O PEWNEJ KLASIE FUNKCYJ PRZESTĘPNYCH I ICH ROZWIJANIU NA SZEREGI FOURIERA.

PODAŁ

Z. KRYGOWSKI.

1. Prócz prac teoretycznych Dirichleta, Riemanna, Lipschitza, Du Bois-Reymonda, Jordana i t. p. dotyczących istoty szeregu Fouriera, wielką rolę w nauce odgrywała kwestya oznaczania współczynników w tym szeregu. Skoro bowiem $F(z+\omega)=F(z)$, i nadto funkcya $F(z)$ czyni zadość warunkom możliwości przedstawienia przez szereg trygonometryczny, natenczas

$$F(z)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m\, e^{-\frac{2m\pi i z}{\omega}},$$

gdzie

$$A_m=\frac{1}{\omega}\int_{z_0}^{z_0+\omega} F(z)\, e^{-\frac{2m\pi i z}{\omega}}\, dz\,.$$

Aby więc znaleść wartość spółczynnika A_m, należy to całkowanie rzeczywiście uskutecznić, lub też do pewnych znanych kształtów sprowadzić. Lecz wtedy prawie zawsze natrafiamy na niezwalczone trudności. Istotnie, skoro funkcya $F(z)$ jest przedstawiona przez szereg nieskończony, lub też np. dana przez równanie różniczkowe, musimy użyć innych metod, by

módz wyraźnie funkcyą rozwinąć na szereg. Tak np., skoro poznano podwójną peryodyczność funkcyi $u(z)$, danej w kształcie

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=z\,,$$

starano się funkcyą $u(z)=u(z+4K)=u(z+2K'i)$ rozwinąć na szereg kształtu

$$\Sigma\, A_m\, e^{\frac{2m\pi i z}{4K}}=\Sigma\, A_m\, e^{\frac{m\pi i z}{2K}}$$

Postępowano w tym razie drogą uboczną i wprowadzano np. zamiast drogi od z_0 do z_0+4K inną zamkniętą, złożoną z nieskończenie długiego prostokąta [1]), wewnątrz którego znajdowało się nieskończenie wiele punktów, w których funkcya $u(z)$ staje się nieskończenie wielką. Stosując twierdzenie Cauchy'ego o całkach branych po obwodach zamkniętych, otrzymywano

$$A_m=\frac{1}{4K}\int_{z_0}^{z_0+4K} u(z)\, e^{\frac{m\pi i z}{2K}}\, dz=\frac{1}{4K}\int_{z_0}^{z_0+4K} u(z)\, e^{\frac{m\pi i}{2K}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}}\, dz$$

Badając naturę spółczynników w takich szeregach, natrafiano na nowego rodzaju funkcye, lub też użytkowano dotychczas znane. Tak np. wprowadzono funkcye Bessela w rozwijaniu pierwiastków biegu w ruchu eliptycznym planet według anomalii, lub też posiłkowano się funkcyą hypergeometryczną Gaussa (Tisserand) w celu rozwijania funkcyi perturbacyjnej w przypadku asteroid o orbitach pod znacznym kątem do siebie nachylonych.

Jedną z takich metod, wprowadzającą teoryą funkcyi theta w ciąg badania, jest sposób B. Riemanna ogłoszony w dziele: „Schwere, Electricitaet und Magnetismus", początkowo w zupełnie innym celu obmyślany. W celu obliczenia potencyału prostopadłościanu i rozwinięcia go na szereg Fouriera, skorzystał Riemann ze znanego rozkładu funkcyi theta na szeregi trygonometryczne i zrobił wzmiankę o możliwości tego przedstawienia. Metoda ta przez długi czas pozostała nieznaną, dopiero Appell w r. 1887 [2]) zastosował tę metodę w celu rozwijania pewnych funkcyj, które w hydrodynamice noszą nazwę potencyałów prędkości.

[1]) Por. Briot-Bouquet: „Théorie des fonctions elliptiques" II éd., 1875, str. 476 i nast., tam wielkość ω jest zespolona.

[2]) W pracy: „Développement en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta u=0$".

O ile ta metoda może być zmieniona, uogólniona, a wreszcie może nam posłużyć w celu wykrycia pewnych szczególnych kształtów niektórych funkcyj przestępnych, to właśnie wykazać w tej pracy zamierzam.

2. Wiadomo, że na podstawie badań Heinego, Pryma i t. p. możemy funkcyą $\Gamma(z)$ dla jakiegokolwiek argumentu z tak przedstawić:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_L e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \quad z = x + i\, y;$$

całkowanie odbywa się wzdłuż krzywej L oznaczonego kształtu.

Kładąc $t = Nu$, mamy

$$\int_L e^{-Nu} N^z u^{z-1}\, du = (e^{2\pi i z} - 1)\, \Gamma(z),$$

gdzie droga (L) żadnej szczególniejszej zmianie nie ulegnie. Stąd zaś mamy:

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z} - 1)\, \Gamma(z)} \int_L e^{-Nu} u^{z-1}\, du = \frac{1}{N^z}.$$

Kładąc $N = (x - na)^2 + p$, będziemy mieli

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z} - 1)\, \Gamma(z)} \int_L e^{-[(x-na)^2+p]\, u}\, u^{z-1}\, du = \frac{1}{\{(x-na)^2 + p\}^z}$$

lub też

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z} - 1)\, \Gamma(z)} \int_L e^{-x^2u - pu} \,.\, e^{-n^2a^2u + 2naxu}\, u^{z-1}\, du = \frac{1}{\{(x-na)^2 + p\}^z}$$

Stąd zaś:

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z} - 1)\, \Gamma(z)} \int_L e^{-u(x^2+p)}\, u^{z-1}\, du \sum_{n=-\infty}^{u=+\infty} e^{-n^2a^2u + 2naxu} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\{(x-na)^2 + p\}^z}$$

Używając znakowania Jacobi'ego [1]) mamy:

$$\vartheta_3(w, q) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2} e^{2mwi} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\alpha m^2 + 2\beta m}, \quad \text{gdy}$$

$$\alpha = \log q, \quad \beta = wi.$$

[1]) C. G. Jacobi: Gesammelte Werke, t. I, str. 497.

U nas jest

$$\alpha = -\, a^2\, u, \quad \beta = axu, \qquad \text{przeto}$$

$$\log q = -\, a^2\, u, \quad wi = axu, \qquad \text{lub też}$$

$$q = e^{-a^2u}, \quad w = \frac{a\, x\, u}{i}$$

Wstawiając te wartości za w i q, mamy:

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z} - 1)\, \Gamma(z)} \int_L e^{-u(x^2+p)}\, u^{z-1}\, \vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right) du = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\{(x-na)^2 + p\}^z}.$$

Lecz funkcya

$$H(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\{(x-na)^2 + p\}^z}$$

posiada peryod a, nadto jest funkcyą parzystą, przeto i lewa strona musi posiadać peryod a i być parzystą. Aby się o pierwszem z tych twierdzeń przekonać, uważamy nadal tylko część zależną od x, a mianowicie

$$e^{-x^2u}\, \vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right)$$

Wiadomo [1]), iż

$$\vartheta_3(w, q) = 1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} q^{r^2} \cos 2rw,$$

a nadto

$$\vartheta_3(w + i \log q,\ q) = q^{-1}\, e^{2wi}\, \vartheta_3(w,\ q),$$

przeto w naszym przypadku

$$i \log q = -\, i\, a^2\, u = \frac{a^2\, u}{i}, \qquad \text{a więc}$$

$$e^{-(x+a)^2u}\, \vartheta_3\left[\frac{au}{i}(x+a),\ e^{-a^2u}\right] = e^{-(x+a)^2u} \,.\, e^{a^2u} \,.\, e^{2aux}\, \vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right),$$

[1]) Patrz np. Enneper: „Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte", wyd. II str. 122—134.

lub upraszczając

$$e^{-(x+a)^2u}\vartheta_3\left[\frac{au}{i}(x+a)\,,\quad e^{a^2u}\right]=e^{-x^2u}\vartheta_3\left(\frac{axu}{i}\,,\quad e^{-a^2u}\right),$$

czego należało dowieść.

Ponieważ funkcya $\vartheta_3(w, q)$ jest parzysta, przeto to samo możemy także twierdzić o funkcyi $e^{-x^2u}\vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right)$.

Aby rzeczywiście teraz funkcyą $H(x)$ rozwinąć na szereg periodyczny, użyjemy następującego rozwinięcia [1]).

$$\vartheta_3(wi, q)\, e^{\frac{w^2}{\log q}}=\sqrt{\frac{\pi}{\log {}^1/_q}}\left(1+2\sum_{r=1}^{r=\infty}e^{-\frac{r^2\pi^2}{\log {}^1/_q}}\cos\frac{2\,r\,\pi\,w}{\log {}^1/_q}\right).$$

Kładąc $wi=\frac{axu}{i}$, $q=e^{-a^2u}$, mamy

$$w=-\,axu\,,\quad \log\frac{1}{q}=a^2u\,,\qquad \text{a przeto}$$

$$\vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right)e^{-\frac{a^2x^2u^2}{a^2u}}=\vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right)e^{-x^2u}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a^2u}}\left(1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}e^{-\frac{m^2\pi^2}{a^2u^2}}\cos\frac{2m\pi axu}{a^2u}\right)$$

lub upraszczając

$$e^{-x^2u}\vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\quad e^{-a^2u}\right)=\frac{\pi^{1/2}}{au^{1/2}}\left(1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}e^{-\frac{m^2\pi^2}{a^2u}}\cos\frac{2m\pi x}{a}\right).$$

Wstawiając to rozwinięcie pod całkę, mamy

$$\frac{\pi^{1/2}}{a\,(e^{2\pi iz}-1)\,\Gamma(z)}\int\limits_L e^{-pu}\,u^{z-3/2}\,du\left[1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}e^{-\frac{m^2\pi^2}{a^2u}}\cos\frac{2m\pi x}{a}\right]$$

$$=A_0+A_1\cos\frac{2\pi x}{a}+A_2\cos\frac{4\pi x}{a}+\ldots,\qquad \text{gdzie}$$

[1]) Patrz Enneper, l. c. str. 129.

$$H(x)=A_0+A_1\cos\frac{2\pi x}{a}+\ldots+A_m\cos\frac{2m\pi x}{a}+\ldots$$

Porównywając współczynniki przy wyrazach $\cos\frac{2m\pi x}{a}$, mamy ogólnie

$$A_m=\frac{2^\sigma\,\pi^{1/2}}{a\,(e^{2\pi iz}-1)\,\Gamma(z)}\int\limits_L e^{-pu-\frac{m^2\pi^2}{a^2u}}\,u^{z-3/2}\,du\,,$$

gdzie σ równe 0, dla $m=0$ zaś $=1$ dla $m\lessgtr 0$. Bliższem obliczeniem funkcyi A_m tutaj się nie zajmiemy, warto jednak zaznaczyć, iż w pewnych razach całki typu

$$\int\limits_L e^{-a^2u-\frac{\beta^2}{u^2}}\,u^p\,du$$

sprowadzają się do funkcyj wykładniczych, w innych zaś przypadkach do funkcyi Bessela.

3. Rozważmy teraz funkcyą

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{(m_1 m_2\ldots m_k)=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\{(x_1-m_1a_1)^2+\ldots+(x_k-m_ka_k)^2\}^z}$$

względem wszystkich x peryodyczną. Aby tę funkcyą rozwinąć na szereg Fouriera, należy naprzód zbadać zbieżność powyższej k-krotnie nieskończonej sumy. Oczywiście, że suma ta tylko dla pewnych wartości z jest zbieżna, i że przytem między liczbą k a wykładnikiem z istnieć musi pewien związek. Szczegółowo tego badania tutaj przeprowadzać nie potrzeba, warto jednak zaznaczyć, iż teoryą takich szeregów zajmował się ogólnie Cauchy, następnie C. Jordan w t. IX „Bulletin de la societé mathématique", i „Cours d'analyse" t. I, a wreszcie E. Picard w I t. dzieła: „Traité d'analyse". Jako rezultat odnośnych badań mamy twierdzenie: Skoro $|z|>\frac{k}{2}$, natenczas szereg ogólny

$$\sum_{(m_1 m_2\ldots m_k)=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{F(m_1\, m_2\,\ldots\, m_k)^z}$$

gdzie $F(m_1\, m_2\ldots m_k)$ jest formą kwadratową podwójną wielkości $m_1, m_2, \ldots, m_k$, jest absolutnie zbieżny.

Stosując to twierdzenie do naszej funkcyi, musimy założyć związek $|z| > \frac{k}{2}$. Ze związku

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int\limits_L e^{-Nu}\,u^{z-1}\,du = \frac{1}{N^z}$$

mamy

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int\limits_L e^{-[(x_1-m_1a_1)^2+\ldots]u}\,u^{z-1}\,du = \frac{1}{\{(x_1-m_1\,a_1)^2+\ldots\}^z},\quad \text{a stąd}$$

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int\limits_L e^{-(x^2_1+x^2_2+\ldots+x^2_k)\,u}\,u^{z-1}\,du\,.$$

$$\cdot\sum_{m_1} e^{-m^2_1a^2_1u+2m_1a_1x_1u}\ldots\sum_{m_k} e^{-m^2_k\,a^2_k\,u+2m_k\,a_k x_k\,u},\quad \text{lub też}$$

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\Gamma(z)}\int\limits_L e^{-(x^2_1+x^2_2+\ldots+x^2_k)\,u}\,\vartheta_3\left(\frac{a_1\,x_1\,u}{i},\ e^{-a^2_1u}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\vartheta_3\left(\frac{a_2x_2u}{i},\ e^{-a^2_2u}\right)\ldots\vartheta_3\left(\frac{a_k\,x_k\,u}{i},\ e^{-a^2_k\,u}\right)du\,.$$

Lecz

$$e^{-x^2_1u}\,\vartheta_3\left(\frac{a_1x_1u}{i},\ e^{-a^2_1u}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a_1^2\,u}}\left[1+2\sum_{m_1=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2_1\pi^2}{a^2_1u}}\cos\frac{2m_1\pi x_1}{a_1}\right],\ \text{i t. d.}$$

a przeto

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\pi^{k/2}}{a_1\,a_2\ldots a_k\,(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int\limits_L u^{z-k/2-1}\,.$$

$$\cdot\left[1+2\sum_{m_1=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2_1\,\pi^2}{a^2_1u}}\cos\frac{2m_1\pi x_1}{a_1}\right]\ldots\left[1+2\sum_{m_k=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2_k\pi_2}{a^2_k u}}\cos\frac{2m_k\pi x_k}{a_k}\right]du$$

Kładąc

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{m_1m_2\ldots m_k} A_{m_1m_2\ldots m_k}\cos\frac{2m_1\pi x_1}{a_1}\cos\frac{2m_2\pi x_k}{a_2}\ldots\cos\frac{2m_k\pi x_k}{a_k}\,,$$

mamy

$$A_{m_1m_2\ldots m_k} = \frac{\pi^{k/2}\,2^\sigma}{a_1\,a_2\ldots a_k\,(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int\limits_L u^{z-k/2-1}\,e^{-\frac{\pi^2}{u}\left[\frac{m^2_1}{a^2_1}+\frac{m^2_2}{a^2_2}+\ldots+\frac{m^2_k}{a^2_k}\right]}\,du\,.$$

4. Można dotychczasową teoryą uogólnić jeszcze w ten sposób. Pomyślmy funkcyą

$$N = a\,[(x_1-m_1\,a_1)^2+\ldots]+b\,[(y_1-n_1\,\beta_1)^2+\ldots]+\ldots$$

i wstawmy powyższą wartość za N we wzór ogólny

$$\sum_{(m_1\ldots n_1\ldots)=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\{a\,[(x_1-m_1a_1)^2+\ldots]+b\,[(y_1-n_1\beta_1)^2+\ldots]+\ldots\}^z}$$

$$= \frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\sum\int\limits_L e^{-Nu}\,u^{z-1}\,du,$$

natenczas łatwo spostrzedz, iż i tego rodzaju szereg można rozwinąć na szereg Fouriera. Podobnie wreszcie ma się rzecz z szeregiem

$$\sum\frac{1}{N^z} = \frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int\limits_L u^{z-1}\,\Sigma\,e^{-Nu}\,du$$

w przypadku, gdy $N = a\,[x_1-m_1a_1)^2+\ldots+p]+b\,[(y_1-n_1\,\beta_1)^2+\ldots+q]+\ldots$ Te jednakowóż uogólnienia nie zawierają nic więcej nowego nadto, cośmy dotychczas wyprowadzili. Powyższe przypadki prawie wszystkie znajdują się w innej formie już u Appella, który metodę powyższą zastosował w dwu przypadkach, następnie zaś stosował wzór Greena także i do innych funkcyj, które czyniły zadość równaniu $\Delta\ V = 0$. Przy końcu swej pracy w § 10 zrobił Appell wzmiankę, że można tę metodę uogólnić i do funkcyi, którąśmy w poprzednim paragrafie rozważali. Rozmyślając nad istotą powyższej metody, zdołałem ją rozszerzyć na całki wielokrotne i ogólne funkcye theta Riemanna. Zasada tego rozumowania jest następująca:

Rozważmy całkę

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z_1}-1)\,\Gamma(z_1)}\int\limits_{L_1} e^{-t_1}\,t_1^{z_1-1}\,dt_1 = 1\,,$$

a przytem całkę

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z_2}-1)\,\Gamma(z_2)}\int\limits_{L_2} e^{-t_2}\,t_2^{z_2-1}\,dt_2 = 1\,,$$

natenczas

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z_1}-1)\,(e^{2\pi i z_2}-1)\,\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} e^{-(t_1+t_2)}\,t_1^{z_1-1}\,t_2^{z_2-1}\,dt_1\,dt_2 = 1\,.$$

Kładąc $t_1 = Pu_1, \quad t_2 = Qu_2$, mamy

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z_1}-1)(e^{2\pi i z_2}-1)\Gamma(z_1)(z_2)} \int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} e^{-(Pu_1+Qu_2)} u_1^{z_1-1} u_2^{z_2-1} du_1\, du_2 = \frac{1}{P^{z_1} Q^{z_2}}$$

Kładąc np: $P = (x_1 - m_1 a_1)^2 + \ldots + (x_{k_1} - m_{k_1} a_{k_1})^2$,

$$Q = (y_1 - n_1 b_1)^2 + \ldots + (y_{k_2} - n_{k_2} b_{k_2})^2,$$

mamy

$$\sum_{(m_1 \ldots m_{k_1},\, n_1 \ldots n_{k_2}) = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{P^{z_1} Q^{z_2}} = \frac{1}{(e^{2\pi i z_1}-1)\ (e^{2\pi i z_2}-1)\ \Gamma(z_1)\ \Gamma(z_2)}$$

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} e^{-u_1(x^2_1+\ldots+x^2_{k_1}) - u_2(y^2_1+\ldots+y^2_{k_2})} u_1^{z_1-1} u_2^{z_2-1} du_1\, du_2\ \vartheta_3\left(\frac{a_1 x_1 u_1}{i},\ e^{-a^2_1 u_1}\right)\ldots$$

$$\vartheta_3\left(\frac{b_1 y_1 u_2}{i},\ e^{-b^2_1 u_2}\right)\ldots,$$

a stąd skoro

$$\sum \frac{1}{P^{z_1} Q^{z_2}} = A_{m_1 m_2 \ldots m_{k_1}\, n_1 n_2 \ldots n_{k_2}} \cos\frac{2 m_1 \pi x_1}{a_1} \ldots \cos\frac{2 n_{k_2} \pi x_{k_2}}{b_{k_2}},$$

$$A_{m_1 m_2 \ldots m_{k_1} n_1 n_2 \ldots n_{k_2}} = \frac{\pi^{\frac{k_1+k_2}{2}}\ 2^{\sigma+\tau}}{a_1 a_2 \ldots a_{k_1} b_1 b_2 \ldots b_{k_2} (e^{2\pi i z_1}-1)(e^{2\pi i z_2}-1)\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}\,.$$

$$.\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} u_1^{z_1 - \frac{k_1}{2} - 1} u_2^{z_2 - \frac{k_2}{2} - 1} e^{-\frac{\pi^2}{u_1}\left[\frac{m^2_1}{a^2_1} + \ldots\right] - \frac{\pi^2}{u_2}\left[\frac{n^2_1}{b^2_1} + \ldots\right]} du_1\, du_2\,.$$

W powyższy sposób uogólniając, można wprowadzać zwyczajne funkcye theta pod całki wielokrotne. W ten sposób można wprowadzić funkcyą

$$\sum_{(m_1 m_2 \ldots m_p) = -\infty}^{+\infty} e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p} \sum\limits_{\varrho=1}^{p} b_{\lambda\varrho} m_\lambda m_\varrho + 2 \sum\limits_{k=1}^{p} m_k w_k},$$

ogólną $\vartheta\,((0))\,[w]$ o charakterystyce zero. W następnym ustępie pokażemy pewne zastosowanie funkcyi theta jednej zmiennej o charakterystyce różnej od zera.

5. Wiadomo, iż

$$\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}(vi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{+a(n+\varepsilon_1/2)^2 + 2(n+\varepsilon_1/2)(vi - \varepsilon_2/2\,\pi i)}$$

w przypadkach $\varepsilon_1 = 0, 1$, $\varepsilon_2 = 0, 1$ przedstawia znane cztery kształty funkcyj używanych w teoryi funkcyj eliptycznych. Istotnie kładąc $e^a = q$, mamy

$$\vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(vi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{2nvi}, \quad \vartheta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(vi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nvi}; \quad \vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(vi)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)vi}; \quad \vartheta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(vi) = \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{n=-\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)vi},$$

a przeto

$$\vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(vi) = \vartheta_3(v,q),\ \vartheta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(vi) = \vartheta(v,q);\ \vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(vi) = \vartheta_2(v,q),\ \vartheta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(vi) = \vartheta_1(v,q).$$

Mamy przeto związek:

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)} \int\limits_L u^{z-1}\, \vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(uv_1 i)\, \vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(uv_2 i)\, \vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(uv_3 i)\, \vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(uv_4 i)\, du$$

$$= \sum_{(m_1, m_2, m_3, m_4) = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(P_1\, P_2\, P_3\, P_4)^z},$$

gdzie ogólnie

$$P_j = a^2_j\, m^2_j + 2 m_j\, v_j\, i; \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

i równocześnie także

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)} \int\limits_L u^{z-1}\, \vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(uv_1 i)\, \vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(uv_2 i)\, \vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(uv_3 i)\, \vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(uv_4 i)\, du$$

$$= \sum_{(m_1, m_2, m_3, m_4) = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(Q_1\, Q_2\, Q_3\, Q_4)^z},$$

gdzie ogólnie

$$Q_j = a_j\left(m_j + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(m_j + \frac{1}{2}\right) v_j\, i; \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Związki powyższe możemy jeszcze tak napisać

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int_L u^{z-1}\,\vartheta_3(uv_1, e^{a_1 u})\,\vartheta_3(uv_2, e^{a_2 u})\,\vartheta_3(uv_3, e^{a_3 u})\,\vartheta_3(uv_4, e^{a_4 u})\,du$$

$$=\sum_m \frac{1}{(P_1\,P_2\,P_3\,P_4)^z}\,,$$

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int_L u^{z-1}\,\vartheta_2(uv_1, e^{a_1 u})\,\vartheta_2(uv_2, e^{a_2 u})\,\vartheta_2(uv_3, e^{a_3 u})\,\vartheta_2(uv_4, e^{a_4 u})\,du$$

$$=\sum_m \frac{1}{(Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4)^z}\,.$$

Kładąc

$$uv_1^1=\frac{1}{2}(uv_1+uv_2+uv_3+uv_4)=\frac{1}{2}u\,(v_1+v_2+v_3+v_4),$$

$$uv_2^1=\frac{1}{2}u\,(v_1+v_2-v_3-v_4),$$

$$uv_3^1=\frac{1}{2}u\,(v_1-v_2+v_3-v_4),$$

$$uv_4^1=\frac{1}{2}u\,(v_1-v_2-v_3+v_4);$$

mamy widocznie także

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int_L u^{z-1}\,\vartheta_3(uv_1^1, e^{a_1 u})\,\vartheta_3(uv_2^1, e^{a_2 u})\,\vartheta_3(uv_3^1, e^{a_3 u})\,\vartheta_3(uv_4^1, e^{a_4 u})\,du$$

$$=\sum_m \frac{1}{(P_1^1\,P_2^1\,P_3^1\,P_4^1)^z}\,,$$

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int_L u^{z-1}\,\vartheta_2(uv_1^1, e^{a_1 u})\,\vartheta_2(uv_2^1, e^{a_2 u})\,\vartheta_2(uv_3^1, e^{a_3 u})\,\vartheta_2(uv_4^1, e^{a_4 u})\,du$$

$$=\sum_m \frac{1}{(Q_1^1\,Q_2^1\,Q_3^1\,Q_4^1)^z}\,,$$

gdzie ogólnie

$$\left.\begin{aligned} P_j^1 &= a_j^2\,m_j^2+2m_j\,v_j^1\,i\\ Q_j^1 &= a_j\left(m_j+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(m_j+\frac{1}{2}\right)v_j^1\,i \end{aligned}\right\}\qquad (j=1,2,3,4)$$

Lecz według twierdzenia Jacobi'ego mamy

$$\begin{aligned} &\vartheta_3(uv_1, e^{au})\,\vartheta_3(uv_2, e^{au})\,\vartheta_3(uv_3, e^{au})\,\vartheta_3(uv_4, e^{au})\\ &+\vartheta_2(uv_1, e^{au})\,\vartheta_2(uv_2, e^{au})\,\vartheta_2(uv, e^{au})\,\vartheta_2(uv_4, e^{au})\\ &=\vartheta_3(uv_1^1, e^{au})\,\vartheta_3(uv_2^1, e^{au})\,\vartheta_3(uv_3^1, e^{au})\,\vartheta_3(uv_4^1, e^{au})\\ &+\vartheta_2(uv_1^1, e^{au})\,\vartheta_2(uv_2^1, e^{au})\,\vartheta_2(uv_3^1, e^{au})\,\vartheta_2(uv_4^1, e^{au}), \end{aligned}$$

a przeto także

$$\sum_m\left\{\frac{1}{(P_1+P_2+P_3+P_4)^z}+\frac{1}{(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4)^z}\right\}$$

$$=\sum_m\left\{\frac{1}{(P_1^1+P_2^1+P_3^1+P_4^1)^z}+\frac{1}{(Q_1^1+Q_2^1+Q_3^1+Q_4^1)^z}\right\}.$$

W podobny sposób możnaby stosować w szczególnych przypadkach ogólną formułę Riemanna, podaną przez Pryma, a uogólnioną przez Pryma i Krazera w t. III „Acta Mathematica“ i w dziele: Prym-Krazer: „Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen“.

6. Rozważmy formułę ustępu 2-go, a mianowicie

$$\frac{1}{(e^{2\pi i z}-1)\,\Gamma(z)}\int_L e^{-u(x^2+p)}\,u^{z-1}\,\vartheta_3\left(\frac{axu}{i}, e^{-a^2u}\right)du=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{\{(x-na)^2+p\}^z}$$

i wprowadźmy znakowanie funkcyj theta według Briota i Bouqueta. Jest tam ogólnie

$$\theta_3\left(\frac{\omega z}{\pi}, q\right)=\vartheta_3(z, q),\quad \text{gdzie}\quad q=e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}.$$

Lecz tu $q=e^{-a^2u}$; przytem mamy [1])

$$\omega=\frac{\pi^2\,\theta_3^2(0, q)}{g}=\frac{\pi^2\,\theta_3^2(0, q)\,\theta(0, q)}{\theta'_1(0, q)}\sqrt{k}\,.$$

Jest

$$k=\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}\,,$$

a przeto

$$\omega=\frac{\pi^2\,\theta(0, q)\,\theta_2(0, q)\,\theta_3(0, q)}{\theta'_1(0, q)}$$

lub też

$$\omega=\frac{\pi^2\,\theta(0, e^{-a^2u})\,\theta_2(0, e^{-a^2u})\,\theta_3(0, e^{-a^2u})}{\theta'_1(0, e^{-a^2u})}\,.$$

[1]) Briot et Bouquet l. c., str. 318, 319.

Stąd zaś

$$\vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right)=\theta_3\left(\frac{axu\omega}{\pi i},\ e^{-a^2u}\right).$$

Ponieważ ω jest pewną funkcyą zależną jedynie od u, przeto można położyć dla skrócenia

$$u\omega = \alpha\ (u)$$

a przeto

$$\vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right)=\theta_3\left(\frac{ax\alpha\ (u)}{\pi i},\ e^{-a^2u}\right).$$

Lecz [1])

$$\theta_3\ (z) = \theta_3\ (o)\ e^{\frac{Hz^2}{2}}\ Al_3\ (z),$$

gdzie

$$H=\frac{\theta''\ (o,\ q)}{\theta\ (o,\ q)}$$

zaś Al_3 (z) jest jedną z funkcyj W e i e r s t r a s s a. Mamy więc

$$\vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right)=\theta_3\ (0,\ e^{-a^2u})\ e^{-\frac{Ha^2x^2\alpha^2(u)}{2\pi^2}}\ Al_3\left(\frac{ax\alpha\ (u)}{\pi i}\right);\quad H=\frac{\theta''\ (0,\ e^{-a^2u})}{\theta\ (0,\ e^{-a^2u})}.$$

Ponieważ [2])

$$Al_3\ (z) = e^{-k^2\int dz\int\frac{\mu^2(z)}{\nu^2(z)}dz},\quad \text{przeto}$$

$$\vartheta_3\left(\frac{axu}{i},\ e^{-a^2u}\right)=\theta_3\ (0,\ e^{-a^2u})\ e^{-\frac{a^2Hx^2\alpha^2(u)}{2\pi^2}-k^2\int dz\int\frac{\mu^2(z)}{\nu^2(z)}dz};\quad z=\frac{ax\alpha\ (u)}{\pi i};$$

$$\frac{d\,\lambda\ (z)}{dz}=g\sqrt{(1-\lambda^2\ (z))\ \ (1-k^2\ \lambda^2\ (z))}=g\ \mu\ (z)\ \nu\ (z);$$

$$\sqrt{k}=2\ e^{-\frac{a^2u}{4}}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1+e^{-2ma^2u}}{1+e^{-(2m-1)a^2u}}\right)$$

---

[1]) B r i o t et B o u q u e t l. c., str. 465.
[2]) B r i o t et B o u q u e t l. c., str. 466.

Mamy więc ostatecznie

$$\frac{1}{(e^{2\pi iz}-1)\,\Gamma(z)}\int_L e^{-u(x^2+p)}\ u^{z-1}\ \theta_3\ \ (0,\ e^{-a^2u})\ e^{-\frac{a^2\alpha^2(u)}{\pi^2}\left(\frac{Hx^2}{2}-k^2\int dx\int\frac{\mu^2\left(\frac{ax\alpha(u)}{\pi i}\right)}{\nu^2\left(\frac{ax\alpha(u)}{\pi i}\right)}dx\right)}du$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{\{(x-na)^2+p\}^z},$$

gdzie α (u), H, k są wszystkie funkcyami zmiennej u.

Wyprowadziliśmy powyższy kształt dlatego, by wykazać pewną analogią, jaka istnieje między kształtem naszego szeregu a niektóremi badaniami P i c a r d a [1]) i A p p e l l a. Wiadomo, iż w teoryi rozwijania funkcyj Abelowych na szeregi F o u r i e r a według A p p e l l a (patrz tegoż: Mémoire sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions Abéliennes en séries trigonométriques, Acta Mathematica, t. XIII) natrafiamy na nowego rodzaju funkcye ogólniejsze od Abelowych, posiadające kształt

$$\int\lambda\ (x,\ y)\ e^{\int\mu(x,y)dx}\ dx,$$

gdzie λ $(x,\ y)$, μ $(x,\ y)$ są funkcyami wymiernemi, i gdzie między x i y zachodzi równanie $f\ (x,\ y) = 0$. Z drugiej strony funkcye ogólne Al W e i e r s t r a s s a posiadają kształt

$$e^{\int du\int\frac{P\ (x,\ y)}{Q\ (x,\ y)}du},\quad f\ (x,\ y) = 0,$$

i mają charakter funkcyj przestępnych całkowitych, należących do klasy funkcyj, zwanych przez B r i o t a i B o u q u e t a „fonctions intermédiaires". Tutaj znowu natrafiamy pozornie na funkcye bardziej skomplikowane a odpowiadające kształtowi

$$\int\lambda\ (x,\ u)\ e^{\int dx\int\pi\ (x,\ u)\ dx}\ du,$$

gdzie już x i u są od siebie niezależne.

---

[1]) Patrz odpowiednie ustępy w pracy: E. P i c a r d, Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (Journal de C. Jordan, 1889).

7. W końcu pozwolę sobie uczynić uwagę o możliwości stosowania całej teoryi transformacyi funkcyi theta do odpowiedniego wyrażania pewnych funkcyj przez drugie. Metoda powyższa wystarczy i w powyższem traktowaniu kwestyi i nie różni się w niczem od metody używanej w poprzednich ustępach [1]).

Kraków, w grudniu 1893.

---

[1]) Możnaby jeszcze zrobić wzmiankę o stosowaniu badań Landsberga (Crelle J. t. 111), dotyczących wyrażania funkcyi theta przez całki określone, w celu otrzymywania rozlicznych całek wielokrotnych w postaci funkcyj peryodycznych.

BADANIA WSTĘPNE NAD OPOREM ISKRY.

PODAŁ

WIKTOR BIERNACKI.

W poprzednim artykule „O wahaniach elektrycznych w wibratorze wtórnym“ [1]) wykazałem, że przy wprowadzeniu w wibrator wtórny oporu równego w przybliżeniu oporowi iskry pomiędzy kulkami w wibratorze głównym, zachodzi zjawisko, które nazwałem interferencyą dwóch wahań we wtórnym wibratorze. Zjawisko to łatwo dostrzedz można, posługując się rurką Geisslera. Jeżeli połączyć jej elektrody za pomocą drutów z dowolnie obranemi punktami na wibratorze wtórnym i wprowadzać weń coraz większe opory, wówczas światło w rurce słabnie coraz bardziej, wreszcie znika zupełnie, poczem znów, przy wprowadzeniu oporów jeszcze większych, wzmaga się stopniowo. W opisanych już doświadczeniach długość iskry w wibratorze pierwotnym wynosiła 7—9 mm., i interferencya zachodziła przy oporze 300—1000 ohmów; prowadzi to do wniosku, rzetelnego w przybliżeniu, że opór iskry o długości 7—9 mm. zawarty jest w granicach 300—1000 ohmów.

Ciekawem było sprawdzenie tego zjawiska przy mniejszej długości iskry pierwotnej. Ponieważ wahania w tym razie są zbyt słabe, by rurka mogła świecić, należało przeto zwrócić się ku bardziej czułej metodzie badania. W tym celu posługiwałem się bolometrem Paalzowa i Rubensa. Jakkolwiek badania nie są jeszcze ukończone, jednak i ta niewielka ilość

---

[1]) Prace mat.-fiz., t. IV, str. 169 i dalsze.