dla Szkół ludowych na klasę I i II” (patrz niżej № 20, 21), obejmuje bowiem „poznanie liczb w zakresie tysiąca”. Przedstawienie bardziej systematyczne; podane są określenia działań. Rozdział I obejmuje liczby całkowite, II — ułamki zwyczajne, III — liczby dziesiętne.

S. D.

17. **Oleński K.** *Nowy sposób całkowania pewnych równań różniczkowych pierwszego rzędu o dwu zmiennych.* Rozpr. Wydz. mat.-przr. Ak. Um., t. XXVI, str. 131—141.

Zadaniem pracy niniejszej jest oznaczenie czynnika całkującego, albo nawet samej całki dla równania $dy + P dx = 0$, w którym P spełnia warunek

$$\Delta \arctg P = \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \arctg P = 0.$$

Zakładając

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \arctg P}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = - \frac{\partial \arctg P}{\partial x},$$

otrzymuje autor na czynnik całkujący równania danego wyrażenie

$\varphi_1 / (1 + P^2)^{1/2}$; mając zaś czynnik całkujący, otrzymuje w następstwie wszystko, czego potrzeba.

Metodę swoją stosuje wreszcie autor do czterech przykładów, jedynie dla tego, aby ją łatwo można było sprawdzić.

Wł. G.

18. **Puzyna J.** *O wartościach funkcji analitycznej na okręgach spółśrodkowych z kołem zbieżności jej elementu.* Rozprawy Wydziału matem.-przr. Akad. Umiej., t. XXVI, str. 311—361.

Obszerna ta rozprawa składa się z dwóch rozdziałów. W rozdziale I rozpatruje autor szereg potęgowy

$$\mathfrak{P}(x-x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

zbieżny w zakresie $|x-x_0| < R$ t. j. w kole (R) o środku x_0 . Wydzielając z tego szeregu wszystkie wyrazy $a_k (x-x_0)^k$, w których $k \equiv \mu \pmod{m}$, gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią większą od 1, μ — zaś takąż liczbą mniejszą od m , otrzymuje szereg

$$a_\mu (x-x_0)^\mu + a_{\mu+m} (x-x_0)^{\mu+m} + \dots,$$

które przedstawia pod postacią $(x-x_0)^\mu \mathfrak{P}_\mu((x-x_0)^\mu)$. Szeregi $\mathfrak{P}_\mu$ nazywa „wydzielonemi mod. m ”. Z nich szereg $\mathfrak{P}_0$, którego wykładniki są wielokrotnościami liczby m posiada własność, wyrażoną związkiem

$$\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)_{x=S_0} = \frac{W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_{m-1}}{m}.$$

Tu $W_k = \mathfrak{P}((x-x_0)^k)$; $k = 1, 2, \dots, m-1$; $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}$ są pierwiastkami równania $z^m - 1 = 0$; S_0 jest punktem obranym wewnątrz koła (R) . Punkty $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$, odpowiadające argumentom

$$x = x_0 + q, \quad x' = x_0 + q\varepsilon, \quad x'' = x_0 + q\varepsilon^2, \dots, x^{(m-1)} = x_0 + q\varepsilon^{m-1},$$

gdzie $q = x - x_0$, stanowią wierzchołki wielokąta foremego o środku x_0 . Autor nazywa ten wielokąt „należącym mod. m do punktu $x = S_0$ ”.

Następnie zastanawia się nad szeregiem potęgowym $\mathfrak{P}_0$ i wysnuwa wnioski, jakie wypływają z przypuszczenia, że szereg ten ma zakres zbieżności większy $(R') > R$ (warunki, przy jakich to zachodzi podane są później); dowodzi między innymi twierdzenia: „Jeżeli $(R') > R$ a wewnątrz (R') obierzemy dowolny punkt S_0 i obliczymy wartości funkcji, określonej przez element $\mathfrak{P}(x-x_0)$ w punktach $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$, dochodząc do nich po jakichkolwiek (odpowiednio określonych) drogach „przystających”, to na średnią

arytmetyczną owych wartości dostaniemy zawsze $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)_{x=x_0}$. Rozpatruje następnie pewne szczególne przypadki szeregu wydzielonego, zastanawia się nad własnością „przeprowadzeń” szeregu $\mathfrak{P}_0$ w punktach $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$, nad największą bezwzględną wartością wyrażenia $\mathfrak{P}_0$ i bada własności ilorazu $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^n}$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią i skończoną. Wreszcie opierając się na pracy H a d a m a r d a (Essai sur l'étude des fonctions), wysnuwa wnioski, pod jakimi zakres zbieżności (R') szeregu wydzielonego mod. m jest większy od (R) i poddaje osobnemu rozważaniu ważny przypadek $m = \infty$, w którym uważany wielokąt foremny przechodzi na okrąg koła, wartość zaś średnia-arytmetyczna na całkę.

W tym to przypadku związek

$$\lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_0((x-x_0)^m) = a_0 + \lim_{m=\infty} [a_m(x-x_0)^m + a_{2m}(x-x_0)^{2m} + \dots] \\ = a_0 + P_\infty = K_\infty$$

nasuwa pytanie, co oznacza K_∞ w punktach po za kołem (R) leżących? Badanie to, przeprowadzone w następnym rozdziale, pozostaje w ścisłym związku z twierdzeniami C a u c h y' e g o w teorii funkcji zmiennej urojonej. Tu zaś autor rozpatruje niektóre szczególne przypadki szeregu przy $m = \infty$.

Po tych wstępnych badaniach przystępuje w rozdziale drugim do właściwego przedmiotu swej pracy. W części pierwszej bada funkcje jednoznaczne, w drugiej wieloznaczne.

Badanie funkcji jednoznacznej rozpoczyna od rozpatrzenia szeregu wydzielonego mod. $m = \infty$ z iloczynu $(x-x_0)f(x-x_0)$, gdzie $f(x-x_0)$ jest funkcją, określoną za pomocą elementu $\mathfrak{P}(x-x_0)$. Stosując wzory podane w pierwszym rozdziale, otrzymuje:

$$0 = \lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \overline{W}_v$$

gdzie $\overline{W}_v$ są wartościami funkcji $(x-x_0)f(x-x_0)$ w punktach $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$, $m = \infty$, na kole (r) $< R$. Stąd wynika wprost znane twierdzenie C a u c h y' e g o. Aby odpowiedzieć na pytanie postawione w końcu rozdziału pierwszego, autor czyni pewne założenie o szeregu $\mathfrak{P}_0(x-x_0)^m$ „wydzielonym mod. m ” z iloczynu $(x-x_0)\mathfrak{P}(x-x_0)$, mianowicie, że współczynniki tego szeregu są pewnymi funkcjami $\varphi_\lambda(m)$, $\lambda = 1, 2, \dots, \infty$ parametru m , i sprowadza rzecz do badania funkcji

$$\Omega(\xi_r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} f(z) dz = \sum_{(\gamma)} \text{Res. } f(z)$$

nazywając $\Omega(\xi_r)$ „przeprowadzeniem szeregu K_∞ ”; ξ_r jest punktem koła o promieniu $r > R$. Bada następnie zmianę wartości wyrażenia $\Omega(\xi_r)$ ze zwiększającym się kołem (r). Następnie rozważa ogólniejszą formę iloczynu $(x-x_0)\mathfrak{P}(x-x_0)$, która nie czyni zadość założeniu, uczynionemu wyżej o $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$. Następnie potem badanie samego szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$. Kończy ten rozdział twierdzenie o największej bezwzględnej wartości funkcji na okręgach, współśrodkowych z kołem zbieżności danego jej elementu. Twierdzenie to wyraża się w sposób następujący:

„Gdy funkcja jednoznaczna $f(x)$ daną jest za pomocą elementu $\mathfrak{P}(x-x_0)$, a na kole (r) $> (R)$ o środku x_0 posiada $|f(x)|$ największą wartość g , to owo g nie jest nigdy mniejsze od bezwzględnej wartości sumy pozostałości ilorazu $\frac{f(x)}{x-x_0}$ ”.

Analogicznie przeprowadzone jest badanie w części drugiej dla funkcji wieloznacznych. Autor określa najprzód wyrażenia K_∞ i $\Omega(\xi_r)$ dla iloczynu $(x-x_0)\mathfrak{P}(x-x_0)$, bada wieloznaczność wyrażenia $\Omega(\xi_r)$, zmienną wartości gałęzi tej funkcji ze zwiększającym się kołem (r) i zachowanie się jej na kołach, przechodzących przez punkty osobliwe; daje wyrażenie jednej z tych gałęzi dla danego szeregu potęgowego, kończy wreszcie uwagę o największej bezwzględnej wartości funkcji na okręgu koła (r) $> (R)$.

S. D.

19. *Puzyna J.* Z teorii n -krotnych całek określonych. Prace mat.-fiz., t. IV, str. 1—30.

Wiadomo, że wartość całki podwójnej, której funkcja, pod znakiem całki stojąca, staje się wśród granic całki nieoznaczona, zależy od porządku całkowania, a nawet, że całka posiada wówczas nieskończenie wiele wartości. Fakt ten oczywiście musi być szczególnym przypadkiem podobnej własności całek n -krotnych. W pracy tej autor rozwija właśnie teorię takich faktów w dziedzinie całek n -krotnych, a dochodzi do niej, uogólniając naprzód dla funkcji n zmiennych pewne badania Du Bois Reymonda z zakresu teorii funkcji dwu zmiennych niezależnych.

Część I traktuje o wartościach pewnych wyrażeń nieoznaczonych. Jeżeli L i M są formami stopnia m zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, to zakładając, że wszystkie te zmienne są zerami, lub nieskończonościami, otrzymujemy dla ilorazu:

$$u = \frac{L}{M}$$

wartość nieoznaczoną. Autor zakłada, że współczynniki form L i M są rzeczywiste, że formy te nie mają żadnego wspólnego dzielnika, oraz że nie są

one jedną i tą samą potęgą dwu innych form. Gdybyśmy w wyrażenie ilorazu wprowadzili nowe zmienne:

$$\frac{x_i}{x_1} = y_i, \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

to otrzymalibyśmy iloraz dwu funkcji całkowitych zmiennych y_i . Gdy wszystkie x_i są równe zeru lub nieskończoności, wówczas wartości zmiennych y_i są najzupełniej nieoznaczone. Iloraz u , przy wszystkich możliwych układach wartości zmiennych y_i , przybiera wszystkie wartości, jakie wogóle przyjmować może. Stąd wynika, że gdy zmienne x_i są jednocześnie zerami, lub nieskończonościami, wówczas wartość ilorazu jest jedną z tych wartości, jaką tenże wogóle przyjąć jest zdolny.

W pewnych przypadkach u może przyjąć wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$; w innych, które zdarzają się tylko wtedy, gdy m jest liczbą parzystą, u przyjmuje wszystkie wartości, zawarte w pewnych ciągłych obszarach, wyjętych z pośród wszystkich wartości od $-\infty$ do $+\infty$. Do wyznaczenia granic tych obszarów stosuje autor prawidła teorii najmniejszych i największych. Te badania ogólne ilustruje na bardzo szczęśliwie wybranym przykładzie z teorii powierzchni, w którym iloraz u jest promieniem krzywizny przecięcia normalnego powierzchni.

Jeżeli założymy, że:

$$L = \sum_1^n A_i x_i^m, \quad M = \sum_1^n B_i x_i^m,$$

gdzie m jest liczbą parzystą, to znajdziemy, że największe i najmniejsze wartości ilorazu mają postać $\frac{A_i}{B_i}$. W przypadku tym można więc ze szczególną łatwością wyznaczyć granice powyżej omówionych obszarów wartości ilorazu.

Wreszcie wykazuje autor jeszcze, że do każdego ilorazu u można znaleźć tak odpowiadający mu iloraz postaci:

$$v = \frac{P\xi^{m'} + Q\eta^{m'}}{R\xi^{m'} + S\eta^{m'}},$$

że wszystkie te i tylko te wartości, które może przyjąć u , przyjmuje także i v , gdy stosunek $\frac{\xi}{\eta}$ zmienia się nieograniczenie. Twierdzenie to daje możność przedstawienia wszystkich wartości ilorazu u , jako wszystkie wartości daleko prostszej funkcji v jednej zmiennej $\frac{\xi}{\eta}$.

Część II rozpoczyna się wzorem:

$$\int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \dots \int_0^{b_n} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F(u) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ = H + (-1)^n F(u)_{x_1=x_2=\dots=x_n=0},$$

gdzie H jest pewną skończoną i oznaczoną funkcją granic górnych b_i . Wzór ten wskazuje, że wszystkie wartości tej całki wielokrotnej otrzymują się na podstawie rozważań poprzedniego ustępu, tak, iż np. wszystkie wartości całki:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} e^{\frac{5x^4 - 3y^4 + 2z^4}{x^4 + y^4 + z^4}} dx dy dz$$

są:

$$H = e^{\frac{5-2a^2}{1+a^2}} \quad (a = -\infty, \dots, +\infty),$$

gdzie H jest wielkością zupełnie określoną.

Dalej zastanawia się autor nad tem, jaki wpływ na wartość całki ma porządek całkowań w całce n -krotnej. W przypadku, gdy:

$$u = \frac{\sum_1^n A_i x_i^m}{\sum_1^n B_i x_i^m},$$

a według zmiennej x_i całkujemy na końcu, otrzymuje się wzór:

$$\int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \dots \int_0^{b_n} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F(u) dx_1 dx_2 \dots dx_n = H + (-1)^n F\left(\frac{A_i}{B_i}\right),$$

gdzie H dla każdego i ma jedną i tą samą wartość skończoną. Więc wartość całki zależy tylko od tego, według której ze zmiennych całkujemy na końcu.

Przechodząc do przypadku ogólnego, autor przedstawia naprzód iloraz u w postaci:

$$u = \frac{(t) + (t+1) + \dots + (q)}{(t)' + (t+1)' + \dots + (q)'},$$

gdzie (v) i $(v)'$ są funkcjami jednorodnymi stopnia m , zawierającymi dokładnie v zmiennych. Widoczne jest znaczenie liczb t i q , a widoczna także,

że najmniejszą możliwą wartością t jest 1, a największą możliwą wartością q liczba n . Jeżeli zmiennym x_i w ilorazie u nadawać będziemy kolejno wartość zero, to rezultat zależeć będzie od porządku podstawiania tych wartości. Autor znajduje mianowicie, że każda taka wartość ilorazu u zależy od wyboru $n-t$ zmiennych, którym nasamprzód dajemy wartość zero, a potem od tego, której z pozostałych t zmiennych każemy na końcu zdążać do zera. W jakim porządku $n-t$ pierwszym zmiennym i $t-1$ następnym udzielamy wartość zero, jest obojętne. W ten sposób otrzymujemy wogóle $n \binom{n-1}{t-1}$ wartości ilorazu. Może się jednak wydarzyć, że pewne z tych wartości są sobie równe.

Rezultaty te odrazu można przenieść na całki postaci:

$$\int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \dots \int_0^{b_n} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F(u) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Różne wartości takich całek zupełnie tak samo zależą od porządku całkowania według zmiennych x_i , jak wartości ilorazów zależały od porządku znikania tychże zmiennych. Te wywody ilustruje autor na odpowiednim przykładzie.

Wreszcie należy zauważyć, że opierając się na analogii z teorią podstawień nazywa autor te $(n-t)!(t-1)!$ układów podstawień $x_i = 0$, które prowadzą do jednej i tej samej wartości ilorazu, grupą podstawień. Tylko w przypadkach $n=2$, $t=2$ i $n=3$ otrzymują się ilorazy $n!$ (t. j. $2!$, względnie $3!$)—wartościowe analogiczne do t. zw. funkcji o gatunku Galois.

K. Ż.

20. *Rachunki dla szkół ludowych. Część I.* Cena 6 centów czyli 12 hellerów. Lwów, 1893. 8° mała str. 40.

Zawiera tabliczki przykładów na działania arytmetyczne w zakresie liczb od 1 do 10 (rozdział I) i od 11 do 20 (rozdział II).

21. *Rachunki dla szkół ludowych. Część II.* Cena 9 centów czyli 18 hellerów. Lwów, 1893. 8° mała, str. 72.

Objemuje „poznanie liczb w zakresie setki“. Tablice—podobnie jak i w pierwszej części, oraz przykłady do samodzielnego rozwiązywania. Za niewłaściwą uważamy transkrypcję 2×6 m zamiast $6m \times 2$. Przedstawienie tu jak i w pierwszej części—zbyt schematyczno-abstrakcyjne; wprowadzenie up. najprostszych konstrukcyj geometrycznych przyczyniłoby się znacznie do ożywienia nauki na pierwszym stopniu nauczania.

S. D.

22. *Rembacz M. Kilka uwag o nauce rysunków geometrycznych w szkołach realnych.* (Muzeum, 810—818 Paźdz. 1893. Lwów).

Autor zwraca w swym artykule szczególną uwagę na konieczność prowadzenia nauki rysunku geometrycznego równolegle z nauką geometrii, tak, aby jedna wspierała drugą, a zwłaszcza, żeby uczeń nauczył się rozumować na rysunku, a nie poprzestawał na kopiowaniu lub naśladowaniu wzorów, podanych przez nauczyciela.

Nie poprzestając na gołosłownem życzeniu wydoskonalenia nauki rysunku geometrycznego, podaje rozkład zupełny tej nauki na 6 klas szkół realnych, według którego stopniowo i racjonalnie postępując, dochodzi uczeń od najprostszych figur planimetrycznych w klasach niższych do figur przestrzennych, rzutowych, cieniowanych i aksonometrycznych w klasach wyższych, w miarę jak zaznajomi się z geometrią brył i geometrią wykreślną. Na wystawie Lwowskiej w r. 1894 widzieliśmy na wystawionych rysunkach znakomite rezultaty tej metody; polecamy tedy „Kilka uwag“ a zwłaszcza rozkład nauki rysunków rozwinąć nauczycieli rysunku, zwłaszcza tym, którzy zawdzięczając swe uzdolnienie raczej osobistemu talentowi, niż metodycznie przeprowadzonemu wykształceniu, znajdują trudności w nauczaniu elementarnem rysunku uczniów przeciętnych zdolności.

W. F.

23. *Snopek E. O kongruencji $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_0 \equiv 0 \pmod{p}$.* Prace mat.-fiz., t. IV, str. 63—70.

R a d o s w r. 1866¹⁾ udowodnił kryterium rozwiązalności kongruencji wyższego stopnia, podane przez prof. K ö n i g a w Budapeszcie. Kongruencya $a'_0 x^n + a'_1 x^{n-1} + \dots + a'_n \equiv 0 \pmod{p}$, w której $a'_0, a'_1, \dots$ są liczbami całkowite, p — liczbą pierwszą, sprowadzona za pomocą związku $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ do postaci

$$\varphi(x) = b_0 x^{p-2} + b_1 x^{p-3} + \dots + b_{p-2} \equiv 0 \pmod{p},$$

posiada przynajmniej jeden pierwiastek mniejszy od p , gdy wyznacznik

$$B = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{p-2} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p-2} & b_0 & b_1 & \dots & b_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p};$$

posiada zaś co najmniej k różnych pierwiastków, jeżeli wszystkie minory $(p-k)$ -go stopnia wyznacznika $B \equiv 0 \pmod{p}$ znikają i jeżeli te wyznaczniki stopnia $(p-k)$ -go są najniższymi, jakie znikają.

¹⁾ Crelle, Journal, t. 99.

Dawniej jeszcze podał był Schönmann inne kryterium, które można wyrazić za pomocą kongruencji

$$\prod_{h=1,2,\dots,n} (q_h^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

gdzie q_h ($h=1, 2, \dots, n$) są pierwiastki równania $\varphi(x) = 0$.

Autor za pomocą odpowiedniego przekształcenia wyznacznika B wykazuje, że oba wzmiankowane kryteria są równoważne. W dalszym ciągu otrzymuje stąd kryterium, wskazujące pierwiastki kongruencji różne od $+1$ i -1 , i wyprowadza pewne związki, jakim winny wtedy czynić współczynniki kongruencji.

S. D.

24. Sochocki J. Zasada największego wspólnego dzielnika w zastosowaniu do teorii podzielności liczb algebraicznych. Prace mat.-fiz., t. IV, str. 95—153.

Zadaniem obszernej tej rozprawy jest przedstawienie z nowego punktu widzenia teorii liczb algebraicznych, liczb idealnych i ideałów, której systematyzowanie i rozwinięcie nauka zawdzięcza głównie Dedekindowi. Teoria elementarna p. Sochockiego opiera się na zasadzie największego wspólnego dzielnika.

Na wstępie (rozdział I) określa autor następujące pojęcia: liczbę algebraiczną całkowitą, obszar liczb algebraicznych, układ zasadniczy; liczby pierwsze względem siebie, liczby nie mające wspólnego dzielnika—dwa te ostatnie pojęcia nie są równoważne w ogólnej teorii liczb algebraicznych—; liczbę nierozkładalną oraz liczbę pierwszą—i te dwa pojęcia nie są tu także równoważne—; podaje wreszcie niektóre najważniejsze własności liczb tak określonych.

Rozdział II poświęcony jest określeniu i rozwinięciu pojęcia równoważności liczb i podziałowi ich na klasy według modułu danego. Autor wprowadza tu najprzód pojęcie rzędu liczby algebraicznej, który określa, jako stopień najwyższy potęgi modułu p , dzielącej normę liczby α ; tak, że jest:

$$N(\alpha) = p^h,$$

gdzie h jest liczbą całkowitą zyczącą, nie dzielącą się przez liczbę p . Z tego określenia wynika wprost, że rząd iloczynu dwóch liczb równa się sumie ich rzędów. Liczbami rzędu zero są liczby pierwsze względem modułu p ; liczby te uważać można za stanowiące oddzielną klasę K_0 , do której wchodzą oczywiście i wszystkie jedności. Wszystkie liczby, których normy dzielą się przez moduł p , nie należą do klasy K_0 . Podzielność dwóch liczb według mod. p określa się w sposób następujący: „Jeżeli stosunek $\frac{\gamma}{\beta}$ jest liczbą całkowitą, liczba zaś γ jest pierwszą względem modułu p , wtedy mó-

wimy, że „ a dzieli się według modułu p przez β “ lub też: „ β jest według modułu p dzielnikiem liczby a “. Z tego prostego określenia wynikają z łatwością zasadnicze twierdzenia o podzielności według mod. p . Autor podaje sposób, przy pomocy którego przekonać się można, czy dana liczba a jest podzielna według mod. p przez inną liczbę β , czy też nie. Ogólnie nazywa „równoważnymi“ dwie liczby a i β , jeżeli jednocześnie pierwsza jest podzielna przez drugą, oraz druga przez pierwszą według mod. p . Równoważność tę oznacza za pomocą algorytmu

$$\beta \equiv a \pmod{p}$$

i wyprowadza zasadnicze jego własności. Wszystkie liczby równoważne według mod. p z daną liczbą a są równoważne pomiędzy sobą, każda z każdą i tworzą jedną klasę, którą nazywa autor „klasą według mod. p “; jedna którąkolwiek z liczb klasy przedstawia oczywiście samą klasę. Klasa z przedstawicielką 1 jest wspomnianą wyżej klasą K_0 . Wszystkie liczby jednej klasy są jednakowego rzędu, stanowiącego rząd klasy“. Klasy różne jednakowego rzędu nazywa autor „równoległymi“. Podaje sposób otrzymania wszystkich klas danego rzędu i wszystkich liczb w każdej klasie zawartych. Wprowadza pojęcia „iloczynu klasy“ i „dzielników klasy“.

W rozdziale III podaje i uzasadnia autor twierdzenie następujące: „Niechaj a i β będą dwiema liczbami całkowitemi różnymi od zera, z których druga nie dzieli się według mod. p przez pierwszą; wtedy znaleźć można zawsze taką liczbę całkowitą ω , że rząd różnicy $\frac{a}{\beta} - \omega$ będzie mniejszy od rzędu stosunku $\frac{a}{\beta}$ “. Twierdzenie to ma zasadnicze znaczenie w tej teorii, służy bowiem do wprowadzenia i uzasadnienia teorii największego „wspólnego dzielnika według mod. p “.

Teorii tej poświęcony jest rozdział IV-y. Jeżeli z dwóch liczb a i β żadna nie dzieli się przez drugą według mod. p , wtedy, na podstawie powyższego twierdzenia, można do tych liczb zastosować algorytm, analogiczny do algorytmu największego wspólnego dzielnika w teorii liczb całkowitych zwyczajnych, i dojsz tym sposobem do określenia „największego wspólnego dzielnika liczb a i β według mod. p “, oraz do określenia liczb „względnie pierwszych według mod. p “. Takie dwie liczby a i β czynią zadość równaniu

$$Aa + B\beta = h,$$

gdzie A i B są pewne liczby całkowite, h zaś jest liczbą pierwszą względem p . Stąd wynikają zasadnicze twierdzenia teorii, pomiędzy którymi wymienimy jedno: „Wszelka liczba rozkłada się według mod. p na iloczyn czynników pierwszych według mod. p i to tylko jednym sposobem“.

W rozdziale V-ym autor pomiędzy przedstawicielkami klasy K wybiera taką, której norma co do liczebnej wartości równa się potęgze modułu p t. j. taką, aby było

$$\pm N(a) = p^s,$$

gdzie a oznacza rząd klasy K . Przypuszcza się a priori, że taka liczba istnieje, a z tego przypuszczenia wysnuć już można własności tej „głównej przedstawicielki”. Dla uniknięcia wyjątków przyjmuje się, że każda klasa posiada przedstawicielkę *idealną* główną, rozumiejąc przez wyraz „idealna” określenie: „mogąca istnieć lub nieistnieć”. Przy takim przyjęciu, twierdzenia teorii liczb dają się wystawić ogólnie.

Zasadnicze prawa „bezwzględnej” podzielności liczb zawiera rozdział VI-ty. Są one oparte na dwóch prostych twierdzeniach, z których pierwsze głosi, że warunkiem koniecznym i dostatecznym, by dana liczba a dzieliła się przez liczbę β , jest, aby liczba a dzieliła się przez β według każdego z modułów, wchodzących w skład $N(\beta)$; drugie zaś, — że warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dwie liczby α i β były względnie pierwszemi jest, aby α i β były względnie pierwszemi według każdego z modułów, wchodzących równocześnie w skład norm $N(\alpha)$ i $N(\beta)$. Z twierdzeń tych wynika sposób odszukania wszystkich dzielników liczby danej oraz znalezienia największego wspólnego dzielnika dwóch lub kilku liczb danych. Niech α i β będą liczby dane i niech $p^a q^b r^c$ przedstawia największy wspólny dzielnik norm $N(\alpha)$ i $N(\beta)$. Znajdźmy największe wspólne dzielniki liczb α i β według modułów p, q, r i nazwijmy je d_1, d_2, d_3 ; oznaczmy przez D liczbę „idealną” określoną za pomocą równań:

$$\left. \begin{aligned} D &= d_1 \pmod{p} \\ D &= d_2 \pmod{q} \\ D &= d_3 \pmod{r} \\ \pm N(D) &= p^a q^b r^c \end{aligned} \right\}$$

Tak określona liczba D będzie właśnie szukanym największym wspólnym dzielnikiem

Liczbę idealną x , określoną za pomocą układu

$$\left. \begin{aligned} x &= a \pmod{p} \\ x &= \beta \pmod{q} \\ x &= \gamma \pmod{r} \\ \pm N(x) &= p^a q^b r^c \end{aligned} \right\}$$

pozostawia autor w Rozdziale VI-ym za pomocą symbolu

$$x = \begin{vmatrix} \alpha & p \\ \beta & q \\ \gamma & r \end{vmatrix},$$

w którego pierwszej kolumnie są moduły, w drugiej „składowe” liczby idealnej według modułów. Z tego określenia wyprowadzone są w sposób elementarny zasadnicze własności liczb idealnych, działania na nich, podzielność; po szczegóły odesłać musimy do samej rozprawy.

Rozdział VIII-my zawiera zasady teorii „ideałów”. Ideałem, według Dedekinda, jest zbiór nieskończonej mnogości liczb całkowitych, mający dwie własności: 1) suma lub różnica dwóch liczb zbioru należy również do zbioru; 2) pomnożony jakąkolwiek liczbę zbioru przez dowolną liczbę całkowitą, należącą lub nienależącą do zbioru, otrzymujemy na iloczyn liczbę należącą do zbioru. Autor podaje teorię nową, która sprowadza się do poprzednio wyłożonej teorii liczb idealnych. Ideał określa p. Sochocki, jako zbiór wszystkich liczb otrzymanych z wyrażenia

$$a_0 \Omega_0 + a_1 \Omega_1 + \dots + a_{m-1} \Omega_{m-1},$$

w którym $a_0, a_1, \dots$ są dane liczby całkowite, $\Omega_0, \Omega_1, \dots$ zaś liczby całkowite dowolne; wzór ten ma, według autora, tylko tę niedogodność, że powtarza jedną i tę samą liczbę całkowitą nieskończoną liczbę razy, jakkolwiek można otrzymać łatwo wzór inny, który każdą liczbę ideału daje jeden raz tylko. Lecz już z poprzedniego wzoru dadzą się wyprowadzić zasadnicze prawa teorii. Równość ideałów $J_1 = J_2$ określa się w ten sposób, że każda liczba, zawarta w jednym, zawiera się i w drugim. Zbiór wszystkich liczb całkowitych, dzielących się przez liczbę idealną δ , stanowi ideał $J(\delta)$. Dla każdego ideału J można znaleźć taką jedną i jedyłą liczbę, aby było $J = J(\delta)$. Iloczynem J_1, J_2 dwóch ideałów jest, według Dedekinda, taki ideał J_3 , którego każda liczba daje się wyrazić, jako suma iloczynów z liczby pierwszego ideału przez liczbę drugiego. Autor dowodzi, że $J(\alpha) J(\beta) = J(\alpha\beta)$ i podaje sposób oznaczenia tego iloczynu. Jeżeli liczba idealna jest istniejącą, ideał $J(\alpha)$ nazywa się „głównym”. Dla każdego ideału $J(\beta)$ można znaleźć inny ideał $J(\gamma)$ taki, że iloczyn $J(\beta) J(\gamma)$ będzie ideałem głównym.

Rozdział IX-y poświęca autor badaniu kongruencji, w których moduł jest liczbą idealną. Z twierdzeń tu podanych wymienimy dwa następujące: 1) Liczba wszystkich liczb niekongruentnych według mod. A , równa się liczebnej wartości $N(A)$. 2) Jeżeli $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i$ oznaczają wszystkie liczby idealne pierwsze, wchodzące w skład danej liczby idealnej A , to przedsta-

wiając za pomocą znaku $\varphi(A)$ liczbę liczb niekongruentnych według mod. A , i pierwszych z A , mieć będziemy

$$\varphi(A) = N(A) \left(1 - \frac{1}{N(\pi_1)}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{N(\pi_i)}\right),$$

a liczba liczb, niekongruentnych mod. A i mających największy wspólny dzielnik z A równy d , równa się $\varphi\left(\frac{A}{d}\right)$.

S. D.

25. **Stodórkiewicz A. J.** *O całkowaniu pod postacią skończoną równań różniczkowych liniowych rzędu n -go.* Rozprawy Wydz. mat.-przyr. Akad. Um. t. XXVI, str. 100—104.

Do równania

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = X$$

w którym $X_1, X_2, \dots, X_n, X$ są pewnymi funkcjami zmiennej x , autor stosuje metodę całkowania d'Alemberta, sprowadzając przez to zadanie do całkowania równania

$$\frac{du}{dx} = X + (\mu_1 - X_1) u,$$

z którego wynika

$$u = e^{\int (\mu_1 - X_1) dx} \left\{ c_1 + \int e^{-\int (\mu_1 - X_1) dx} X dx \right\}$$

oraz do układu:

$$\frac{d\mu_1}{dx} = \mu_1 (\mu_1 - X_1) + X_2 - \mu_2,$$

$$\frac{d\mu_2}{dx} = \mu_2 (\mu_1 - X_1) + X_3 - \mu_3,$$

.....

$$\frac{d\mu_{n-2}}{dx} = \mu_{n-2} (\mu_1 - X_1) + X_{n-1} - \mu_{n-1},$$

$$\frac{d\mu_{n-1}}{dx} = \mu_{n-1} (\mu_1 - X_1) + X_n.$$

W szczególnych przypadkach układ ten daje się całkować. Takim jest np. przypadek, w którym

$$\mu_1 = \frac{X_2}{X_1}, \quad \mu_2 = \frac{X_3}{X_1}, \quad \dots, \quad \mu_{n-1} = \frac{X_n}{X_1}.$$

Autor znajduje warunki całkowalności i metodę opisaną stosuje do układu

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + X_1 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^2} y \right) = X.$$

S. D.

26. **Stodórkiewicz A. J.** *Sposób d'Alemberta w zastosowaniu do równań różniczkowych liniowych rzędu n -go ze współczynnikami stałymi.* Rozprawy Wydz. mat.-przyr. Akad. Um., t. XXVI, str. 105—111.

Danem jest równanie

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = X,$$

gdzie $A_1, A_2, \dots, A_n$ są liczby stałe, X — funkcja zmiennej niezależnej x .
Położmy

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'' \dots \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}, \quad (1)$$

otrzymamy

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = X - A_1 y^{(n-1)} - A_2 y^{(n-2)} \dots - A_{n-1} y' - A_n y. \quad (2)$$

Równania (1) pomnóżmy odpowiednio przez czynniki nieoznaczone $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ i dodajmy do równania (2), kładąc

$$y^{(n-1)} + \mu_1 y^{(n-2)} + \mu_2 y^{(n-3)} + \dots + \mu_{n-2} y' + \mu_{n-1} y = u_1. \quad (3)$$

Dochodzimy tym sposobem do związku

$$\begin{aligned} & \frac{d\mu_1}{dx} - y^{(n-2)} \frac{d\mu_1}{dx} - y^{(n-3)} \frac{d\mu_2}{dx} - \dots - y' \frac{d\mu_{n-2}}{dx} - y \frac{d\mu_{n-1}}{dx} \\ &= X + (\mu_1 - A_1) u_1 - y^{(n-2)} [\mu_1 (\mu_1 - A_1) + A_2 - \mu_2] \dots \\ & \dots - y [\mu_{n-1} (\mu_1 - A_1) + A_n]. \end{aligned}$$

Dla $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_{n-1}$ można znaleźć układ stałych, aby współczynniki przy $y^{(n-2)} \dots y$ w tem równaniu były zerami. Napisawszy te równania warunkowe i kładąc $\mu_1 = r + A_1$, otrzymamy na oznaczenie ilości r równanie

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \dots + A_{n-1} r + A_n = 0.$$

Znając jeden pierwiastek tego równania, obliczymy μ_1 , a z równań warunkowych znajdziemy pozostałe ilości μ . Pozostaje przeto rozwiązać równanie: (3), w którym u_1 czyni zadość równaniu

$$\frac{du_1}{dx} = X + (\mu_1 - A_1) u_1,$$

skąd

$$u_1 = e^{r_1 x} \{c_1 + \int X e^{-r_1 x} dx\},$$

gdzie r_1 jest jednym z pierwiastków powyższego równania stopnia n -go. Zadanie sprowadza się zatem do całkowania równania różniczkowego, rzędu $(n-1)$ -go, do którego znowu możemy zastosować tę samą metodę. Powtarzając $n-1$ razy szereg podobnych działań, dojdziemy wreszcie do równania różniczkowego rzędu pierwszego.

Metoda ta może być stosowana bez względu na to, czy pierwiastki równania algebraicznego są równe czy różne, rzeczywiste, czy urojone.

S. D.

27. *Stodótkiewicz A. J. O całku klasach równań różniczkowych liniowych rzędu n -go.* Rozprawy Wydz. matem.-przyr. Akad. Um., t. XXV, str. 145—150.

Podaną w rozprawie: „O całkowaniu pod postacią skończoną i t. d.” (patrz wyżej Nr 25) metodę stosuje autor do równań postaci

$$\frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 X_1 + b_1) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (a_2 X_1 + b_2) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + (a_n X_1 + b_n) y = X,$$

gdzie X_1 jest funkcją zmiennej x , ilości zaś a i b stałymi. Według tejże metody można całkować równanie

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = X,$$

w którym

$$X_k = a_k \frac{dY}{dx} + a_{k+1} Y + b_k - (a_k Y + b_k) (a_1 Y + b_1 - X_1)$$

$$k = 2, 3, \dots, n-1$$

$$X_n = a_{n-1} \frac{dY}{dx} - (a_{n-1} Y + b_{n-1}) (a_1 Y + b_1 - X_1),$$

gdzie Y i X_1 są funkcjami X , a i b stałymi; lub równanie, gdzie

$$X_2 = \frac{a_2 - a_1 - a_1 (a_1 - x X_1)}{x^2},$$

$$X_3 = \frac{a_3 - 2a_2 - a_2 (a_1 - x X_1)}{x^3},$$

$$\dots \dots \dots X_{n-1} = \frac{a_{n-1} - (n-2) a_{n-2} - a_{n-2} (a_1 - x X_1)}{x^{n-1}},$$

$$X_n = \frac{-(n-1) a_{n-1} - a_{n-1} (a_1 - x X_1)}{x^n}.$$

S. D.

28. *Stodótkiewicz A. J. O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu n -go pod postacią skończoną.* Prace mat.-fiz., t. IV, str. 31—43.

W rozprawie tej rozwija autor te same metody całkowania równań, wyłożone w dwóch pracach, ogłoszonych w Rozprawach Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności, których treść podana jest wyżej pod Nrn 25 i 27.

S. D.

29. *Stodótkiewicz A. J. Uogólnienie twierdzenia o przypadkach szczególnych zagadnienia Pfaffa.* Prace mat.-fiz., t. IV, str. 56—62.

Niech będzie równanie różniczkowe kształtu

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n = 0, \quad (1)$$

którego całkami są

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2.$$

Różniczkowanie dwóch ostatnich równań daje:

$$A_{1,1} dx_1 + A_{1,2} dx_2 + \dots + A_{1,n} dx_n = 0, \quad (2)$$

$$A_{2,1} dx_1 + A_{2,2} dx_2 + \dots + A_{2,n} dx_n = 0,$$

gdzie $A_{1,i}$ i $A_{2,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) są pewne funkcje zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Związek, istniejący pomiędzy współczynnikami równań (1) i (2), autor przyjmuje w postaci

$$A_{1,i} + A_{2,i} = a X_i, \quad (3)$$

gdzie a jest pewną funkcją zmiennych. Wypisawszy warunki całkowalności każdego z równań (2) pod postacią jednej całki, dochodzi za pomocą rugowań i uproszczeń do układu $(n-1)(n-2)$ równań

$$\begin{aligned} A_{1,n} Q_{1,i} + A_{1,i} Q_{i,n} + A_{1,i} Q_{n,i} &= 0, \\ a X_n Q_{i,i} + a X_i Q_{i,n} + a X_i Q_{n,i} &= M_{n,i,i}, \end{aligned} \quad (4)$$

($i = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, n$)

w których

$$Q_{i,i} = \frac{\partial A_{1,i}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{1,i}}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned} M_{n,i,i} &= a^2 X_n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right) + a^2 X_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \right) + a^2 X_i \left(\frac{\partial X_n}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \right) \\ &- A_{1,n} \left(\frac{\partial a X_i}{\partial x_i} - \frac{\partial a X_i}{\partial x_i} \right) - A_{1,i} \left(\frac{\partial a X_i}{\partial x_n} - \frac{\partial a X_n}{\partial x_i} \right) - A_{1,i} \left(\frac{\partial a X_n}{\partial x_i} - \frac{\partial a X_i}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Z układu równań (4) wybiera pięć grup równań dla skaźników m, k, i, l, r przy $n \geq 5$ i za pomocą odpowiednich przekształceń otrzymuje z nich układ 5 równań postaci:

$$(k, l, m) A_{1,i} + (i, l, m) A_{1,k} + (i, k, m) A_{1,l} - (i, k, l) A_{1,m} = 0,$$

gdzie

$$(\rho \sigma \tau) = X \left(\frac{\partial X_\rho}{\partial x_\tau} - \frac{\partial X_\tau}{\partial x_\rho} \right) + X_\sigma \left(\frac{\partial X_\tau}{\partial x_\rho} - \frac{\partial X_\rho}{\partial x_\tau} \right) + X_\tau \left(\frac{\partial X_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial X_\sigma}{\partial x_\rho} \right).$$

Wyznacznik układu tych 5 równań jest tożsamościowo równy zeru. Niechaj minorami tego wyznacznika, odpowiadającymi elementom pierwszego wiersza, będą $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$.

Równania

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$$

przedstawiają wówczas jeden układ warunków całkowalności danego równania (1) pod postacią dwóch równań. Inne podobne warunki otrzymać można kombinując skaźniki i, k, l, m, r , przy różnych ich wartościach $1, 2, \dots, n$.

S. D.

30. *Żorawski K. Uzupełnianie ciągłych grup przekształceń.* Rozprawy Wydz. mat.-przyr. Akad. Um., t. XXIV, str. 34—40.

W artykule tym autor wyprowadza pewien ogólny wzór z teorii przekształceń. Zakłada on, że najogólniejsze przekształcenie nieskończone ma pewnej skończonej lub nieskończonej grupy przekształceń ma postać:

$$Xf = \sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z_k},$$

gdzie ξ_i i ζ_k są funkcjami zmiennych x_i i z_k ; — przypuszcza następnie, że z_k są funkcjami x_i , i zapytuje, jaką ma postać ogólne przekształcenie nieskończone małe $X^{(N)}f$ grupy uzupełnionej względem wszystkich pochodnych z_n względem x_i aż do N -go rzędu włącznie. Postępując metodą, której często używano w teorii przekształceń do wyprowadzania takich wzorów w przypadkach szczególnych, dochodzi autor do wzoru:

$$X^{(N)}f = Xf + \sum_1^m \sum_0^N \sum_{i_1}^{i_1} \sum_{i_2}^{i_2} \dots \sum_{i_N}^{i_N} \frac{\delta}{\delta t} \frac{\partial^{i_1+\dots+i_N} z_k}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_N}} \frac{\partial f}{\partial z_k},$$

gdzie

$$\frac{\delta}{\delta t} \frac{\partial^{i_1+\dots+i_N} z_k}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_N}} = \left(\frac{\partial^{i_1+\dots+i_N} \zeta_k}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_N}} \right)$$

$$- \sum_1^n \sum_0^{\lambda_1} \sum_{\mu_1}^{\mu_1} \dots \sum_0^{\lambda_n} \sum_{\mu_n}^{\mu_n} (\lambda_1)_{\mu_1} \dots (\lambda_n)_{\mu_n} \frac{\partial^{i_1+\dots+i_N-\mu_1-\dots-\mu_n} z_k}{\partial x_1^{i_1-\mu_1} \dots \partial x_n^{i_N-\mu_n}} \frac{\partial f}{\partial z_k} \left(\frac{\partial^{i_1+\dots+i_N} \xi_l}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_N}} \right)$$

Nawiasy przy pochodnych oznaczają, że funkcje ζ_k i ξ_i należy różniczkować względem x_i , wchodzących wyraźnie i niewyraźnie; zaś przecinki górne przy znakach sumowych oznaczają, iż suma skaźników, względem których sumowanie się odbywa, nie może być równa zeru.

S. K.

31. *Żorawski K. Niezmienniki różniczkowe pewnej nieskończonej ciągłej grupy przekształceń.* Rozprawy Wydziału matem.-przyrodniczego Akad. Um. t. XXIV, str. 41—55.

Niechaj będzie nieskończona ciągła grupa przekształceń, określona za pomocą równań

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \varphi'_k &= \varphi_k, & (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie f_i są zupełnie dowolnymi funkcjami zmiennych, równania zaś w wierszu drugim określają przekształcenie tożsamościowe zmiennych $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$, które możemy uważać za pewne funkcje zmiennych x_i . Zadaniem niniejszej rozprawy jest oznaczenie liczby i obliczenie niezmienników grupy, w powyższy sposób określonej.

W tym celu stosuje autor przekształcenie nieskończenie małe zmiennych, określone za pomocą równań

$$\delta x_i = \xi_i (x_1, x_2, \dots, x_n) \delta t, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\delta \varphi_k = 0, \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

gdzie ξ_i są zupełnie dowolnymi funkcjami zmiennych x_i , tak, że ogólne przekształcenie nieskończenie małe tej grupy jest

$$Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Aby znaleźć równania różniczkowe cząstkowe, którym niezmienniki różniczkowe grupy czynią zadość, autor uzupełnia grupę względem pochodnych funkcji φ_k sposobem, wskazanym w rozprawie: „Uzupełnianie ciągłych grup przekształceń“ (patrz wyżej referat № 30) i otrzymuje wyrażenie na przekształcenie ogólne nieskończenie małe grupy N -krotnie uzupełnionej. Stąd zaś z łatwością dochodzi już do układu szukanych równań, którego tu nie wypisujemy, a który określa niezmienniki różniczkowe rzędu N -go t. j. te, w których rząd pochodnych funkcji φ_k jest równy liczbie N .

Badanie tego układu doprowadza autora do następującego twierdzenia: „Jeżeli w nieskończonej grupie przekształceń (1) uważamy φ jako funkcje zmiennych x_i , wtedy ilość niezmienników różniczkowych N -go rzędu tej grupy jest

$$m-n \cdot \frac{n(n+1) \dots (n+N-1)}{1, 2 \dots N},$$

gdy $m > n$; jest zerem, gdy $m \leq n$.

Obliczenie samych niezmienników uskutecznić by można przez całkowanie wzmiarkowanego wyżej układu. Lecz ta droga byłaby zbyt uciążliwą; autor przeto podaje inną, prowadzącą do szukanych niezmienników a polegającą na następującem rozważaniu. Z określenia grupy danej wynika, że jeżeli w przypadku $m > n$, z równań

$$\varphi_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

wyrugujemy zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$, otrzymamy $m-n$ równań, które żadnej zmianie przy przekształceniach grupy nie ulegają. Oznaczywszy więc $m-n$

z pomiędzy n powyższych funkcji φ_k np. funkcje $\varphi_{n+1} \dots \varphi_m$ odpowiednio przez $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m-n}$, możemy wypadek rugowania napisać w postaci

$$\psi_\mu = \psi_\mu(\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_n). \quad (\mu=1, 2, \dots, m-n)$$

Rozważanie to prowadzi do twierdzenia: „Aby obliczyć wszystkie niezmienniki różniczkowe grupy przekształceń

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\varphi'_k = \varphi_k; \quad (k=1, 2, \dots, n); \quad \psi'_\mu = \psi_\mu, \quad (\mu=1, 2, \dots, m-n),$$

trzeba we wszystkich pochodnych funkcji ψ zmiennych φ_i zastąpić te zmienne przez zmienne x_k na podstawie równań

$$\varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

następnie zaś w otrzymanych wyrażeniach podstawić zamiast znaku ψ po kolei: $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m-n}$.

Obliczenie niezmienników za pomocą tej metody prowadzi do całkowania wzmiarkowanego układu równań.

S. D.

32. Żorawski K. *Przyczynek do teorii zamiany zmiennych w równaniach różniczkowych zwyczajnych, rzędu pierwszego*. Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Ak. Um., t. XXVI, str. 67—99.

Laguerre w r. 1879 zauważył, że równania różniczkowe liniowe i jednorodne nie zmieniają postaci przy wszystkich przekształceniach grupy nieskończonej: $x' = X(x)$, $y' = Y(y)$, i wprowadził pojęcie niezmienników różniczkowych pomienionych równań, z pomocą których zdołał wreszcie oznaczyć przypadki ich całkowalności. To dało powód szeregowi prac, podjętych w tym kierunku przez Combescure'a, Halphena, Appella, R. Liouville'a, Painlevégo, Goursata, Elliota, dotyczących nie tylko równań liniowych, ale też i innych kategorii równań różniczkowych zwyczajnych. Zagadnienia tego rodzaju są szczególnym przypadkiem teorii Lie'go niezmienników różniczkowych, i dla tego autor słusznie sądzi, że zastosowanie tej teorii, z jej pojęciem nieskończenie małego przekształcenia, pozwoli je traktować metodyczniej i ogólniej.

Autor stosuje pomienioną teorię do równania $dy/dx = F(x, y)$, które było także przedmiotem prac wymienionych wyżej uczonych, wszakże tylko przy szczególnych założeniach o naturze funkcji F . Ideę przewodnią tej pracy zawdzięcza autor rozmowie z prof. Lie; przeprowadzenie zaś tej idei, jakkolwiek niedoprowadzone do pożądanego przez autora końca, jest jego dziełem samodzielne.

33. **Żorawski K.** *O zbieżności iteracji.* Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Ak. Um., tom XXIV, str. 271—288.

Powtarzając na wielkości z szereg działań: $z_1 = f(z)$, $z_2 = f(z_1) = f^2(z)$, ..., $z_n = f(z_{n-1}) = f^n(z)$, robimy tak zwaną iteracją. Przy wzrastającym n , z_n może dążyć lub nie dążyć do pewnej oznaczonej (nawet nieskończenie wielkiej) granicy, t. j. iteracja może być zbieżna lub rozbieżna. W przypadku zbieżności, lim. z_n , jest pierwiastkiem równania $z = f(z)$, a przeto zadanie o zbieżności iteracji wypowiedzieć się daje tak:

„Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z znaleźć wszystkie takie wartości z , dla których lim. $f^n(z)$ jest pierwiastkiem równania $z = f(z)$ “.

Dotąd rozważanym był jedynie ten przypadek powyższego zadania, w którym obszary zbieżności iteracji są ciągłymi; celem zaś autora jest zwrócić uwagi na okoliczność, że prócz obszarów zbieżności ciągłych, mogą istnieć również rozmaitości przerywane punktów, w których iteracja jest zbieżna. Poprzedza jednak autor odnośne wywody kwestią zbieżności iteracji funkcji ułamkowej liniowej, a to ze względu na to, że Schröder, który pierwszy wogóle sprawę iteracji podniósł, traktuje ją błędnie, jakoteż i na to, że nie spotkał nigdzie wyraźnie sformułowanych odnośnych rezultatów.

Wł. G.

34. **Żorawski K.** *Drobne przyczynki do teorii przekształceń i jej zastosowań.* Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Um. w Krakowie, t. XXVI, str. 289—300.

I. Wstępnie „Opewnej grupie nieskończonej“ rozważa autor taką grupę przekształceń n zmiennych: x_i i y_k ($i = 1, 2, \dots, r$; $k = r+1, \dots, n$), oraz $m \geq n$ zmiennych: φ_i , ψ_k , σ_i ($i = 1, 2, \dots, r$; $k = r+1, \dots, n$; $l = n+1, \dots, m$), że

$$\delta x_i = \xi_i \delta t, \delta y_k = \eta_k \delta t, \delta \varphi_i = \delta \psi_k = \delta \sigma_l = 0,$$

gdzie ξ_i i η_k są dowolnymi funkcjami zmiennych x_i i y_k . Uważając tu φ_i , ψ_k i σ_l jako funkcje zmiennych x_i i y_k , a y_k jako funkcje zmiennych x_i , uzupełnia autor tę grupę względem pochodnych cząstkowych funkcji φ_i , ψ_k , σ_l i y_k do N -go rzędu włącznie i wykazuje, że wszystkie niezmienniki różniczkowe tej grupy, zawierające pochodne cząstkowe y_k względem x_i , otrzymają się z pochodnych funkcji ψ_k względem φ_i , gdy te ostatnie wyrażymy przez pochodne cząstkowe funkcji φ_i , ψ_k i y_k .

II. W dodatku do pracy: „Opewnem odkształceniu powierzchni“ okazuje autor naprzód twierdzenie następujące:

„Każdy niezmiennik gięcia można, przy dowolnych x, y , wyrazić przez pochodne wielkości r względem p i q , pochodne dowolnych funkcji φ^k względem p i q i pochodne q względem p (p, q, r oznaczają tu współrzędne prostokątne punktów powierzchni, a x, y ich współrzędne krzywoliniowe).

Nawzajem, wszystkie wyrażenia, zależne od E, F, G , ich pochodnych cząstkowych względem x, y , pochodnych dowolnych funkcji φ^k względem x, y i pochodnych y względem x i nadto posiadające własność, wyrażoną w poprzedzającym twierdzeniu, są niezmiennikami gięcia.

W dalszym ciągu (B) zwraca autor uwagę, na to, że pomiędzy niezmiennikami gięcia mogą zachodzić niezmienniki, należące do kategorii niezmienników, rozważanej w części I, a więc niezależne od E, F, G i ich pochodnych; z tej uwagi wyciąga następnie kilka wniosków.

III. Wstępnie „Grupa odwzorowań podobnych“ dowodzi autor, że jeżeli zmienne x, y, E, F, G tak przekształcimy na zmienne x', y', E', F', G' , iż

$$x' = X(x, y), y' = Y(x, y),$$

$$E' dx'^2 + 2F' dx' dy' + G' dy'^2 = [\varrho(x, y)]^2 \cdot (E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2),$$

gdzie X, Y i ϱ są funkcjami dowolnymi, to otrzymamy grupę przekształceń. Za pomocą przekształceń tej grupy z jednej powierzchni otrzymujemy wszystkie takie, które są w punktach odpowiednich względem pierwotnej odwzorowane podobnie.

Twierdzenie to pozwala na systematyczne studium cech niezmiennych odwzorowania podobnego powierzchni, przyczem widocznem jest, że niezmienników, zależących, tylko od E, F, G i ich pochodnych, niema tu wcale.

S. K.

35. **Żorawski K.** *O pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu.* Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Um., t. XXVI, str. 419—433.

W pracy tej autor rozwiązuje zadanie następujące:

Zakładając, że w otoczeniu punktu a funkcja y zmiennej zespolonej x dana jest przez szereg potęgowy względem tego punktu, znaleźć granicę, do której dąży pochodna dy/dx^s , gdy s nieograniczenie rośnie.

Zastrzegłszy przytem, że w razie gdy dla $s = \infty$, jest również $dy/dx^s = \infty$, to funkcja y pochodnej nieskończenie wielkiego rzędu nie ma, autor wyniki swej pracy streszcza w trzech następujących twierdzeniach:

I. Jeżeli wszystkie pochodne funkcji analitycznej y zmiennej zespolonej x są skończone w jednym, jakimkolwiek punkcie a płaszczyzny skończonej tej zmiennej, to funkcja ta należy do kategorii funkcji całkowitych, a wszystkie jej pochodne, we wszystkich punktach tej płaszczyzny skończonej, są skończone. Tylko takie funkcje posiadają pochodne nieskończenie wielkiego rzędu.

II. Jeżeli dla funkcji całkowitej y zmiennej zespolonej x istnieje w jednym, jakimkolwiek punkcie a płaszczyzny skończonej tej zmiennej, jedna i tylko jedna pochodna nieskończenie wielkiego rzędu, to i we wszystkich innych punktach płaszczyzny skończonej funkcja ta posiada jedną i tylko je-

dną pochodną nieskończenie wielkiego rzędu. Jeżeli oznaczmy wartość tej pochodnej w punkcie a przez b , to wartości jej we wszystkich innych punktach równają się be^{x-a} , a funkcję y możemy przedstawić w postaci: $be^{x-a} + q(x-a)$ gdzie $q(x-a)$ jest taką funkcją całkowitą, której pochodna nieskończenie wielkiego rzędu na całej płaszczyźnie skończonej równa się zeru.

III. Jeżeli funkcja całkowita y zmiennej zespolonej x posiada w jednym, jakimkolwiek punkcie a płaszczyzny skończonej tej zmiennej μ takich pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu: $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(\mu-1)}$, że wykonywając $p\mu$ następnych różniczkowań, gdzie p jest liczbą dowolnie wielką, otrzymamy p szeregów tożsamościowych z szeregiem wartości b , a szeregu tego, bez zmiany porządku jego wyrazów, nie można rozbić na kilka szeregów tożsamościowych, to i w każdym innym punkcie tej płaszczyzny skończonej funkcja y ma μ pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu, te same cechy posiadających. Takie i tylko takie funkcje dają nie mniej i nie więcej jak μ różnych od siebie funkcji na pochodne nieskończenie wielkiego rzędu, a jeżeli $b^{(0)}$ jest tą z pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu w punkcie a , którą otrzymuje się, gdy rząd różniczkowania dąży do nieskończoności przez wielokrotności liczby μ , to pochodne nieskończenie wielkiego rzędu zawarte są we wzorze:

$$\frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\mu-1} \varepsilon^{mk} e^{\varepsilon^m(x-a)} [e^{m\mu} b^{(0)} + e^{m(\mu-1)} b^{(1)} + \dots + e^m b^{(\mu-1)}],$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, \mu-1)$$

gdzie

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}},$$

a funkcję y można przedstawić w postaci:

$$\frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\mu-1} e^{\varepsilon^m(x-a)} [e^{m\mu} b^{(0)} + e^{m(\mu-1)} b^{(1)} + \dots + e^m b^{(\mu-1)}] + q(x-a),$$

gdzie $q(x-a)$ jest funkcją całkowitą, której pochodna nieskończenie wielkiego rzędu na całej płaszczyźnie skończonej równa się zeru.

Zresztą mogą być funkcje całkowite, posiadające nieskończenie wiele pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu. Taką jest np. funkcja $e^{\varepsilon^{2q\pi i}}$, w której q jest liczbą niewymierną.

Wł. G.

II. MECHANIKA.

36. *Folkierski Wł. Stanowisko mechaniki w dziedzinie wiedzy ludzkiej. Odczyt wstępny do wykładów mechaniki. Czasopismo techniczne № XIII, 98—102, XIV 110—113. Lwów, 1893 (i w oddzielnej odbitce).*

Autor rozpoczyna od przedstawienia doniosłości matematyki i pojęć, na jakich się ta umiejętność opiera. Zastanawia się następnie nad pojęciami zasadniczymi mechaniki i poświęca dłuższy ustęp pojęciom bezwładności i siły. Szkicuje rozwój pojęć mechaniki od czasów Kopernika aż do ostatnich zdobyczy naukowych obecnego wieku. Wykazuje ważność mechaniki dla wszystkich nauk technicznych. Mówi o szkołach technicznych w rozmaitych krajach cywilizowanych i porównywa metody wykładu w nich stosowane. Radzi, by w przyswajaniu zdobyczy obcych w danym społeczeństwie uwzględniano właściwości umysłowe tegoż i starano się o wyrabianie metod własnych. W wykładzie mechaniki poleca posługiwanie się wszelkimi środkami rachunku wyższego; zadaniem wykładów ma być, według autora, raczej zgłębianie nauki, niż rozszerzanie jej zakresu.

Dodajemy, że odczyt jest przekładem polskim lekcji wstępnej do wykładów mechaniki, które p. Folkierski od r. 1876—1888 prowadził w uniwersytecie św. Marka w Lima (Peru).

S. D.

III. ASTRONOMIA, FIZYKA I CHEMIA TEORETYCZNA.

37. **Bandrowski E.** *Wykład chemii ogólnej*. Część II. Chemia organiczna, Kraków, 1893, t. IV, str. 256.

O części I-ej, zawierającej wykład chemii mineralnej, pisaliśmy wtomie IV „Prac” (str. 201).

W części II-ej, po określeniu pojęcia związków organicznych i metod analizy elementarnej i metod oznaczania ciężaru cząsteczkowego, autor wyjaśnia pojęcia izomeryi i budowy chemicznej.

Część opisową dzieli na opis związków tłuszczowych i opis związków cyklowych. W dziale związków tłuszczowych opisuje po kolei węglowodory alkohele jedno i wieloatomowe, połączenia organiczne siarkowe, azotowe, krzemorganiczne i metalorganiczne. W dziale związków cyklowych przeprowadza podział na związki izocyklowe, t. j. o jądrze, złożonym wyłącznie z atomów węgla, i heterocyklowe, w skład jądra których wchodzi oprócz węgla jeszcze i inne pierwiastki. Przechodzi zatem po kolei: związki wielometylenowe, węglowodory aromatyczne, wodorotlenki aromatyczne, i związki azotowe aromatyczne.

Po opisie związków heterocyklowych (pirydyn, indolin i t. d.) przechodzi do opisu barwników, alkaloidów, glukozydów i ciał białkowych i kończy swe dzieło nauką o fermentacji.

Wykład jest nadzwyczaj zwięzły.

W. T.

38. **Baranowski M.** *Specjalna metodyka nauk przyrodniczych w szkole ludowej, obejmująca historią naturalną i fizykę*. (Biblioteka dla nauczycieli szkół ludowych, tomik XVI). Lwów. 1893, 8°, str. 51.

39. **Bert Paweł.** *Początkowa nauka przyrody dla młodzieży*. Wydanie II-gie, 1893, 8°, str. 1, 434, VIII z 520 drzeworytami.

Patrz *Prace mat.-fiz.*, t. IV, str. 202.

40. **Biernacki W.** *O wahaniach elektrycznych wibratorze wtórnym*. *Prace mat.-fiz.*, t. IV, str. 169—181.

Jeżeli w układzie dwu wibratorów o jednakowej pojemności (C) i jednakowym współczynniku indukcji własnej (L) zaniedbać, wobec jedności, $\frac{M^2}{L^2}$, gdzie M jest współczynnikiem wzajemnej indukcji, a nadto jeżeli dla

pierwotnego wibratora zachowany jest warunek $\frac{R_1^2}{L} < \frac{4}{C} (R_1 \text{ opór wibr.}$

pierw.), to otrzymuje się dla różnicy potencjału w wibratorze pierwotnym wyrażenie, niezależne od zjawisk w wibratorze wtórnym i od własności tegoż; różnica potencjału w wibratorze wtórnym jest peryodyczną, jeżeli opór tego wibratora jest małym, posiada zaś wyraz aperyodyczny obok peryodycznego, jeżeli opór jest wielkim.

Dla sprawdzenia tych wywodów używał autor dwu jednakowych wibratorów, rurki Geisslera, fluoryzującej przy elektrodzie ujemnej pod wpływem prądów cewki indukcyjnej, i szeregu oporów, zrobionych z roztworów Cu SO_4 . Gdy długość iskier w wibratorze wtórnym jest małą, rurka fluoryzuje jednakowo przy obu elektrodach; jeżeli natomiast kulki wibratora wtórnego są rozsunięte do tyła, że niema w nim iskier, to rurka fluoryzuje głównie przy tej elektrodzie, jaka odpowiada wyrazowi aperyodycznemu. Przy stopniowym włączaniu do wibratora wtórnego z rozsuniętymi kulkami oporów ciekłych, fluoryzowanie niknie, lecz wraca przy większych oporach. To zjawisko, zwane przez autora „interferencją dwu wahań w wibratorze wtórnym”, winno zachodzić według teorii w razie równości oporów w obu wibratorach, co jednak niezupełnie się sprawdza. Być może, że zmiana wartości oporu dla drgań szybkich jest przyczyną tej niezgodności.

L. K.

41. **Biernacki W.** *O metodach oznaczania temperatury i wilgotności powietrza*. *Wszelświat*, t. XII, str. 801—805.

Na wstępie mówi autor o dotychczasowych sposobach chronienia termometrów, służących do oznaczania temperatury powietrza, od wpływu ciepła promienistego, a następnie o metodach oznaczania wilgotności powietrza w obserwacjach meteorologicznych. Reszta artykułu poświęcona jest opisowi i sposobowi używania psychrometru aspiracyjnego, zbudowanego przed kilkoma laty przez prof. Assmanna w Berlinie.

S. D.

42. *Biernacki W.* *O obserwatoriach magnetycznych.* Wszechświat, t. XII, str. 836—841.

W zajmującym tym artykule autor kreśli najprzód treściwą historią przedmiotu, mówi następnie o zadaniach obserwatoriów magnetycznych, o pomiarach „absolutnych“ i „waryacyjnych“ do oznaczania elementów magnetyzmu ziemskiego, o planie urządzenia obserwatoriów magnetycznych, obmyślonym przez Mascarta i stosowanym obecnie na wielu stacjach europejskich. Kończy rzecz tę opisem stacji magnetycznej przy gabinecie fizycznym Uniwersytetu warszawskiego oraz obserwatorium magnetycznego w Poznaniu, które zwiedzał podczas swojej wycieczki naukowej zagranicę.

S. D.

43. *Birkenmajer L.* *Wypadki pomiarów siły składowej poziomej magnetyzmu ziemskiego wykonane w Tatrach w r. 1891.* Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Um., tom XXVI, str. 206—228.

Autor przeprowadził szereg pomiarów względnego natężenia poziomej składowej magnetyzmu ziemskiego w pięciu miejscowościach Tatrzańskich, zakładając sobie jako cel poznanie wpływu wysokości wzniesienia się, ewentualnie obecności mas górskich, na wielkość tej siły. Natężenia poziomej składowej mają się do siebie odwrotnie jak kwadraty okresów wahań tej goz samego magnesu. Pomiary polegały na określeniu okresów wahań w obranych miejscowościach; posługiwał się autor magnetometrem roboty F. Ernecke'go w Berlinie i chronometrem, dokładnie zbadanym w obserwatorium astronomicznym krakowskim. Pomiary wykonywał z pomocą służącego, który zwracał uwagę na wahnięcia magnesu w magnetometrze i oznajmiał chwilę ukończenia każdego wahań; sam autor, śledząc ruch wskazówki sekundowej chronometru, zapisywał chwile dawanych sygnałów. W celu powiększenia dokładności odczytań na chronometrze liczba dostrzeganych wahań była brana dość wielką, w kilku ogniach, poprzedzielanych pauzami. Na początku i na końcu każdego szeregu dostrzeżeń, stanowiącego jedno ogniwo, były notowane obszerności wychyleń magnesu z południka; pozwalało to wprowadzać poprawki, zawisłe od każdorazowej obszerności wahań; poprawki te rozważył autor nader starannie.

W ten sposób badany materiał obserwacyjny doprowadził do następującego zestawienia wartości H (Czernichów przyjęto za miejsce porównania):

	H	Czas obserwacji
Czernichów	1,00000	30 lipca 1891 r.
Peronin	1,00950	4 sierpnia „
Roztoka	1,01942	4 „ „
Morskie oko	1,01592	6 „ „
Czarny staw	1,01261	9 „ „
Bystre	1,01297	10 „ „

Podane liczby autor uważa za dokładne po czwartą cyfrę dziesiętną, z wyjątkiem liczby dla stacji Roztoka, gdzie szereg pomiarów musiał pozostać niedokończonym. Do uwolnienia obserwowanych H od części, wywołanej zmianą szerokości geograficznej, posłużył wzór empiryczny.

$$H = A [1 - 0.022 (\varphi - 50^\circ)],$$

otrzymany z zestawień liczbowych Lamonta i jego kart magnetycznych.

W zestawieniu poniższem umieszczone są obok nazw stacji, ich szerokości geograficzne (φ), zredukowane na równoleżnik Czernichowa, ilości H , oraz przybliżone wzniesienia nad poziom morza (h)

	φ	H	h
Czernichów	49,99°	1,0000	220 m
Poronin	49,34	0,9952	730
Roztoka	49,24	(1,0029)	990
Morskie oko	49,21	0,9987	1390
Czarny staw	49,27	0,9968	1630
Bystre	49,29	0,9976	910

Pomijając ujętą w nawias wartość siły H dla Roztoki, jako niedokładną, widzimy, że natężenie magnetyzmu ziemskiego zmniejsza się istotnie w miarę wznoszenia się do większych nad poziom wysokości. Niezbyt prawidłowe zmniejszanie się H wraz ze wzrostem wysokości ponad poziom morza autor składa na karb wpływu, jaki otoczenie górskie wywierało w kierunku poziomym na wahać się magnes.

Redukując za pomocą wzoru

$$H_0 = H \left(1 + 2 \frac{h - h_0}{R} \right),$$

—gdzie H_0 , H są składowymi poziomymi w wysokościach h_0 , h ; R promieniem ziemi,—ilości H do poziomu w Czernichowie, autor znajduje, że wypadkowa sił, wynikających z rozkładu perturbujących mas magnetycznych na badanym obszarze, zmniejsza wielkość siły H , jakoby pochodziła od geomagnetyzmu, gdyby owe masy perturbujące zostały usunięte, prawie o $0,0005 \frac{\text{cm. gm.}}{\text{sek}^2}$.

Rezultaty otrzymane autor uważa bardziej za informacją dla dalszych pomiarów, aniżeli za dane, na którychby spokojnie można było poprzestać,

oraz wskazuje niektóre korzystne modyfikacje, jakieby należało poczynić w urządzeniu magnetometru, którym się sam posługiwał, jakoteż w sposobie obserwacji.

W. B.

44. *Birkenmajer L.* O zasadniczych wzorach refrakcji astronomicznej. Prace mat.-fiz., t. IV, str. 44—55.

Zamiast, jak zwykle, uważać warstwy powietrza o gęstości stałej za powierzchnie kuliste współśrodkowe, autor rozważa zadanie ogólniej, aby można było podstawić za te warstwy sferoidy harmoniczne. W pracy jednak swojej ogranicza się jedynie na wyniku ogólnym, wypływającym z zasady, że czas potrzebny na przejście światła od gwiazdy do oka obserwatora, powinien być minimum. Ta zasada, jak to udowadnia autor, nie zależy wcale od kształtu warstw powietrza równogęstych, byleby tylko nie były one powierzchniami antyklasykami.

Wł. G.

45. *Boguski J. J.* Badania Landolta nad stałością masy. Wszechświat, tom XII, str. 641—647.

Dokładne streszczenie badań Landolta nad równością sumy masiał reagujących, mierzonych przed reakcją i po niej. Na wstępie zastanawia się autor nad pojęciem „masy”; w zakończeniu zaś zwraca uwagę na obniżanie się środka ciężkości srebra w rurce Landolta, wynikające z osadzania się srebra z roztworu. Obniżenie się to może spowodować zwiększenie ciężaru o 0,003 mg na 100 g, gdy tymczasem Landolt spostrzegał zmniejszenie się ciężaru, od 43 do 58 razy znaczniejsze.

W. B.

46. *Bruner L.* O analizie fizycznej. Wszechświat, t. XII, str. 289—293.

Przez analizę fizyczną autor rozumie ogół metod, pozwalających wnioskować o składzie pewnego układu ciał z własności fizycznych tego układu. Przykładami takich metod są: polaryzacyjne badanie roztworów cukru, metoda termochemiczna Thomsena, badania rozdziału zasad pomiędzy kwasami, wolumetryczna i refraktometryczna metoda Ostwalda, w tym samym celu obmyślone i t. p.

Wł. N.

47. *Kowalski J.* Teoria dysocjacyjna elektrolitów i jej znaczenie dla chemii teoretycznej. Kosmos, roczn. XVIII, str. 155—166.

W rozprawie tej mamy wykład wymienionej w nagłówku teorii, podany w formie przystępnej lecz nie pobieżnej. W roku 1893-im wydrukowano w czasopiśmie „Kosmos” dwa początkowe rozdziały większej widocznie całości. W rozdziale pierwszym autor objaśnia prawo Faradaya, poglądy na

elektrolizę Williamsona i Clausiusa, prace Hittorfa i Kohlrauscha. W drugim jest mowa o ciśnieniu osmotycznym (według van't Hoffa), o rachunku współczynnika „i” z przewodnictwa elektrolitycznego (według Arrheniusa), o wzorze dysocjacyjnym Ostwalda. Wł. N.

48. *Kramsztyk St.* Szkice przyrodnicze z dziedziny fizyki, geofizyki i astronomii. Warszawa. Wydawnictwo redakcji „Prac mat.-fiz.”, 1893, str. VI, i 347.

Książka ta zawiera 15 artykułów, zamieszczonych poprzednio we „Wszechświecie”, w „Ateneum” i w „Bibliotece Warszawskiej”. „Szkice” zająć potrafią każdego czytelnika, znającego zasady wiedzy przyrodniczej, które daje szkoła, choćby w najskromniejszym zakresie wiedzę tę traktującą. „Prace matematyczno-fizyczne” podawały w swoim czasie sprawozdania o niektórych artykułach, zamieszczonych w „Szkicach”. Do tych artykułów należą: Czas (t. II, str. 523), Zagadka wnętrza ziemi (t. II, str. 473), Gwiazdy zmienne (t. IV, str. 205), Historia gazów i ich znaczenie w nauce dzisiejszej (t. IV, str. 207), wreszcie O przewodniach (t. V, str. 238). (W nawiasach oznaczone są odpowiednie sprawozdania w „Pracach”). Pozostaje nam podać wzmiankę o pozostałych artykułach.

W szkicach, zatytułowanych Wymiary i budowa wszechświata według pojęć obecnych, O ruchu gwiazd stałych, O ważeniu ciał niebieskich, O wielości światów zamieszkiwanych wkracza autor w dziedzinę astronomii opisowej i sferycznej oraz mechaniki nieba. Czytelnik poznaje tu metody astronomii i zaskakująco dokładne rezultaty, jakie posiada ta nauka. W artykule O ruchach gwiazd stałych podane są wiadomości o zastosowaniu zasady Dopplera do astronomii. W artykule O naturze pierwiastków chemicznych zaznacza autor analogią pomiędzy zasadą jedności siły a zasadą jedności materii, określa pojęcie „pierwiastek”; mówi o układzie pierwiastków Mendelejewa, wreszcie opisuje badania Lockyera, dotyczące rozkładu pierwiastków.

W szkicu zatytułowanym Energia podane są wiadomości o różnych rodzajach energii, o prawie zachowania energii, o różnych przeobrażeniach energii przy objawach ruchu, przy reakcjach chemicznych, wreszcie w organizmie istot żyjących.

Najszerszy ogół czytelników zająć potrafią artykuły Perpetuum mobile O wysokości atmosfery, Balony po długoletnim rozwoju, ze względu na popularność kwestyj w nich poruszonych.

W ostatnim artykule Człowiek i przyroda rozważa autor stosunek człowieka do przyrody i wykazuje, że jest ona mistrzynią zarówno umysłu, jak i serca naszego. Rzecz ta jest poniekąd odpowiedzią na zarzuty stawiane niekiedy wiedzy przyrodniczej, że znosi ona cześć dla ideału i jest źródłem pojęć materialistycznych.

W. B.

49. **Kramsztyk St.** *Fizyka bez przyrządów. Pierwsze zasady fizyki i w prostych doświadczeniach dla dzieci i młodzieży ułożyl...* Z 61 drzeworytami w tekście. Książeczka II, 8°, str. VIII, 112. Warszawa, 1893. Wydawnictwo Redakcyi Prac matematyczno-fizycznych.

Dalszy ciąg dziełka, którego Część I-sza wydana została w r. 1891 (patrz „Sprawozdania“ w Tomie IV Prac mat.-fiz. str. 206), obejmuje szereg prostych i zajmujących doświadczeń, zaczerpniętych z różnych źródeł. Doświadczenia te odnoszą się do nieprzenikliwości, dziurkowatości, ściśliwości, siły odśrodkowej, równowagi ciał pływających, włoskowatości i napięcia powierzchniowego cieczy (doświadczenia *Mennsbrughe'go*, *Boysa* i t. d.), do nauki o cieple, głosie, świetle, elektryczności i magnetyzmie.

S. D.

50. **Kramsztyk St.** *Nowa hipoteza gwiazd nowych.* Wszechświat, tom XII, str. 69—71.

Sprawozdanie z hipotezy *Seeligera*, zastosowanej do nowej gwiazdy w gwiazdozbiorze Woznicy.

51. **Kramsztyk St.** *O chwiejności osi ziemskiej.* Wszechświat, tom XII, str. 135—137, 155—157.

Treściwa wiadomość o nowszych, obserwacyjnych i teoretycznych badaniach w przedmiocie chwiejności, której oś obrotu ziemi zdaje się ulegać.

Wł. N.

52. **Kramsztyk St.** *O polaryzacji światła.* Wszechświat, tom XII, str. 657—662, 677—683, 699—702 i 714—716.

Wykład popularny i jasny, prowadzony drogą zwykle stosowaną.

53. **Kramsztyk St.** *Okresy lodowe w dziejach ziemi.* Niwa, 1893. str. 199—201.

W popularnym artykule autor przedstawia istotę dotychczasowych hipotez o powstawaniu okresów lodowych, zastanawia się nad różnicami klimatycznymi obu półkul ziemskich, a w szczególności nad obliczeniami *Péroche'a* o wpływie zimy na półkuli północnej i południowej.

S. D.

54. **Kramsztyk St.** *Teoria cynetyczna materji.* Niwa, 1893, str. 370—373.

W krótkim artykule uwidatnia autor dualizm filozofii materji, przez przeciwstawienie teorii atomistycznej poglądom opartym na hipotezie ciągłości materji; przedstawia różne fluktuacje historyczne tych dwóch teorii, szkicuje wreszcie ostatni rozwój teorii materji, do którego doprowadziły teoria cynetyczna gazów i teoria atomów wirowych *Thomsona*.

S. D.

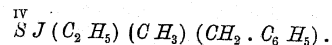
55. **Kramsztyk St.** Artykuły w Wielkiej Encyklopedyi powszechnej ilustrowanej, 1893.

Bolometr, T. IX, str. 95—96, *Bussola*, T. X, str. 820—824, *Butelka lejdejska* tamże, str. 833—836, *Całkowite odbicie*, tamże, str. 967—969.

56. **Lockyer J. N.** *Pierwsze początki astronomii* przełożył **Wł. Skłodowski**. Warszawa, 1893, 16°, str. 209.

57. **Marchlewski L.** *Teorya tak zwanego węgla asymetrycznego.* Wszechświat, tom XII, str. 245—250.

Przedstawiwszy popularnie treść poglądów *Le Bela* i *van't Hoffa*, autor wzmiankuje o dokonanej przez się syntezie jodku benzylometyloetylosulfiny



Należy się spodziewać, że związek ten okaże się optycznie czynny; rozszczepienie go na modyfikacje, wzajemne sobie przeciwne, nie powiodło się jednak dotychczas.

Wł. N.

58. **Marchlewski L.** *Izomerya kwasów winnych i gronowego.* Wszechświat, tom XII, str. 577—581.

59. **Marchlewski L.** *Z teoryi budowy chemicznej. Tautomerya.* Wszechświat, tom XII, str. 721—724.

Pierwszy artykuł traktuje o izomerji kursów winnych: skręcającego w lewo, skręcającego w prawo i mezowinnego, oraz kwasu gronowego; stanowi on interesujące uzupełnienie poprzedniego (№ 57) ogólnego wykładu. Artykuł drugi jest poświęcony niezmiernie pociągającej hipotezie uzupełniającej trwałości budowy w cząsteczkach pewnych ciał, którą autor objaśnia na przykładach kwasu azotawego oraz eteru etylowego kwasu dwuhydroparadwuksytereftalowego.

Wł. N.

60. **Merczyng H. Eter.** *Studjum.* Ateneum, rok 1893, tom I, (og. zb. tom LXIX) str. 363—381.

W rozdziale pierwszym autor tłumaczy falistość światła, poprzeczność drgań, mówi o sztywności i gęstości eteru, wspomina o aberracji światła i t. d. W drugim rozdziale dotyka główniejszych wyników elektromagnetycznej teoryi światła.

Wł. N.

61. *Merczyng H. Śmierć świata.* Niwa, roczn. XXIII (1893), str. 139—140.
Zwykle uwagi o spotkaniu ziemi z kometą; o wygaśnięciu słońca; o końcu świata, przez termodynamikę jakoby przewidywanym i t. p.

Wł. N.

62. *Natanson Wł. O potencyalach termodynamicznych.* Rozpr. W. M. P. Ak. Um., t. XXIV, str. 137—151.

Niechaj stan układu będzie wyznaczony przez parametry $p_1, \dots, p_m$; składa się on z części, z których każda pobiera ciepło tylko z jednego źródła o temperaturze bezwzględnej $t^{(e)}$, entropia tej części jest $S^{(e)}$. Przy nieskończenie małym procesie termodynamicznym układ wykonywa pracę zewnętrzną $\sum_{i=1}^{i=m} P_i \delta q_i$. Energia wewnętrzna układu niech będzie U .

W związku, jaki daje druga zasada mechanicznej teorii ciepła,

$$\sum_{j=1}^{j=m} \frac{\partial U}{\partial p_j} \delta p_j - \sum_e t^{(e)} \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\partial S^{(e)}}{\partial p_j} \delta p_j + \sum_{i=1}^{i=m} P_i \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \delta p_j \leq 0$$

autor wyraża stroną lewą czterema różnemi sposobami, jako zupełną różniczkę pewnej funkcji, obok której pozostają pewne wyrazy dodatkowe. Jeżeli w pewnych warunkach te wyrazy dodatkowe są stale równe zeru, to otrzymane cztery funkcje są dla tych wypadków potencyalami termodynamicznymi.

W ten sposób $F = U - \sum_e t^{(e)} S^{(e)}$ jest potencjałem wówczas, gdy temperatury $t^{(e)}$ są stałe, i niema pracy zewnętrznej, a więc jest potencjałem *izotermiczno-adynamicznym*; przy stałych temperaturach $t^{(e)}$ i stałych siłach termodynamicznych P_i potencjałem (*izotermiczno izodynamicznym*) będzie $\Phi = U - \sum_e t^{(e)} S^{(e)} + \sum_{i=1}^{i=m} P_i q_i$; gdy entropie pojedynczych części układu są stałe, a siły termodynamiczne bądź nie wykonywają pracy zewnętrznej, bądź są stałe, otrzymamy potencjały: *izentropowo-adynamiczny* U i *izentropowo-izodynamiczny* $\Omega = U + \sum_{i=1}^{i=m} P_i q_i$. Potencjały w ten sposób otrzymane, stanowią uogólnienie funkcji termodynamicznych, rozważanych przez Massieu'go, Gibbsa, Helmholtza, Maxwella, Duhema, Plancka i inn.

Wszelkie związki termodynamiczne dla zjawisk odwracalnych, a więc zależności pomiędzy różnemi ciałami własnościami, zawarte są w równaniu symbolicznem:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_k} - \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_j} \right) (F, \Phi, U, \Omega) = 0,$$

gdzie (F, Φ, U, Ω) oznacza którykolwiek z czterech potencjałów termodynamicznych.

Stosując to równanie do przypadków szczególnych, znajduje autor uogólnienia niektórych znanych związków termodynamicznych.

L. K.

63. *Natanson Wł. Studya nad teorią roztworów.* Rozpr. W. M. P. Akad. Um. t. XXIV, str. 311—348.

Przy pomocy potencjału izotermiczno-izodynamicznego ¹⁾ autor bada proste roztwory ciekłe. Niech będzie p ciśnienie, t temperatura bezwzględna, h stężenie, $\varphi(h, p, t)$ potencjał izotermiczno-izodynamiczny jednostki masy rozpuszczalnika w łonie roztworu, zaś $\zeta(p, t)$ potencjał izotermiczno-izodynamiczny jednostki masy rozpuszczalnika czystego ciekłego. Funkcja $f(h, p, t) = \zeta(p, t) - \varphi(h, p, t)$, a w szczególności poszukiwanie jej kształtu, stanowi główny przedmiot omawianej rozprawy.

Warunek równowagi osmotycznej daje równanie

$$f(h, p_1, t_0) = \omega w,$$

jeżeli ω oznacza ciśnienie osmotyczne, w objętość jednostki masy rozpuszczalnika czystego ciekłego, p_1 ciśnienie w roztworze (w rozpuszczalniku czystym ciśnienie $p_1 = \omega$). Z równania tego można wnosić o przybliżonej niezależności f od ciśnienia. Z rozważań równowagi roztworu z rozpuszczalnikiem w kształcie pary lub zestalonym otrzymuje autor dalsze równania przybliżone:

$$f(h, t) = (t - t_0) \frac{q}{t_0},$$

$$f(h, t_0) = (p_0 - p) (W - w),$$

$$f(h, T) = (T_0 - T) \frac{Q}{T_0},$$

gdzie $t - t_0$ jest podniesieniem się punktu wrzenia roztworu, q ciepłem parowania rozpuszczalnika przy temperaturze t_0 , $p - p_0$ obniżeniem prężności pary nasyconej, W objętością jednostki masy rozpuszczalnika w postaci pary, $T - T_0$ obniżeniem punktu zamarzania, Q ciepłem topnienia rozpuszczalnika w temp. T_0 . Dla roztworu tak rozcieńczzonego, że można zaniedbać ciepło rozcieńczania, wypada dalej $f = t F(p, h)$, albo, wedle powyższego, $f = t F(h)$.

¹⁾ Porówn. referat powyższy (N 62).

Badanie zależności f od stężenia opiera autor na rezultatach poszukiwań doświadczalnych, a więc bierze izotermiczne wartości f , przy zmiennym stężeniu, obliczone z pomiarów ciśnienia osmotycznego dla rozтворów cukru trzcinowego w wodzie (Pfeffer), obniżenia punktu zamarzania takichże rozтворów (Raoult, Arrhenius), podniesienia ich punktu wrzenia (Beckmann) i zmniejszenia prężności pary (Dieterici). Zgodność wartości f , otrzymanych różnymi drogami, jest zadawalającą: $\frac{f_0}{h}$ (f_0 jest f przy stałej temper.) pierwotnie maleje przy rosnącym stężeniu, potem wzrasta po przejściu przez minimum. Nastrocza się tu analogia z iloczynem pv dla gazów $\left(\frac{f_0}{h} = \omega \frac{v}{h}\right)$, dająca się przeprowadzić nawet w dalszych szczegółach.

Dla teoretycznego obliczenia zależności f od h przyjmuje autor, że φ zależy od składu rozтворu tak samo, jakby analogiczny potencjał gazu w mieszaninie gazowej zależał od składu tej mieszaniny. Ze zmodyfikowanej w ten sposób teorii Plancka wypada $f(h, p, t) = \frac{Rt}{\mu} \log\left(1 + \frac{\mu h}{\mu'}\right)$, gdzie μ i μ' są masami cząsteczkowymi rozpuszczalnika i ciała rozpuszczonego, a R stałą gazową. Powyższa zależność od stężenia nie znajduje potwierdzenia w danych doświadczalnych dla rozтворów cukru trzcinowego; prawo Avogadro-va'n't Hoffa natomiast sprawdza się dla nich przybliżenie. Inne ciała, zwłaszcza elektrolity, wykazują znaczniejsze odstępstwa, których nadto nie tłumaczy hipoteza dysocjacyjna Arrheniusa.

Ciekawy przykład zgodności termodynamicznej stanowi przypadanie minimum $\frac{f_0}{h}$ na jednakowe stężenia cząsteczkowe.

Po liczne interesujące, a pominięte tu, rezultaty i szczegóły badania autora odesłać musimy do rozprawy oryginalnej.

L. K.

64. *Natanson Wł. Ciśnienie światła.* Wszechświat, t. XII, str. 178—181.

W barwnym i zarazem treściwym wykładzie przeciwstawia autor dawniejszym teoryom zjawisk fizycznych, zbudowanym na pojęciu siły, dzisiejsze wyobrażenia naukowe, oparte na pojęciu energii i jej rozchodzeniu się w przestrzeni. Jeżeli energia porusza się w przestrzeni, to jako jeden z jej objawów możemy wystawić sobie działanie pewnej siły lub pewnego ciśnienia. Siła lub ciśnienie nie jest już wtedy pojęciem pierwotnym, jak w teoryach dawnych, lecz staje się pojęciem pochodnym. Siła, ciśnienie odniesione do pewnej powierzchni, wystawionej na fale energii, może stać się miarą tej ostatniej. Światło jest zjawiskiem, pochodzącym od przenoszenia się energii, stąd światło może wywierać ciśnienie. Autor przeprowadza przybliżone obliczenie ciśnienia, jakie promienie energii światła słonecznego wywierają na powierzchnią wielkiego koła kuli ziemskiej, a następnie oblicza

całkowite ciśnienie, jakie promieniowanie słoneczne wywiera na ziemię. Wysnuwa niektóre wnioski z tego rachunku, wreszcie kończy artykuł wzmianką historyczną o teorii ciśnienia światła. Pogląd ten wprowadził do nauki geniusz twórczy Maxwella, rozwinęli go Bartolii Boltzmann. S. D.

65. *Olearski K. Nowy sposób mierzenia małych oporów elektrycznych podwójnym mostkiem.* Rozpr. Wydz. przyr. mat. Ak. Um., t. XXIV, str. 280—289.

Sposób podwójnego mostku, proponowany przez autora, jest rodzajem mostku Wheatstone'a o dwu gałęziach; od sposobu Kirchhoffa i Hansemanna, udoskonalonego przez Kohlrauscha, różni się tem, że polega na wyrównaniu oporów według zasady mostku Wheatstone'a i na doprowadzeniu prądu płynącego przez galvanometr do zera; z drugiej zaś strony różni się od mostku, zastosowanego przez W. Thomsona do mierzenia małych oporów, innem ich zestawieniem i użyciem galvanometru różnicowego. Czułość metody p. Olearskiego jest większa od czułości sposobu Thomsona w równych warunkach i gdy przez opór mierzony ten sam prąd jest przesyłany. Korzyścią i istotą tej metody podwójnego mostku jest zastosowanie galvanometru różnicowego w ten sposób, aby działania jego zwojów dodawały się przy prądach, zależnych od wielkości mierzonych, rozstrzygających o równości oporów porównywanych, natomiast odejmowały się wobec prądów, pochodzących od źródeł błędów, np. od sił termoelektrycznych, powstających w różnych miejscach przewodników, tworzących mostek. Autor oznaczył, drogą możolnego rachunku, natężenie prądu w zwojach galvanometru w zależności od użytej siły elektromotorycznej, oraz od oporów różnych części mostku; następnie, przyjmując, że nie wszystkie opory są zupełnie ściśle dobrane według warunku niezbędnego mostku, lecz, że jeden z nich jest o bardzo małą wielkość większy, niż być powinien, obliczył, jaki wpływ ten błąd wywiera na galvanometr. Podobne rachunki przeprowadza autor dla układu przewodników, podanego przez Thomsona. Z porównania otrzymanych wyników widocznem jest, że przy równej dokładności metoda podwójnego mostku jest dwa razy czulszą, aniżeli metoda Thomsona.

Posługując się opornicą, zbudowaną według pomysłu Fröhlich'a a przeznaczoną do metody Thomsona, autor przeprowadził szereg pomiarów próbnych. Opornica ta może służyć zarówno do mostku Thomsona, jak i do mostku podwójnego. Wielkość oporów mierzonych wynosiła mniej więcej od 0,001 Ω aż do 0,00007 Ω . We wszystkich razach okazało się, że taż sama różnica oporów porównywanych sprawia większe wychylenie galvanometru przy użyciu mostku podwójnego, aniżeli, przy równych zresztą warunkach, przy pomiarze mostkiem Thomsona.

Autor wyraża przypuszczenie, że metoda mostku podwójnego może być korzystna i w innych razach, np. w zastosowaniu do pomiaru oporów elektrolitów, gdzie mogłaby służyć do wyrugowania polaryzacji.

W. B.

66. *Oleński K.* Uwagi nad ciepłem właściwym przy stałej objętości mieszaniny cieczy i pary. Rozpr. W. M. P. Ak. Um., t. XXVI, str. 112—115.

Rozpatrywanie dwu cyklów, wykonanych bądź z cieczą pod ciśnieniem skroplenia, bądź z parą nasyconą, doprowadziło autora do następujących wzorów dla ciepła właściwego przy stałej objętości (v) mieszaniny cieczy i pary:

$$c_v = m + AT \frac{d^2p}{dT^2} (v-w) - AT \frac{dp}{dT} \frac{dw}{dT}$$

$$= m' - AT \frac{d^2p}{dT^2} (W-v) - AT \frac{dp}{dT} \frac{dW}{dT},$$

gdzie m i m' są to ciepła właściwe cieczy pod ciśnieniem skroplenia i pary nasyconej, w i W objętości tychże przy ciśnieniu p , A ciepły równoważnik pracy, T temperatura bezwzględna.

Jak widać z tych wzorów, c_v , wbrew Zeunero wi (Grundzüge der mech. Wärmetheorie, 1877), może stawać się mniejszem od m , i przy ogrzewaniu mieszaniny przy stałej objętości w pobliżu temperatury krytycznej może następować skraplanie się pary.

Jak wykazują obliczenia, przeprowadzone dla dwutlenku węgla na podstawie pomiarów Andreeffa, przy małej różnicy $v-w$ istotnie c_v stawać się może znacznie mniejszem od m .

Dla wody przypadek ten nie zachodzi, w granicach temperatur, pozwalających obliczyć c_v .

L. K.

67. *Olszewski K. i Witkowski A.* O własnościach optycznych ciekłego tlenu. Rozpr. W. M. P. Ak. Um., t. XXVI, str. 127—130.

Współczynnik załamania tlenu ciekłego był mierzony za pomocą metody, opartej na odbiciu całkowitem, podanej przez Terquem a i Traunina a oraz E. Wiedemanna a, a ulepszonej przez Kettelera.

Przy — 182, 4° i pod ciśnieniem atmosferycznem wynosi współczynnik załamania (względny) dla światła sodowego 1,2232, stąd współczynnik bezwzględny 1,2235, dla światła litowego 1,221¹⁾. Badano dalej pochłanianie tlenu ciekłego przy pomocy odpowiednio skonstruowanego naczynia absorpcyjnego i spektrofotometru Glana.

¹⁾ Według późniejszych pomiarów autorów, współczynniki załamania wynoszą: płomień litowy 1,2213, płomień sodowy 1,2227, płomień talowy 1,2236.

Przez warstwę grubości 1 mm. przechodzi 84—89% światła o długości fali 577—570 milionowych milimetra (smuga zielonawo-żółta widna absorpcyjnego), około 88% światła o długości fali 630—638 (smuga czerwona).

L. K.

68. *Pawlewski Br.* O chlorowęglenie etylowym. Rozprawy Wyd. M. P. Akad. Umiej., t. XXIV, str. 253—259.

Autor zbadał wszechstronnie własności fizyczne chlorowęgla etylowego CO_2 , Cl , C_2 , H_2 , odkrytego w r. 1833-im przez Dumasa a. Oto ważniejsze wyniki badania: Punkt wrzenia pod ciśnieniem 1 atmosfery wynosi 93,1° C. Gęstość pary w 100° C. wypadła 3,77, w zgodzie zupełnej z liczbą teoretyczną. Oznaczenie zawartości chloru udowodniło czystość preparatu, używanego do badań. Ciężary właściwe, wyznaczone dla temperatur 0°, 10° i t. d. aż do 90° sposobem dilatometrycznym, wykazują pewne ostre zmiany w rozszerzalności około 40° i około 80°. W 15° C. ciężar właściwy wynosi 1,144. Łamliwość cząsteczkowa w 20° C. $M(n-1)d$ (linia D) wynosi 37,98; liczba teoretyczna jest 37,66. Aż do 250° gęstość pary jest zupełnie normalna, dopiero powyżej tej temperatury poczyną się nieznaczna dysocjacja.

Wł. N.

69. *Pawlewski B.* Z teorii roztworów. Rozpr. Wyd. M. P. Ak. Um., t. XXVI, str. 379—398.

W pracy niniejszej zajmuje się autor mieszaninami ciał stałych, czyli roztworami ciała stałego w stałym, ze względu na temperaturę ich krzepnięcia, w zestawieniu z temperaturami krzepnięcia ich składników, a to w celu wykazania, że prawo Blagdena daje wyjaśnienie obserwowanych faktów, tudzież stwierdzenia, że diagram dwu przecinających się prostych przedstawia z dostateczną dokładnością przebieg obniżania się punktu krzepnięcia mieszaniny, przy zmianie stosunku procentowego składników.

Prócz badanych przez innych eksperymentatorów mieszanin, jako-to: NaNO_3 i KNO_3 , Sn i Pb , K i Na zajmują autora mieszaniny, poddane przez niego samego lub w jego laboratorium badaniom doświadczalnym, a mianowicie mieszaniny: acenaftenu i benzylu, mentolu i paratoluidyny, paratoluidyny i ortonitrofenolu, tymolu i benzofenonu, mentolu i kamfory, mentolu i chloralhydratu.

L. K.

70. *Rawski P. Ks.* Zasada zachowania energii i jej zastosowania w psychologii. Przegląd Powszechny, rok X. tom XXXVII, str. 196—215 i 393—417.

Rozprawa ta należy raczej do dziedziny psychologii i metafizyki, niż do dziedziny fizyki, dlatego tu zaznaczamy ją tylko.

Wł. N.

71. *Romer E. Studya nad rozkładem ciepła na kuli ziemskiej.* Kosmos XVIII str. 493—525, Wszechświat XII, str. 193—198.

Oznaczenie rozkładu ciepła na kuli ziemskiej stanowi zagadnienie jeszcze nie rozwiązane. Dotychczasowe metody badania opierały się przeważnie na średnich temperaturach równoleżników; średnie te są wynikiem głównie klimatu solarne, t. j. wpływów zmieniających się z szerokością geograficzną. Uwzględnienie obok nich i temperatur średnich dla południków, które to średnie są odbiciem wpływów fizycznych na kuli ziemskiej staje się niezbędną częścią składową badań nad rozkładem ciepła. Jedne i drugie średnie zostały poddane rozstrząsaniu w ważnej pracy Spitalera: „Die Wärmevertheilung auf unserer Erdoberfläche“ ogłoszonej w pismach Akademii Wiedeńskiej. Pan Romer oparł swoje wywody na tej pracy Spitalera, poddając dane w niej zawarte powtórnemu rachunkowi. W tym celu obrachowywał średnie dla każdego 5-go równoleżnika i użytkowywał dane, odnoszące się do punktów przecięcia równoleżników, nie z każdym piątym południkiem, jak to dla równoleżników parzystych zrobił Spitaler, lecz z każdym 10-ym. Różnice pomiędzy wynikami tego rachunku a rezultatami Spitalera, uwidocznione w osobnej tablicy, są zresztą bardzo nieznaczne.

Po tych uwagach wstępnych przystępuje autor do badania rozkładu temperatury na południkach. Posługując się znanymi dotąd rezultatami obserwacyjnymi, wysnuwa z nich wiele wniosków szczegółowych, których powtórzenie przekroczyłoby ramy niniejszego sprawozdania. Z wniosków ogólniejszych wymienimy niektóre: Zmienność temperatury jest w szerokościach wyższych półkuli północnej najwyższa; dla tych jednak szerokości zniżka różnica termiczna między lądem a morzem, w tej formie mianowicie, jaka się napotyka w innych szerokościach; w szerokościach biegunowych decydują o temperaturze prądy morskie i prądy powietrzne. Na wielkich przestrzeniach kuli ziemskiej, w wyższych szerokościach geograficznych, w rozkładzie temperatury rywalizują wpływy fizyczne z wpływami słonecznymi. Badanie stosunków termicznych dla miesięcy krańcowych stycznia i lipca wykazuje się w danych dla całych południków (od 55° N do 55° S) przewagą wpływu półkuli północnej, tak np. na półkuli północnej w styczniu rozkład ten cechują znaczne różnice temperatury; na półkuli południowej zaś rozkład jest dość równomierny. Badaniem rocznych amplitud temperatury w różnych szerokościach kończy autor pierwszą część pracy, odnoszącą się do rozkładu ciepła na południkach. Druga część jest poświęcona badaniu niektórych zjawisk, zależnych od rozkładu ciepła na równoleżnikach. Zmienność ciepła na równoleżnikach (co każde 10° długości) jest przedstawioną w oddzielnej tablicy. Z rezultatów ogólniejszych przytaczamy następujące: Zmienność temperatury znacznie jest wyższą na półkuli północnej, aniżeli na południowej, z wyjątkiem pasów zwrotnikowych, które wykazują większą zmienność na półkuli południowej. Przewaga wpływów fizycznych nad słonecznymi występuje i tu w większych rozmiarach na półkuli północnej, niż na południo-

wej. Co do stosunku, zachodzącego między temperaturą lądów a morza, to z danych liczbowych wynika, że w przecięciu rocznem najcieplejsze jest morze od 45° N do 75° N, po za tem cieplejszy jest ląd. Autor udoskonalił tablicę Spitalera, dającą temperaturę półkul N i S, podług równoleżników w roku, w styczniu i lipcu, przez uwzględnienie południków morskich i lądowych. W końcu polemizuje z Spitalerem w przedmiocie hipotezy o przyczynie zgodności między izogonami i izanomaliami.

Artykuł we „Wszechświecie“ przedstawia w sposób popularny niektóre wyniki tej rozprawy autora.

S. D.

72. *Romer E. Pomiaru ciepłoty w Królewcu.* „Kosmos“ XVIII, str. 199—210.

Sprawozdanie o rezultatach spostrzeżeń temperatury w Królewcu na podstawie pracy d-ra Ernesta Leysta („Untersuchung über die Bodentemperatur“, Königsberg i Pr. 1892), premiowanej przez Towarzystwo fizyczne w Królewcu, poprzedzone przeglądem wadliwości dotychczasowych metod obserwacyjnych.

S. D.

73. *Roscoe H. A. Chemia.* Przekład z angielskiego. Wydanie nowe, przejrzane i uzupełnione. Warszawa, 1893, 16-ka, str. 128.
Patrz „Sprawozdania z piśmiennictwa“, w tomie II „Prac mat.-fiz.“, str. 517.

74. *Rudzki M. P. O granicach atmosfery.* Prace matem.-fizyczne, tom IV, str. 154—168.

Na wstępie, wspomniawszy o rozmaitych usiłowaniach wyznaczenia wysokości atmosfery, autor stara się przede wszystkim ocenić, na zasadzie teorii cyklotycznej, szybkość rozsiwania się atmosfery naszej w międzyplanetarnie przestworza. Rachunek, z wielu względów przybliżony, prowadzi do wniosku, że w ciągu sekundy przez powierzchnię metra kwadratowego uchodzi w przestworza 36.10⁻³⁴⁰ metra sześciennego gazu, mającego 0° C. i wywierającego atmosferyczne ciśnienie. Strata jest więc zapewne bardzo poważna, lecz dobrze nie wiemy, czy i ile pozyskujemy kosztem atmosfer innych planet.

Zadanie właściwe o stanie atmosfery naszej jest bardzo zawile, jak autor podnosi. Mamy ziemię, poruszającą się wśród gazu, wywierającą przyciąganie na cząsteczki jego. Ocean powietrzny skończony mógłby poruszać się ruchem obrotowym wraz z ziemią; lecz ocean bardzo rozległy, a tembardziej nieskończony, obracać się w taki sposób nie może. Ażeby utworzyć niejakię pojęcie o ogólnych prawach ruchu atmosfery, autor rozstrząsa równania ruchu obrotowego kuli wśród ściśnionego płynu, w założeniu, że ruch ten jest trwały. Z założenia też prędkość względna powietrza jest równa

zeru tuż przy powierzchni ziemi. Lecz okazuje się, że możliwe jest rozwiązanie, w którym ocean powietrzny nie obraca się wraz z ziemią bynajmniej jakby ciało stałe. Autor wylicza np., że na równiku, prędkość względna powietrza i ziemi wynosi 1 metr na 1 sekundę już na wysokości $6\frac{1}{2}$ kilometra; a w miarę oddalania się od powierzchni ziemi, prędkość ta wzrasta szybko. Powierzchni i t. zw. Laplace'a (gdzie siła odśrodkowa jest równa sile przyciągania) oczywiście w tym razie wcale nie będzie.

Wł. N.

75. *Silberstein L. Nowsze poglądy na zjawiska elektromagnetyczne.* Kosmos, rocznik XVIII, str. 20—44, 119—132 i 220—228.

W pierwszym ustępie tej pracy autor podaje, w wykładzie przystępnym lecz dość szczegółowym, teorię Poyntinga o płynięciu energii w polu elektromagnetycznym; rozpoczynając mianowicie od zasadniczych myśli, w Maxwellowskiej nauce zawartych, wygłasza prawo płynięcia, znalezione przez Poyntinga, zastanawia się nad dowolnością pojęcia przepływu, objaśnia teorię na znanych przykładach (przewodnik prosty, nieskończenie długi, prowadzący prąd; dwa krążki naelektryzowane; element zamknięty; płynięcie promienistej energii), wyklada wreszcie treść drugiej ważnej pracy Poyntinga „o związku między prądem a indukcją w polu otaczającym”. W dodatku matematycznym (str. 128—132) daje, według Poyntinga, dowód prawa płynięcia oraz dowód kilku zasadniczych twierdzeń teorii światła elektromagnetycznej. W ustępie drugim, roztrząsanie pytania: czy ruch linii indukcji magnetycznej lub elektrycznej odpowiada ruchowi cząstek dielektrycznego ośrodka, czy też raczej rozchodzeniu się pewnego stanu wysiłu, posuwającego się od miejsca do miejsca, prowadzi, dzięki odwołaniu się do przyjętych pojęć o eterze świetlnym, do odrzucenia pierwszej i do przyjęcia drugiej możliwości. Praca jest zakończona niektórymi uwagami o tem, o ile określone jest zadanie podania dynamicznej interpretacji dla równań elektromagnetycznych.

Wł. N.

76. *Soleski J. Zarys chemii dla wyższych klas gimnazjalnych.* Lwów, 1892, 8°, str. 42.

Książka ta zawiera na 14 stronach dużej ósemki konspektowy wykład ogólnych pojęć i teorii chemicznych (pojęć pierwiastka, atomu, wartościowości, układu peryodycznego pierwiastków, budowy chemicznej); na następnych 15 stronach wykład chemii nieorganicznej, ułożony według systemu peryodycznego, a zatem opis chlorowców, tlenowców, azotowców, węglowców, potasowców, wapniowców, glinowców i metali ciężkich; nareszcie na 11 stronach wykład chemii organicznej, podzielony na opis związków tłuszczowych, związków aromatycznych i związków azotowych.

W. T.

77. *Treliński A. Próba tłumaczenia ruchu planet przez działanie elektromagnetyzmu.* Wszechświat, tom XII, str. 341—345.

Wiadomość o (bardzo luźnych dotychczas) usiłowaniach związania objawów grawitacyjnych z zasadami elektrodynamiki.

Wł. N.

78. *Wierzbicki D. Spostrzeżenia magnetyczne wykonane w zachodniej części W. X. Krakowskiego w r. 1891.* Rozprawy Wydz. mat.-przr. Ak. Um. Ser. II, tom IV, ogólnego zbioru t. XXIV, str. 167—186.

Autor podaje wyniki pomiarów magnetycznych, dokonanych na żądanie Komisji fizyograficznej i z pomocą jej subwencji w Trzebini, Sierszy, Jaworznie, Chrzanowie, Alwerni i w Tenczyńku, w końcu lipca i w sierpniu r. 1891. Do obserwacji służyły narzędzia krakowskiego obserwatorium astronomicznego, mianowicie inklinatorium Dövera, teodolit magnetyczny Schneidera, teodolit Meyersteina do wyznaczeń azymutów obranych znaków (mir), oraz zegarek kieszonkowy sekundowy, porównany z chronometrem Denta. Autor podaje dokładniejszy opis teodolitu magnetycznego Schneidera i wskazuje zasady, jakich się trzymał co do porządku prowadzonych obserwacji.

Spostrzeżenia były przeprowadzone nad zboczeniem i nachyleniem. Autor wyprowadza średnie wartości w każdej miejscowości dla zboczenia co najmniej z 30, a dla nachylenia z 64 spostrzeżeń. Załączona tabelka zawiera wyniki otrzymane.

Miejscowość	Czas obserwacji	Zboczenie zachodnie	Nachylenie
Trzebinia	23 Lipca 1891	+ 6° 59' 93	64° 16' 39
Siersza	27 „ „	+ 6° 56' 44	64° 15' 64
Jaworzno	4 Sierpnia „	+ 6° 53' 93	64° 16' 61
Chrzanów	9 „ „	+ 6° 55' 69	64° 16' 19
Alwernia	13 „ „	+ 6° 52' 18	64° 16' 17
Tenczynek	22 „ „	+ 6° 52' 55	64° 16' 25

W. B.

Witkowski A. Patrz Olszewski K. i Witkowski A. (Nr 69).

79. *Zakrzewski J. O gęstości i cieple topliwości lodu.* Rozpr. W. M. P. Ak. Um. t. XXIV, str. 247—252.

Niezgodność wartości rtęciowego równoważnika kalorymetrycznego jednostki ciepła dla kalorymetru Bunsena, podawanych przez różnych badaczy, skłoniła autora do starannego powtórzenia pomiarów gęstości lodu metodą Bunsena, przy wprowadzeniu do metody tej pewnych ulepszeń i środków ostrożności.

Otrzymał on gęstości: 0,916710 przy $-0,701^{\circ}\text{C}$. i 0,916 995 przy $-4,720^{\circ}\text{C}$, skąd wypada współczynnik rozszerzalności 0,000071 i gęstość przy 0° 0,916660 C.

L. K.

80. *Żórawski M. Kapilarny elektrometr.* „Kosmos“ rok XVIII, str. 45—49.

Autor podaje opis urządzonego przez siebie elektrometru kapilarnego, zastosowanego do badań fizjologicznych. Zwyczajny elektrometr Lippmanna, mający rurkę włoskową na tyle grubą, że można rtęć obserwować gołym okiem, niezdatny jest do badań fizjologicznych, gdyż nie jest dostatecznie czuły. Docent Frey w Lipsku połączył taki elektrometr (z bardzo cienką rurką włoskową) z mikroskopem. Przed doświadczeniem należy zawsze sprowadzić menisk rtęci na środek pola widzenia. W elektrometrze Freya służy do tego celu rezerwar rtęci, połączony z rurką włoskową za pomocą rurki kauczukowej; rurka włoskowa stoi pionowo, i przez podnoszenie i opuszczanie rezerwaru można przemieszczać menisk rtęci w rurce włoskowej do góry i na dół. P. Żórawski usunął zupełnie rurkę kauczukową; ponieważ ona głównie staje się powodem zanieczyszczenia rtęci, a przez to niestałości przyrządu.

W przyrządzie p. Żórawskiego o rtęć znajduje się jedynie tylko w rurce szklanej, a regulowanie menisku uskutecznia się za pomocą zmiany pochyłości rurki włoskowej, umieszczonej poziomo. Rurkę włoskową rozszerza się na jednym końcu, i ten koniec zgięty jest w półkole; drugi koniec rurki, zagięty pod kątem prostym, zanurza się w naczyniu z zakwaszoną wodą. Tak urządzony elektrometr przytwardza się do przedmiotowego stołika scioplikonu lub mikroskopu.

Elektrometr ten, czuły i tani, zasługuje na rozpowszechnienie w pracowniach fizjologicznych.

W. B.

IV. HISTORIA WIEDZY.

81. *Birkenmajer L. Marcin Bylica z Olkusza, oraz narzędzia astronomiczne, które zapisał Uniwersytetowi Jagiellońskiemu.* Rozpr. Wyd. mat-przyr. Akad. Um. t. XXV, str. 1—164.

Praca ta stanowi bardzo ważny przyczynek do historii nauk ścisłych w Polsce. Na podstawie sumiennego i pracowitego zbadania źródeł odkrywa autor prawdziwe nazwisko Marcina z Olkusza, — nazywał on się Bylicą; — oznacza rok jego urodzenia na 1433 lub 1434; wynajduje bliższych i dalszych jego krewnych, którzy zajmowali wybitniejsze stanowiska naukowe i społeczne; opowiada nam koleje jego życia, stosunek z Regiomontem i innymi znakomościami owego czasu; opisuje jego działalność naukową najprzód we Włoszech, gdzie miał być profesorem astronomii w Bolonii, a następnie na Węgrzech, gdzie należał do założycieli Akademii węgierskiej w Budzie, gdzie prowadził obserwacje astronomiczne, gdzie wreszcie zajmował wysokie stanowiska. Na Węgrzech między 1492 a 1494 życia dokonał. Przebywając na obczyźnie, nie zapomniał ani o kraju, ani o Szkole krakowskiej, w której odbywał jako młodzieniec studia naukowe. Uniwersytetowi Jagiellońskiemu przesłał ważne traktaty astronomiczne Puerbacha, Juliusza Firmika Materna i t. d.; aktem zaś ostatniej swej woli zapisał temuż uniwersytetowi kosztowne narzędzia astronomiczne, po dziś dzień w obserwatorium krakowskim przechowywane.

Część druga rozprawy p. Birkenmajera jest poświęcona szczegółowemu opisowi tych narzędzi, a mianowicie: I. globusu nieba; II. torque

tum mosiężnego; III. wielkiego astrolabium mosiężnego; IV. astrolabium znapisami arabskimi, V. dwóch starych astrolabów, które wprawdzie nie należą do darów Bylicy, lecz nie są bez związku z przedmiotem rozprawy.

Praca p. Birkenmajera, rzucająca nowe światło na nieznane u nas zjawiska umysłowe, świadczy o wielkiem zamiłowaniu przedmiotu i erudyty autor.

S. D.

82. *Bruner L. O matematyce chrześcijańskiej.* Wszechświat XII, str. 521—526.

Streszczenie dotychczasowych wiadomości naszych o matematyce chińskiej, oparte na przedstawieniu tego przedmiotu w pracach Biernatkiego, Matthiessena i M. Cantora.

S. D.

83. *Czaykowski K. ks. Zasługa Kopernika w filozofii.* Przegląd Powszechny, Rok X, tom XL, str. 221—240 i 373—393.

Autor wykazuje, że pomiędzy odnowicielami filozofii jedno z naczelnych miejsc należy się Kopernikowi. Oto są pytania, które autor obszernie rozstrząsa po kolei: 1) Jakie zjawiska astronomiczne wywołały spór między Kopernikiem a Ptolemeuszem? 2) Jakie poglądy Arystotelesa wciągnęły szkołę perypatetyczną do walki przeciw Kopernikowi w obronie Ptolemeusza? 3) Jakim pojęciem Kopernik otworzył wstęp do przybytków filozofii?

Wł. N.

84. *Dickstein S. Słowo w powodu głosu Mansiona o Koperniku.* Wszechświat, tom XII, str. 385—388.

Wbrew zdaniu Mansiona, autor stwierdza, że znana przedmowa, przez Ossiana dla dzieła Kopernika napisana, powstała zgola bez wiedzy i przyzwolenia autora, a przez uczniów i następców Kopernika była potępiana. Sam ten wielki myśliciel nadawał swej nauce, jak to widać z dzieła jego, znaczenie hipotezy, nieskończenie prostszej i płodniejszej od innych, zatem takiej, jaką musimy uważać za naukowy wyraz rzeczywistości, nie zaś bynajmniej za konstrukcję cyfematyczną pomocniczą i jak gdyby przejściową.

Wł. N.

85. *Dickstein S.* Artykuły w Wielkiej Encyklopedyi powszechnej ilustrowanej, 1893.

Bolzano B. tom IX, str. 101; *Brożek Jan*, tom V, str. 526—528; *Cauchy Aug.*, tom XI, str. 173—174; *Cavalieri B.*, str. 186—187.

86. *Gosiewski W. Władysław Natanson.* Wszechświat t. XII, str. 625—627.

Rzut oka na prace naukowe Wł. Natanson'a, skreślony z okoliczności przyznania temuż w r. 1893 przez komitet Kasy Mianowskiego nagrody z zapisu Jakóba Natanson'a za najlepszą pracę z dziedziny nauk ścisłych w ciągu czterolecia 1889—1892.

S. D.

87. *Hertz K. Galileusz i Newton. Dwa jubileusze.* Dodatek do Przeglądu Tygodniowego, półrocznik I, 1893, str. 101—125.

Dnia 25 grudnia 1892 przypadła 250-a rocznica urodzin Izaaka Newtona, 4 grudnia tego roku upłynęło lat 300 od chwili objęcia katedry fizyki w Padwie przez Galileusza. To daje powód autorowi do skreślenia na kilkunastu kartach głównych wypadków życia i nieśmiertelnych zasług naukowych obu mężów.

S. D.

88. *Kramsztyk St.* Artykuły w Wielkiej Encyklopedyi ilustrowanej powszechnej 1893.

Bouguer Piotr tom IX, str. 264—265, *Boyle*, tamże str. 299—300; *Brahe Tycho*, tamże str. 327—328; *Bruzdewski Wojciech*, t. X, str. 535—536; *Cassini J. D.*, t. X, str. 136—137.

89. *Kramsztyk St. Rozwój stopniowy odkryć i wynalazków.* Niwa, rocznik XXIII (1893), str. 3—7.

„Z każdej karty dziejów nauki wyczytać można dowody, że wszystko w niej rozwijało się stopniowo, że wszelki postęp wiedzy wspierał się na odkryciach poprzednich“. Taka jest myśl przewodnia artykułu, objaśniona i uzasadniona na szeregu przykładów.

Wł. N.

90. *K(wietniewski) W. Jubileusz barometru.* Wszechświat XII, str. 593—598.

W roku 1893 upłynęło lat 250 od chwili sławnego doświadczenia, znanego pod nazwą doświadczenia Toricelli'ego, które dało początek barometrowi. W niniejszym zarysie historycznym, ułożonym na podstawie najlepszych źródeł, daje autor obraz poglądów uczonych XVII wieku na teorię zjawisk, zależnych od ciśnienia powietrza, (Porta, Kepler, Galileusz, Berti, Atanazy Kircher), a następnie przedstawia ten ważny moment w historii nauki, który stworzyły doświadczenia Toricelli'ego, Viviani'ego, Pascala i Ottona de Guericke.

S. D.

91. *Tuleja J. Kilka słów w sprawie narodowości Mikołaja Kopernika. XXXII.* Sprawozdanie Wydziału Towarzystwa br. Pomocy słuchaczy Politechniki we Lwowie za rok 1892/3. Lwów, 1893, str. 3—14.

Autor przytacza szczegóły z życia Kopernika, mające jakąbądź doniosłość w sprawie narodowości wielkiego astronoma; zasadza się przytem przeważnie na dziele *Prowego*, jakkolwiek walczy przeciwko jego tendencji.

92. *Znatowicz Br.* Artykuły w Wielkiej Encyklopedyi Powszechnej ilustrowanej 1893.

Boguski Józef Jerzy, tom IX, str. 24—25; *Bunsen Robert.*, tom X, str. 750—751.

V. V A R I A.

93. *Clifford W. K.* *Cel i środki myślenia naukowego.* Niwa 1893, 184—189, 240—241, tłumaczył L. Silberstein.

Artykuł ten wyszedł już był w przekładzie polskim przed dwoma dziesiątkami lat w „Przyrodzie i Przemysle“, o czem redakcyja „Niwy“ zapewne nie wiedziała.

Dickstein S. *Matematyka i Rzeczywistość.* Szkic, Warszawa, 1893, 8°, str. 40.

W pracy pod powyższym tytułem, przeznaczonej dla szerszego koła czytelników, rozważa autor stosunek i pokrewieństwo między światem rzeczywistym z strony jednej, a światem form matematycznych ze strony drugiej.

W szkicu popularnym o 40 stronach można było dotknąć zaledwie niektórych punktów tego zadania; to też autor ogranicza się do kwestyj tylko zasadniczych, pomijając szczegóły, mogące dać dopiero prawdziwe pojęcie o istocie tak olbrzymiego zadania.

Zaznaczywszy na początku, że formy matematyczne są odbiciem w umyśle rzeczywistości wyidealizowanej, poucza, że są one tem samem wytworem współdziałania umysłu i świata zewnętrznego, gdzie umysł jest artystą, w ścisłym znaczeniu tego wyrazu, szukającym w doświadczeniu pobudki i materyału.

Ażebym wykazać, na czem polega twórczość tego artysty, przebiega autor w krótkości dziedziny: arytmetyki, geometryi i mechaniki; kończy zaś swój wykład opisaniem roli, jaką w tym pochodzie twórczości ludzkiej odgrywają zasady: zachowania i regulująca.

Wł. G.

94. *Dickstein S.* *Wystawa narzędzi matematycznych i matematyczno-fizycznych w Monachium.* Wszechświat XII, str. 313—315.

Autor podaje program międzynarodowej wystawy narzędzi matematycznych, urządzonej staraniem stowarzyszenia matematyków niemieckich w r. 1893 i wyraża życzenie, aby na wystawę tę wysłano maszyny rachunkowe i narzędzia matematyczne, które były wystawione w Krakowie w roku 1891, w czasie zjazdu lekarzy i przyrodników. Prof. M e l m k e, zajmujący się czynnie urządzeniem działu maszyn rachunkowych na wystawie monachijskiej, w liście pisanym do autora artykułu prosił o nadesłanie wynalazków polskich i przyrzekł uwzględnić je w przygotowywanym przez siebie rysie historycznym o maszynach arytmetycznych ¹⁾.

Wł. N.

95. *Dickstein S.* *Zjazd matematyków i wystawa narzędzi matematycznych w Monachium.* Wszechświat, str. 709—713.

Autor zdaje sprawę z przebiegu zjazdu matematyków, odbytym 4—10 września 1893 w Monachium, w którym sam uczestniczył, i daje ogólne wyobrażenie o wystawie narzędzi matematycznych, także podczas zjazdu urządzonej.

Wł. N.

¹⁾ Życzeniu, wyrażonemu w tym artykule, nie stało się niestety zadość. Narzędzia rachunkowe wynalazku Polaków, z wyjątkiem integratorów Abakanowicza, które wystawili obcy, nie były na wystawie reprezentowane. (Przyp. Red.).