Podobnie, dla $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ zamienimy w powyższem skaźniki 1 na 2, dla $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ zastąpimy skaźniki 1 przez 3 i nareszcie dla $\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ zamienimy skaźniki 1 na 4.

Dalej, przez porównanie współczynników przy wyrazach podobnych wypada łatwo następujący układ równań

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \alpha_4^2 , \\ &\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \beta_4^2 , \\ &\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \gamma_4^2 , \\ &\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \alpha_4 \beta_4 , \\ &\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 = \alpha_4 \gamma_4 , \\ &\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = \beta_4 \gamma_4 . \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Układ ten rozwiązać można rozmaitemi sposobami i stosownie do tego otrzymamy różne kształty całki ogólnej równania danego. Tak naprzykład, kładąc

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \gamma_1 = 1 ,$$
$$\gamma_3 = 3 ,$$

pozostałe ilości $\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4$ wyznaczymy łatwo z układu (15) i otrzymamy po kilka odpowiednich wartości dla $\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4$. Tym sposobem, widzimy, że całka ogólna równania danego będzie miała kształt

$$u = \sum_i F_i (\xi, \eta, \zeta) ,$$

gdzie suma według i rozciągać się będzie na tyle wartości, ile można będzie utworzyć niezależnych względem siebie argumentów ξ, η, ζ przy kombinowaniu liczb $\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4$.

Płock, dnia 26 września 1893 roku.

O ROZWINIĘCIACH ZBIEŻNYCH WEWNĄTRZ KRZYWYCH CASSINI'EGO.

NAPISAŁ

J. PUZYNA.

Uwagi wstępne.

Równanie

$$r^2 = (x^2+y^2+d^2)^2 - 4\, d^2 x^2 , \qquad (1)$$

odniesione do układu prostokątnego, lub równanie

$$\varrho \cdot \varrho' = r \qquad (2)$$

w układzie dwubiegunowym określa, jak wiadomo, krzywą Cassini'ego, która,

gdy $r > d^2$ jest jednym owalem $(r > d^2)$; *a)*

„ $r = d^2$ „ lemniskatą (d); *β)*

„ $r < d^2$ „ parą owalów $(r < d^2)$. *γ)*

Gdy $r = 0$, $d^2 > 0$, mamy parę punktów $(x = +d,\ y = 0)$, $(x = -d,\ y = 0)$; przy $r > 0$ i $d = 0$ koło, które w razie $r = 0$ zamienia się na punkt.

Zauważmy przy danem d lemniskatę (d), określoną równaniem (1) i owal $(r' > d'^2)$ o tych samych osiach; załóżmy

$$r' > d'^2 > d^2 \qquad (3)$$

i zapytajmy, jak względem siebie leżą te dwie krzywe?

Jeden z ich punktów przecięcia się niech ma współrzędne biegunowe

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{i} \quad \varphi .$$

Wtedy mamy dla owalu

$$(\varrho^2+d'^2)^2 = r'^2 + 4\, d'^2\, \varrho^2 \cos^2 \varphi ,$$

a dla lemniskaty

$$(\varrho^2+d^2)^2 = d^4 + 4\, d^2\, \varrho^2 \cos^2 \varphi ;$$

po odjęciu drugiego równania od pierwszego, dostajemy

$$2\,(d'^2-d^2)\,(1-2\cos^2\varphi)\,\varrho^2 = r'^2 - d'^4$$

lub

$$\varrho^2 = - \frac{r'^2 - d'^4}{2\,(d'^2 - d^2)\cos 2\varphi} . \tag{δ}$$

Przerobiwszy równanie lemniskaty do układu biegunowego, mamy

$$\varrho^2 = 2 \,.\, d^2 \cos 2\,\varphi , \tag{ε}$$

a więc w punkcie przecięcia się rozważanych krzywych musi być:

$$d^2 = - \frac{r'^2 - d'^4}{2\,(d'^2 - d^2) \cos^2 2\,\varphi}$$

Przy założonej jednak nierówności (3) ten związek zachodzić nie może a stąd wynika

Twierdzenie I*a*. Gdy narysujemy w tym samym układzie osi owal ($r' > d'^2$) i lemniskatę (d) takie, że $r' > d'^2 > d^2$ to lemniskata mieści się całkowicie w owalu, nie dotykając go nawet w punktach, leżących na osi xx.

W podobny sposób łatwo dojdziemy do takich jeszcze wniosków:

Twierdzenie I*b*. Gdy mamy narysowane w tym samym układzie dwie lemniskaty (d'), (d) takie, że $d' > d$, to pierwsza z nich obejmuje całkowicie drugą tak, że się obydwie przecinają jedynie w swoich punktach podwójnych.

Twierdzenie I*c*. Lemnikata (d') obejmuje całkowicie parę owalów ($r < d^2$), gdy $d'^2 > d^2$.

Twierdzenie I*d*. Owal ($r' > d'^2$) obejmuje parę owalów ($r < d^2$) całkowicie, gdy $d'^2 > d^2$.

Zbadajmy, kiedy dany owal ($r > d^2$) i lemniskata (d') takie, że $d' > d$, przy nieskończenie mało różniących się od siebie ilościach r, d, d', mają punkty przecięcia.

Postępując analogicznie jak w twierdzeniu I*a*, użyjemy równań takich jak (δ), (ε) i dojdziemy do związku

$$d^2 = \frac{r^2 - d^4}{2\,(d'^2 - d^2)\cos^2 2\,\varphi} .$$

Stąd wynika

$$\cos^2 2\,\varphi = \frac{r^2 - d^4}{2d^2\,(d'^2 - d^2)} .$$

Ułamek ten, który przy założeniu $r > d^2$, $d'^2 > d^2$ jest już dodatnim, musi być jeszcze $\leqq 1$. Z tego warunku wyniknie nierówność

$$\frac{r^2}{d^2} + d^2 \leqq 2d'^2$$

Połóżmy $r^2 = d^2 + \varepsilon^2$, gdzie ε^2 jest ilością nieskończenie małą, to będzie

$$2d^2 + \frac{\varepsilon^2}{d^2} \leqq 2d'^2 ,$$

skąd wynika

Twierdzenie I*e*. Jeżeli owal ($r > d^2$) ma się przecinać z lemniskatą (d'), gdy $d' > d$ i gdy ilości r, d, d' różnią się między sobą nieskończenie mało, to, gdy $r^2 = d^2 + \varepsilon^2$, musi być dodatnią różnica

$$d'^2 - d^2 \leqq \frac{\varepsilon^2}{2d^2}$$

Znak równości wskazuje, że lemniskata dotyka owalu w punktach jego leżących na osi, a gdy mamy znak nierówności, to $\cos^2 2\,\varphi$ nie potrzebuje dowolnie zbliżać się do wartości $+1$, tak, że w tym przypadku mogą być punkty przecięcia nawet w skończonem oddaleniu od wspólnej osi krzywych.

Twierdzenie I*f*. Z równania $\varrho^2 = 2d^2 \cos 2\,\varphi$ wynika, że przez każdy dany punkt (ϱ_1, φ_1), w którym jest

$$\cos 2\varphi_1 > 0 ,$$

można przeprowadzić lemniskatę.

Warunek ten wskazuje, że taki punkt (ϱ_1, φ_1) zawsze leżyć musi w tych częściach płaszczyzny (xoy), których punkta bliżej leżą osi xx niż osi yy.

Te części nazywać będziemy: S i T (por. fig. 7).

Twierdzenie I*g*. Przez punkt (ϱ_1, φ_1) leżący poza S, T można zawsze poprowadzić jeden owal przy dowolnem d.

Z równania bowiem owalu dostajemy:

$$r^2 = (\varrho_1^2 + d^2) - 4\, d^2\, \varrho_1^2 \cos^2 \varphi_1\,,$$

albo

$$r^2 - d^4 = \varrho_1^2 - 2\, \varrho_1\, d^2 \cos 2\, \varphi\,.$$

To równanie spełni się, gdy będzie

$$\frac{\varrho_1}{2d} > \cos 2\, \varphi_1\,,$$

a więc zawsze w przypadku, kiedy $\cos 2\, \varphi_1 < 0$. Gdy przeciwnie $\cos 2\varphi_1 > 0$, to punkt (ϱ_1, φ_1) leży w S lub T, i przezeń prowadzić można będzie owale tak długo, póki

$$2d < \frac{\varrho_1}{\cos 2\, \varphi_1}\,.$$

Z tych twierdzeń będziemy często korzystali w ciągu dalszych poszukiwań.

Obierzmy na płaszczyznie liczbowej zmiennej nieograniczonej x dwa punkty α, β; ich odległość $2\, d = |\alpha - \beta|$, a więc

$$d = \frac{|\alpha-\beta|}{2}\,.$$

Utwórzmy iloczyn $(x-\alpha)\,(x-\beta)$ i załóżmy

$$(x-\alpha)\,(x-\beta) = r; \quad r > 0\,, \tag{4}$$

to w razie

$$r > d^2 = \frac{|\alpha-\beta|^2}{4}$$

punkt x, poddany warunkowi (4), porusza się po krzywej (α).

Gdy

$$r < d^2 = \frac{|\alpha-\beta|^2}{4}\,,$$

punkt x porusza się po krzywej (β), a gdy wreszcie

$$r = d^2 = \frac{|\alpha-\beta|^2}{4}\,,$$

punkt x bieży po krzywej (γ).

Środkiem każdej z tych krzywych jest punkt

$$\omega = \frac{\alpha+\beta}{2}\,,$$

a punkty α, β są ich ogniskami.

Gdy punkty α, β przypadają oba w środku ω, mamy $d = 0$ i wtedy warunek (4) wskazuje koło

$$|x-\omega| = +\sqrt{r}\,; \tag{k}$$

gdy zaś i $r = 0$, to mamy punkt ω:

$$|x-\omega| = 0\,.$$

Przy $r = 0$, $d > 0$ mamy dwa punkty α i β:

$$|x-\alpha|\,.\,|x-\beta| = 0\,.$$

Warunek

$$|x-\alpha|\,.\,|x-\beta| < r$$

wskazuje wszystkie punkty, leżące wewnątrz krzywej (α), (β), (γ) lub koła (k).

I.

Gdy rozwinięcie

$$f(x, \alpha, \beta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda\, (x-\alpha)^\lambda\, (x-\beta)^\lambda \tag{5}$$

— o zmiennej x — jako szereg potęgowy argumentu $(x-\alpha)\,(x-\beta)$ okazuje się zbieżnem w obszarze

$$|x-\alpha|\,.\,|x-\beta| < r\,, \tag{6}$$

to jest w tym obszarze zarazem *jednostajnie zbieżnem* i przedstawia, według tego, czy

$$r \gtreqless \frac{|\alpha-\beta|^2}{4}\,,$$

funkcyą analityczną, jednoznaczną, skończoną i ciągłą we wszystkich punktach wewnątrz krzywej (α), (β) lub (γ). [Znaczy to, że w otoczeniu każdego punktu x_0, leżącego wewnątrz (α), (β) lub (γ), można rozwinąć $f(x, \alpha, \beta)$ według potęg dodatnich różnicy $(x-x_0)$.

Obszar (6) jest zarazem prawdziwym zakresem zbieżności rozwinięcia (5).

Połóżmy

$$x - \alpha = (x-a) - (\alpha-a),$$
$$x - \beta = (x-b) - (\beta-b),$$

gdzie a, b leżą w obszarze (6), a więc

$$|a-\alpha|\ |a-\beta| < r,$$
$$|b-\alpha|\ |b-\beta| < r,$$

to otrzymamy z szeregu (5) rozwinięcie

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda \left[(x-a)(x-b) - x(\alpha+\beta-a-b) + \alpha\beta - ab\right]^\lambda . \tag{7}$$

Załóżmy

$$\alpha + \beta = a + b, \tag{a}$$

połóżmy

$$\alpha\beta - ab = c \tag{b}$$

i zauważmy równanie

$$(x-\alpha)(x-\beta) = c,$$

które, przy uwzględnieniu związków (a) i (b), możemy tak napisać:

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0;$$

pierwiastkami jego są oczywiście a i b, a stąd wynika, że

$$c = (a-\alpha)(a-\beta), \tag{c_1}$$

albo

$$c = (b-\alpha)(b-\beta), \tag{c_2}$$

i że więc zawsze jest $|c| < r$.

Rozwinięcie (7), jako szereg potęgowy o argumencie $(x-a)(x-b)+c$, jest jednostajnie zbieżny w obszarze

$$|(x-a).(x-b)+c| < r \tag{8}$$

a tem bardziej w obszarze

$$|x-a|.|x-b| < r - |c|, \qquad r > |c|. \tag{9}$$

Wskutek tego możemy rozwinięcie (7) zmienić na szereg

$$f(x, a, b) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A'_\lambda (x-a)^\lambda (x-b)^\lambda \tag{10}$$

ze ścieśnionym zakresem zbieżności (9).

Zakres ten jest ścieśnionym, gdyż — jeżeli $f(x, a, b)$ zbieżne jest w prawdziwym zakresie $|x-a|.|x-b| < r'$ — to może być $r' = r$, a nigdy $r' < r$; obszar bowiem (8) był już i tak *za małym* zakresem jednostajnej zbieżności rozwinięcia (7).

Zakres (9) jest tu znowu wnętrzem krzywej (α), (β) lub (γ).

Krzywe, ograniczające obszary (6) i (9), mają wskutek założenia $\alpha + \beta = a + b$ ten sam środek $\omega = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Ogniskami pierwszej są punkty α, β, drugiej zaś punkty a, b (fig. 1). Proste $\alpha\beta$, ab [1]) przecinają się

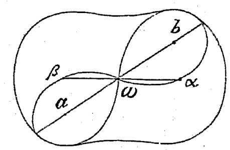


Fig. 1.

w środku ω. Rozwinięcie $f(x, \alpha, \beta)$ nazywać będziemy rozwinięciem na odcinku $\alpha\beta$, a $f(x, a, b)$ przeprowadzeniem jego do odcinka ab.

Ze związków (c_1), (c_2) wynika dalej, że im bliżej punkty a, b leżą pierwotnego zakresu (6) tem więcej $|c|$ zbliża się do ilości r. Załóżmy to teraz o punktach a, b, to obszar (9) można przedstawić za pomocą nierówności

$$|x-a|.|x-b| < \varepsilon,$$

gdzie ε jest ilością dowolnie małą dodatnią.

Obszar składa się tu z dwóch nieskończenie małych owalów, otaczających punkty a, b (widocznie mamy tu $\varepsilon < \frac{|a-b|^2}{4}$); wynika stąd

Twierdzenie II. Obwód prawdziwego zakresu zbieżności rozwinięcia $f(x, \alpha, \beta)$ jest krzywą o takiej własności, że gdy zbliżamy się do niej dowolnie punktami a, b, przeprowadzenie $f(x, a, b)$ ma za ścieśniony zakres zbieżności dwa owale, zbliżające się do pary punktów.

---

[1]) W całej rozprawie rozumieć będziemy przez $\alpha\beta$, ab, ... odcinki, łączące punkty α, β; a, b, a nie iloczyny liczb α, β; a, b; ...

Z drugiej strony jest, jak to już wspomnieliśmy, różnica $r-|c|$ dolną granicą ilości r', określającej nierównością $|x-a|\,.\,|x-b|<r'$ prawdziwy zakres zbieżności przeprowadzenia $f(x, a, b)$. Mamy więc

$$r-|c|\leqq r',$$

Przechodząc od $f(x, a, b)$ do $f(x, \alpha, \beta)$, będziemy mieli naodwrót: $r'-|c'|\leqq r$ czyli

$$r'\leqq r+|c'|.$$

Ze związków tych wynika

$$r-|c|\leqq r'\leqq r+|c'|$$

Gdy a, b obrano nieskończenie blisko punktów α, β, to $|c|=|c'|$ jest ilością nieskończenie małą; stąd

Twierdzenie III. Jeżeli odcinek $\alpha\beta$, a z nim ilość $d=\dfrac{|\alpha-\beta|}{2}$ zmieniamy w ciągły sposób, to ilość r, określająca prawdziwy zakres zbieżności przeprowadzeń, zmienia się równocześnie także w sposób ciągły.

Gdybyśmy za każdym razem doszukali *prawdziwego zakresu* zbieżności tworzonych przeprowadzeń, doszlibyśmy podobnie, jak w teoryi szeregów potęgowych, do takiego wniosku:

Twierdzenie IV. Na obwodzie prawdziwego zakresu zbieżności rozwinięcia $f(x, \alpha, \beta)$ istnieć musi przynajmniej jedna para punktów a', b', leżących w linii prostej ze środkiem ω, taka, że gdy a, b nieskończenie do nich zbliżamy (a do punktu a', b do punktu b'), prawdziwy zakres zbieżności przeprowadzenia $f(x, a, b)$ zdąża do dwóch nieskończenie małych owalów. Takie punkty a', b' są tu, jak w teoryi szeregów potęgowych, szczególnemi.

Że tu punkty szczególne występują *parami* na końcach średnic krzywej (α), (β) lub (γ), pochodzi stąd, że *funkcya, przedstawiona jakiemkolwiek rozwinięciem* $f(x, \alpha, \beta)$, *jest zawsze parzystą funkcyą analityczną argumentu* $(x-\omega)=z$.

Połóżmy bowiem

$$(x-\alpha)(x-\beta)=[(x-\omega)+(\omega-\alpha)]\,.\,[(x-\omega)+(\omega-\beta)],$$

gdzie

$$(\omega-\alpha)=-(\omega-\beta),$$

to otrzymamy

$$f(x, \alpha, \beta)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}A_\lambda\left[z^2-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right]^\lambda=f\left(z, +\frac{\alpha-\beta}{2}, -\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \quad (11)$$

Gdy r w nierówności (6) okazuje się $>d^2=\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{4}$, widocznie mamy do czynienia z *jednym owalem* i obydwa punkty a, b obrać możemy także w jednym punkcie ω. Wtedy z $f(x, \alpha, \beta)$ otrzymamy na przeprowadzenie zwykły (parzysty) szereg potęgowy

$$\mathfrak{P}(x-\omega)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}b_{2\lambda}(x-\omega)^{2\lambda}=f(z, 0, 0).$$

Ten, będąc także uporządkowaniem rozwinięcia (11) według potęg argumentu z^2, jest zbieżny niezawodnie w zakresie

$$\left|z^2-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right|<r,$$

albo w mniejszym zakresie

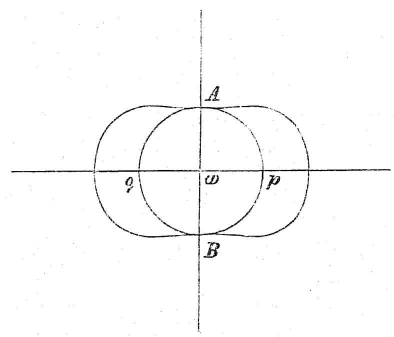
$$z^2\leqq r-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}=r-d^2,$$

który jest kołem

$$z\leqq+\sqrt{r-d^2}. \quad (\varrho)$$

Koło to dotyka owalu w punktach przecięcia się jego z osią drugorzędną i nie potrzebuje być prawdziwym zakresem zbieżności szeregu otrzymanego.

Jeżeli jednak koło (ϱ) jest już prawdziwym zakresem zbieżności to wtedy punkty



(Fig. 2).

$$A=\omega+i\sqrt{r-d^2}$$
$$B=\omega-i\sqrt{r-d^2} \quad \text{(Fig. 2)}$$

są szczególnemi, a na całym zresztą obwodzie tego koła już takich punktów nie znajdziemy; łuki bowiem ApB, AqB mieszczą się całkiem wewnątrz owalu.

W każdym innym przypadku jest prawdziwy promień zbieżności ϱ zamknięty między granicami

$$\sqrt{r+d^2} \geqq \varrho \geqq \sqrt{r-d^2}.$$

Inaczej bowiem koło (ϱ) albo całkowicie leżałoby w owalu, albo całkowicie objęłoby owal, a ani jedna ani druga możliwość zajść nie może. (Owal przecina oś pierwszorzędną w punktach $\pm\sqrt{r+d^2}$).

Gdy $f(x, \alpha, \beta)$ posiada zakres zbieżności, przedstawiający się jako lemniskata lub jako para owalów, to nie można odrazu rozstrzygnąć, czy punkt $\omega = \frac{\alpha+\beta}{2}$ jest szczególnym lub nieszczególnym funkcyi przedstawionej swem rozwinięciem. O tem przekonać się będzie można, badając dopiero sposób, w jaki się obwód zakresu zbieżności zmienia, gdy odcinek $\alpha\beta$ zmieniamy na inny. Badać więc nam trzeba zakresy zbieżności przeprowadzeń i to z tem większym interesem, że tu, odmiennie niż w teoryi szeregów potęgowych, wszystkie trzy rodzaje krzywych po porządku występować mogą. Będzie więc może możliwem z tej rozmaitości cokolwiek i o punktach szczególnych samej funkcyi analitycznej (jej elementu $\mathfrak{P}(x-\omega)$) wywnioskować. Tem się teraz zajmiemy.

II.

Rozwinięcie $f(x, \alpha, \beta)$ niech ma za zakres zbieżności jeden owal, a prosta, przechodząca przez ogniska α, β, niech ten owal przecina w punktach A', B', nieskończenie blizkich punktów szczególnych A, B. [A' leży nieskończenie blizko punktu A, B' zaś nieskończenie blizko punktu B; punkt ω nie jest szczególnym].

Przeprowadzając $f(x, \alpha, \beta)$ do odcinka $A'B'$, mamy w przeprowadzeniu $f(x, A', B')$ ilość r zdążającą do zera, a $d =$ odcinkowi $A'B'$. Rozwinięcie to bowiem ma swój zakres zbieżności, zdążający do dwóch punktów (Twierdzenie IV).

Zmieniając $f(x, \alpha, \beta)$ na szereg potęgowy

$$\mathfrak{P}(x-\omega) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{2\lambda}\,(x-\omega)^{2\lambda}, \tag{12}$$

mamy tu przeciwnie $r > 0$ i $d = 0$.

Obierzmy dostatecznie mały odcinek $\alpha_1\beta_1$, leżący na $A'B'$ i o środku w ω, to możemy położyć

$$\alpha_1 = \omega + \gamma, \quad \beta_1 = \omega - \gamma.$$

Używając w (12) raz ω, obliczonego z jednego z tych związków, a drugi raz z drugiego z nich, dostaniemy

$$(x-\omega)^2 = (x-\alpha_1)(x-\beta_1) + \gamma(\alpha_1 - \beta_1 + \gamma).$$

Tak wyrażone $(x-\omega)^2$ wstawmy w szereg (12) i uporządkujmy go podług potęg iloczynu $(x-\alpha_1)(x-\beta_1)$, to znajdziemy.

Twierdzenie V. Rozwinięcie $f(x, \alpha_1, \beta_1)$ jest zbieżne w jednym tylko owalu

$$|x-\alpha_1| \,.\, |x-\beta_1| < r_1 \tag{13}$$

Dowód. Promień zbieżności r szeregu potęgowego jest ilością skończoną, a d tu należące jest zerem.

Przy dostatecznie małym odcinku $\alpha_1\beta_1$ będzie i $d_1 = \frac{\alpha_1-\beta_1}{2}$, należące do $f(x, \alpha_1, \beta_1)$, również dostatecznie małe, podczas gdy r_1 pozostanie skończonem (Twierdzenie III). Musi więc być

$$r_1 > d_1^2,$$

co wskazuje, że zakres (13) jest **jednym owalem**.

Poczynając od $\alpha_1\beta_1$ uważmy odcinki

$$\alpha_1\beta_1 < \alpha_2\beta_2 < \alpha_3\beta_3 < \ldots < A'B',$$

mieszczące się wszystkie na $A'B'$ i wszystkie o środku w ω. Długości dwóch sąsiednich różnią się od siebie nieskończenie mało.

Odpowiednio do tych odcinków mamy:

$$d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < D'$$

i przeprowadzenia

$$f(x, \alpha_1, \beta_1), \quad f(x, \alpha_2, \beta_2), \ldots, f(x, A', B'). \tag{14}$$

O ilości r tylko tyle wiemy, że ona począwszy od $r_1 > d_1$ (rozwinięcia $f(x, \alpha_1, \beta_1)$) zmienia się w sposób ciągły (Twierdzenie III) i zdąża do zera dla $f(x, A', B')$. Wśród tych zmian musi się więc gdzieś po raz pierwszy okazać $r = d$. Przyjmijmy, że to zachodzi dla przeprowadzenia $f(x, \alpha_\nu, \beta_\nu)$ a więc $r_\nu = d_\nu$, to rozwinięcie to jest pierwszem w szeregu (14), mającem za zakres zbieżności lemniskatę.

Przyjmijmy, że bezpośrednio następujące rozwinięcie $f(x, \alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1})$ ma lemniskatę $(\alpha_{\nu+1}\,\beta_{\nu+1})$ [1]) jako prawdziwy swój zakres zbieżności; jej $r_{\nu+1} = d_{\nu+1}$ jest $< r_\nu = d_\nu$ a skutkiem tego, według Twierdzenia Ib, lemniskata $(\alpha_{\nu+1}\,\beta_{\nu+1})$ obejmowałaby całkowicie lemniskatę $(\alpha_\nu\,\beta_\nu)$. Toby wskazywało, że na obwodzie lemniskaty $(\alpha_\nu\,\beta_\nu)$ nie było ani jednego punktu szczególnego, a tylko punkt ω jest szczególnym. Lecz to jest niemożliwe, bo pierwotnym zakresem zbieżności był jeden owal.

Przyjmijmy, że to rozwinięcie ma jako zakres zbieżności jeden owal $(\alpha_{\nu+1}\,\beta_{\nu+1})$. Wtedy znowu według twierdzenia Ia, owal ten objąłby całkowicie lemniskatę $(\alpha_\nu\,\beta_\nu)$, co jest także niemożliwe.

Pozostaje więc tylko jedna jedyna możliwość, mianowicie że $(\alpha_{\nu-1}\,\beta_{\nu+1})$ składa się z dwóch owali. Lecz także i wszystkie następne zakresy $(\alpha_{\nu+2}\,\beta_{\nu+2}), \ldots$ będą parami owalów, jak długo istnieje możliwość otrzymywania przeprowadzeń mających znaczenie. Inaczej bowiem każda na nowo się pojawiająca lemniskata lub nowy pojedyńczy owal objąłby bezpośrednio poprzedzającą parę owali (twierdzenie Ic, Id), a to jest znowu niemożliwe. Mamy zatem

Twierdzenie VI. Gdy rozwinięcie $f(x, \alpha, \beta)$ zbieżne w jednym owalu $(\alpha\,\beta)$ jest takie, że prosta $\alpha\beta$ przecina ten owal w punktach A', B' nieskończenie blizkich punktów szczególnych A, B, lub w samych tych punktach, to tworząc przeprowadzenia, odnoszące się do coraz rosnącego $\alpha\beta$, dostajemy na ich zakresy naprzód pojedyńcze owale, potem jednę tylko lemniskatę, a wreszcie same pary owalów. Te ostatnie stają się wreszcie nieskończenie małe, posiadając ogniska A', B' (przechodzą przez A, B, lub redukują się do samych punktów A, B).

Twierdzenie VII. Gdy A, B nie są punktami szczególnemi, ale na prostej $A\,B$ po za tym odcinkiem znajdują się punkty szczególne A_1, B_1 lub miejsca $A'_1\,B'_1$ nieskończenie blizko położone punktów szczególnych, to zakresy zbieżności $(\alpha\,\beta)$ $(\alpha_1\,\beta_1), \ldots$ zachowywać się będą tak jak w twierdzeniu VI, a pary owalów staną się ostatecznie nieskończenie małe, redukując się do punktów A'_1, B'_1 lub posiadając ogniska A'_1, B'_1.

Jeżeli o istnieniu punktów szczególnych na osi $\alpha\beta$ nic nie założymy, to dojdziemy do wniosków:

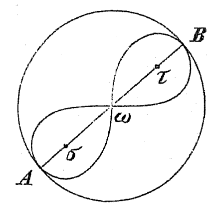
[1]) Dla krótkości naznaczać będziemy prawdziwy zakres zbieżności każdego rozwinięcia $f(x, \alpha, \beta)$ przez $(\alpha\beta)$.

Twierdzenie VIII. Przeprowadzenia zbieżne początkowo w pojedyńczych owalach mogą statecznie aż do nieskończoności mieć jako zakresy zbieżności same pojedyńcze owale. Zajdzie to wtedy, gdy funkcya rozważona ma punkty szczególne leżące jedynie po za S i T (twierdzenie Ig) w skończonem oddaleniu od punktu ω.

Twierdzenie IX. W takich przeprowadzeniach mogą także pojedyńcze owale przejść raz w lemniskatę, a potem w stateczny szereg par owalów. Wskazuje to, że funkcya posiada punkty szczególne w S i T (twierdzenie Ie, If). Pary owalów mogą potem stać się nieskończenie małemi, co wskazuje na punkty szczególne, nieskończenie blizko prostej $\alpha\beta$ położone, albo też nie będą do dwóch punktów zdążały nawet w nieskończoności.

Te rezultaty przenieśmy do teoryi funkcyj parzystych analitycznych argumentu $(x-\omega)$, określonych—jak zwykle—szeregiem potęgowym $\mathfrak{P}(x-\omega)$ o pewnem kole zbieżności (R). Poprowadźmy w tem kole średnicę AB, przyjmując, że A i B są punktami szczególnemi. Na AB obierzmy punkty $\sigma = \omega + \alpha$, $\tau = \omega - \alpha$ i zwiększajmy $|\alpha|$ od zera do $\omega\,A = \omega\,B$. Odpowiednie przeprowadzenia $f(x, \sigma, \tau)$ będą według twierdzenia VI zbieżne naprzód w pojedyńczych owalach, potem w lemniskacie, a wreszcie w dwóch owalach, zdążających do pary punktów A, B.

Na lemniskatę zwrócimy na chwilę szczególniejszą uwagę. Jej rozpiętość nie może przechodzić długości AB, bo wtedy we wnętrzu jej znajdowałyby się punkty szczególne A, B. Lecz i mniejszą od AB nie może być tą rozpiętość. W takim bowiem razie mieściłaby się lemniskata całkowicie w kole (R) i na jej obwodzie nie mielibyśmy żadnego punktu szczególnego.



(Fig. 3).

Widocznie zatem lemniskata dotyka koła w punktach A, B (Fig. 3). Gdy ją ilość $d = \frac{\sigma\tau}{2}$ określa, to mamy

$$\omega\,B = R = \sqrt{2}\,.\,d$$

więc

$$d = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

stąd wynika

Twierdzenie X*a*. Jeżeli punkty końcowe A, B średnicy AB koła zbieżności (R) szeregu potęgowego (parzystego) $\mathfrak{P}(x-\omega)$ mają być szczególnemi, to przeprowadzenie $f(x, \sigma, \tau)$ gdzie σ, τ leżą na AB i od ω oddalone są o $\frac{R}{\sqrt{2}}$, musi być zbieżne w lemniskacie $|x-\sigma| \cdot |x-\tau| < \frac{R^2}{2}$.

Nie możemy przyjąć, aby podobne przeprowadzenia $f(x, \sigma, \tau)$, $\frac{\sigma\tau}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}$, odnoszące się do średnic, których punkty końcowe nie są szczególne, były również zbieżne w takiej lemniskacie. W takim bowiem razie na obwodzie tej krzywej nie byłoby żadnych punktów szczególnych. Ale i w dwóch owalach nie mogą być zbieżne takie przeprowadzenia, gdyż taka para owalów mieściłaby się całkowicie w (R) (Twierdzenie I*c*). Mamy więc:

Twierdzenie X*b*. Warunek okazania się lemniskaty jest nie tylko konieczny, ale i dostateczny, a wszystkie inne przeprowadzenia $f(x, \sigma, \tau)$ $\left(\text{w których } \frac{\sigma\tau}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ są zbieżne w jednym owalu.

Stąd wynika takie prawidło szukania punktów szczególnych szeregu parzystego:

A. Gdy w kole (R) zatoczymy ze środka ω koło $\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$, narysujemy w niem średnicę $\sigma\tau$ i przekonamy się, że przeprowadzenie $f(x, \sigma, \tau)$ zbieżne jest w lemniskacie, to przedłużona średnica $\sigma\tau$ przecina koło (R) w punktach szczególnych A, B. Gdy przeciwnie zakres zbieżności tego przeprowadzenia jest jednym owalem, punkty A, B nie są szczególnemi. Prawidło to zmienić można na inne następujące:

B. Gdy przeprowadzenie $f(x\, \sigma', \tau')$, w którem $\sigma'\tau'$ o dowolnie małą ilość większe jest od $\sigma\tau$, zbieżne jest w dwóch owalach, to średnica $\sigma\tau$ przecina (R) w punktach szczególnych.

Aby zastosować twierdzenia VI—IX, zauważmy rozwinięcie

$$(a_1) \qquad f(x, +1, -1) = \frac{1}{1 - \frac{(x-1)\,(x+1)}{3}} = 1 + \frac{(x-1)\,(x+1)}{3} + \ldots,$$

zbieżne w jednym owalu

$$(b_1) \qquad |x-1| \cdot |x+1| < 3, \qquad \text{(fig. 4)}$$

na którego obwodzie mamy punkty szczególne $+2, -2$; są to zarazem jedyne punkty szczególne funkcyi (a_1) na całej płaszczyźnie (x).

Połóżmy, obierając

$$h = (-1 \ldots +1),$$

$$(x-1)\,(x+1) = [x-(1+h)] \cdot [x+(1+h)] - 1 + (1+h)^2,$$

to otrzymamy z (a_1) rozwinięcie

$$f(x, +(1+h), -(1+h)) = \frac{3}{4-(1+h)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{[x-(1+h)]\,[x+(1-h)]}{4}}$$

$$= \frac{3}{4-(1+h)^2}\left(1 + \frac{[x-(1+h)]\,[x+(1+h)]}{4} + \ldots\right) \qquad (c_1)$$

Przeprowadzenie to zbieżne jest w prawdziwym zakresie

$$|x-(1+h)| \cdot |x(1+h)| < 4-(1+h)^2,$$

którego $r = 4-(1+h)^2$, $d^2 = (1+h)^2$ i który zatem będzie lemniskatą, gdy

$$4-(1+h)^2 = (1+h)^2$$

czyli, gdy się okaże

$$h = -1 \pm \sqrt{2}$$

Ponieważ założono $h = (-1 \ldots +1)$, może więc być jedynie $h = -1 + \sqrt{2}$. Używając tej wartości w równaniu (c_1), dostaniemy rozwinięcie

$$f(x, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{x^2-2}{2} + \frac{(x^2-2)^2}{4} + \ldots\right)$$

odnoszące się do lemniskaty (fig. 4). Ta oddziela pojedyncze owale od szeregu par owali w ten sposób, że odcinki $\sigma\tau$ mieszczące się w zakresie $(-\sqrt{2} \ldots +\sqrt{2})$ dadzą rozwinięcia $f(x, \sigma, \tau)$, zbieżne w jednym tylko owalu, a punkty σ i τ obrane odpowiednio w zakresach $(-2 \ldots -\sqrt{2})$, $(+\sqrt{2} \ldots +2)$ doprowadzą do rozwinięć zbieżnych w dwóch owalach.

Obwód zakresu (b_1) przecina oś drugorzędną w punktach $+\sqrt{2}\, i$, $-\sqrt{2}\, i$, a na całej nieograniczonej tej osi nie posiada funkcya (a_1) ani jednego punktu szczególnego.

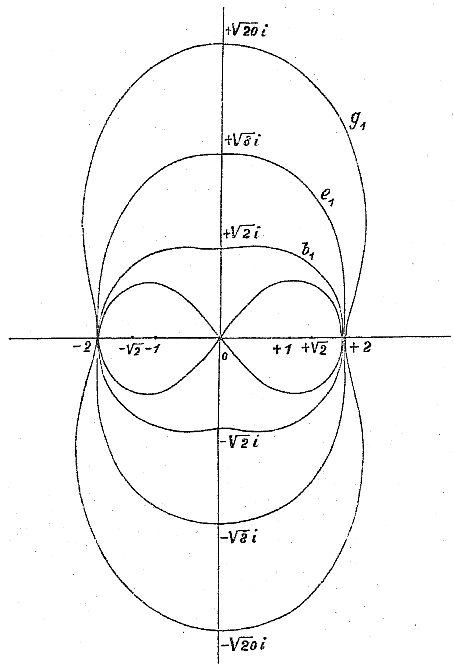
Obierzmy

$$0 < k \leq \sqrt{2}$$

i połóżmy

$$(x-1)(x+1) = (x-ki)(x+ki) - (1+k^2)$$

to dojdziemy do rozwinięcia



(Fig. 4).

$$f(x, +ki, -ki) = \frac{3}{3+(1+k^2)}\left(1 + \frac{x+k^2}{3+(1+k^2)} + \ldots\right),$$

zbieżnego w zakresie

$$|x^2+k^2| < 3+(1+k^2),$$

którego $r = 3+(1+k^2)$, a $d^2 = k^2$.

Zakres ten miałby być lemniskatą w przypadku, gdyby spełniło się równanie

$$4 + k^2 = k^2$$

Lecz to równanie jest niedorzecznością, a stąd wynika, że przy obranych k nigdy nie będziemy mieli lemniskaty, ale same pojedyńcze owale.

Kładąc $k = \sqrt{2}$, mamy rozwinięcie

$$f(x, +\sqrt{2}\,i, -\sqrt{2}\,i) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2+2}{6} + \frac{(x^2+2)^2}{6^2} + \ldots\right) \quad (\mathrm{d}_1)$$

zbieżne w owalu

$$|x - \sqrt{2}\,i| \,.\, |x + \sqrt{2}\,i| < 6 \qquad (e_1)$$

który oś drugorzędną przetnie w punktach $+\sqrt{8}\,i$, $-\sqrt{8}\,i$, a oś pierwszorzędną w punktach $+2$, -2.

Połóżmy w (d_1)

$$x^2 + 2 = (x^2+8) - 6,$$

to dojdziemy do rozwinięcia

$$f(x, +\sqrt{8}\,i, -\sqrt{8}\,i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2+8}{12} + \frac{(x^2+8)^2}{12^2} + \ldots\right), \quad (\mathrm{f}_1)$$

zbieżnego znowu w jednym owalu

$$|x + \sqrt{8}\,i| \,.\, |x - \sqrt{8}\,i| < 12, \qquad (g_1)$$

który oś drugorzędną przecina w punktach $+\sqrt{20}\,i$, $-\sqrt{20}\,i$, oś zaś pierwszorzędną w punktach $+2$, -2 i t. d.

Załóżmy wreszcie $h = q\,e^{\varphi i}$ ($|\varphi| > 0$) i mieszczące się w obszarze $|h^2 - 1| < 3$.

Kładąc

$$x^2 - 1 = (x^2 - h^2) - (1 - h^2),$$

dostaniemy tu rozwinięcie zbieżne w obszarze

$$|x^2 - h^2| < |1 - h^2|.$$

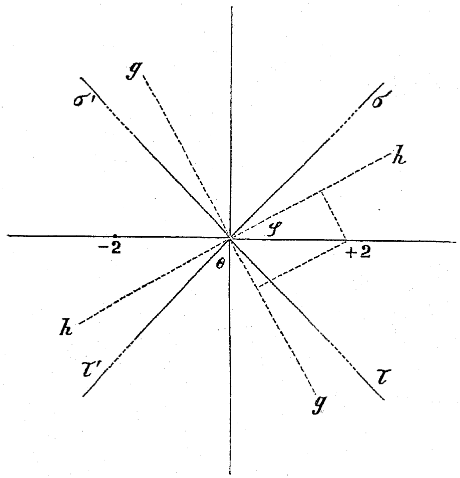
Obszar ten będzie statecznie do nieskończoności jednym owalem, gdy założymy

$$|h^2| < |1 - h^2|.$$

Ta nierówność, gdy się uwzględni $h = q\, e^{\varphi i}$, daje warunek

$$\cos 2\,\varphi < \frac{1}{2\,q^2}\,.$$

Ponieważ q^2 może być nieskończenie małe, wynika więc stąd: Gdy h leży po za $\sigma o \tau \equiv S$, $\sigma' o \tau' \equiv T$, (Fig. 5), dostaniemy przeprowadzenia o samych pojedyńczych owalach. Przeciwnie gdy h leży w S i T, dostaniemy naprzód pojedyńcze owale, potem jednę lemniskatę, a wreszcie same pary owalów aż w nieskończoność. W pierwszym przypadku leżą punkty szczególne dalej od prostej hh niż od prostej gg do niej prostopadłej przechodzącej przez 0. W drugim przypadku rzecz się ma przeciwnie.



(Fig. 5).

Aby mieć znowu przynajmniej najprostszy przykład do twierdzeń Xa, Xb zauważmy szereg

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

o zakresie zbieżności $(R) = (1)$. Połóżmy

$$a = \frac{e^{\varphi i}}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = (0 \ldots 2\pi) \quad \text{i},$$

$$x^2 = (x^2 - a^2) + a^2,$$

to otrzymamy rozwinięcie

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-a^2}\left(1 + \frac{x^2-a^2}{1-a^2} + \frac{(x^2-a^2)^2}{(1-a^2)^2} + \ldots\right) = f\,(x, +a, -a)$$

zbieżne w zakresie

$$|\,x - a\,| \;.\; |\,x + a\,| < |\,1 - a^2\,|,$$

którego $r = |\,1 - a^2\,|$, $d^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i który będzie lemniskatą, gdy

$$|\,1 - a^2\,| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

czyli, gdy

$$\left(1 - \frac{1}{2}\,\cos 2\,\varphi\right)^2 + \frac{1}{4}\,\sin^2 2\varphi = \frac{1}{2}\,.$$

To równanie daje $\cos 2\,\varphi = 1$, albo ostatecznie $\varphi = 0$ i wskazuje, jak zresztą być powinno, że punkty $+1$, -1 są punktami szczególnemi funkcyi $\frac{1}{1-x^2}$.

Przyjmijmy teraz — wracając do rozważań teoretycznych—że dane rozwinięcie $f\,(x, a, \beta)$ jest zbieżne w lemniskacie $(a\beta)$. Aby się tym przypadkiem bliżej zająć, zauważmy szeregi odcinków:

$$\ldots < a''\,\beta'' < a'\,\beta' < a\,\beta\,; \qquad a\,\beta < a_1\,\beta_1 < a_2\,\beta_2 < \ldots$$

o środkach w punkcie ω (co dwa sąsiednie mają się i tu różnić od siebie nieskończenie mało). Gdy zakres o bezpośrednio mniejszym odcinku $a'\,\beta'$ jest jednym owalem, to musi zakres z odcinkiem bezpośrednio większym $a_1\,\beta_1$ rozpaść się koniecznie na dwa owale. [Lemniskata bowiem $(a_1\,\beta_1)$ lub owal pojedyńczy $(a_1\,\beta_1)$ objąłby całkowicie lemniskatę $a\beta$ (Twierdzenie Ia i Ib), a to jest niemożliwe]. Punkt ω nie jest w takim razie szczególnym i mamy do czynienia z funkcyą, określoną w twierdzeniach VI—IX.

Lecz $(\alpha' \beta')$ może się okazać również lemniskatą. Wtedy $(\alpha\beta)$ obejmuje całkowicie lemniskatę $(\alpha' \beta')$ [Twierdzenie Ib], przecinając tę ostatnią jedynie w punkcie ω. Stąd wynika

Twierdzenie XI. Gdy rozwinięcie $f(x, \alpha, \beta)$ zbieżne jest w lemniskacie, a przeprowadzenie jego $f(x, \alpha', \beta')$, gdzie $\alpha' \beta' < \alpha \beta$ (o dowolnie małej różnicy) ma za zakres zbieżności znowu lemniskatę, to funkcya tych rozwinięć nie ma punktów szczególnych ani we wnętrzu, ani na obwodzie lemniskaty $(\alpha' \beta')$, a tylko jej środek ω jest punktem szczególnym.

Gdy $(\alpha' \beta')$ $(\alpha \beta)$ są już lemniskatami, to cały szereg zakresów $\ldots (\alpha''' \beta''')$, $(\alpha'' \beta'')$, $(\alpha' \beta')$ musi być również szeregiem takichże krzywych. Owal tam się okazać nie może, gdyż punkt ω jest szczególny; dwa owale powstać nie mogą wskutek Twierdzenia Ic.

Co się tyczy zakresów $(\alpha_2 \beta_2)$, $(\alpha_3 \beta_3)$, ... to te mogą być znowu lemniskatami i to: albo pozostają takiemi aż w nieskończoność na całej nieograniczonej prostej, przechodzącej przez α i β, albo też dojdziemy do pewnego odcinka,—niech nim będzie $\alpha_\nu \beta_\nu$,—dającego ostatnią lemniskatę, a zaczynającego szereg par owalów $(\alpha_{\nu+1} \beta_{\nu+1})$, $(\alpha_{\nu+2} \beta_{\nu+2})$, ... Te owale już się statecznie utrzymywać muszą (wskutek twierdzenia Ic) i albo wreszcie w skończoności lub nieskończoności stają się nieskończenie małe, albo ten przypadek wcale nie zachodzi. Zbierając te uwagi powiemy:

Twierdzenie XII. Gdy utworzymy szereg odcinków $\alpha \beta < \alpha_1 \beta_1 < \alpha_2 \beta_2 < \ldots$, poczynając od odcinka $\alpha\beta$ dostatecznie małego, a między zakresami zbieżnemi $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1 \beta_1)$, $(\alpha_2 \beta_2)$, ... znajdziemy dwie lemniskaty, to funkcya w punkcie ω ma punkt szczególny. Gdy w S, T (tw. Ig) nie ma punktów szczególnych, leżących poza każdą nową lemniskatą, to się lemniskaty statecznie aż do nieskończoności utrzymywać będą. W przeciwnym razie przejdą w dwa owale, które albo w nieskończoność utrzymywać się będą albo zdążą do nieskończenie małych owalów o ogniskach A'_1, B'_1. Wtedy widocznie na prostej $\alpha\beta$ istnieje taki skończony odcinek $\alpha_\nu \beta_\nu$ (o środku w ω), że dla punktów $\sigma\tau$, obieranych na nim wszystkie przeprowadzenia $f(x, \sigma, \tau)$ zbieżne są w lemniskatach, a wszystkie przeprowadzenia $f(x, \sigma', \tau')$ w których σ' leży w $A'_1 \ldots \alpha_\nu$), a Γ' w $(\beta_\nu \ldots B'_1)$ zbieżne będą w dwóch owalach. Te ostatnie zakresy mogą się wydłużyć w nieskończoność.

Funkcya np. $\frac{1}{x^2}$ ma na całej płaszczyźnie (x) jedyny punkt szczególny $x = \omega = 0$. Obierając dowolne h (rzeczywiste, lub urojone) połóżmy

$$x^2 = (x^2 - h^2) + h^2,$$

to otrzymamy

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{x^2-h^2}{h^2} + \frac{(x^2-h^2)^2}{h^4} + \ldots\right) = f(x, +h, -h).$$

Rozwinięcie to, bez względu na wartość h ($|h| > 0$), zbieżne jest znowu w lemniskacie, a także i wszelkie przeprowadzenia jego, odniesione do odcinków $\sigma\tau$ leżących na nieograniczonej prostej przechodzącej przez $+h$, $-h$, zbieżne będą w takich krzywych.

Inaczej już zachowywać się będą przeprowadzenia funkcyi

$$\frac{1}{x^2(x+a)(x-a)},$$

w której dla uproszczenia przyjmujemy a rzeczywistem i dodatniem.

Niech

$$h = (0 \ldots a);$$

połóżmy

$$x^2 = (x^2 - h^2) + h^2,$$

$$x^2 - a^2 = (x^2 - h^2) - (a^2 - h^2), \quad a^2 - h^2 > 0,$$

to rozważaną funkcyą możemy przedstawić pod postacią

$$\frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2-h^2}{h^2}} \cdot \frac{1}{h^2 - a^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2-h^2}{a^2-h^2}}$$

$$= \frac{1}{h^2(a^2-h^2)}\left(1 - \frac{x^2-h^2}{h^2} + \frac{(x^2-h^2)^2}{h^4} - \ldots\right)\left(1 + \frac{x^2-h^2}{a^2-h^2} + \frac{(x^2-h^2)^2}{(a^2-h^2)^2} + \ldots\right)$$

$$= C_0 + C_1(x^2-h^2) + C_2(x^2-h^2)^2 + \ldots..$$

Rozwinięcie to zbieżne będzie w wspólnym obszarze zakresów

$$(\mathrm{a}_2), \quad |x^2-h^2| < h^2; \qquad (\mathrm{b}_2) \quad |x^2-h^2| < a^2-h^2.$$

Poczynając od nieskończenie małych h, mamy nasamprzód

$$h^2 \leqq a^2 - h^2$$

i wtedy zakres (a_2) jest lemniskatą, zakres zaś (b_2) jednym owalem obejmującym ową lemniskatę (Twierdzenie Ia). Wspólnym obszarem jest więc lemniskata (a_2) i w jej wnętrzu jest rozwinięcie rozważane zbieżne (Fig. 6).

Gdy $h^2 = a^2 - h^2$, a więc $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ mamy jeszcze lemniskatę (a'_2).

Gdy już jednak stanie się

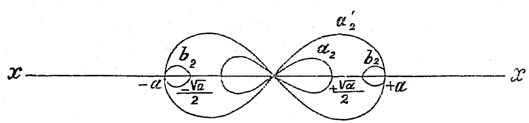
$$h^2 > a^2 - h^2, \quad \text{a więc} \quad h > \frac{a}{\sqrt{2}},$$

to (b_2) przedstawia dwa owale, które się całkowicie mieszczą w lemniskacie (a'_2) a stąd wynika, że te dwa owale będą teraz prawdziwym zakresem zbieżności rozwinięcia. W przykładzie więc rozważanym otrzymamy rozwinięcia $f(x, +h, -h)$ zbieżne w lemniskatach (a_2), gdy

$$(-h \ldots + h) \leq \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \ldots + \frac{a}{\sqrt{2}}\right);$$

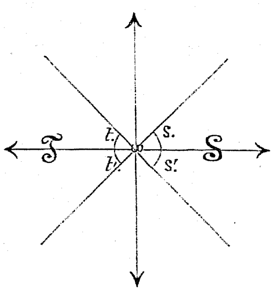
zbieżne zaś w dwóch owalach, gdy

$$(-a \ldots + a) > (-h \ldots + h) > \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \ldots + \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{(Fig. 6).}$$



(Fig. 6)

Powiedzieliśmy, że rozwinięcie zbieżne w lemniskacie wskazuje na punkty szczególne funkcyi zawarte w S i T. Jeżeli się jednak weźmie pod uwagę najbliższe otoczenie punktu ω, to ten wniosek trzeba ograniczyć i powiedzieć:



(Fig. 7).

Twierdzenie XIII. Jeżeli rozwinięcie zbieżne ma być w lemniskacie, nie może funkcya w partyach S i T posiadać punkty szczególne, mieszczące się nieskończenie blizko punktu ω, a więc w $s\omega s'$ i $t\omega t'$ (Fig. 7). Takie bowiem punkty przeszkadzają utworzeniu się jakiejkolwiek niedowolnie małej lemniskaty.

Trzeba jeszcze zbadać dane rozwinięcie $f(x, \alpha, \beta)$ w przypadku, gdy się ono zbieżnem okazuje w dwóch owalach. Przedewszystkiem wykluczymy z naszych poszukiwań parę owalów, należącą do zakresów, jakie mieliśmy w twierdzeniach VI—IX; o tem zaś, czy tak jest, przekonać się będzie można, tworząc przeprowadzenia

$$\ldots, f(x, \alpha'', \beta''), \quad f(x, \alpha', \beta'), \quad f(x, \alpha, \beta); \quad \ldots \alpha'' \beta'' < \alpha' \beta' < \alpha \beta,$$

$$f(x, \alpha, \beta), \quad f(x, \alpha_1, \beta_1), \quad f(x, \alpha_2, \beta_2) \ldots; \quad \alpha \beta < \alpha_1 \beta_1 < \alpha_2 \beta_2 < \ldots$$

Zajść tu jednak może jeszcze nowy przypadek. Oto zdarzyć się może, że zakresy

$$\ldots (\alpha'' \beta''), \quad (\alpha' \beta'), \quad (\alpha \beta), \quad (\alpha_1 \beta_1), \quad (\alpha_2 \beta_2) \ldots$$

najbliższe z zakresem $(\alpha\beta)$ są parami owalów. Wtedy zbadać nam trzeba, jak daleko utrzyma się ta stateczność kształtu?

Zakresy $(\alpha\beta)$, $(\alpha' \beta')$, $(\alpha'' \beta'')$, ... odnoszące się do malejących odcinków, muszą się ostatecznie stać parą nieskończenie małych owali o ogniskach A'_2, B'_2 w skończonem lub nieskończenie małem otoczeniu punktu ω. Pochodzi to stąd, że parę owalów określa nierówność $r < d^2$. Gdy więc d maleje, to może się stać r już dowolnie małe przy d skończonem, albo też r staje się nieskończenie małem równocześnie z d^2 i pozostaje zawsze $< d^2$.

Dwa takie nieskończenie małe owale leżą w najbliższem otoczeniu punktu ω. Na ich obwodach muszą leżyć punkty szczególne i to w ten sposób, że przeszkadzają utworzeniu się jakiejkolwiek niedowolnie małej lemniskaty; muszą się one zatem mieścić w częściach $s\omega s'$ i $t\omega t'$ (Twierdzenie XIII, fig. 7).

Z rosnącemi odcinkami $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\,\beta_1)$, . . . mogą pary owalów albo stać się wreszcie nieskończenie małe, albo do nieskończoności pozostają skończone. Stąd mamy

Twierdzenie XIV. Gdy w szeregu zakresów

$$\ldots (\alpha''\,\beta''),\quad (\alpha'\,\beta'),\quad (\alpha\,\beta),\quad (\alpha_1\,\beta_1),\quad (\alpha_2\,\beta_2)\ \ldots$$

znajdujemy między zakresami sąsiadującemi z $(\alpha\beta)$ dwie pary owalów, to one z malejącem $\alpha\beta$ przechodzą albo w lemniskatę a potem w pojedyńcze owale, albo stają się nieskończenie małemi o ogniskach $A'_2\,B'_2$, w skończony sposób oddalonych od ω, lub leżących w najbliższem otoczeniu tego punktu. Z rosnącym odcinkiem $\alpha\beta$ mogą się te pary albo znowu stać nieskończenie małe (i posiadać ogniska $A'_1\,B'_1$) albo to malenie nigdy nie zajdzie.

Przypadek skończonych $A'_1\,B'_1$, $A'_2\,B'_2$ jest tu analogią z twierdzeniem Laurenta w teoryi funkcyj.

III.

Gdyśmy w ustępach I, II zbadali naturę rozwinięć $f(x, \alpha, \beta)$, zajmijmy się tu jeszcze bliżej ich związkiem z analitycznemi funkcyami, określonemi najogólniejszym szeregiem potęgowym.

W teoryi funkcyi uważa się, jak wiadomo, za szczególny każdy taki punkt ω, w którego otoczeniu nie istnieje rozwinięcie postępujące podług dodatnich całkowitych potęg argumentu $(x-\omega)$.

Przeciwnie z rozważań wyrażeń ($f(x, \alpha, \beta)$ (określających, jak wiemy, element parzystej funkcyi argumentu $(x-\omega)$) wynikło, że tu rozwinięcie $f(x, \omega+\gamma, \omega-\gamma)$ ma znaczenie *bez różnicy, czy punkt ω jest szczególnym czy nieszczególnym rozważanej funkcyi.*

To samo wskazuje i ta okoliczność, że gdy w otoczeniu punktu ω element analitycznej funkcyi przedstawia się w jednej z form:

$$\mathfrak{P}\left((x-\omega)^2\right) \tag{a}$$

$$G\left(\frac{1}{(x-\omega)^{2/\mu}}\right)+\mathfrak{P}\left((x-\omega)^{2/\mu}\right),\ ^{1)}\quad \mu \geqq 1,\ \text{całkowite}, \tag{b}$$

i położymy
$$(x-\omega)^2=(x-\omega)^2-\gamma^2+\gamma^2,$$

to możemy zawsze tak (a), jak (b) zmienić na rozwinięcie

$$f(x, \omega+\gamma, \omega-\gamma)$$

o zakresie zbieżności

$$|(x-\omega)^2-\gamma^2|<|\gamma|^2 \tag{c}$$

przy $|\gamma|$ dostatecznie małem. W przypadku (a) będzie ten zakres zbieżności za małym, tak, że prawdziwym zakresem zbieżności będzie owal obejmujący lemniskatę (c) [Twierdzenie V].

W przypadku, gdy funkcya w otoczeniu punktu ω ma rozwinięcie takie, jak (a) lub (b), postępujące podług samych nieparzystych potęg argumentu $(x-\omega)$ lub $(x-\omega)^{1/\mu}$, to wyłączając tu z rozwinięcia (a) czynnik $(x-\omega)$, a z rozwinięcia (b) czynnik $(x-\omega)^{1/\mu}$, dojdziemy do takich określeń funkcyj

$$(x-\omega)\ f(x, \omega+\gamma, \omega-\gamma), \tag{a'}$$

$$(x-\omega)^{1/\mu}\ f_1(x, \omega+\gamma, w-\gamma). \tag{b'}$$

Gdy wreszcie w otoczeniu punktu ω mamy element

$$\mathfrak{P}\,(x-\omega), \tag{a$_1$}$$

lub

$$G\left(\frac{1}{(x-\omega)^{1/\mu}}\right)+\mathfrak{P}\left((x-\omega)^{1/\mu}\right), \tag{b$_1$}$$

to uwidoczniając w tych rozwinięciach część parzystą i część nieparzystą argumentu $(x-\omega)$, względnie $(x-\omega)^{1/\mu}$, dojdziemy do określenia

---

[1]) Litera G wskazuje na całkowitą wymierną lub przestępną funkcyą, która także do stałej zredukować się może.

$$f(x, \omega+\gamma, \omega-\gamma)+(x-\omega) f_1(x, \omega+\gamma, \omega-\gamma) \qquad (a'_1)$$

lub

$$f'(x, \omega+\gamma, \omega-\gamma)+(x-\omega)^{1/\mu} f'_1(x, \omega+\gamma, \omega-\gamma) \qquad (b'_1)$$

Otrzymane każdym razem w ten sposób rozwinięcia są zbieżne w lemniskacie (c). Stąd mamy

Twierdzenie XV. Każdą funkcyą analityczną jednoznaczną lub wieloznaczną możemy w otoczeniu dowolnego jej punktu ω szczególnego lub nieszczególnego przedstawić przez rozwinięcia zbieżne w lemniskacie o środku ω i o rozpiętości dostatecznie małej.

PRZYCZYNEK DO RACHUNKÓW GRAFOCHEMICZNYCH.

NAPISAŁ

J. J. BOGUSKI.

E. Nickel w czasopiśmie Ostwalda i Van t'Hoffa [1], w „Deutsche Chemiker Zeitung“ [2] i w „Naturwissenschaftliche Wochenschrift“ [3] dał układ grafochemiczny związków tlenowych. Zasady układu Nickel'a uwidocznia fig. 1, na której każdy tlenek danego pierwiastku jest przedstawiony w postaci punktu odniesionego do dwóch osi współrzędnych, z których jedna przedstawia masy atomowe pierwiastków (p), a druga — liczby atomów tlenu (n), odpowiadające jednemu atomowi pierwiastku w uważanym tlenku. Rzecz prosta, iż ze względu na dwuwartościowość tlenu, n może przyjmować wartości, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$ i t. d., zmieniające się *per saltum* o $\frac{1}{2}$.

W takim układzie wszystkie związki tlenowe jednego i tego samego pierwiastku mieszczą się na jednej prostej, równoległej do osi n, wszystkie zaś tlenki jednorodnego składu rozmaitych pierwiastków mieszczą się na jednej prostej, równoległej do osi p.

Najgodniejszą wszakże uwagi jest ta okoliczność, że poprowadziwszy przez początek współrzędnych sieć linij prostych, odniesionych do tych samych współrzędnych i czyniących zadość równaniom:

---

[1] Tom XII, str. 663.

[2] Tom VIII, str. 25, 1893.

[3] Tom VI, str. 528, 1891.